Uniwersytet Mikołaja Kopernika

Maciej Karpicz

Algebry samoinjektywne ze skończonymi krótkimi cyklami modułów w rodzinie quasi-rur

Rozprawa doktorska napisana pod kierunkiem
prof. dr hab. Andrzeja Skowrońskiego
w Katedrze Algebry i Geometrii
Toruń 2012

PAMIĘCI
MARIANA KARPICZA
1926-2003

Spis treści

WSTĘP

Jednym z głównych celów współczesnej teorii reprezentacji algebr artinowskich nad przemiennym pierścieniem artinowskim jest opisanie struktury kategorii skończenie generowanych modułów. Ze wszystkich algebr, szczególną rolę odgrywają algebry samoinjektywne, których prominentne klasy tworzą algebry Frobeniusa oraz algebry symetryczne. Przypomnijmy, że algebra artinowska A jest samoinjektywna, kiedy klasa modułów projektywnych pokrywa się z klasą modułów injektywnych.

Ważnym kombinatorycznym i homologicznym niezmiennikiem algebry A jest jej kołczan Auslandera-Reiten Γ_A. Opisuje on strukturę kategorii ilorazowej $\operatorname{mod} A / \operatorname{rad}_A^{\infty}$, gdzie $\operatorname{mod} A$ jest kategorią skończenie generowanych modułów nad A, a $\operatorname{rad}_A^{\infty}$ nieskończonym radykałem Jacobsona kategorii $\operatorname{mod} A$. W szczególności Auslander pokazał w [6], że algebra A jest skończonego typu reprezentacyjnego wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{rad}_A^{\infty} = 0$. Badanie struktury i własności składowych kołczanu Auslandera-Reiten Γ_A algebry artinowskiej A odgrywa znaczącą rolę we współczesnej teorii reprezentacji algebr. Czasami możemy odtworzyć algebrę A oraz kategorię modułów $\operatorname{mod} A$ znając kształt oraz własności składowych $\mathscr{C}$ kołczanu Γ_A. W pracy [60] Skowroński wprowadził ważny typ składowych, a mianowicie uogólnioną standardową składową kołczanu Γ_A. Jest to składowa $\mathscr{C}$ w kołczanie Γ_A spełniająca warunek $\operatorname{rad}_A^{\infty}(X, Y) = 0$ dla dowolnych modułów X i Y w $\mathscr{C}$. Ponadto w pracy [60] pokazane zostało, że każda uogólniona standardowa składowa jest prawie okresowa, czyli prawie wszystkie τ_A-orbity w tej składowej są okresowe, a stąd zawiera ona tylko skończenie wiele modułów nierozkładalnych danej długości. W konsekwencji otrzymujemy, że dla algebry samoinjektywnej A każda uogólniona standardowa składowa jest albo quasi-rurą albo składową acykliczną ze skończoną ilością τ_A-orbit.

Nierozkładalny A-moduł M nazywamy kierującym jeśli nie leży na cyklu w $\operatorname{mod} A$. Przypomnijmy, że cyklem w $\operatorname{mod} A$ nazywamy drogę niezerowych nieizomorfizmów między nierozkładalnymi A-modułami $X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n$, w której $X_n = X_0$. Dodatkowo cykl nazywamy krótkim, o ile $n = 2$ oraz nieskończonym, gdy co najmniej jeden z homomorfizmów f_i należy do $\operatorname{rad}_A^{\infty}$. Moduły kierujące, najczęściej występujące w składowych łączących algebr odwróconych ([22]), odgrywają ważną rolę w teorii reprezentacji algebr ([52]). Jednakże kołczan Auslandera-Reiten zawiera jedynie skończenie wiele τ_A-orbit zawierających moduły kierujące ([45], [63], [70]). Nie mniej jednak dużo własności modułów kierujących mają moduły, które nie leżą na krótkich cyklach w kategorii modułów $\operatorname{mod} A$ ([20], [50], [49]). Przykładowo w [52] Ringel pokazał, że skończenie wymiarowa algebra nad ciałem algebraicznie domkniętym, która zawiera tylko moduły kierujące w $\operatorname{mod} A$ jest skończonego typu reprezentacyjnego. Następnie w pracy [18] Happel i Liu pokazali, że algebra artinowska, która nie zawiera krótkich cykli w kategorii modułów jest skończonego typu reprezentacyjnego, co stanowi istotne uogólnienie wyniku Ringela, gdyż jak wiemy istnieją przykłady składowych w kołczanie Auslandera-Reiten, które nie zawierają modułów kierujących, a jedynie moduły nie leżące na krótkich cyklach w $\operatorname{mod} A$ ([49]).

Przez $K_0(A)$ oznaczamy grupę Grothendiecka algebry A, a przez $[X]$ obraz modułu X z $\operatorname{mod} A$ w $K_0(A)$. Wówczas dla modułów X i Y w $\operatorname{mod} A$ mamy $[X] = [Y]$ wtedy i tylko wtedy, gdy X oraz Y mają takie same składniki kompozycyjne. W pracy [52] zostało udowodnione, że moduły kierujące są jednoznacznie wyznaczone, z dokładnością do izomorfizmu, przez swój obraz w grupie Grothendiecka $K_0(A)$. Wobec tego interesujące stało się poszukiwanie kryteriów na to aby dwa moduły nierozkładalne X oraz Y w $\operatorname{mod} A$, mające ten sam obraz w grupie Grothendiecka $K_0(A)$, były izomorficzne. W pracy [50] autorzy rozszerzyli wyniki Rigela pokazując, że ma to miejsce dla nierozkładalnego modułu M, który nie leży na krótkim cyklu w $\operatorname{mod} A$.

W pracy [68] zostało pokazane, że każda algebra Λ nad ciałem jest algebrą ilorazową algebry symetrycznej, której kołczan Auslandera-Reiten kategorii modułów ma pewną szczególną, nieskończoną rodzinę uogólnionych standardowych stabilnych rur. Wobec tego całkowicie naturalne jest badanie tych artinowskich algebr samoinjektywnych, których kołczan Auslandera-Reiten zawiera uogólnione standardowe składowe.

Skowroński i Yamagata w pracach [73] i [74] podali pełną charakteryzację algebr samoinjektywnych, które zawierają uogólnioną standardową składową acykliczną. Zatem do scharakteryzowania pozostały te algebry samoinjektywne, które zawierają uogólnione standardowe quasi-rury, choć w świetle przytoczonego twierdzenia Skowrońskiego, jest to zadanie bardzo trudne. Wobec tego wprowadzamy pewne, dość naturalne, warunki na rodzinę uogólnionych standardowych quasi-rur. Mianowicie będziemy zakładać, że rodzina ta ma wspólne składniki kompozycyjne, jest zamknięta na składniki kompozycyjne oraz składa się z modułów, które nie leżą na krótkich nieskończonych cyklach w kategorii modułów.

Kołczan składowych Σ_A algebry A został wprowadzony przez Skowrońskiego w [59]. Wierzchołkami kołczanu Σ_A są składowe kołczanu Auslandera-Reiten algebry A, a strzałka z składowej $\mathscr{C}$ do składowej $\mathscr{D}$ w Σ_A istnieje dokładnie wtedy, gdy $\operatorname{rad}_A^\infty(X, Y) \neq 0$ dla pewnych modułów X w $\mathscr{C}$ oraz Y w $\mathscr{D}$. W pracy [29] zostało pokazane, że kołczan składowych algebry samoinjektywnej nieskończonego typu reprezentacyjnego jest w pełni cykliczny. W szczególności artinowska algebra samoinjektywna A jest skończonego typu reprezentacyjnego wtedy i tylko wtedy, gdy kołczan składowych Σ_A nie posiada strzałek. Z drugiej strony jeśli kołczan składowych Σ_A algebry artinowskiej A jest acykliczny, to A jest algebrą generycznie wielomianowego wzrostu [67]. Przypomnijmy, że A-modułem generycznym jest moduł M nieskończonej długości nad A, który jest modułem skończonej długości nad algebrą $\mathrm{End}_A(M)$. W pracy [12] Crawley-Boevey wprowadził ważną definicję generycznej oswojoności algebry artinowskiej. Mianowicie, powiemy, że algebra artinowska A jest generycznie oswojona, gdy dla dowolnego $d \in \mathbb{N}$ modułów generycznych M długości d nad $\mathrm{End}_A(M)$ jest skończenie wiele. Również z [12] wiemy, że nad ciałem algebraicznie domkniętym definicja Crawley-Boevey'go pokrywa się z definicją oswojoności Drozda, tzn. algebra jest generycznie oswojona wtedy i tylko wtedy, gdy jest oswojona. Ponadto A nazywamy algebrą generycznie wielomianowego wzrostu, gdy modułów generycznych M długości d nad $\mathrm{End}_A(M)$ jest co najwyżej d^n dla pewnego ustalonego $n \geq 1$. Generycznie oswojone algebry dziedziczne ([13], [14]), algebry odwrócone ([31], [52]), algebry podwójnie odwrócone ([47]), uogólnione algebry podwójnie odwrócone ([48]), algebry quasi-odwrócone ([39], [65]), uogólnione algebry wielowęzłowe ([43]) mają acykliczny kołczan składowych, a stąd są algebrami generycznie wielomianowego wzrostu. Ponadto w pracy [58] udowodniono, że silnie jednospójna algebra A nad ciałem algebraicznie domkniętym jest (generycznie) wielomianowego wzrostu wtedy i tylko wtedy, gdy jej kołczan składowych Σ_A jest acykliczny. Klasyfikacja klas Morita równoważności skończenie wymiarowych algebr samoinejktywnych wielomianowego wzrostu nad ciałem algebraicznie domkniętym jest znana (patrz artykuł przeglądowy [69]). Mianowicie, każda bazowa, spójna, skończenie wymiarowa algebra samoinjektywna wielomianowego wzrostu nad ciałem algebraicznie domkniętym jest cokołową deformacją algebry orbit postaci $\widehat{B}/G$, gdzie $\widehat{B}$ jest algebrą powtórzeń algebry B będącej algebrą odwróconą typu Dynkina, algebrą odwróconą typu Euklidesa lub algebrą tubularną, a G jest nieskończoną grupą cykliczną automorfizmów algebry $\widehat{B}$. Natomiast problem opisu samoinjektywnych algebr artinowskich generycznie wielomianowego wzrostu jest problemem otwartym nawet w przypadku skończonego typu reprezentacyjnego (patrz [77, Section 2]).

Badanie położenia składowych na cyklach w kołczanie składowych Σ_A algebry A skutkowało odkryciem kryterium, kiedy składowa $\mathscr{C}$ jest jednoznacznie wyznaczona przez swój obraz w grupie Grothendiecka $K_0(A)$. Mianowicie, niech $\mathscr{C}$ i $\mathscr{D}$ będą składowymi kołczanu Γ_A. W pracy [27] zostało pokazane, że jeśli $\mathscr{C}$ nie jest stabilną rurą rangi 1 oraz nie leży na krótkim cyklu w Σ_A, to $\mathscr{C} = \mathscr{D}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $[\mathscr{C}] = [\mathscr{D}]$, gdzie $[\mathscr{C}] = \{[X] \in K_0(A) \mid X \in \mathscr{C}\}$.

Spośród wszystkich technik teorii reprezentacji algebr, największą rolę w dowodach uzyskanych w rozprawie wyników pełnią następujące narzędzia. Teoria zajmująca się ideałami deformującymi algebr samoinjektywnych i algebrami orbit algebr powtórzeń algebr quasi-odwróconych przez dopuszczalną, nieskończoną, cykliczną grupę automorfizmów generowaną przez ściśle dodatni automorfizm, która została rozwinięta przez Skowrońskiego i Yamagatę w pracach [71], [72], [73], [75], [76] i [77]. Ponadto znaczącą rolę odgrywać będą krótkie cykle w kategorii modułów wprowadzone przez Reiten, Skowrońskiego i Smalø w [50] oraz krótkie łańcuchy wprowadzone przez Auslandera i Reiten w [7].

Przy badaniu własności składowych kołczanu Auslandera-Reiten niezwykle użytecznym narzędziem są, wprowadzone przez Liu w [41], stopnie odwzorowań nieprzywiedlnych, które pozwalają badać zachowanie i kształt składowych używając konfiguracji odwzorowań nieprzywiedlnych pomiędzy modułami nierozkładalnymi w składowej.

Rozdział I poświęcimy wprowadzeniu niezbędnych pojęć oraz faktów związanych z teorią reprezentacji algebr. W szczególności przybliżymy, jak i wyprowadzimy nowe własności quasi-rur, z których będziemy korzystać w rozdziale IV oraz rozdziale V.

W rozdziale II wprowadzimy pojęcie algebry tubularnej oraz podamy podstawowe własności kołczanu Auslandera-Reiten tych algebr. Następnie rozszerzymy nieznacznie listę Bongartza-Happela-Vossiecka kołczanów Gabriela utajonych algebr typu Euklidesa o kołczany Gabriela algebr utajonych typu Euklidesa z nietrywialną waluacją strzałek o rzędzie grupy Grothendiecka nie większym niż 10. Opis tych kołczanów posłuży nam do pokazania, że algebry tubularne, różne od wyjątkowej, mają punkt stały, ze względu na automorfizm, w swoim kołczanie Gabriela, co będzie miało kluczowe znaczenie w rozdziale V.

Celem kolejnego rozdziału jest przybliżenie algebr samoinjektywnych oraz algebr orbit algebr powtórzeń. Prócz definicji podamy także niezbędne do dalszych rozważań własności tych algebr. Na zakończenie tego rozdziału podamy charakteryzację tych algebr samoinjektywnych, będących algebrami orbit algebr powtórzeń $\widehat{B}$, gdzie B jest prawie utajoną algebrą kanoniczną, których kołczan Auslandera-Reiten zawiera szczególną rodzinę uogólnionych standardowych quasi-rur. Otrzymane wyniki wykorzystamy do udowodnienia jednej z implikacji Twierdzenia IV.2.1 z rozdziału IV.

Rozdział IV rozpoczniemy od zebrania podstawowych własności uogólnionych standardowych składowych. Następnie, w zasadniczej części, sformułujemy i udowodnimy pierwszy z dwóch najważniejszych wyników rozprawy ([30]). Twierdzenie IV.2.1, bo o nim mowa, charakteryzuje w terminach algebr orbit, algebry samoinjektywne z kołczanem Auslandera-Reiten zawierającym rodzinę quasi-rur mającą wspólne składniki kompozycyjne, zamkniętą na składniki kompozycyjne oraz składającą się z modułów, które nie leżą na krótkich nieskończonych cyklach w kategorii modułów, tym samym rozszerzymy wyniki A. Skowrońskiego i K. Yamagaty z pracy [74] na kolejną klasę algebr.

W ostatnim z rozdziałów zbadamy algebry samoinjektywne, których kołczan składowych nie zawiera krótkich cykli. Twierdzenie V.2.1, będące drugim z najważniejszych wyników tej rozprawy, podaje charakteryzację tych algebr w terminach algebr orbit i w dużej mierze opiera się na wynikach wypracowanych w rozdziale II, rozdziale III i rozdziale IV.

W Dodatku A przedstawimy algorytm, napisany w środowisku Maple 15, który wykorzystaliśmy w rozdziale II do rozszerzenia listy Bongartza-Happela-Vossiecka.

Podstawowe informacje dotyczące teorii reprezentacji algebr można znaleźć w książkach [2], [8], [52], [55], [56] oraz [78].

Autor chciałby nade wszystko podziękować Panu prof. dr hab. Andrzejowi Skowrońskiemu za liczne dyskusje i konstruktywne uwagi dotyczące omawianych w rozprawie zagadnień. Ponadto autor pragnie podziękować Patrycji Jeszczenko-Karpicz za cierpliwość, wsparcie i wspaniały wspólny projekt.

Badania, których wyniki zostały przedstawione w niniejszej rozprawie, były częściowo finansowane ze źródeł zespołowego grantu badawczego MNiSW numer N N201 263 135 kierowanego przez prof. dr hab. Andrzeja Skowrońskiego oraz ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych autorowi niniejszej rozprawy na podstawie decyzji numer DEC-2011/01/N/ST1/02064.

ROZDZIAŁ I

DEFINICJE ORAZ WIADOMOŚCI PODSTAWOWE

1 Algebry artinowskie

Niech k będzie przemiennym pierścieniem artinowskim. Wówczas k*-algebrą* A nazywamy pierścień A wraz z homomorfizmem pierścieni $\phi\colon k \to A$, którego obraz zawiera się w centrum pierścienia A. Przypomnijmy, że *centrum* $Z(A)$ pierścienia A, to zbiór tych elementów a, dla których $ar = ra$ dla każdego $r \in A$. Tradycyjnie, będziemy pisali λa w miejsce $\phi(\lambda)a$, gdzie $\lambda \in k$, $a \in A$. Powiemy, że k-algebra A jest *algebrą artinowską* nad k, o ile A jest skończenie generowanym k-modułem. Wówczas $Z(A)$ jest przemiennym pierścieniem artinowskim, a A jest algebrą artinowską nad $Z(A)$. Od tej pory przez k-algebrę będziemy rozumieli algebrę artinowską nad przemiennym pierścieniem artinowskim k.

Wszystkie moduły, chyba, że będzie to zaznaczone, będą skończenie generowanymi, prawymi A-modułami. Symbolem $\operatorname{mod} A$ oznaczamy kategorię skończenie generowanych, prawych A-modułów, a przez $\operatorname{ind} A$ pełną podkategorię kategorii $\operatorname{mod} A$ składającą się z modułów nierozkładalnych. Dodatkowo $\operatorname{proj} A$ oznaczać będzie pełną podkategorię kategorii $\operatorname{mod} A$ złożoną ze wszystkich modułów projektywnych.

Dla k-algebry artinowskiej A mamy naturalną równoważność kategorii

$$\mathrm{D} := \operatorname{Hom}_k(-, E)\colon \operatorname{mod} \xrightarrow{\sim} \operatorname{mod} A^{op},$$

gdzie E jest minimalnym injektywnym kogeneratorem w $\operatorname{mod} k$. Funktor D, którego funktor odwrotny również oznaczamy przez D, nazywamy *dualnością*. Ponadto dowolna algebra A ma rozkład prawego A-modułu A_A na sumę prostą nierozkładalnych projektywnych A-modułów

$$A_A = \bigoplus_{i=1}^{n_A} \bigoplus_{j=1}^{m_A(i)} e_{ij} A,$$

gdzie e_{ij}, dla $i \in \{1, \dots, n_A\}$, $j \in \{1, \dots, m_A(i)\}$, są parami ortogonalnymi prymitywnymi idempotentami algebry A takimi, że

$$e_{ij} A \cong e_{ij'} A, \text{ dla } j, j' \in \{1, \dots, m_A(i)\},$$

oraz

$$e_{ij}A \ncong e_{i'j'}A \text{ dla } i, i' \in \{1, \dots, n_A\}, i \neq i', j \in \{1, \dots, m_A(i)\}, j' \in \{1, \dots, m_A(i')\}.$$

Powyższy rozkład modułu A_A indukuje kanoniczny rozkład jedynki 1_A algebry A

$$1_A = \sum_{i=1}^{n_A} \sum_{j=1}^{m_A(i)} e_{ij}.$$

Układ $P_i = e_{i1}A$, dla $i \in \{1, \dots, n_A\}$, jest pełnym układem parami nieizomorficznych, nierozkładalnych, projektywnych prawych A-modułów. Natomiast $I_i = D(Ae_{i1})$, dla $i \in \{1, \dots, n_A\}$, jest pełnym układem parami nieizomorficznych nierozkładalnych, injektywnych prawych A-modułów. Dodatkowo $S_i = \operatorname{top} P_i = P_i / \operatorname{rad}_A P_i \cong \operatorname{soc} I_i$, $i \in \{1, \dots, n_A\}$, jest pełnym układem parami nieizomorficznych, prostych prawych A-modułów. Przypomnijmy, że k-algebra A jest *spójna*, o ile jedynymi centralnymi idempotentami algebry A są 1_A oraz 0, zaś A jest *bazowa*, gdy $m_A(i) = 1$, dla $i = 1, \dots, n_A$.

Radykałem Jacobsona $\operatorname{rad} A$ algebry A jest ideał będący przecięciem wszystkich maksymalnych prawych (równoważnie lewych) ideałów w A. Podobnie, *radykałem Jacobsona* A-modułu M nazywamy podmoduł $\operatorname{rad}_A M$ modułu M, który jest przecięciem wszystkich maksymalnych podmodułów modułu M. Można pokazać, że $\operatorname{rad}_A M = M \operatorname{rad} A$. Będziemy pisać radykał w miejsce radykał Jacobsona. Dodatkowo *cokołem* $\operatorname{soc} M$ A-modułu M nazywamy sumę wszystkich prostych podmodułów modułu M. Podstawowe własności algebr i modułów, z których będziemy korzystać, można znaleźć w [78].

Radykałem Jacobsona rad_A *kategorii* $\operatorname{mod} A$ nazywamy ideał w $\operatorname{mod} A$ taki, że dla modułów X i Y w $\operatorname{mod} A$ mamy

$$\operatorname{rad}_A(X, Y) = \left\{ f \in \operatorname{Hom}_A(X, Y) \mid \forall_{g \in \operatorname{Hom}_A(Y,X)}\ 1_X - gf \text{ jest odwracalny} \right\}.$$

Dalej, dla $m \in \mathbb{N}$ definiujemy m-tą potęgę rad_A^m radykału rad_A tak, że dla modułów X i Y w $\operatorname{mod} A$ zbiór $\operatorname{rad}^m(X, Y)$ składa się ze skończonych sum homomorfizmów postaci $h_m h_{m-1} \dots h_2 h_1$, gdzie $h_i \in \operatorname{rad}_A(X_{i-1}, X_i)$ oraz $X_0 = X$, a $Y = X_m$. Ponadto

$$\operatorname{rad}_A^\infty = \bigcap_{m=1}^{\infty} \operatorname{rad}_A^m$$

nazywamy *nieskończonym radykałem* kategorii $\operatorname{mod} A$.

Auslander pokazał, dla algebry artinowskiej A, że $\operatorname{rad}_A^\infty = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy A jest skończonego typu reprezentacyjnego [6]. Przypomnijmy, że algebra A jest *skończonego typu reprezentacyjnego*, o ile istnieje skończenie wiele klas izomorfizmów modułów nierozkładalnych w $\operatorname{mod} A$. W przeciwnym wypadku mówimy, że algebra A jest *nieskończonego typu reprezentacyjnego*.

2 | Wartościowany kołczan Gabriela oraz kołczan Auslandera-Reiten

Wprowadzimy teraz, wywodzące się od Gabriela, pojęcie *wartościowanego kołczanu Gabriela algebry* (nazywanego też *zwyczajnym kołczanem algebry*). Zacznijmy od pojęcia grafu wartościowanego. *Grafem wartościowanym* nazywamy graf $G=(G_0,G_1)$, gdzie G_0 jest zbiorem wierzchołków, a G_1 zbiorem krawędzi, dla którego między dwoma wierzchołkami istnieje co najwyżej jedna krawędź mająca dodatkowo przyporządkowane wartościowanie, tj. parę dodatnich liczb całkowitych (a,b). Konwencją będzie pisanie $\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$ w miejsce krawędzi z trywialną waluacją $\bullet\overset{(1,1)}{-\!\!-\!\!-}\bullet$. *Kołczanem wartościowanym* nazywamy zorientowany graf wartościowany $\Gamma=(\Gamma_0,\Gamma_1)$, czyli wartościowany graf, dla którego każda krawędź ma ustaloną orientację. Stąd mamy również dwie funkcje $s,\ t\colon \Gamma_1\to\Gamma_0$ takie, że dla strzałki $\alpha\colon a\xrightarrow{(a,b)}b$ mamy $s(\alpha)=a$ oraz $t(\alpha)=b$.

Niech teraz A będzie k-algebrą artinowską, a $S_1,\dots,S_n$ pełnym układem parami nieizomorficznych A-modułów prostych. Wówczas *zwyczajnym kołczanem algebry* A nazywamy kołczan wartościowany $\Gamma=(\Gamma_0,\Gamma_1)$, w którym jako zbiór wierzchołków kładziemy zbiór $\{1,\dots,n\}$, natomiast istnieje strzałka w Γ_1 z i do j wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Ext}^1_A(S_i,S_j)\neq 0$, a jako wartościowanie tej strzałki kładziemy parę liczb

$$\Big(\dim_{\mathrm{End}_A(S_j)}\mathrm{Ext}^1_A(S_i,S_j),\dim_{\mathrm{End}_A(S_i)^{op}}\mathrm{Ext}^1_A(S_i,S_j)\Big).$$

Zauważmy, że z lematu Schura wynika, iż dla każdego $i\in\{1,\dots,n\}$ algebry $\mathrm{End}_A(S_i)$ są k-algebrami z dzieleniem.

Bardzo ważnym kombinatorycznym niezmiennikiem algebry, opisującym strukturę kategorii ilorazowej $\mathrm{mod}\,A/\mathrm{rad}^\infty_A$, jest jej kołczan Auslandera-Reiten, który teraz zdefiniujemy. Przypomnijmy, że *homomorfizmem nieprzywiedlnym* $f\colon X\to Y$ w $\mathrm{mod}\,A$ nazywamy homomorfizm, który spełnia następujące warunki:

(i) f nie jest sekcją ani retrakcją w $\mathrm{mod}\,A$;

(ii) jeśli $f=f_1f_2$ dla pewnych homomorfizmów $f_2\colon X\to Z$ i $f_1\colon Z\to Y$, to albo f_1 jest retrakcją albo f_2 jest sekcją.

Ponadto mówimy, że homomorfizm $g\colon L\to M$ w $\mathrm{mod}\,A$ jest *lewym minimalnym prawie rozszczepialnym homomorfizmem*, o ile:

(i) jeśli $hf=f$, gdzie $h\in\mathrm{End}_A(M)$, to h jest izomorfizmem (lewa minimalność);

(ii) g nie sekcją w $\mathrm{mod}\,A$;

(iii) dla każdego homomorfizmu $u: L\to U$ w $\mathrm{mod}\,A$, który nie jest sekcją istnieje homomorfizm $u'\colon M\to U$ taki, że $u=u'f$.

Podobnie definiujemy *prawy minimalny prawie rozszczepialny homomorfizm* w mod A.

Niech X oraz Y będą nierozkładalnymi A-modułami, między którymi istnieje homomorfizm nieprzywiedlny, powiedzmy $X \to Y$. Wówczas przez d_{XY} oznaczamy krotność występowania modułu Y w kodziedzinie M lewego minimalnego prawie rozszczepialnego homomorfizmu $X \to M$, czyli $M = Y^{d_{XY}} \oplus M'$ oraz Y nie jest składnikiem prostym modułu M'. Podobnie, przez d'_{XY} oznaczamy krotność występowania modułu X w dziedzinie N minimalnego prawego prawie rozszczepialnego homomorfizmu $N \to Y$, czyli $N = X^{d'_{XY}} \oplus N'$ oraz X nie jest składnikiem prostym modułu N'.

Kołczan Auslandera-Reiten Γ_A algebry A jest wartościowanym kołczanem z translacją zdefiniowanym w następujący sposób:

(i) Wierzchołkami kołczanu Γ_A są klasy izomorfizmów $\{X\}$ modułów nierozkładalnych z ind A.

(ii) Dla dwóch wierzchołków $\{X\}$ oraz $\{Y\}$ w Γ_A, istnieje strzałka $\{X\} \longrightarrow \{Y\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje nieprzywiedlny homomorfizm $X \to Y$ w ind A. Ponadto strzałce tej przypisujemy wartościowanie (d_{XY}, d'_{XY}).

(iii) Mamy translację $\tau_A = \mathrm{DTr}$, która wierzchołkowi $\{X\}$, gdzie X nie jest modułem projektywnym, przypisuje wierzchołek $\tau_A\{X\} = \{\tau_A X\}$.

(iv) Mamy translację $\tau_A^{-1} = \mathrm{TrD}$, która wierzchołkowi $\{X\}$, gdzie X nie jest modułem injektywnym, przypisuje wierzchołek $\tau_A^{-1}\{X\} = \{\tau_A^{-1} X\}$.

Wierzchołki w Γ_A, które odpowiadają klasom izomorfizmów nierozkładalnych modułów projektywnych, nazywamy projektywnymi, a te, które odpowiadają klasom izomorfizmów modułów injektywnych, nazywamy injektywnymi. Dodatkowo, przyjęło się utożsamiać wierzchołek $\{X\}$ w Γ_A z odpowiadającym mu modułem X, czyli będziemy pisać

$$X \xrightarrow{(d_{XY}, d'_{XY})} Y \quad \text{zamiast} \quad \{X\} \xrightarrow{(d_{XY}, d'_{XY})} \{Y\}\,.$$

Ponadto, podobnie jak wcześniej, będziemy pomijać trywialne wartościowanie.

Dla algebry artinowskiej prawdziwy jest następujący lemat, który opisuje wartościowanie strzałek dla sąsiadujących wierzchołków (patrz [78]).

Stwierdzenie 2.1. *Niech* $X \xrightarrow{(d_{XY}, d'_{XY})} Y$ *będzie strzałką w* Γ_A. *Wówczas prawdziwe są następujące implikacje.*

(i) Jeśli Y *nie jest wierzchołkiem projektywnym w* Γ_A, *to* Γ_A *zawiera strzałkę*

$$\tau_A Y \xrightarrow{(d_{\tau_A YX}, d'_{\tau_A YX})} X$$

oraz $d_{\tau_A YX} = d'_{XY}$ *i* $d'_{\tau_A YX} = d_{XY}$.

(ii) Jeśli X *nie jest wierzchołkiem injektywnym w* Γ_A*, to* Γ_A *zawiera strzałkę*

$$Y \xrightarrow{\left(d_{Y\tau_A^{-1}X},\, d'_{Y\tau_A^{-1}X}\right)} \tau_A^{-1}X$$

oraz $d_{Y\tau_A^{-1}X} = d'_{XY}$ *i* $d'_{Y\tau_A^{-1}X} = d_{XY}$.

Przypomnijmy, że *operator transpozycji* Tr: $\operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} A$ definiujemy dla modułu X w $\operatorname{mod} A$ następująco: $\operatorname{Tr}(X) = \operatorname{Coker}(\operatorname{Hom}_A(f, A))$, gdzie $P_1 \xrightarrow{f} P_0 \to X$ jest minimalnym nakryciem projektywnym modułu X w $\operatorname{mod} A$. W ogólności operator transpozycji nie jest funktorem.

W całej pracy przez składową kołczanu Γ_A rozumiemy składową spójną. Ponadto τ_A-orbita modułu X w kołczanie Γ_A jest *stabilna*, o ile nie zawiera ani modułu projektywnego ani injektywnego. Wówczas dla składowej $\mathscr{C}$ w Γ_A symbolem $\mathscr{C}^s$ oznaczać będziemy *stabilną część składowej* $\mathscr{C}$, tj. kołczan z translacją powstały poprzez usunięcie z $\mathscr{C}$ wszystkich τ_A-orbit modułów projektywnych i τ_A orbit modułów injektywnych oraz połączonych z nimi strzałek.

Przykładem składowych stabilnych są stabilne rury. Przypomnijmy, że jeśli $\mathbb{A}_\infty$ jest grafem zorientowanym

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \cdots ,$$

to $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ jest kołczanem z translacją postaci

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & (i-1,0) \arrow[dr] & & (i,0) \arrow[dr] & & (i{+}1,0) \arrow[dr] & & (i+2,0) \arrow[dr] & \\
\iddots \arrow[ur] & & (i-1,1) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (i,1) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (i{+}1,1) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \ddots \\
 & \iddots \arrow[ur] & & (i-1,2) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (i,2) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \ddots & \\
 & & \iddots \arrow[ur] & & \vdots & & \ddots & &
\end{tikzcd}$$

gdzie $\tau(i,j) = (i-1,j)$ dla $i \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{N}$. Dla $r \geq 1$ oznaczmy przez $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty/(\tau^r)$ kołczan z translacją otrzymany z $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ poprzez utożsamienie każdego wierzchołka (i,j) kołczanu $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ z wierzchołkiem $\tau^r(i,j)$, zaś każdą strzałkę $x \to y$ w $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ utożsamiamy ze strzałką $\tau^r x \to \tau^r y$. Kołczan ten nazywamy *stabilną rurą rangi* r. *Ustami stabilnej rury* Γ nazywamy τ-orbitę rury Γ tworzoną przez wszystkie wierzchołki mające dokładnie jednego poprzednika (równoważnie, następnika).

W pracy [60] Skowroński wprowadził ważne pojęcie jakim jest *uogólniona standardowa składowa* $\mathscr{C}$ kołczanu Γ_A. Przypomnijmy, że jest to składowa, dla której $\operatorname{rad}_A^\infty(X,Y)=0$ dla dowolnych modułów X i Y w $\mathscr{C}$. Ogólniej, powiemy, że rodzina składowych Γ w kołczanie Γ_A jest *uogólnioną standardową rodziną składowych*, o ile $\operatorname{rad}_A^\infty(X,Y)=0$ dla dowolnych modułów X i Y z rodziny Γ. Zauważmy, że wówczas dowolne składowe w rodzinie Γ są ortogonalne. Jako przykład uogólnionych standardowych składowych można podać składowe postprojektywne, preinjektwyne oraz składowe łączące algebr odwróconych. W kolejnych rozdziałach będziemy sukcesywnie wprowadzać interesujące własności tych składowych.

3 Składniki kompozycyjne modułów

Jednym z klasycznych problemów w teorii reprezentacji algebr jest udzielenie odpowiedzi na pytanie, kiedy moduły w kategorii $\operatorname{ind} A$ algebry A są jednoznacznie wyznaczone przez swoje składniki kompozycyjne (patrz [7]). Na początek, przypomnijmy, że *grupą Grothendiecka* algebry A nazywamy abelową grupę postaci $K_0(A)=\mathscr{F}/\mathscr{F}'$, gdzie $\mathscr{F}$ jest wolną grupą abelową o $\mathbb{Z}$-bazie składającej się z klas izomorfizmów $\{M\}$ modułów w $\operatorname{mod} A$, a $\mathscr{F}'$ jest podgrupą $\mathscr{F}$ generowaną przez elementy $\{M\}-\{L\}-\{N\}$ dla każdego krótkiego ciągu dokładnego

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

w $\operatorname{mod} A$. Przez $[M]$ będziemy oznaczać obraz klasy izomorfizmów $\{M\}$ modułu M przez kanoniczny epimorfizm grup $\mathscr{F} \to K_0(A)$. Można pokazać, że $\mathbb{Z}$-bazą grupy Grothendiecka $K_0(A)$ algebry A jest zbiór $[S_1]$, …, $[S_n]$, gdzie S_1, …, S_n jest pełnym układem parami nieizomorficznych modułów prostych w $\operatorname{mod} A$. Wówczas, dla każdego modułu M w $\operatorname{mod} A$ mamy przedstawienie $[M]=\sum_{i=1}^n c_i(M)[S_i]$, gdzie $c_i(M)$ jest krotnością wystąpienia modułu S_i jako składnika ciągu kompozycyjnego modułu M.

Niech A będzie algebrą, a $\mathscr{C}$ rodziną składowych w Γ_A. Wówczas mówimy, że $\mathscr{C}$ jest *wierna*, o ile dowolny prosty A-moduł występuje jako składnik kompozycyjny pewnego modułu z $\mathscr{C}$. Mówimy, że rodzina $\mathscr{C}$ jest *dokładna*, gdy jej annihilator $\operatorname{ann}_A(\mathscr{C})=\bigcap_{M\in\mathscr{C}}\operatorname{ann}_A(M)$ w A wynosi 0, gdzie $\operatorname{ann}_A(M)=\{a\in A \mid Ma=0\}$. Zauważmy, że jeśli rodzina $\mathscr{C}$ jest dokładna, to jest wierna. W ogólności annihilator $\operatorname{ann}_A(\mathscr{C})$ jest ideałem algebry A, a $\mathscr{C}$ jest dokładną rodziną składowych w kołczanie Auslandera-Reiten $\Gamma_{A/\operatorname{ann}_A(\mathscr{C})}$ algebry ilorazowej $A/\operatorname{ann}_A(\mathscr{C})$.

Za [64] powiemy, że rodzina $\mathscr{C}=(\mathscr{C}_i)_{i\in I}$ składowych w Γ_A ma *wspólne składniki kompozycyjne*, o ile dla każdej pary liczb i oraz j w I istnieją takie moduły $X_i\in\mathscr{C}_i$ oraz $X_j\in\mathscr{C}_j$, że $[X_i]=[X_j]$. Dodatkowo $\mathscr{C}$ jest *zamknięta na składniki kompozycyjne*, o ile dla każdych nierozkładalnych modułów M i N w $\operatorname{mod} A$ takich, że $[M]=[N]$, jeśli M należy do $\mathscr{C}$, to N należy do $\mathscr{C}$.

Drogą w mod A nazywamy ciąg

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \ ,$$

homomorfizmów między nierozkładalnymi A-modułami, w którym $f_i \in \mathrm{rad}_A(M_i, M_{i+1})$, dla $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Jeśli $M_1 = M_n$, to powyższą drogę nazywamy *cyklem* w mod A. Cykl, w którym $n = 2$ nazywamy *krótkim*. Dodatkowo powiemy, że krótki cykl jest *nieskończony*, o ile przynajmniej jeden z homomorfizmów f_1 lub f_2 należy do rad_A^∞. Ponadto przez *krótki łańcuch* w mod A rozumie się (za [7]) ciąg niezerowych homomorfizmów $M \to N \to \tau_A M$ między modułami nierozkładalnymi. Wówczas moduł N nazywamy *środkiem* krótkiego łańcucha.

Przykładem modułów, które są jednoznacznie wyznaczone przez swoje składniki kompozycyjne są moduły kierujące [52], tzn. moduły nierozkładalne, które nie leżą na cyklu w mod A. Ogólniej, w pracy [50] pokazano, że każdy nierozkładalny modułu w mod A, który nie leży na krótkim cyklu jest jednoznacznie wyznaczony (z dokładnością do izomorfizmu) przez swoje składniki kompozycyjne.

Dla dowolnego k-modułu V przez $|V|$ rozumiemy długość nad k-modułu V. Na zakończenie przytoczymy następujący wynik z [62, Proposition 4.1] (patrz również [7]).

Stwierdzenie 3.1. *Niech M, N i X będą nierozkładalnymi modułami i załóżmy, że* $[M] = [N]$. *Wówczas*

(i) $|\mathrm{Hom}_A(X, M)| - |\mathrm{Hom}_A(M, \tau_A X)| = |\mathrm{Hom}_A(X, N)| - |\mathrm{Hom}_A(N, \tau_A X)|$,

(ii) $|\mathrm{Hom}_A(M, X)| - |\mathrm{Hom}_A(\tau_A^{-1} X, M)| = |\mathrm{Hom}_A(N, X)| - |\mathrm{Hom}_A(\tau_A^{-1} XN, N)|$.

4 Algebry dziedziczne i odwrócone

Mówimy, że k-algebra artinowska H jest *algebrą dziedziczną*, o ile dowolny prawy (równoważnie lewy) ideał w H jest H-modułem projektywnym. Równoważnie, k-algebra H jest dziedziczna, o ile każdy podmoduł modułu projektywnego w mod H jest projektywny.

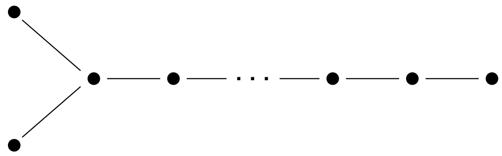
Wartościowany kołczan Gabriela Q_H algebry dziedzicznej H jest acykliczny, a jej centrum, o ile H jest spójna, jest ciałem. Mamy trzy typy wartościowanych kołczanów Gabriela spójnych algebr dziedzicznych

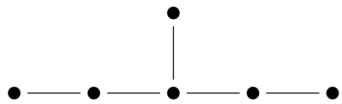
(i) *Kołczany Dynkina* o grafie Dynkina postaci:

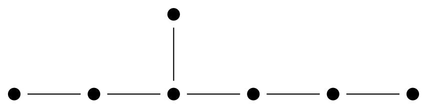
$\mathbb{A}_n : \bullet — \bullet — \bullet — \cdots — \bullet — \bullet — \bullet$ (n wierzchołków), $n \geq 1$

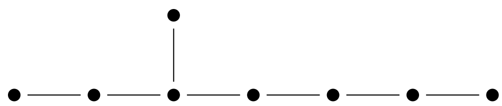
$\mathbb{B}_n : \bullet \overset{(1,2)}{—} \bullet — \bullet — \cdots — \bullet — \bullet — \bullet$ (n wierzchołków), $n \geq 2$

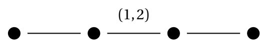
$\mathbb{C}_n$:  (n wierzchołków), $n \geq 2$

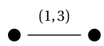
$\mathbb{D}_n$:  (n wierzchołków), $n \geq 4$

$\mathbb{E}_6$: 

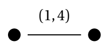
$\mathbb{E}_7$: 

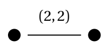
$\mathbb{E}_8$: 

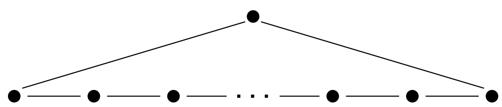
$\mathbb{F}_4$: 

$\mathbb{G}_2$: 

(ii) *Kołczany Euklidesa* o grafie Euklidesa postaci:

$\widetilde{\mathbb{A}}_{11}$: 

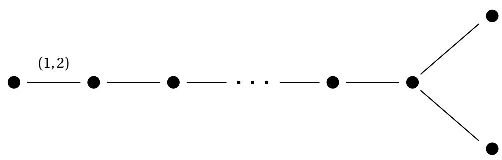
$\widetilde{\mathbb{A}}_{12}$: 

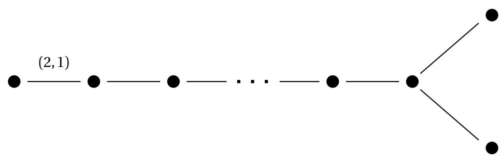
$\widetilde{\mathbb{A}}_n$:  ($n+1$ wierzchołków), $n \geq 2$

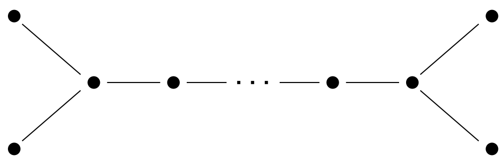
$\widetilde{\mathbb{B}}_n$:  ($n+1$ wierzchołków), $n \geq 2$

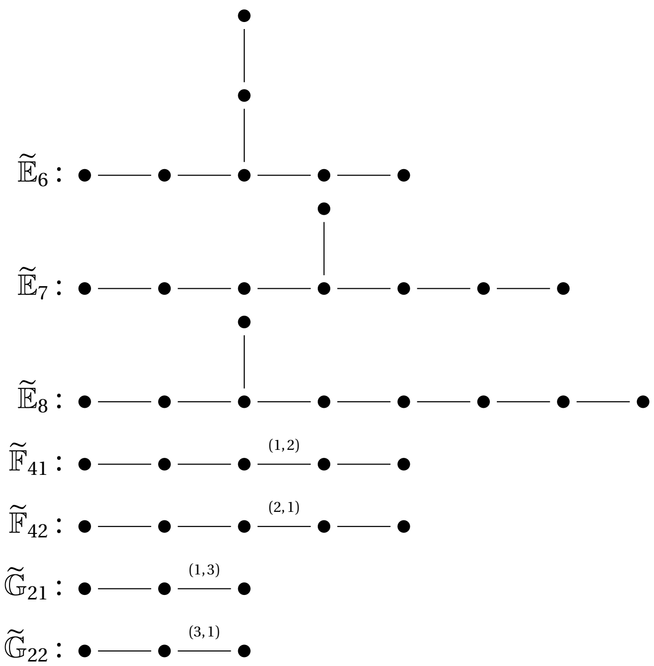
$\widetilde{\mathbb{C}}_n$:  ($n+1$ wierzchołków), $n \geq 2$

$\widetilde{\mathbb{BC}}_n$:  ($n+1$ wierzchołków), $n \geq 2$

$\widetilde{\mathbb{BD}}_n$:  ($n+1$ wierzchołków), $n \geq 3$

$\widetilde{\mathbb{CD}}_n$:  ($n+1$ wierzchołków), $n \geq 3$

$\widetilde{\mathbb{D}}_n$:  ($n+1$ wierzchołków), $n \geq 4$



(iii) *Kołczany dzikie* o pozostałych grafach spójnych.

Struktura kołczanu Γ_H algebry dziedzicznej H jest dobrze znana (patrz np. [14], [52], [55] i [56]). Kołczan ten ma następujący rozkład $\Gamma_H = \mathscr{P}^H \vee \mathscr{R}^H \vee \mathscr{Q}^H$, gdzie $\mathscr{P}^H$ jest składową, nazywaną *postprojektywną*, zawierającą wszystkie nierozkładalne moduły projektywne oraz każdy moduł w $\mathscr{P}^H$ jest postaci $\tau_H^{-i}P$ dla pewnego nierozkładalnego modułu projektywnego P oraz $i \geq 0$, $\mathscr{Q}^H$ jest składową, nazywaną *preinjektywną*, zawierająca wszystkie nierozkładalne moduły injektywne oraz każdy moduł w $\mathscr{Q}^H$ jest postaci $\tau_H^{i}I$ dla pewnego nierozkładalnego modułu injektywnego I oraz $i \geq 0$, a $\mathscr{R}^H$ jest rodziną składowych regularnych. Dokładniej,

- jeśli H jest typu Dynkina, to $\mathscr{R}^H$ jest pusta, a $\mathscr{P}^H = \mathscr{Q}^H$ jest składową zawierającą skończenie wiele modułów.

- jeśli H jest typu Euklidesa o wartościowanym kołczanie Q_H, to $\mathscr{P}^H \cong (-\mathbb{N})Q_H^{op}$, $\mathscr{Q}^H \cong \mathbb{N}Q_H^{op}$, a $\mathscr{R}^H$ jest nieskończoną rodziną parami ortogonalnych, uogólnionych standardowych dokładnych stabilnych rur.

- jeśli H jest typu dzikiego o wartościowanym kołczanie Q_H, to $\mathscr{P}^H \cong (-\mathbb{N})Q_H^{op}$, $\mathscr{Q}^H \cong \mathbb{N}Q_H^{op}$, a $\mathscr{R}^H$ jest nieskończoną rodziną regularnych składowych typu $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$.

Niech H będzie dowolną k-algebrą artinowską. Moduł T w $\operatorname{mod} H$ nazywamy *odwracający* [22], o ile $\operatorname{Ext}^1_H(T,T) = 0$, $\operatorname{pd}_H T \leq 1$ oraz T jest sumą prostą n parami nieizomorficznych, nierozkładalnych modułów, gdzie n jest rangą grupy Grothendiecka algebry H. Jeśli H jest algebrą dziedziczną, to wówczas, wykorzystując formuły Auslandera-Reiten, pierwsze dwa warunki można zastąpić następującym: $\mathrm{Hom}_H(T, \tau_H T) = 0$.

Algebrę B nazywamy *algebrą odwróconą*, o ile $B = \mathrm{End}_H(T)$ dla pewnego H-modułu odwracającego T nad algebrą dziedziczną H. Jeśli wszystkie składniki proste modułu odwracającego T należą do składowej postprojektywnej $\mathscr{P}^H$, to wówczas algebrę B nazywamy *algebrą utajoną*. Jeśli wszystkie składniki proste modułu odwracającego T należą do $\mathscr{P}^H \vee \mathscr{R}^H$, to algebrę B nazywamy *algebrą prawie utajoną*. Dodatkowo mówimy, że B jest algebrą odwróconą typu Dynkina (odpowiednio, Euklidesa, dzikiego) jeśli kołczan algebry dziedzicznej H jest typu Dynkina (odpowiednio, Euklidesa, dzikiego).

5 Jednopunktowe rozszerzenie i korozszerzenia algebr

W tym podrozdziale wprowadzimy pojęcie quasi-rurowego rozszerzenia algebr.

Niech A będzie k-algebrą, F k-algebrą z dzieleniem, ${}_F M_A$ takim F-A-bimodułem, że M_A jest w $\mathrm{mod}A$, a k działa centralnie na ${}_F M_A$. Wtedy *jednopunktowym rozszerzeniem* algebry A przez moduł M nazywamy algebrę macierzową postaci

$$A[M] = \begin{bmatrix} F & {}_F M_A \\ 0 & A \end{bmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} f & m \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid f \in F, a \in A, m \in M \right\}$$

ze zwykłym dodawaniem i mnożeniem. Podobnie *jednopunktowe korozszerzenie* algebry A przez ${}_F M_A$ definiujemy jako algebrę macierzową

$$[M]A = \begin{bmatrix} A & D({}_F M_A) \\ 0 & F \end{bmatrix}.$$

Opiszemy teraz kombinatoryczne narzędzie jakim są operacje dopuszczalne na kołczanach z translacją. Niech (Γ, τ) będzie kołczanem z translacją (z trywialną waluacją). Dla pewnego wierzchołka x w Γ, nazywanego *osią*, zdefiniujemy dwie *operacje dopuszczalne* ([4]), które zmieniają kołczan (Γ, τ) w nowy kołczan z translacją (Γ', τ'), który zależy od kształtu dróg w kołczanie Γ rozpoczynających się w x. Przypominijmy najpierw, że *drogą sekcyjną* w kołczanie Γ nazywamy taką drogę

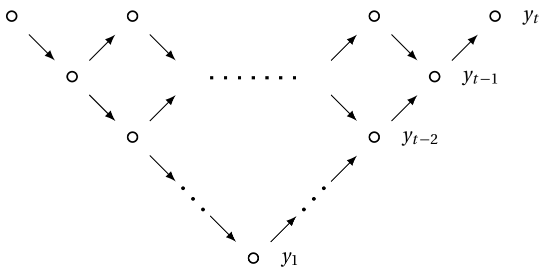
$$x_1 \longrightarrow x_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_{i-1} \longrightarrow x_i \longrightarrow x_{i+1} \longrightarrow \cdots ,$$

że $\tau x_{i+1} \neq x_{i-1}$ dla dowolnego $i > 2$.

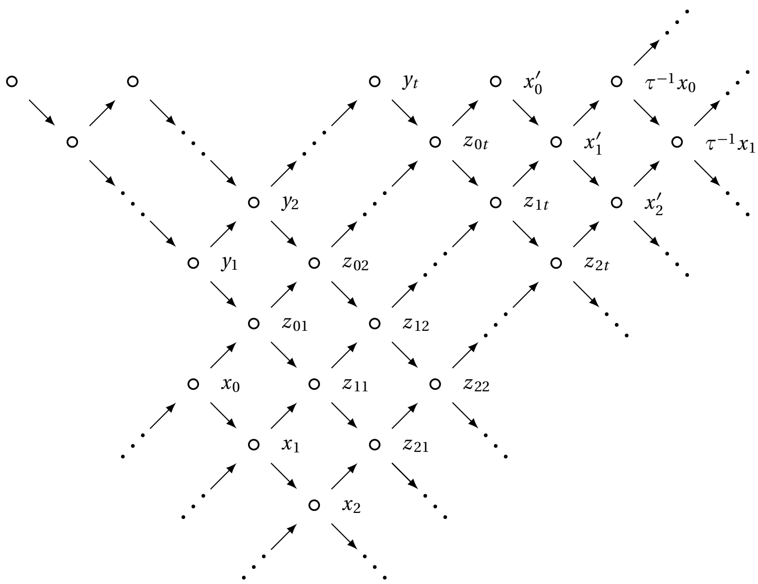
(ad 1) Przypuśćmy, że Γ zawiera nieskończoną drogę sekcyjną

$$x = x_0 \longrightarrow x_1 \longrightarrow x_2 \longrightarrow \cdots$$

zaczynającą się w x oraz załóżmy, iż każda droga sekcyjna w Γ, zaczynająca się w x, jest poddrogą powyższej drogi. Dla $t \geq 1$, niech Γ_t będzie kołczanem z translacją, który jest izomorficzny z kołczanem Auslandera-Reiten pełnej $t \times t$ górnotrójkątnej algebry macierzowej nad ciałem



Wówczas, z definicji, Γ' jest kołczanem z translacją, który zawiera wierzchołki kołczanów Γ i Γ_t oraz dodatkowe wierzchołki z_{ij} i x'_i (gdzie $i \geq 0$, $1 \leq j \leq t$), a strzałki w Γ' są jak na rysunku poniżej.

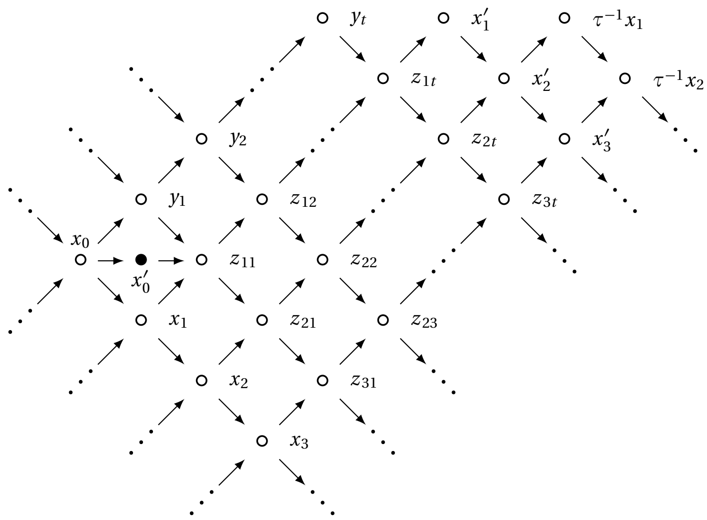


Translacja τ' kołczanu Γ' zdefiniowana jest następująco: $\tau' z_{ij} = z_{i-1,j-1}$, o ile $i \geq 1$, $j \geq 2$, $\tau' z_{i1} = x_{i-1}$, o ile $i \geq 1$, $\tau' z_{0j} = y_{j-1}$, o ile $j \geq 2$, z_{01} jest projektywny, $\tau' x'_0 = y_t, \tau' x'_i = z_{i-1,t}$, o ile $1 \geq 1$, $\tau'(\tau^{-1}x_i) = x'_i$ pod warunkiem, że x_i nie jest injektywny w Γ, w przeciwnym przypadku x'_i jest injektywny w Γ'. Dla pozostałych wierzchołków w Γ', τ' pokrywa się odpowiednio z translacją kołczanu Γ lub Γ_t. Jeśli $t = 0$, to nowy kołczan z translacją Γ' otrzymany jest z Γ poprzez włożenie tylko jednej drogi sekcyjnej składającej się z wierzchołków x'_i, $i \geq 0$.

$(ad\,2)$ Załóżmy, że wierzchołek x w Γ jest injektywny, a Γ zawiera takie dwie drogi sekcyjne zaczynające się w x, jedną nieskończoną, a drugą skończoną z co najmniej jedną strzałką składającą się z wierzchołków injektywnych,

$$y_t \longleftarrow \cdots \longleftarrow y_2 \longleftarrow y_1 \longleftarrow x = x_0 \longrightarrow x_1 \longrightarrow x_2 \longrightarrow \cdots$$

że każda droga sekcyjna zaczynająca się w x jest poddrogą jednej z tych dróg. Wtedy Γ', z definicji, jest kołczanem z translacją zawierającym wierzchołki kołczanu Γ oraz dodatkowe wierzchołki oznaczone przez x'_0, z_{ij}, x'_i (gdzie $i \geq 1$, $1 \leq j \leq t$), a strzałki w Γ' są jak na rysunku



Translacja τ' kołczanu Γ' zdefiniowana jest następująco: x'_0 jest projektywno-injektywny, $\tau' z_{ij} = z_{i-1,j-1}$, o ile $i \geq 2$, $j \geq 2$, $\tau' z_{i1} = x_{i-1}$, o ile $i \geq 1$, $\tau' z_{1j} = y_{j-1}$, o ile $j \geq 2$, $\tau' x'_i = z_{i-1,t}$, o ile $i \geq 2$, $\tau' x'_1 = y_t$, $\tau'(\tau^{-1}x_i) = x'_i$ pod warunkiem, że x_i nie jest injektywny w Γ, w przeciwnym przypadku x'_i jest injektywny w Γ'. Dla pozostałych strzałek w Γ', τ' pokrywa się z translacją τ kołczanu Γ.

Przez $(ad\,1^*)$ oraz $(ad\,2^*)$ oznaczamy operacje dopuszczalne, które są dualne do operacji dopuszczalnych, $(ad\,1)$ oraz $(ad\,2)$ odpowiednio.

Kołczan z translacją Γ nazywamy *quasi-rurą*, o ile Γ może być otrzymany z pewnej rury poprzez iteracyjne zastosowanie operacji dopuszczalnych $(ad\,1)$, $(ad\,2)$, $(ad\,1^*)$ lub $(ad\,2^*)$. *Rura* (w sensie [52]) jest quasi-rurą o własności, że każda operacja dopuszczalna w ciągu operacji dopuszczalnych, które ją definiują, jest typu $(ad\,1)$ lub $(ad\,1^*)$. Ponadto jeśli zastosujemy tylko operację dopuszczalną typu $(ad\,1)$ (odpowiednio, typu $(ad\,1^*)$), to quasi-rura Γ nazywana jest *rurą promieniową* (odpowiednio, *rurą kopromieniową*). Zauważmy, że quasi-rura bez wierzchołków injektywnych (odpowiednio, projektywnych) jest rurą promieniową (odpowiednio, rurą kopromieniową). Quasi-rura Γ, której wszystkie niestabilne wierzchołki, czyli wierzchołki których τ-orbity nie są stabilne, są projektywno-injektywne nazywana jest *gładką*.

Niech A będzie k-algebrą, a Γ uogólnioną standardową składową w kołczanie Γ_A. Dla każdego nierozkładalnego modułu X w Γ, który jest osią operacji dopuszczalnej typu $(ad\,1)$, $(ad\,2)$, $(ad\,1^*)$ lub $(ad\,2^*)$, zdefiniujemy odpowiadającą mu operację na A w taki sposób, że zmieniony kołczan z translacją Γ' będzie składową kołczanu Auslandera-Reiten $\Gamma_{A'}$ zmienionej algebry A' (patrz [4], [5]). Przypomnijmy, że A-moduł M nazywamy *cegłą*, o ile algebra endomorfizmów $\mathrm{End}_A(M)$ jest algebrą z dzieleniem. Ponieważ Γ jest uogólnioną standardową składową, to każda oś X operacji dopuszczalnej typu $(ad\,1)$, $(ad\,2)$, $(ad\,1^*)$ i $(ad\,2^*)$ jest cegłą (patrz [60, Corollary 5.3] i jego dowód). Połóżmy $F = \mathrm{End}_A(X)$. Oczywiście X jest F-A-bimodułem. Przypuśćmy, że X jest osią operacji dopuszczalnej typu $(ad\,1)$ oraz $t \geq 1$. Przez $D = D_t$ oznaczmy pełną $t \times t$ górnotrójkątną algebrę macierzową nad algebrą z dzieleniem F, a przez Y oznaczmy jedyny nierozkładalny projektywno-injektywny D-moduł, który rozważamy jako F-D-bimoduł. Wtedy $A' = (A \times D)[X \oplus Y]$ jest poszukiwaną zmienioną algebrą. Jeśli X jest osią operacji dopuszczalnej $(ad\,2)$, to zmodyfikowaną algebrę A' definiujemy następująco $A' = A[X]$. Podobnie, wykorzystując jedno punktowe korozszerzenia, definiujemy algebrę zmienioną A', gdy X jest osią operacji dopuszczalnej typu $(ad\,1^*)$ lub $(ad\,2^*)$. Wówczas prawdziwy jest następujący lemat (patrz [4, Section 2]).

Lemat 5.1. *Zmieniony kołczan z translacją Γ' kołczanu Γ jest składową w $\Gamma_{A'}$.*

Niech C będzie algebrą, $\mathscr{T}$ uogólnioną standardową rodziną stabilnych rur w Γ_C. Za [5] mówimy, że algebra B jest *quasi-rurowym rozszerzeniem* algebry C używającym modułów z rodziny $\mathscr{T}$, o ile istnieje taki skończony ciąg algebr $A_0 = C, A_1, \ldots, A_m = B$, że dla każdego $0 \leq j < m$ algebra A_{j+1} otrzymana jest z algebry A_j poprzez ciąg operacji dopuszczalnych typu $(ad\,1)$, $(ad\,2)$, $(ad\,1^*)$ lub $(ad\,2^*)$, dla których oś leży albo w stabilnej rurze z rodziny $\mathscr{T}$ albo w quasi-rurze kołczanu Γ_{A_j} otrzymanej ze stabilnej rury z rodziny $\mathscr{T}$ poprzez ciąg operacji dopuszczalnych, typu $(ad\,1)$, $(ad\,2)$, $(ad\,1^*)$ lub $(ad\,2^*)$, już wykonanych. Odnotujmy, że *rozszerzenie tubularne* (odpowiednio, *korozszerzenie tubularne*) algebry C (w sensie książki [52]), które używa modułów z rodziny $\mathscr{T}$ jest rozszerzeniem algebry C przez operacje dopuszczalne typu $(ad\,1)$ (odpowiednio, typu $(ad\,1^*)$).

Prawdziwe jest następujące stwierdzenie (patrz [4, Lemma 2.2], [4, Lemma 2.3] i [43, Theorem C]).

Stwierdzenie 5.2. *Niech B będzie quasi-rurowym powiększeniem algebry C, które używa modułów z uogólnionej standardowej rodziny stabilnych rur $\mathscr{T}$ kołczanu Γ_C, a $\mathscr{C}$ niech będzie rodziną składowych w kołczanie Γ_B otrzymaną z rodziny $\mathscr{T}$ poprzez operacje dopuszczalne prowadzące od algebry C do B. Wówczas $\mathscr{C}$ jest uogólnioną standardową rodziną quasi-rur kołczanu Γ_B.*

6 Quasi-rury i ich własności

W tym podrozdziale przypomnimy niektóre ze znanych własności uogólnionych standardowych quasi-rur, w szczególności uogólnionych standardowych stabilnych rur, jak i również wyprowadzimy kilka nowych własności, które wykorzystamy w dowodzie Twierdzenia IV.2.1.

Poniższa charakteryzacja uogólnionych standardowych rur w kołczanie Auslandera-Reiten została otrzymana w [60, Corollary 5.3] (zobacz także [62, Lemma 3.1]).

Stwierdzenie 6.1. *Niech A będzie algebrą, a Γ stabilną rurą w Γ_A. Następujące warunki są równoważne.*

(i) Γ *jest uogólniona standardowa.*

(ii) *Moduły na ustach rury* Γ *są parami ortogonalnymi cegłami.*

(iii) $\operatorname{rad}_A^\infty(X,X)=0$ *dla dowolnego modułu X w* Γ.

Odnotujmy, że algebry z dzieleniem wszystkich modułów leżących na ustach uogólnionej standardowej rury Γ są izomorficzne.

Wprowadzimy teraz pojęcie quasi-długości modułu w stabilnej rurze. Niech A będzie algebrą, a Γ stabilną rurą w Γ_A. Wówczas Γ ma dwa rodzaje strzałek: strzałki zmierzające do nieskończoności oraz strzałki zmierzające do ust rury Γ. Wobec tego, dla dowolnego modułu Z leżącego w rurze Γ, istnieje jedyna droga sekcyjna (składająca się ze strzałek zmierzających do nieskończoności) $X_1 \to X_2 \to \cdots \to X_m = Z$ w Γ, gdzie X_1 leży na ustach rury Γ, oraz istnieje jedyna droga sekcyjna (składająca się ze strzałek zmierzających do ust) $Z = Y_1 \to Y_2 \to \cdots \to Y_m$, gdzie Y_m leży na ustach rury Γ. Wówczas liczbę naturalną m nazywamy *quasi-długością* modułu Z w rurze Γ i oznaczamy $\operatorname{ql}(Z)$. Zauważmy, że jeśli Γ jest rurą rangi 1, a X jedynym modułem leżącym na ustach rury Γ, to dla dowolnego modułu Z, zachodzi $[Z]=\operatorname{ql}(Z)[X]$, a więc Γ składa się z modułów z parami różnymi obrazami w grupie Grothendiecka $K_0(A)$.

W nawiązaniu do dyskusji toczonej w podrozdziale 3 mamy następujący wynik (patrz [62, Theorem 4.3]).

Twierdzenie 6.2. *Niech A będzie algebrą, Γ uogólniona standardową stabilną rurą w Γ_A rangi $r>1$, a M i N nieizomorficznymi modułami w Γ. Wówczas $[M]=[N]$ wtedy i tylko wtedy, gdy* $\operatorname{ql}(M)=\operatorname{ql}(N)=cr$, *dla pewnego $c \geq 1$.*

Dodatkowo, ponieważ interesować nas będą moduły, które nie leżą na krótkich nieskończonych cyklach w kategorii modułów, to przypomnijmy następujące twierdzenia (patrz [62, Corollary 4.4] oraz [62, Corollary 4.6]).

Twierdzenie 6.3. *Niech A będzie algebrą, Γ stabilną rurą rangi $r > 1$ w Γ_A składającą się z modułów, które nie leżą na nieskończonych krótkich cyklach w* $\operatorname{mod} A$*, a M modułem w Γ. Wtedy M jest jednoznacznie wyznaczony (z dokładnością do izomorfizmu) przez $[M]$ wtedy i tylko wtedy, gdy r nie dzieli* $\operatorname{ql}(M)$.

Twierdzenie 6.4. *Niech A będzie algebrą, a Γ oraz Γ' dwiema różnymi stabilnymi rurami w Γ_A, które składają się z modułów nie leżących na krótkich nieskończonych cyklach w* $\operatorname{mod} A$*. Ponadto niech r będzie rangą Γ, a r' rangą Γ'. Załóżmy, że $[M] = [N]$ dla pewnych modułów M w Γ, a N w Γ'. Wówczas r dzieli* $\operatorname{ql}(M)$, *r' dzieli* $\operatorname{ql}(N)$, *a rury Γ i Γ' są ortogonalne.*

Mamy również następujący fakt dotyczący homomorfizmów do i ze stabilnych rur ([62, Lemma 3.9]).

Lemat 6.5. *Niech $\mathscr{T}$ będzie stabilną rurą rangi r w Γ_A, a N nierozkładalnym modułem, który nie należy do $\mathscr{T}$. Wówczas prawdziwe są następujące implikacje.*

(1) Jeśli $\operatorname{Hom}_A(X,N) \neq 0$ *dla pewnego modułu X w $\mathscr{T}$, to* $\operatorname{Hom}_A(M,N) \neq 0$ *dla dowolnego modułu M w $\mathscr{T}$ o własności* $\operatorname{ql}(M) \geq r$.

(2) Jeśli $\operatorname{Hom}_A(N,X) \neq 0$ *dla pewnego modułu X w $\mathscr{T}$, to* $\operatorname{Hom}_A(N,M) \neq 0$ *dla dowolnego modułu M w $\mathscr{T}$ o własności* $\operatorname{ql}(M) \geq r$.

Zauważmy, że ze Stwierdzenia 6.1 wynika, iż każda stabilna rura $\mathscr{T}$ w kołczanie Auslandera-Reiten Γ_A składająca się z modułów, które nie leżą na nieskończonych krótkich cyklach jest uogólniona standardowa. Teraz naszym celem będzie rozszerzenie tego wyniku na gładkie quasi-rury. W tym celu wykorzystamy pojęcie stopnia homomorfizmu nieprzywiedlnego i niektóre wyniki dotyczące tego pojęcia wypracowane przez Liu w [41]. Zaczniemy od przypomnienia klasycznego wyniku Igusy i Todorov z [26].

Stwierdzenie 6.6. *Niech A będzie algebrą, a*

$$X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \longrightarrow X_{n-1} \xrightarrow{f_n} X_n$$

drogą homomorfizmów nieprzywiedlnych pomiędzy nierozkładalnymi A modułami odpowiadających drodze sekcyjnej w Γ_A. Wówczas $f_n \dots f_2 f_1 \in \operatorname{rad}_A^n(X_0,X_n) \setminus \operatorname{rad}_A^{n+1}(X_0,X_n)$.

Wprowadzimy teraz pojęcie *stopnia homomorfizmu nieprzywiedlnego*. Dla algebry A oraz nieprzywiedlnego homomorfizmu $f\colon X \to Y$ w $\operatorname{mod} A$, pomiędzy nierozkładalnymi modułami X i Y, za [41] mówimy, że f jest *nieskończonego lewego stopnia*, o ile dla dowolnej liczby całkowitej $n \geq 1$ oraz dowolnego homomorfizmu $g\colon M \to X$ w $\operatorname{rad}_A^n(M,X) \setminus \operatorname{rad}_A^{n+1}(M,X)$ mamy $fg \in \operatorname{rad}_A^{n+1}(M,Y) \setminus \operatorname{rad}_A^{n+2}(M,Y)$. Dualnie, mówimy, że homomorfizm $f\colon X \to Y$ w $\operatorname{mod} A$ jest *nieskończonego prawego stopnia*, o ile dla dowolnej liczby całkowitej

$n \geq 1$ oraz dowolnego homomorfizmu $h\colon Y \to N$ w $\mathrm{rad}_A^n(Y,N) \setminus \mathrm{rad}_A^{n+1}(Y,N)$ mamy $hf \in \mathrm{rad}_A^{n+1}(X,N) \setminus \mathrm{rad}_A^{n+2}(X,N)$.

Poniższy wynik, z którego będziemy często korzystać, został udowodniony przez Liu w [41].

Stwierdzenie 6.7. *Niech A będzie algebrą. Wówczas następujące implikacje są prawdziwe.*

(1) Załóżmy, że Γ_A zawiera pełny podkołczan z translacją postaci

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & X_{i+1} \arrow[r] \arrow[d] & X_i \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & X_1 \arrow[r] \arrow[d] & X_0 = X \arrow[d] \\ \cdots \arrow[r] & Y_{i+1} \arrow[r] & Y_i \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Y_1 \arrow[r] & Y_0 = Y \end{tikzcd},$$

gdzie nieskończone drogi, górna i dolna, są sekcyjne. Wówczas każdy nieprzywiedlny homomorfizm $f: X \to Y$ w $\mathrm{mod}\, A$ jest nieskończonego lewego stopnia.

(2) Załóżmy, że Γ_A zawiera pełny podkołczan z translacją postaci

$$\begin{tikzcd} M = M_0 \arrow[r] \arrow[d] & M_1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & M_j \arrow[r] \arrow[d] & M_{j+1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ N = N_0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & N_j \arrow[r] & N_{j+1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd},$$

gdzie nieskończone drogi, górna i dolna, są sekcyjne. Wówczas każdy nieprzywiedlny homomorfizm $g: M \to N$ w $\mathrm{mod}\, A$ jest nieskończonego prawego stopnia.

Ponieważ dla algebry A oraz gładkiej quasi-rury $\mathscr{C}$ w Γ_A jej stabilna część $\mathscr{C}^s$ jest stabilną rurą, więc możemy zdefiniować *stabilną quasi-długość*, oznaczaną przez $\mathrm{sql}(X)$, modułu X w $\mathscr{C}$ jako quasi-długość $\mathrm{ql}(X)$ modułu X w $\mathscr{C}^s$. Dodatkowo, stabilna quasi-długość modułu projektywno-injektywnego w $\mathscr{C}$ równa jest, per definitionem, 0.

Lemat 6.8. *Niech A będzie algebrą, a $\mathscr{C}$ gładką quasi-rurą w Γ_A. Dodatkowo niech r będzie rangą stabilnej rury $\mathscr{C}^s$, a $m := \max\{\mathrm{sql}(\mathrm{rad}_A P) \mid P \in \mathscr{C} \cap \mathrm{proj}\, A\}$. Wówczas $\mathrm{rad}_A(X,Y) \neq 0$ dla wszystkich modułów X i Y w $\mathscr{C}$ o stabilnej quasi-długości większej od $m + r$.*

Dowód. Niech X oraz Y będą takimi modułami w $\mathscr{C}$, że $\mathrm{sql}(X)$ oraz $\mathrm{sql}(Y)$ są większe niż $m + r$. Wówczas w $\mathscr{C}$ istnieją drogi sekcyjne

$$\Theta: \qquad X = U_0 \longrightarrow U_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow U_{p-1} \longrightarrow U_p = Z,$$

złożona ze strzałek w $\mathscr{C}^s$ wskazujących usta, oraz

$$\Sigma: \qquad Z = V_0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow V_{q-1} \longrightarrow V_q = Y,$$

złożona ze strzałek w $\mathscr{C}^s$ wskazujących nieskończoność, gdzie $\mathrm{sql}(Z) > m$. Dodatkowo w $\mathscr{C}$ mamy następujący pełny podkołczan z translacją

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & W_{s+1}^{(j-1)} & \longrightarrow & W_s^{(j-1)} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & W_1^{(j-1)} & \longrightarrow & W_0^{(j-1)} = V_{j-1} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & W_{s+1}^{(j)} & \longrightarrow & W_s^{(j)} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & W_1^{(j)} & \longrightarrow & W_0^{(j)} = V_j \end{array},$$

gdzie $j \in \{1,\dots,q\}$, uformowany z równoległych, nieskończonych dróg sekcyjnych składających się z nierozkładalnych modułów o stabilnej quasi-długości $> m$. Rozważmy homomorfizmy nieprzywiedlne w $\operatorname{mod} A$

$$\varphi_i : U_{i-1} \to U_i \quad \text{oraz} \quad \psi_j : V_{j-1} \to V_j,$$

gdzie $i \in \{1,\dots,p\}$ oraz $j \in \{1,\dots,q\}$, odpowiadające strzałkom dróg sekcyjnych Θ oraz Σ, odpowiednio. Wtedy, ze Stwierdzenia 6.6, złożenie homomorfizmów $\varphi = \varphi_p \dots \varphi_1 : X \to Z$ należy do $\mathrm{rad}_A^p(X,Z)/\mathrm{rad}_A^{p+1}(X,Z)$. Ponadto, ze Stwierdzenia 6.7, wynika, że homomorfizmy nieprzywiedlne $\psi_1,\dots,\psi_q$ są nieskończonego lewego stopnia. Stąd oraz z definicji lewego nieskończonego stopnia homomorfizmu nieprzywiedlnego otrzymujemy, że $\psi\varphi \in \mathrm{rad}_A^{p+q}(X,Y)/\mathrm{rad}_A^{p+q+1}(X,Y)$, gdzie $\psi = \psi_q \dots \psi_1 \in \mathrm{Hom}_A(Z,Y)$, a więc $\mathrm{rad}_A(X,Y) \neq 0$. $\square$

Następujący lemat został udowodniony w [61, Lemma 2.1]

Lemat 6.9. *Niech A będzie algebrą, a X i Y takimi nierozkładalnymi modułami w* $\operatorname{mod} A$, *że* $\mathrm{rad}_A^\infty(X,Y) \neq 0$. *Wówczas następujące zdania są prawdziwe.*

(1) Istnieje nieskończona droga

$$X = X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} X_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{i-1} \xrightarrow{f_i} X_i \longrightarrow \cdots$$

homomorfizmów nieprzywiedlnych pomiędzy nierozkładalnymi modułami w $\operatorname{mod} A$ *oraz homomorfizmy* $g_i \in \mathrm{rad}_A^\infty(X_i, Y)$, $i \geq 1$ *takie, że* $g_i f_i \dots f_1 \neq 0$ *dla wszystkich* $i \geq 1$.

(2) Istnieje nieskończona droga

$$\cdots \longrightarrow Y_j \xrightarrow{h_j} Y_{j-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_2 \xrightarrow{h_2} Y_1 \xrightarrow{h_1} Y_0 = Y$$

homomorfizmów nieprzywiedlnych pomiędzy nierozkładalnymi modułami w $\operatorname{mod} A$ *oraz homomorfizmy* $u_j \in \operatorname{rad}_A^\infty(X, Y_j)$, $j \geq 1$ *takie, że* $h_1 \ldots h_j u_j \neq 0$ *dla wszystkich* $j \geq 1$.

Stwierdzenie 6.10. *Niech* A *będzie algebrą, a* $\mathscr{C}$ *gładką quasi-rurą w* Γ_A *składającą się z modułów, które nie leżą na nieskończonych krótkich cyklach w* $\operatorname{mod} A$. *Wówczas* $\mathscr{C}$ *jest uogólnioną standardową składową kołczanu* Γ_A.

Dowód. Ponieważ $\mathscr{C}$ jest gładką quasi-rurą kołczanu Γ_A, więc stabilna część $\mathscr{C}^s$ składowej $\mathscr{C}$ jest stabilną rurą rangi r. Połóżmy $m := \max\{sql(\operatorname{rad}_A P) \mid P \in \mathscr{C} \cap \operatorname{proj} A\}$. Rozważmy dodatnią liczbę całkowitą $n = m + 2r$, a przez Γ oznaczmy pełny podkołczan z translacją kołczanu $\mathscr{C}$ złożony ze wszystkich modułów o stabilnej quasi-długości $\geq n$. Ponadto niech M będzie sumą prostą wszystkich nierozkładalnych modułów z $\mathscr{C} \setminus \Gamma$. Wtedy M jest modułem w $\operatorname{mod} A$, a $\operatorname{End}_A(M)$ jest algebrą artinowską nad k.

Załóżmy, iż istnieją takie moduły X oraz Y w $\mathscr{C}$, że $\operatorname{rad}_A^\infty(X, Y) \neq 0$. Wówczas, z Lematu 6.9 (i) wnosimy istnienie nieskończonej drogi

$$X = X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} X_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{s-1} \xrightarrow{f_s} X_s \longrightarrow \cdots$$

homomorfizmów nieprzywiedlnych pomiędzy nierozkładalnymi modułami w $\operatorname{mod} A$ oraz takich homomorfizmów $g_s \in \operatorname{rad}_A^\infty(X_s, Y)$, $s \geq 1$, że $g_s f_s \ldots f_1 \neq 0$ dla wszystkich $s \geq 1$. Ponadto dla każdego $s \geq 1$ moduł X_s należy do $\mathscr{C}$. Ponieważ $\operatorname{rad} \operatorname{End}_A(M)$ jest nilpotentny, a $f_i \in \operatorname{rad}_A(X_{i-1}, X_i)$, dla wszystkich $i \geq 1$, to istnieje liczba całkowita $s_0 \geq 1$, dla której moduły X_s, gdzie $s \geq s_0$, należą do Γ. Ponieważ $\operatorname{rad}_A^\infty(X_{s_0}, Y) \neq 0$, więc z Lematu 6.9 (ii) wnosimy istnienie nieskończonej drogi

$$\cdots \longrightarrow Y_t \xrightarrow{h_t} Y_{t-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_2 \xrightarrow{h_2} Y_1 \xrightarrow{h_1} Y_0 = Y$$

homomorfizmów nieprzywiedlnych pomiędzy nierozkładalnymi modułami w $\operatorname{mod} A$ oraz takich homomorfizmów $u_t \in \operatorname{rad}_A^\infty(X_{s_0}, Y_t)$, $t \geq 1$, że $h_1 \ldots h_t u_t \neq 0$ dla wszystkich $t \geq 1$. Ponadto dla każdego $t \geq 1$ moduł Y_t należy do $\mathscr{C}$. Podobnie jak wcześniej wnosimy, że dla pewnej liczby całkowitej $t_0 \geq 1$ wszystkie moduły Y_t, gdzie $t \geq t_0$, należą do Γ. Z naszego wyboru Γ, moduły X_{s_0} i Y_{t_0} mają stabilną quasi-długość większą niż $m + r$. Wówczas, z Lematu 6.8, istnieje niezerowy homomorfizm $v \in \operatorname{rad}_A(Y_{t_0}, X_{t_0})$. Podsumowując, wykazaliśmy istnienie nieskończonego krótkiego cyklu w $\operatorname{mod} A$ postaci

$$X_{s_0} \xrightarrow{u} Y_{t_0} \xrightarrow{v} X_{s_0},$$

gdzie $u = u_{t_0}$, a X_{s_0} i Y_{t_0} należą do $\mathscr{C}$, sprzeczność. Zatem quasi-rura $\mathscr{C}$ jest uogólnioną standardową składową w Γ_A. $\square$

Lemat 6.11. *Niech A będzie algebrą, a $\mathscr{C}$ quasi-rurą w Γ_A. Załóżmy, że istnieją nierozkładalne moduły X, Y i M w* $\operatorname{mod} A$ *takie, że* $\operatorname{rad}_A^{\infty}(X,M) \neq 0$, $\operatorname{rad}_A^{\infty}(M,Y) \neq 0$ *oraz X i Y leżą w $\mathscr{C}$. Wówczas istnieje taki nieskończony krótki cykl $N \to M \to N$ w* $\operatorname{mod} A$*, że N należy do $\mathscr{C}$.*

Dowód. Ponieważ $\operatorname{rad}_A^{\infty}(X,M) \neq 0$, więc z Lematu 6.9 (i) wnosimy, iż istnieje nieskończona droga

$$\Theta: \qquad X = X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} X_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{s-1} \xrightarrow{f_s} X_s \longrightarrow \cdots$$

homomorfizmów nieprzywiedlnych pomiędzy nierozkładalnymi modułami w $\operatorname{mod} A$ oraz takie homomorfizmy $g_s \in \operatorname{rad}_A^{\infty}(X_s, M)$, $s \geq 1$, że $g_s f_s \dots f_1 \neq 0$ dla dowolnego $s \geq 1$. Przypuśćmy, że istnieje skończona rodzina $\{Z_i\}_{i \in I}$ modułów nierozkładalnych w $\mathscr{C}$, które są izomorficzne z nieskończoną ilością modułów z rodziny $\{X_s\}_{s \geq 0}$. Niech Z będzie sumą prostą wszystkich modułów z rodziny $\{Z_i\}_{i \in I}$. Wówczas Z jest modułem w $\operatorname{mod} A$, a stąd $\operatorname{End}_A(Z)$ jest algebrą artinowską nad k. Ponieważ dla wszystkich $s \geq 1$ mamy $f_s \in \operatorname{rad}_A(X_{s-1}, X_s)$, to dostajemy dowolnie duże, niezerowe złożenie homomorfizmów z $\operatorname{rad}\operatorname{End}_A(Z)$, a stąd, ponieważ $\operatorname{rad}\operatorname{End}_A(Z)$ jest nilpotentny, sprzeczność. Co więcej, ponieważ $\operatorname{rad}_A^{\infty}(M,Y) \neq 0$, to stosując Lemat 6.9 (ii), wnosimy, że istnieje nieskończona droga

$$\Sigma: \qquad \cdots \longrightarrow Y_t \xrightarrow{h_t} Y_{t-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_2 \xrightarrow{h_2} Y_1 \xrightarrow{h_1} Y_0 = Y$$

homomorfizmów nieprzywiedlnych pomiędzy nierozkładalnymi modułami w $\operatorname{mod} A$ oraz takie homomorfizmy $u_t \in \operatorname{rad}_A^{\infty}(M, Y_t)$, $t \geq 1$, że $h_1 \dots h_t u_t \neq 0$ dla dowolnego $t \geq 1$. Podobnie jak wyżej wnosimy, iż nie istnieje skończona rodzina $\{Z_i\}_{i \in I}$ modułów nierozkładalnych z $\mathscr{C}$, o tej własności, że moduły Z_i są izomorficzne z nieskończenie wieloma modułami z rodziny $\{Y_t\}_{t \geq 0}$. Wobec tego droga Θ przecina drogę Σ.

Niech N będzie modułem w części wspólnej dróg Θ oraz Σ. Wówczas istnieją takie $s \geq 0$ oraz $t \geq 0$, że $X_s = N = Y_t$, a więc otrzymujemy nieskończony krótki cykl

$$N \xrightarrow{g_s} M \xrightarrow{u_t} N.$$

□

Przypomnijmy, że przez *zewnętrzną krótką drogę* w $\operatorname{mod} A$, w stosunku do rodziny Γ składowych kołczanu Γ_A, nazywamy ciąg niezerowych nieizomorfizmów $X \to Y \to Z$ pomiędzy nierozkładalnymi modułami, gdzie X oraz Z należą do Γ, ale Y nie należy do rodziny Γ [46].

Lemat 6.12. *Niech A będzie algebrą, a $\mathscr{C}$ oraz $\mathscr{C}'$ dwiema różnymi rurami promieniowymi w Γ_A mającymi nieskończenie wiele modułów z wspólnymi składnikami kompozycyjnymi oraz składającymi się z modułów, które nie leżą na nieskończonych krótkich cyklach. Wówczas nie ma zewnętrznych krótkich dróg w* $\operatorname{mod} A$ *względem rodziny dwóch składowych $\mathscr{C}$ oraz $\mathscr{C}'$.*

Dowód. Załóżmy, że istnieje zewnętrzna krótka droga $M \to L \to M'$, gdzie M należy do $\mathscr{C}$, M' należy do $\mathscr{C}'$, a L nie należy ani do $\mathscr{C}$ ani do $\mathscr{C}'$. Najpierw pokażemy, że istnieje zewnętrzna krótka droga $M \to L \to N$, gdzie N jest modułem w $\mathscr{C}$. Z Lematu 6.9 (i) wynika, iż istnieje nieskończona droga

$$\Theta: \qquad \cdots \longrightarrow X_s \xrightarrow{h_s} X_{s-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_2 \xrightarrow{h_2} X_1 \xrightarrow{h_1} X_0 = M'$$

homomorfizmów nieprzywiedlnych pomiędzy nierozkładalnymi modułami z $\mathscr{C}'$ oraz takie homomorfizmy $u_s \in \operatorname{rad}_A^\infty(L, X_s)$, $s \geq 1$, że $h_1 \dots h_s u_s \neq 0$, dla $s \geq 1$. Załóżmy, że istnieje skończona rodzina $\{Z_i\}_{i\in I}$ modułów nierozkładalnych w $\mathscr{C}'$, które są izomorficzne z nieskończenie wieloma modułami z rodziny $\{X_s\}_{s\geq 1}$. Niech Z będzie sumą prostą wszystkich modułów rodziny $\{Z_i\}_{i\in I}$. Wówczas Z jest A-modułem, a stąd $\operatorname{End}_A(Z)$ jest algebrą artinowską nad k. Ponieważ dla $s \geq 1$ mamy $h_s \in \operatorname{rad}_A(X_s, X_{s-1})$, więc otrzymujemy dowolnie duże, niezerowe złożenie homomorfizmów z $\operatorname{rad}\operatorname{End}_A(Z)$, a stąd sprzeczność z nilpotentnością $\operatorname{rad}\operatorname{End}_A(Z)$. Wobec tego droga Θ przecina każdy promień w $\mathscr{C}'$ przynajmniej raz. Co więcej, z założenia wynika, że istnieje w $\mathscr{C}'$ promień, który zawiera nieskończenie wiele modułów N' takich, że $[N] = [N']$ dla modułu N w $\mathscr{C}$. Wykorzystując fakt, że homomorfizmy nieprzywiedlne leżące na promieniach rury promieniowej $\mathscr{C}'$ są monomorfizmami, stwierdzamy, że istnieje zewnętrzna krótka droga $M \to L \to M'$, gdzie M jest w $\mathscr{C}$, M' jest w $\mathscr{C}'$, a L ani w $\mathscr{C}$ ani w $\mathscr{C}'$ oraz istnieje moduł N w $\mathscr{C}$ taki, że $[M'] = [N]$.

Ponieważ $[M'] = [N]$, stosując Stwierdzenie 3.1, otrzymujemy równość

$$|\operatorname{Hom}_A(L,N)| - |\operatorname{Hom}_A(N, \tau_A L)| = |\operatorname{Hom}_A(L, M')| - |\operatorname{Hom}_A(M', \tau_A L)|.$$

Jeśli $\operatorname{Hom}_A(M', \tau_A L) \neq 0$, to z [50, Theorem 1.6], otrzymujemy, że M' jest środkiem krótkiego łańcucha, więc leży na krótkim cyklu $M' \to E \to M'$, gdzie E jest nierozkładalnym składnikiem prostym środka ciągu prawie rozszczepialnego o lewym końcu L. Zatem E nie należy do $\mathscr{C}'$. Wobec tego cykl jest nieskończony, co przeczy założeniu. Stąd $\operatorname{Hom}_A(M', \tau_A L) = 0$, więc $\operatorname{Hom}_A(L, N) \neq 0$. Otrzymujemy zatem zewnętrzna krótką drogę $M \to L \to N$, gdzie M i N należą do $\mathscr{C}$. Wówczas zarówno $\operatorname{rad}_A^\infty(M, L) \neq 0$ jak i $\operatorname{rad}_A^\infty(L, N) \neq 0$, a stąd, stosując Lemat 6.11, wnosimy, że istnieje nieskończony krótki cykl $X \to L \to X$ w $\operatorname{mod} A$, gdzie X należy do $\mathscr{C}$, sprzeczność z założeniem o składowej $\mathscr{C}$. □

Lemat 6.13. *Niech A będzie algebrą, $\Lambda = A/I$ algebrą ilorazową algebry A, a $\mathscr{T}$ stabilną rurą w Γ_Λ. Załóżmy, że moduły z rury $\mathscr{T}$ należą do stabilnej rury $\mathscr{C}$ kołczanu Γ_A. Wówczas $\mathscr{C} = \mathscr{T}$.*

Dowód. W celu wykazania równości $\mathscr{C} = \mathscr{T}$ wystarczy pokazać, że każdy moduł M należący do $\mathscr{C}$ jest Λ-modułem. Ponieważ $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{C}$ oraz stabilna rura $\mathscr{T}$ składa się z nieskończenie wielu Λ-modułów, wówczas dla każdego A-modułu M w $\mathscr{C}$ istnieją A-modułowy monomorfizm $f: M \to N$, gdzie N jest modułem leżącym na promieniu rury $\mathscr{C}$ zawierającym M, oraz A-modułowy epimorfizm $g: Z \to N$, gdzie Z jest Λ-modułem ze stabilnej rury $\mathscr{T}$ leżącym na kopromieniu rury $\mathscr{C}$ zawierającym moduł N. Zatem $NI = g(Z)I = g(ZI) = g(0) = 0$, a stąd $f(MI) = f(M)I = 0$, więc $MI = 0$, ponieważ f jest monomorfizmem. W konsekwencji, M jest Λ-modułem. □

Lemat 6.14. *Niech A będzie algebrą, Λ algebrą ilorazową algebry A, a $\mathscr{T}$ stabilną rurą w kołczanie Γ_Λ. Załóżmy, że moduły rury $\mathscr{T}$ należą do rodziny $\mathscr{C}$ gładkich quasi-rur kołczanu Γ_A złożonej z modułów, które nie leżą na nieskończonych krótkich cyklach. Wtedy wszystkie moduły rur $\mathscr{T}$ należą do jednej quasi-rury z rodziny $\mathscr{C}$.*

Dowód. Załóżmy, że istnieją dwie różne quasi-rury $\mathscr{C}_x$ i $\mathscr{C}_y$ z rodziny $\mathscr{C}$ oraz takie moduły $M, N \in \mathscr{T}$, że $M \in \mathscr{C}_x$ oraz $N \in \mathscr{C}_y$. Niech Θ będzie nieskończoną drogą sekcyjną w $\mathscr{T}$ zaczynającą się w M i zmierzającą do nieskończoności, a Σ nieskończoną droga sekcyjną w $\mathscr{T}$ z nieskończoności do N. Dodatkowo, niech Z będzie modułem z części wspólnej dróg Θ i Σ, $f\colon M \to Z$ złożeniem nieprzywiedlnych monomorfizmów odpowiadających strzałkom poddrogi drogi Θ z M do Z, a g złożeniem nieprzywiedlnych epimorfizmów odpowiadających strzałkom poddrogi drogi Σ z Z do N. Wówczas $f \in \operatorname{rad}_A^\infty(M,Z)$ lub $g \in \operatorname{rad}_A^\infty(Z,N)$, gdyż $N \in \mathscr{C}_y$ oraz $Z \in \mathscr{C}_z$, gdzie $z \neq x$ lub $z \neq y$. Bez straty ogólności możemy założyć, że Z nie należy do $\mathscr{C}_x$, a $f \in \operatorname{rad}_A^\infty(M,Z)$. Niech L będzie takim modułem w $\mathscr{T}$ leżącym na drodze Θ, że $\operatorname{ql}(Z) < \operatorname{ql}(L)$ oraz istnieje droga sekcyjna w $\mathscr{T}$ z L do M. Wtedy złożenie $h\colon M \to L$ monomorfizmów odpowiadających strzałkom drogi sekcyjnej z M do L w $\mathscr{T}$ należy do $\operatorname{rad}_A^\infty(M,L)$. Zatem otrzymujemy nieskończony krótki cykl

$$M \xrightarrow{h} L \xrightarrow{v} M,$$

gdzie v jest złożeniem nieprzywiedlnych epimorfizmów odpowiadających strzałkom drogi sekcyjnej z L do M, co przeczy założeniu powziętym na $\mathscr{C}$. □

Lemat 6.15. *Niech A będzie algebrą, Λ algebrą ilorazową algebry A, a $\mathscr{T}$ oraz $\mathscr{T}'$ dwiema ortogonalnymi stabilnymi rurami w kołczanie Γ_Λ. Załóżmy, że istnieją gładkie quasi-rury $\mathscr{C}$ oraz $\mathscr{C}'$ w Γ_A takie, że $\mathscr{C}$ zawiera wszystkie moduły z $\mathscr{T}$, a $\mathscr{C}'$ zawiera wszystkie moduły z $\mathscr{T}'$. Wówczas quasi-rury $\mathscr{C}$ oraz $\mathscr{C}'$ są różne.*

Dowód. Przypuśćmy, że $\mathscr{C} = \mathscr{C}'$. Niech r będzie rangą rury $\mathscr{C}^s$, a m maksymalną stabilną quasi-długością wszystkich radykałów modułów projektywno-injektywnych należących do $\mathscr{C}$. Ponieważ stabilne rury $\mathscr{T}$ i $\mathscr{T}'$ mają nieskończenie wiele modułów, to istnieją moduły $X \in \mathscr{T}$ oraz $X' \in \mathscr{T}'$ mające stabilną quasi-długość $> m + r$ jako moduły w $\mathscr{C}^s$. Wówczas z Lematu 6.8 dostajemy, że $\operatorname{Hom}_A(X,X') \neq 0$, co przeczy ortogonalności rur $\mathscr{T}$ oraz $\mathscr{T}'$ w $\operatorname{mod}\Lambda$. □

Lemat 6.16. *Niech A będzie algebrą, Λ algebrą ilorazową algebry A, a $\mathscr{T} = (\mathscr{T}_x)_{x\in\mathbb{X}}$ uogólnioną standardową rodziną stabilnych rur w kołczanie Γ_Λ składającą się z modułów ze wspólnymi* *składnikami kompozycyjnymi i nie leżącymi na nieskończonych krótkich cyklach. Załóżmy, że istnieje stabilna rura $\mathcal{T}_x$ w $\mathcal{T}$ taka, że jej moduły należą do rodziny gładkich quasi-rur $\mathcal{C}$ w kołczanie Γ_A, która jest zamknięta na składniki kompozycyjne oraz składa sie z modułów nie leżących na krótkich nieskończonych cyklach. Wówczas wszystkie moduły rodziny $\mathcal{T}$ należą do rodziny $\mathcal{C}$.*

Dowód. Dla każdego $y \in \mathbb{X}$ oznaczmy przez r_y rangę rury $\mathcal{T}_y$, a przez $E_y^1, \ldots, E_y^{r_y}$ moduły leżące na ustach rury $\mathcal{T}_y$. Dla modułu M w stabilnej rurze Γ rangi $r > 1$ w kołczanie Γ_A mamy

$$[M] = \begin{cases} k\left(\sum_{t=1}^{r}[E_t]\right), & \text{o ile } s = 0 \\ k\left(\sum_{t=1}^{r}[E_t]\right) + \sum_{p=1}^{s}[\tau_A^{-p}E], & \text{o ile } s \geq 1 \end{cases},$$

gdzie $E_1, \ldots, E_r$ są modułami leżącymi na ustach rury Γ, $\mathrm{ql}(M) = kr + s$ oraz $E = E_i$ dla takiego $i \in \{1, \ldots, r\}$, że istnieje droga sekcyjna w Γ o początku w E, a końcu w M. Z Lematu 6.15 wynika, że moduły w $\mathcal{T}_x$ należą do jednej quasi-rury $\mathcal{C}_x$ z rodziny $\mathcal{C}$. Pokażemy teraz, że dla każdego $y \in \mathbb{X}$ moduły ze stabilnej rury $\mathcal{T}_y$ należą do rodziny $\mathcal{C}$. Zaczniemy od pokazania, że w stabilnej rurze $\mathcal{T}_y$, dla $y \in \mathbb{X}$, istnieje taka rodzina $\{N_y^s\}_{s\geq 0}$ modułów, że dla każdego $s \geq 0$ istnieje moduł M_x^s w $\mathcal{T}_x$ o własności $[M_x^s] = [N_y^s]$. Ponieważ $\mathcal{T}$ jest rodziną stabilnych rur ze wspólnymi składnikami kompozycyjnymi, to istnieją takie moduły M_y^0 w $\mathcal{T}_x$ oraz N_y^0 w $\mathcal{T}_y$, że $[M_y^0] = [N_y^0]$.

Załóżmy najpierw, że $r_y = 1$. Wtedy $[N_y^0] = \mathrm{ql}(N_y^0)[E_y^1]$. Jeśli $r_x = 1$, to $[M_y^0] = \mathrm{ql}(M_y^0)[E_x^1]$. Wówczas wybieramy moduły N_y^s w $\mathcal{T}_y$, dla $s \geq 1$, o własności $\mathrm{ql}(N_y^s) = s\,\mathrm{ql}(N_y^0)$, gdyż

$$[N_y^s] = s\,\mathrm{ql}(N_y^0)[E_y^1] = s[N_y^0] = s[M_y^0] = s\,\mathrm{ql}(M_y^0)[E_x^1].$$

Jeśli $r_x > 1$, to z Twierdzenia 6.3 otrzymujemy, że $\mathrm{ql}(M_y^0) = cr_x$, dla pewnego $c \geq 1$. Zatem za moduły N_y^s w $\mathcal{T}_y$, dla $s \geq 1$, wybieramy moduły o własności $\mathrm{ql}(N_y^s) = s\,\mathrm{ql}(N_y^0)$, gdyż wówczas

$$[N_y^s] = s\,\mathrm{ql}(N_y^0)[E_y^1] = s[N_y^0] = s[M_y^0] = (sc)r_x\left(\sum_{i=1}^{r_x}[E_x^i]\right).$$

Załóżmy teraz, że $r_y > 1$. Wówczas z Twierdzenia 6.3 otrzymujemy, że $\mathrm{ql}(N_y^0) = cr_y$, dla pewnego $c \geq 1$. Jeśli $r_x = 1$, to $[M_y^0] = \mathrm{ql}(M_y^0)[E_x^1]$. Wtedy wybieramy moduły N_y^s w $\mathcal{T}_y$, dla $s \geq 1$, o własności $\mathrm{ql}(N_y^s) = s\,\mathrm{ql}(N_y^0) = scr_y$, gdyż wówczas z Twierdzenia 6.3 mamy

$$[N_y^s] = scr_y\left(\sum_{i=1}^{r_y}[E_y^i]\right) = s[N_y^0] = s[M_y^0] = s\,\mathrm{ql}(M_y^0)[E_x^1].$$

Jeśli $r_x > 0$, to z Twierdzenia 6.3 otrzymujemy, że $\mathrm{ql}(M_y^0) = c'r_x$, dla pewnego $c' \geq 1$. Zatem za moduły N_y^s w $\mathcal{T}_y$, dla $s \geq 1$, wybieramy moduły o własności $\mathrm{ql}(N_y^s) = s\,\mathrm{ql}(N_y^0) = scr_y$, gdyż wówczas, ponownie z Twierdzenia 6.3, mamy

$$[N_y^s] = scr_y\left(\sum_{i=1}^{r_y}[E_y^i]\right) = s[N_y^0] = s[M_y^0] = sc'r_x\left(\sum_{i=1}^{r_x}[E_y^i]\right).$$

Korzystając z założenia, że rodzina $\mathscr{C}$ jest zamknięta na składniki kompozycyjne wnosimy, iż wszystkie modułu N_y^s, dla $s \geq 1$, należące do stabilnej rury $\mathscr{T}_y$ należą do rodziny $\mathscr{C}$.

Niech teraz N będzie modułem w $\mathscr{T}_y$, gdzie $y \in \mathbb{X}$. Pokażemy, że N należy do rodziny $\mathscr{C}$. Przypuśćmy, że to nie jest prawdą. Możemy wybrać taki moduł N_y^s w $\mathscr{T}_y$, dla pewnego $s \geq 1$, że $\mathrm{ql}(N) < n = \mathrm{ql}(N_y^s)$. Wówczas istnieją drogi sekcyjne w $\mathscr{T}_y$

$$N_y'' = M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_m \longrightarrow N$$

oraz

$$N \longrightarrow N_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_0 = N_y' \quad ,$$

gdzie $\mathrm{ql}(N_y') = n = \mathrm{ql}(N_y'')$. Ponieważ $[N_y''] = [N_y^s] = [N_y']$ to wnosimy, że moduł N_y' jak i moduł N_y'' należą do rodziny $\mathscr{C}$. Zatem otrzymujemy niezerowy homomorfizm z $\mathrm{rad}_A^{\infty}(N_y'', N_y')$, co przeczy Stwierdzeniu 6.10. □

Na zakończenie tego paragrafu przytoczymy i udowodnimy poniższy, dobrze znany lemat, który wykorzystamy w późniejszych rozważaniach.

Lemat 6.17. *Niech A będzie algebrą, a $\mathscr{T}$ dokładną stabilną rurą w kołczanie Γ_A. Wówczas prawie wszystkie nierozkładalne moduły w $\mathscr{T}$ są dokładnymi A-modułami.*

Dowód. Najpierw zauważmy, że dla dowolnego promienia Σ w $\mathscr{T}$ oraz modułu M leżącego na Σ, mamy $\mathrm{ann}_A(M') \subseteq \mathrm{ann}_A(M)$, dla każdego modułu M' leżącego na Σ i mającego własność $\mathrm{ql}(M') > \mathrm{ql}(M)$, gdyż mamy monomorfizm $M \to M'$ będący złożeniem homomorfizmów nieprzywiedlnych odpowiadających strzałkom poddrogi drogi sekcyjnej Σ z M do M'. Ponieważ $\mathscr{T}$ jest dokładną stabilną rurą kołczanu Γ_A, to istnieją takie nierozkładalne moduły $M_1, \ldots, M_s$ w $\mathscr{T}$, że $\mathrm{ann}(\bigoplus_{i=1}^s M_i) = 0$. Istotnie, ponieważ A jest pierścieniem artinowskim, to możemy wybrać taki A-moduł $M = \bigoplus_{i=1}^s M_i \in \mathrm{add}\,\mathscr{T}$, że $\mathrm{ann}_A(M)$ jest najmniejszy. Wówczas $\mathrm{ann}_A(M \oplus N) = \mathrm{ann}_A(M)$ dla dowolnego N w $\mathscr{T}$. Z drugiej strony $\mathrm{ann}(M \oplus N) = \mathrm{ann}_A(M) \cap \mathrm{ann}_A(N)$, więc $\mathrm{ann}_A(M) \subseteq \mathrm{ann}_A(N)$. Stąd $\mathrm{ann}_A(M) = \mathrm{ann}_A(\mathscr{T})$.

Niech n będzie maksymalną quasi-długością modułów $M_1, \ldots, M_s$. Wtedy dla każdego modułu Z o quasi-długości większej niż $n + r$, gdzie r jest rangą rury $\mathscr{T}$, jedyna droga sekcyjna, złożona z epimorfizmów, w $\mathscr{T}$ zaczynająca się w Z i zmierzająca do ust przecina każdy promień zawierający co najmniej jeden moduł ze zbioru $\{M_1, \ldots, M_s\}$. Zauważmy, że dla epimorfizmu $f\colon X \to Y$ mamy $\mathrm{ann}_A(X) \subseteq \mathrm{ann}_A(Y)$, gdyż $Y \mathrm{ann}_A(X) = f(X)\mathrm{ann}_A(X) = f(X \mathrm{ann}_A(X)) = f(0) = 0$. Zatem $\mathrm{ann}_A(Z) \subseteq \bigcap_{i=1}^s \mathrm{ann}_A(M_i) = \mathrm{ann}_A(\bigoplus_{i=1}^s M_i) = 0$, a więc Z jest modułem dokładnym. □

7 Algebry kanoniczne i quasi-odwrócone

W teorii reprezentacji algebr zasadniczą rolę odgrywają algebry kanoniczne. W pracy [52] Ringel wprowadził pojęcie algebry kanonicznej dla ciała algebraicznie domkniętego. Definicja ta została następnie rozszerzona w innej pracy [53] Ringela do przypadku dowolnego ciała. Przytoczymy teraz definicję algebry kanonicznej, zaproponowaną przez Crawely-Boevey w [53, Appendix].

Niech F i G będą algebrami z dzieleniem, a ${}_FM_G$ F-G-bimodułem o własności

$$(\dim_F M)(\dim M_G) = 4.$$

Przez χ oznaczmy następującą liczbę

$$\chi = \sqrt{\frac{\dim_F M}{\dim M_G}}.$$

Zatem $\chi \in \{\frac{1}{2}, 1, 2\}$.

Przez M*-trójkę* rozumiemy taką trójkę $({}_FN, \varphi, N'_G)$, dla której ${}_FN$ jest niezerowym, skończenie generowanym, lewym F-modułem, N'_G niezerowym, skończenie generowanym, prawym G-modułem, φ jest F-G-homomorfizmem $\varphi\colon {}_FN \otimes_{\mathbb{Z}} N'_G \to {}_FM_G$, że

(i)
$$\frac{\dim {}_FN}{\dim N'_G} = \chi$$

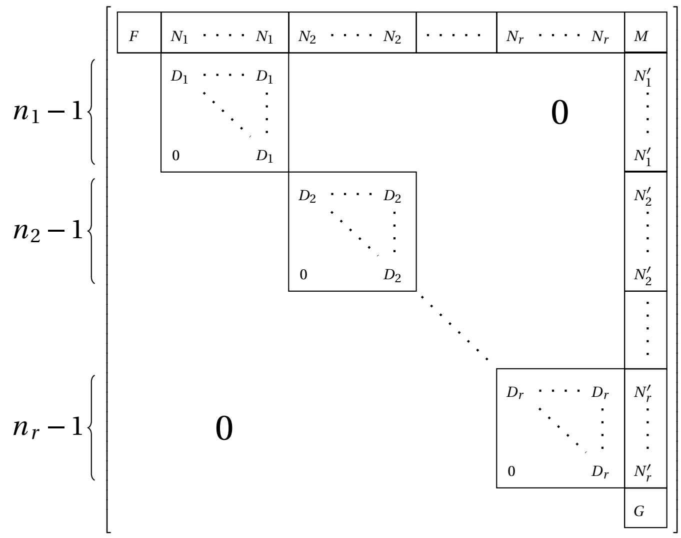
(ii) jeśli ${}_FX$ i X'_G są takimi niezerowymi podmodułami modułów, odpowiednio, ${}_FN$ i N_G, że $\varphi(X \otimes X') = 0$, to
$$\frac{\dim {}_FX}{\dim {}_FN} + \frac{\dim X'_G}{\dim N'_G} < 1.$$

Dwie M-trójki (N_1, φ_1, N'_1), (N_2, φ_2, N'_2) nazywamy *przystającymi*, o ile istnieją izomorfizmy $\Theta\colon {}_F(N_1) \to {}_F(N_2)$ i $\Theta'\colon (N'_1)_G \to (N'_2)_G$ czyniące poniższy diagram przemiennym

$$\begin{tikzcd}
N_1 \otimes N'_1 \arrow[dd, "\Theta\otimes\Theta'"'] \arrow[dr, "\varphi_1"] & \\
& M \\
N_2 \otimes N'_2 \arrow[ur, "\varphi_2"'] &
\end{tikzcd}.$$

Następnie, dla M-trójki $({}_R N, \varphi, N'_G)$ definiujemy jej *środek* D jako zbiór par (d, d'), gdzie $d \in \mathrm{End}_F(N)$, $d' \in \mathrm{End}_G(N')$, dla których $\varphi \circ (d \otimes 1) = \varphi \circ (1 \otimes d')$. Jest jasne, że D jest pierścieniem z dodawaniem i mnożeniem po współrzędnych, N jest F-D-bimodułem, N' jest D-G-bimodułem, a φ indukuje odwzorowanie $N \otimes_D N' \to M$, oznaczane również przez φ. Dodatkowo, jak pokazał Crawley-Boevey [53, Appendix, Lemma 1], D jest pierścieniem z dzieleniem.

Pierścieniem kanonicznym typu $(n_1, \ldots, n_r)$, przy czym $r \geq 0$ i $n_i \geq 2$, jest pierścień Λ izomorficzny z pierścieniem macierzy grónotrójkątnych postaci:



gdzie F i G są pierścieniami z dzieleniem, ${}_F M_G$ bimodułem o własności $(\dim {}_F M)(\dim M_G) = 4$, $(N_1, \varphi_1, N'_1), \ldots, (N_r, \varphi_r, N'_r)$ wzajemnie nieprzystającymi M-trókami o środkach $D_1, \ldots, D_r$, a mnożenie dane jest przez działanie pierścienia z dzieleniem na module lub przez odpowiednie homomorfizmy φ_i. Można pokazać [53, Appendix, Lemma 2], że centrum $Z(\Lambda)$ pierścienia kanonicznego Λ jest ciałem, więc Λ jest algebrą nad ciałem $k = Z(\Lambda)$. *Algebrą kanoniczną* typu $(n_1, \ldots, n_r)$, $n_i \geq 2$, $r \geq 0$, jest pierścień kanoniczny Λ typu $(n_1, \ldots, n_r)$, który jest skończenie wymiarowy nad ciałem $k = Z(\Lambda)$ (patrz [53, Appendix, Lemma 3]).

Kołczan wartościowany Q_Λ algebry kanonicznej Λ typu $(n_1, \ldots, n_r)$

$$\begin{tikzcd}
 & (2,1) \arrow[dl, "{(a_1,b_1)}"'] & (2,2) \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & (2,n_1-1) \arrow[l] & \\
0 & (2,1) \arrow[l, "{(a_2,b_2)}"'] & (2,2) \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & (2,n_2-1) \arrow[l] & \omega \arrow[ul, "{(c_1,d_1)}"'] \arrow[l, "{(c_2,d_2)}"'] \arrow[ddl, "{(c_r,d_r)}"] \\
 & & & \vdots & & \\
 & (2,1) \arrow[uul, "{(a_r,b_r)}"] & (2,2) \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & (2,n_r-1) \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

gdzie $a_i = \dim_F N_i$, $b_i = \dim(N_i)_{F_i}$, $c_i = \dim_{F_i} N'_i$ oraz $d_i = \dim(N'_i)_G$ dla $i \in \{1, \ldots, r\}$.

Interesującą cechą kołczanów Auslandera-Reiten algebr kanonicznych jest zawieranie seprującej rodziny składowych. Przypomnijmy, że dla algebry A, rodzina $\mathscr{C} = (\mathscr{C}_x)_{x\in\mathbb{X}}$ składowych w kołczanie Γ_A nazywana jest *separującą* w $\operatorname{mod} A$, o ile moduły nierozkładalne w $\operatorname{mod} A$ dzielą się na takie trzy rozłączne klasy $\mathscr{P}^A$, $\mathscr{C}^A = \mathscr{C}$ oraz $\mathscr{Q}^A$, że:

(S1) $\mathscr{C}^A$ jest wierną, uogólnioną standardową rodziną składowych;

(S2) $\operatorname{Hom}_A(\mathscr{Q}^A, \mathscr{P}^A) = 0$, $\operatorname{Hom}_A(\mathscr{Q}^A, \mathscr{C}^A) = 0$, $\operatorname{Hom}_A(\mathscr{C}^A, \mathscr{P}^A) = 0$;

(S3) dowolny homomorfizm z $\mathscr{P}^A$ do $\mathscr{Q}^A$ faktoryzuje się przez kategorię addytywną $\operatorname{add}\mathscr{C}^A$ rodziny $\mathscr{C}^A$.

Dodatkowo rodzina $\mathscr{C}$ *silnie separuje* $\mathscr{P}^A$ od $\mathscr{Q}^A$, o ile

(S4) dowolny homomorfizm z $\mathscr{P}^A$ do $\mathscr{Q}^A$ faktoryzuje się przez kategorię addytywną $\operatorname{add}\mathscr{C}_x$ dla dowolnego $x \in \mathbb{X}$.

Dla algebry kanonicznej Λ kołczan Γ_Λ ma rozkład $\Gamma_\Lambda = \mathscr{P}^\Lambda \vee \mathscr{T}^\Lambda \vee \mathscr{Q}^\Lambda$ (patrz [53]), gdzie:

- $\mathscr{P}^\Lambda$ jest rodziną składowych zawierających wszystkie moduły projektywne i jedyną składową postprojektywną;
- $\mathscr{Q}^\Lambda$ jest rodziną składowych zawierających wszystkie moduły injektywne i jedyną składową preinjektywną;
- $\mathscr{T}^\Lambda$ jest (kanoniczną) rodziną $(\mathscr{T}_x^\Lambda)_{x\in\mathbb{X}}$ stabilnych rur silnie separującą $\mathscr{P}^\Lambda$ od $\mathscr{Q}^\Lambda$.

Za [36] mówimy, że algebra C jest *utajoną algebrą kanoniczną typu* Λ, o ile C jest algebrą endomorfizmów $\operatorname{End}_\Lambda(T)$ modułu odwracającego T z kategorii $\operatorname{add}\mathscr{P}^\Lambda$. Wówczas obrazy, poprzez funktor $\operatorname{Hom}_\Lambda(T,-)$, wszystkich modułów z $\mathscr{T}^\Lambda$ tworzą silnie separującą rodzinę $\mathscr{T}^C$ stabilnych rur w Γ_C. W szczególności mamy rozkład $\Gamma_C = \mathscr{P}^C \vee \mathscr{T}^C \vee \mathscr{Q}^C$. Wiadomo, że $\mathscr{T}^C$ jest rodziną stabilnych rur $\mathscr{T}_x^C$, $x \in \mathbb{X}$, gdzie zbiór indeksów $\mathbb{X}$ jest bijektywny ze zbiorem stabilnych rur oswojonej dziedzicznej algebry $\left[\begin{smallmatrix} F & M \\ 0 & G \end{smallmatrix}\right]$, gdzie F i G są skończonymi, centralnymi rozszerzeniami ciała k będącymi pierścieniami z dzieleniem, a F-G-bimoduł ${}_FM_G$ spełnia warunek $(\dim_F M)(\dim M_G) = 4$ (patrz [11], [51], [53]). Ponadto, jeśli k jest ciałem algebraicznie domkniętym, to $\mathbb{X}$ jest w bijekcji z prostą rzutową $\mathbb{P}_1(k)$ [52], która jest wyposażona w strukturę ważonej prostej rzutowej [17]. W [36, Theorem 1.1] Lenzing i de la Peña pokazali następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7.1. *Algebra C jest utajoną algebrą kanoniczną wtedy i tylko wtedy, gdy Γ_C zawiera separującą rodzinę stabilnych rur.*

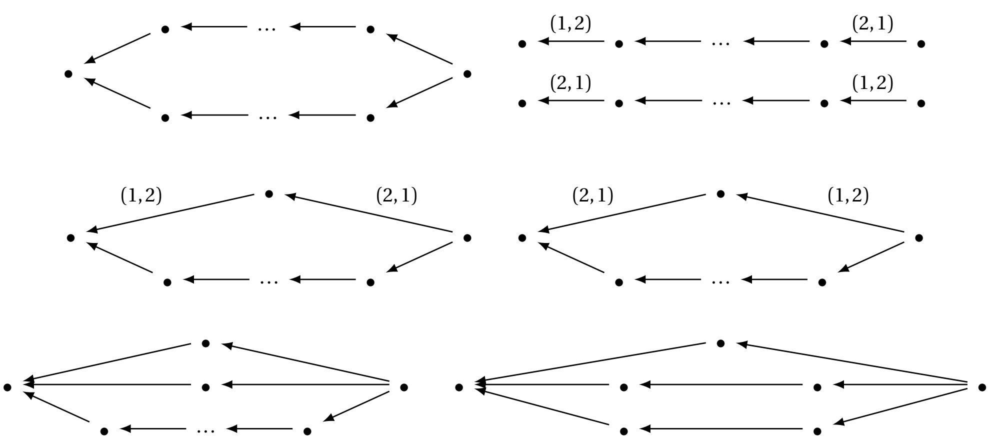
Wiadomo, że globalny wymiar utajonej algebry kanonicznej C jest nie większy niż 2 oraz $\operatorname{pd}_C X \leq 1$ lub $\in_C X \leq 1$ dla dowolnego nierozkładalnego modułu X w $\operatorname{mod} C$.

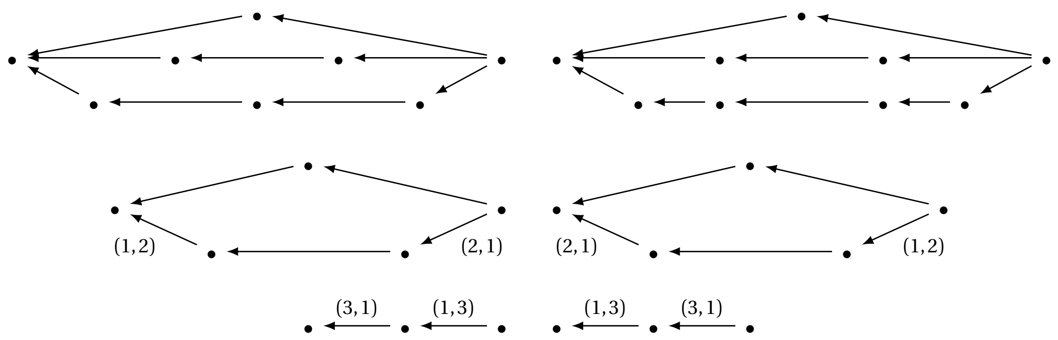
Przypomnijmy, że *formą Eulera* algebry A o skończonym globalnym wymiarze jest całkowitoliczbowa forma kwadratowa $q_A\colon K_0(A) \to \mathbb{Z}$ dana wzorem

$$q_A([M]) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \dim_k \operatorname{Ext}_A^r(M, M),$$

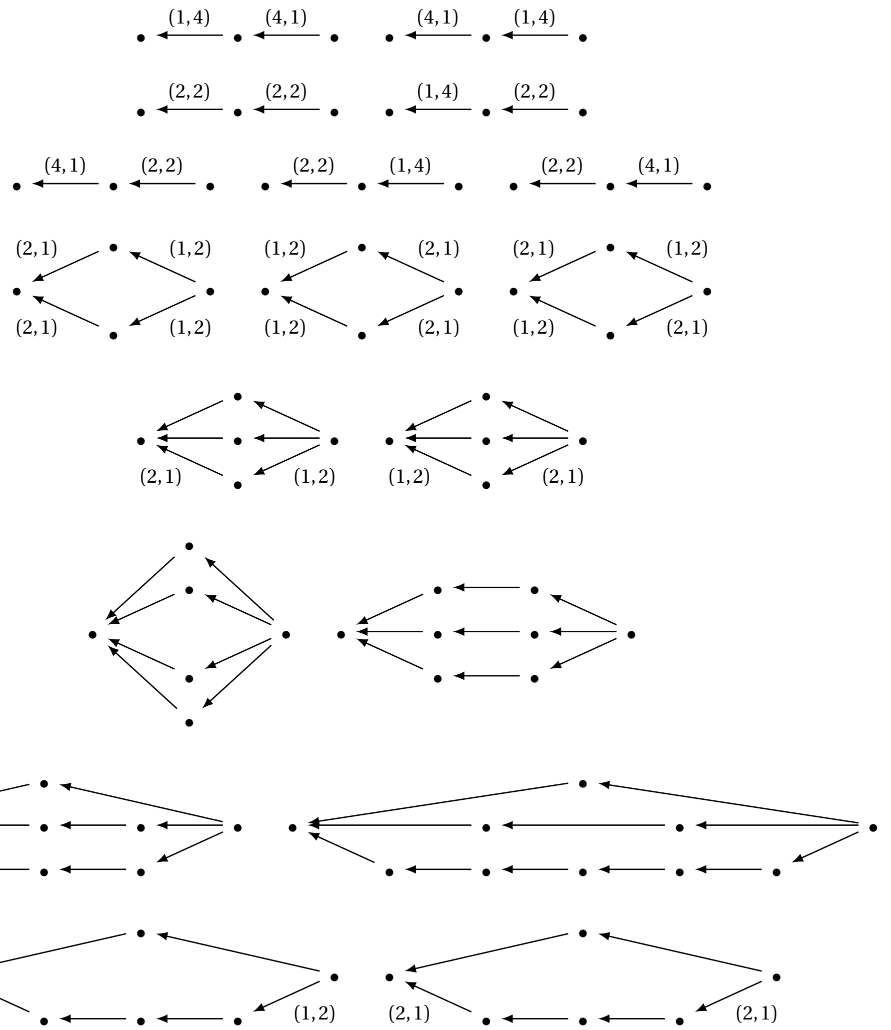
gdzie $[M]$ jest obrazem modułu M z $\operatorname{mod} A$ w grupie Grothendiecka $K_0(A)$. Okazuje się, że algebry kanoniczne możemy podzielić w sposób naturalny ze względu na zachowanie ich formy Eulera, która jest poprawnie określona dla tych algebr, gdyż ich globalny wymiar jest równy co najwyżej 2. Pierwszą klasę stanowią algebry kanonicze o dodatnio półokreślonej formie korangi 1, nazywane *algebrami kanonicznymi typu Euklidesa*, których wartościowany kołczan po usunięciu jedynego *źródła*, czyli wierzchołka, z którego strzałki tylko wychodzą, jest kołczanem Dynkina. Drugą klasę stanowią algebry kanoniczne o dodatnio półokreślonej formie korangi 2, nazywane *algebrami kanonicznymi tubularnego typu*, których wartościowany kołczan po usunięciu jedynego źródła jest kołczanem Euklidesa. Ostatnią klasę stanowią algebry kanoniczne o nieokreślonej formie Eulera, które nazywamy *algebrami kanonicznymi dzikiego typu*, których wartościowany kołczan po usunięciu jedynego źródła jest kołczanem dzikim (patrz np. [56, Chapter XVIII]). W rozdziale drugim wprowadzimy pojęcie algebry tubularnej, której definicja opiera się na algebrach kanonicznych korangi 2. Wobec tego przypomnijmy charakteryzację tych algebr oraz algebr kanonicznych korangi 1 (patrz [34] i [53]).

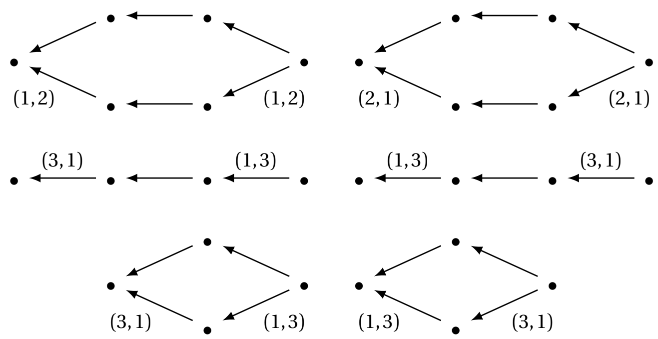
Twierdzenie 7.2. *Niech Λ będzie algebrą kanoniczną. Wtedy forma Eulera q_Λ algebry Λ jest dodatnio półokreślona korangi 1 wtedy i tylko wtedy, gdy wartościowany kołczan Q_Λ algebry Λ jest jednym z następujących:*





Twierdzenie 7.3. *Niech Λ będzie algebrą kanoniczną. Wtedy forma Eulera q_Λ algebry Λ jest dodatnio półokreślona korangi 2 wtedy i tylko wtedy, gdy wartościowany kołczan Q_Λ algebry Λ jest jednym z następujących:*





Mówimy, że algebra A jest *prawie utajoną algebrą kanoniczną*, o ile A jest algebrą endomorfizmów $\mathrm{End}_\Lambda(T)$ modułu odwracającego T z kategorii addytywnej $\mathrm{add}(\mathscr{P}^\Lambda \vee \mathscr{T}^\Lambda)$, dla kanonicznego rozkładu $\Gamma_\Lambda = \mathscr{P}^\Lambda \vee \mathscr{T}^\Lambda \vee \mathscr{Q}^\Lambda$, gdzie $\mathscr{T}^\Lambda$ jest kanoniczną rodziną stabilnych rur separującą $\mathscr{P}^\Lambda$ od $\mathscr{Q}^\Lambda$ nad kanoniczną algebrą Λ. Algebrę A nazywamy *quasi-odwróconą algebrą kanonicznego typu*, o ile $A = \mathrm{End}_{\mathscr{H}}(T)$, gdzie T jest obiektem odwracającym w abelowej kategorii dziedzicznej $\mathscr{H}$, której kategoria pochodna $D^b(\mathscr{H})$ jest równoważna (jako kategoria trójkątna) z kategorią pochodną $D^b(\mathrm{mod}\,\Lambda)$ kategorii modułów $\mathrm{mod}\,\Lambda$ algebry kanonicznej Λ. Lenzing i Skowroński pokazali w [39, Theorem 3.4], że A jest quasi-odwróconą algebrą kanonicznego typu wtedy i tylko wtedy, gdy Γ_A zawiera separującą rodzinę semiregularnych (promieniowych lub kopromieniowych) rur. Ponadto klasa prawie utajonych algebr kanonicznych pokrywa się z klasą tubularnych roszerzeń utajonych algebr kanonicznych, które korzystają z modułów z kanonicznej rodziny stabilnych rur oraz z klasą algebr mających separującą rodzinę rur promieniowych (patrz [38, Theorem 3.1] i [39, Theorem 3.4]).

w dalszej części będziemy korzystali z następującej charakteryzacji prawie utajonych algebr kanonicznych (patrz [62, Proposition 3.5] oraz [66, Theorem 1.6]).

Twierdzenie 7.4. *Algebra A jest prawie utajoną algebrą kanoniczną wtedy i tylko wtedy, gdy Γ_A zawiera wierną, uogólnioną standardową rodzinę rur promieniowych bez zewnętrznych krótkich dróg.*

Mamy także następującą charakteryzację utajonych algebr kanonicznych (patrz [46, Theorem 3.1], [64, Theorem C] i [66, Theorem 1.6]).

Twierdzenie 7.5. *Algebra A jest utajoną algebrą kanoniczną wtedy i tylko wtedy, gdy Γ_A zawiera wierną rodzinę parami ortogonalnych stabilnych rur bez zewnętrznych krótkich dróg.*

Będziemy wykorzystywać również następującą konsekwencję powyższego twierdzenia (patrz [66, Corollary 1.7]).

Wniosek 7.6. *Niech A będzie algebrą, a $\mathscr{T}$ wierną stabilną rurą w Γ_A bez zewnętrznych krótkich cykli. Wówczas $\mathscr{T}$ jest dokładną, uogólnioną standardową stabilną rurą, a A jest utajoną algebrą kanoniczną.*

Prawdziwe jest również poniższe twierdzenie (patrz [5, Theorem 3.5] oraz [43, Theorem C]).

Twierdzenie 7.7. *Niech C będzie utajoną algebrą kanoniczną, a $\mathscr{T}$ separującą rodziną stabilnych rur w kołczanie Γ_C. Przez B oznaczmy quasi-rurowe powiększenie algebry C, które używa modułów z $\mathscr{T}$, a przez $\mathscr{C}$ stowarzyszoną, uogólnioną standardową rodziną quasi-rur w Γ_B. Wtedy następujące zdania są prawdziwe:*

(i) Istnieje jedyne, maksymalne tubularne korozszerzenie B_l algebry C wewnątrz B oraz uogólniona standardowa rodzina $\mathscr{C}^l$ rur kopromieniowych w Γ_{B_l} takie, że B otrzymana jest z B_l (odpowiednio, $\mathscr{C}$ otrzymana jest z $\mathscr{C}^l$) poprzez ciąg operacji dopuszczalnych typu $(ad\,1)$ oraz $(ad\,2)$ używających modułów z $\mathscr{C}^l$.

(ii) Istnieje jedyne, maksymale tubularne rozszerzenie B_r algebry C wewnątrz B oraz uogólniona standardowa rodzina $\mathscr{C}^r$ rur promieniowych w Γ_{B_r} takie, że B otrzymana jest z B_r (odpowiednio, $\mathscr{C}$ otrzymana jest z $\mathscr{C}^r$) poprzez ciąg operacji dopuszczalnych typu $(ad\,1^*)$ i $(ad\,2^*)$ używających modułów z $\mathscr{C}^r$.

Dla quasi-rurowego rozszerzenia B utajonej algebry kanonicznej C maksymalne tubularne rozszerzenie B_r algebry C wewnątrz B jest prawie utajoną algebrą kanoniczną, którą nazywamy *prawą quasi-odwróconą częścią* algebry B. Podobnie maksymalne tubularne korozszerzenie B_l algebry C wewnątrz B jest przeciwną algebrą prawie utajonej algebry kanonicznej, które nazywamy *lewą quasi-odwróconą częścią* algebry B.

Zauważmy, że quasi-rura kołczanu Auslandera-Reiten jest prawie cykliczną, koherentną składową w sensie [42]. Poniższe twierdzenie jest specjalnym przypadkiem charakteryzacji algebr z separującą rodziną prawie cyklicznych koherentnych składowych [43, Theorem A].

Twierdzenie 7.8. *Niech A będzie bazową, spójną algebrą artinowską. Następujące warunki są równoważne.*

(i) Γ_A zawiera separującą rodzinę quasi-rur.

(ii) Γ_A zawiera wierną, uogólnioną standardową rodzinę quasi-rur bez zewnętrznych krótkich dróg.

(iii) A jest quasi-rurowym powiększeniem utajonej algebry kanonicznej C.

Więcej własności utajonych algebr kanonicznych można znaleźć w [14], [32], [35], [36], [37], [38], [53], [55] i [64].

Rozdział II

Algebry tubularne

1 Podstawowe definicje

W poprzednim rozdziale wprowadziliśmy pojęcie algebry kanonicznej. Przedstawimy teraz definicję algebr tubularnych, które zostały wprowadzone przez Ringela w książce [52].

Algebrą tubularną nazywamy prawie utajoną algebrę kanoniczną typu Λ, gdzie Λ jest kanoniczną algebrą typu tubularnego. Odnotujmy, że algebra tubularna ma taką samą ilość wierzchołków w swoim wartościowanym kołczanie Gabriela co wyjściowa algebra kanoniczna typu tubularnego. Zatem z Twierdzenia I.7.3 wynika, że algebry tubularne mają rząd grupy Grothendiecka nie większy niż 10.

Algebrę tubularną możemy również otrzymać jako tubularne rozszerzenie A algebry utajonej C_0, dla którego forma Eulera q_A jest dodatnio półokreślona korangi 2, oraz jako tubularne korozszerzenie A algebry utajonej C_∞, dla którego forma Eulera q_A jest dodatnio półokreślona korangi 2. W pracy [52] Ringel opisał strukturę kołczanu Auslandera-Reiten algebry tubularnej nad ciałem algebraicznie domkniętym. Wyniki te zostały następnie rozszerzone przez Kussina na przypadek dowolnego ciała (patrz [33], [34], [36], [39] i [53]). Kołczan Γ_B algebry tubularnej B ma postać:

$$\Gamma_B = \mathscr{P}^B \vee \mathscr{T}_0^B \vee \bigvee_{q\in\mathbb{Q}^+} \mathscr{T}_q^B \vee \mathscr{T}_\infty^B \vee \mathscr{Q}^B,$$

gdzie

- $\mathscr{P}^B$ jest składową postprojektywną, a $\mathscr{Q}^B$ składową preinjektywną,
- $\mathscr{T}_0^B$ jest nieskończoną rodziną parami ortogonalnych, uogólnionych standardowych rur promieniowych, która zawiera co najmniej jeden moduł projektywny,
- $\mathscr{T}_\infty^B$ jest nieskończoną rodziną parami ortogonalnych, uogólnionych standardowych rur kopromieniowych, która zawiera co najmniej jeden moduł injektywny,
- $\mathscr{T}_q^B$, dla każdego $q \in \mathbb{Q}^+$, jest nieskończoną rodziną parami ortogonalnych, dokładnych, uogólnionych standardowych stabilnych rur.

Dodatkowo, jak pokazał Ringel [52], [53], algebra przeciwna algebry tubularnej jest także algebrą tubularną.

Pokażemy teraz następujące twierdzenie będące uogólnieniem jednego z wyników Ringela z [52, (5.2)] na dowolną algebrę tubularną.

Stwierdzenie 1.1. *Niech B będzie algebrą tubularną z rozkładem*

$$\Gamma_B = \mathscr{P}^B \vee \mathscr{T}_0^B \vee \bigvee_{q\in\mathbb{Q}^+} \mathscr{T}_q^B \vee \mathscr{T}_\infty^B \vee \mathscr{Q}^B$$

kołczanu Auslandera-Reitena. Wówczas $\mathscr{T}_q^B$, dla każdego $q \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0,\infty\}$, jest rodziną quasi-rur zamkniętą na składniki kompozycyjne.

Dowód. Niech M będzie takim B-modułem z $\mathscr{T}_p^B$, a N takim B-modułem z $\mathscr{T}_q^B$, gdzie $p, q \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0,\infty\}$, że $[M] = [N]$. Przypuśćmy, że $p \neq q$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $p < q$. Ponieważ $p, q \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0,\infty\}$, to istnieje takie $s \in \mathbb{Q}^+$, że $p < s < q$. Wówczas rodzina $\mathscr{T}_s^B = (\mathscr{T}_{s,x}^B)_{s\in\mathbb{X}_s}$ jest nieskończoną rodziną stabilnych rur, więc istnieje $x \in \mathbb{X}_s$, dla którego $\mathscr{T}_{s,x}^B$ jest stabilną rurą rangi 1. Weźmy jedyny moduł X leżący na ustach rury $\mathscr{T}_{s,x}^B$. Oczywiście $X = \tau_B X$. Ponieważ B jest algebrą tubularną, to każda rodzina $\mathscr{T}_k^B$, gdzie $k \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0,\infty\}$, jest rodziną silnie separującą $\mathscr{P}^B \vee \bigvee_{l<k} \mathscr{T}_l^B$ od $\bigvee_{l>k} \mathscr{T}_l^B \vee \mathscr{Q}^B$. Przypomnijmy, że każdy nierozkładalny B-moduł projektywny należy do $\mathscr{P}^B \vee \mathscr{T}_0^B$, a każdy nierozkładalny B-moduł injektywny należy do $\mathscr{T}_\infty^B \vee \mathscr{Q}^B$. Zatem powłoka injektywna $E_B(M)$ modułu M należy do $\operatorname{add}(\mathscr{T}_\infty^B \vee \mathscr{Q}^B)$, a nakrycie projektywne $P_B(N)$ modułu N należy do $\operatorname{add}(\mathscr{P}^B \vee \mathscr{T}_0^B)$. Stąd (patrz Lemat I.6.5) dostajemy, że $\operatorname{Hom}_B(M,X) \neq 0$ oraz $\operatorname{Hom}_B(X,N) \neq 0$. Następnie, ponieważ $[M] = [N]$, to ze Stwierdzenia I.3.1 mamy

$$\begin{aligned} |\operatorname{Hom}_B(X,M)| - |\operatorname{Hom}_B(M,X)| &= |\operatorname{Hom}_B(X,M)| - |\operatorname{Hom}_B(M,\tau_B X)| \\ &= |\operatorname{Hom}_B(X,N)| - |\operatorname{Hom}_B(N,\tau_B X)| \\ &= |\operatorname{Hom}_B(X,N)| - |\operatorname{Hom}_B(N,X)| \end{aligned}$$

bo $X = \tau_B X$. Stąd otrzymujemy nierówności

$$0 > -|\operatorname{Hom}_B(M,X)| = |\operatorname{Hom}_B(X,N)| > 0,$$

bo $\operatorname{Hom}_B(X,M) = 0 = \operatorname{Hom}_B(N,X)$, co daje sprzeczność. Zatem $p = q$, więc każda rodzina $\mathscr{T}_q$, dla $q \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0,\infty\}$, jest zamknięta na składniki kompozycyjne. □

W tym rozdziale przez automorfizm algebry B będziemy rozumieli automorfizm sztywny algebry B. Niech B będzie algebrą, a $1_B = e_1 + \cdots + e_n$ rozkładem jedynki algebry B na sumę parami ortogonalnych, prymitywnych idempotentów algebry B. Automorfizm $\varphi\colon B \to B$ algebry B nazywamy *sztywnym*, o ile $\varphi(\{e_1,\ldots,e_n\}) = \{e_1,\ldots,e_n\}$.

Dla ciała k charakterystyki różnej od 2 powiemy, że algebra tubularna B jest *wyjątkową algebrą tubularną*, o ile kołczan Q_B algebry B jest następującym kołczanem

$$
\begin{tikzcd}
1 & 3 \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[dl, "\sigma"] & 5 \arrow[l, "\zeta"'] \arrow[dl, "\eta"] \\
2 & 4 \arrow[l, "\beta"] \arrow[ul, "\gamma"'] & 6 \arrow[l, "\omega"] \arrow[ul, "\mu"']
\end{tikzcd}
$$

z relacjami $\zeta\alpha = \eta\gamma$, $\mu\alpha = \omega\gamma$, $\zeta\sigma = \eta\beta$ oraz $\mu\sigma = -\omega\beta$. Zauważmy, że dowolny automorfizm φ kołczanu Q_B algebry wyjątkowej B zadany jest następująco: $\varphi(\gamma) = a\sigma$, $\varphi(\sigma) = b\gamma$, $\varphi(\beta) = c\alpha$, $\varphi(\alpha) = d\beta$, $\varphi(\mu) = e\eta$, $\varphi(\eta) = r\mu$, $\varphi(\omega) = u\zeta$ oraz $\varphi(\zeta) = v\omega$ dla $a, b, c, d, e, r, u, v \in k \setminus \{0\}$. Mówimy, że φ jest *automorfizmem wyróżnionym*, o ile spełnia relacje $ar = -dv$, $de = au$, $bv = cr$ i $be = -cu$, czyli $a = -\frac{dv}{r}$, $e = -\frac{vu}{r}$, $c = \frac{bv}{r}$, gdzie $b, d, r, u, v \in k \setminus \{0\}$.

2 Punkty stałe algebr tubularnych

W tym podrozdziale pokażemy, że jeśli sztywny automorfizm $\varphi \in \mathrm{End}_B(B)$ algebry tubularnej B nie jest wyróżnionym automorfizmem wyjątkowej algebry tubularnej, to φ ma *punkt stały*, to znaczy, dla indukowanego przez φ automorfizmu kołczanu Gabriela algebry B, oznaczanego również przez φ, istnieje wierzchołek x w Q_B, dla którego $\varphi(x) = x$. Wynik ten jest konsekwencją Lematu 2.1 oraz Stwierdzenia 2.2

Nasze rozważania zaczniemy od poniższego lematu, który opisuje przypadek wyjątkowej algebry tubularnej. Z pracy [57] wiemy również, że jest to jedyna algebra tubularna będąca tubularnym rozszerzeniem algebry dziedzicznej typu Euklidesa $\widetilde{\mathbb{A}}_n$.

Lemat 2.1. *Niech B będzie algebrą tubularną nad ciałem k daną przez kołczan*

$$
\begin{tikzcd}
1 & 3 \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[dl, "\sigma"] & 5 \arrow[l, "\zeta"'] \arrow[dl, "\eta"] \\
2 & 4 \arrow[l, "\beta"] \arrow[ul, "\gamma"'] & 6 \arrow[l, "\omega"] \arrow[ul, "\mu"']
\end{tikzcd}
$$

ograniczony relacjami $\alpha\zeta = \gamma\eta$, $\alpha\mu = \gamma\omega$, $\sigma\zeta = \beta\eta$ oraz $\sigma\mu = x\beta\omega$, gdzie $x \in k \setminus \{0, 1\}$. Niech φ będzie sztywnym automorfizmem algebry B. Wtedy φ ma punkt stały wtedy i tylko wtedy, gdy B jest wyjątkowa, a φ jest wyróżnionym automorfizmem algebry B.

Dowód. Biorąc wartości jakie przyjmuje automorfizm φ na powyższych równościach otrzymujemy $dv\beta\omega = ar\sigma\mu$, $de\beta\eta = au\sigma\zeta$, $bv\gamma\omega = cr\alpha\mu$ i $be\gamma\eta = xcu\alpha\zeta$, a stąd równości $dv = xar$, $de = au$, $bv = cr$ oraz $be = xcu$. Wobec tego mamy $xaer = dev = auv$ oraz $cer = bev = xcuv$, co implikuje $xer = uv$, $er = xuv$, a więc $x^2 = 1$. Ponieważ $x \neq 0, 1$, dostajemy sprzeczność wtedy i tylko wtedy, gdy $x \neq -1$, a k nie jest ciałem charakterystyki 2. Zatem φ nie ma punktu stałego, o ile $x = -1 \neq 1$, czyli B jest wyjątkową algebrą tubularną. $\square$

Przez *rodzinę małych grafów Euklidesa* rozumiemy rodzinę następujących grafów Euklidesa:

- $\widetilde{\mathbb{A}}_{11}$, $\widetilde{\mathbb{A}}_{12}$, $\widetilde{\mathbb{B}}_m$, $\widetilde{\mathbb{C}}_m$, $\widetilde{\mathbb{BC}}_m$, dla $m = 2, \ldots, 5$;
- $\widetilde{\mathbb{BD}}_m$, $\widetilde{\mathbb{CD}}_m$, dla $m = 3, 4, 5$;
- $\widetilde{\mathbb{F}}_{41}$, $\widetilde{\mathbb{F}}_{42}$, $\widetilde{\mathbb{G}}_{21}$ oraz $\widetilde{\mathbb{G}}_{22}$.

Niech H będzie reprezentacyjnie nieskończoną, dziedziczną algebrą typu Euklidesa, a Δ jej kołczanem Gabriela. Przypomnijmy, że (patrz [55, Podrozdział XIV.4]) *utajoną dziedziną* $\mathscr{DP}(H)$ algebry H jest podkołczan składowej postprojektywnej $\mathscr{P}(H)$ kołczanu Γ_H o następujących własnościach:

(d1) $\mathscr{DP}(H)$ jest pełnym, skończonym podkołczanem z translacją kołczanu $\mathscr{P}(H)$, który jest zamknięty na branie poprzedników w $\mathscr{P}(H)$,

(d2) dla dowolnego H-modułu odwracającego $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_n$ w add $\mathscr{P}(H)$, istnieje taki moduł odwracający $T' = T_1' \oplus \cdots \oplus T_n'$ w add $\mathscr{P}(H)$, że H-moduły $T_1', \ldots, T_n'$ są nierozkładalne, parami nieizomorficzne, należą do $\mathscr{DP}(H)$ oraz istnieje izomorfizm algebr

$$\mathrm{End}_H(T) \cong \mathrm{End}_H(T').$$

Kładziemy $\mathscr{DP}(H) := \{\tau_H^{-r} P(a) \mid r = 1, \ldots, r_\Delta \text{ oraz } a \in \Delta_0\}$, gdzie r_Δ jest najmniejszą dodatnią liczbą całkowitą, dla której $\mathrm{Hom}_H(P(a), \tau_H^{-r} P(b)) \neq 0$ dla wszystkich $r \geq r_\Delta$ oraz wszystkich a, $b \in \Delta_0$. Wobec tego, aby wyliczyć wartościowane kołczany Gabriela algebr utajonych wystarczy rozważać jedynie algebry endomorfizmów modułów odwracających T, których wszystkie nierozkładalne składniki proste pochodzą z $\mathscr{DP}(H)$.

Stwierdzenie 2.2. *Niech B będzie różną od wyjątkowej algebrą tubularną. Wówczas każdy automorfizm $\varphi \in \mathrm{End}_B(B)$ ma punkt stały.*

Dowód. Niech C będzie taką utajoną algebrą typu Euklidesa Δ, że B jest gałęziowym rozszerzeniem typu tubularnego algebry C.

Oczywiście ograniczenie dowolnego automorfizmu $\varphi \colon B \to B$ do C jest automorfizmem algebry C. Wobec tego, aby pokazać, że φ ustala punkt w B wystarczy pokazać, że ograniczenie $\varphi|_C$ automorfizmu φ do C ma punkt stały. W tym celu potrzebujemy kształtów zwyczajnych kołczanów utajonych algebr typu Euklidesa.

Klasyfikacja algebr utajonych typu Euklidesa Δ, gdzie Δ jest jednym z kołczanów Euklidesa $\widetilde{\mathbb{A}}_n$, dla $n \geq 2$, $\widetilde{\mathbb{D}}_n$, dla $n \geq 4$, $\widetilde{\mathbb{E}}_6$, $\widetilde{\mathbb{E}}_7$ lub $\widetilde{\mathbb{E}}_8$ w terminach kołczanu z relacjami została przedstawiona przez Bongartza [10] oraz Happela i Vossiecka [24] (patrz także [55, Chapter XIV]). Prosta analiza listy Bongartza-Happela-Vossiecka pokazuje, że każdy automorfizm utajonej algebry typu Euklidesa, różnego od $\widetilde{\mathbb{A}}_n$, ma punkt stały.

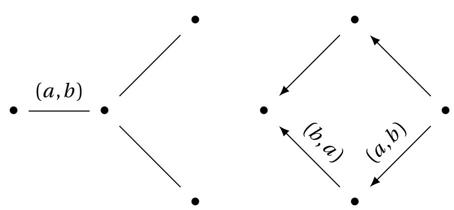
Z drugiej strony, korzystając z Twierdzenia I.7.3 oraz definicji algebr tubularnych wiemy, iż ranga grupy Grothendiecka algebry tubularnej jest ≤ 10. Wobec tego przedstawimy możliwe kształty wartościowanych kołczanów Gabriela algebr utajonych postaci $C = \mathrm{End}_H(T)$, gdzie T jest modułem odwracającym, którego wszystkie składniki proste należą do utajonej dziedziny algebry H, gdzie H jest algebrą dziedziczną, której zwyczajny kołczan jest jednym ze zorientowanych małych grafów Euklidesa (patrz [14]).

Zauważmy, że kategoria add $\mathscr{DP}(H)$ utajonej dziedziny $\mathscr{DP}(H)$, dla danej algebry dziedzicznej H z kołczanem Gabriela $\Delta(G)$, gdzie G jest pewnym grafem acyklicznym, zawiera moduł odwracający T taki, że kołczan Gabriela algebry $B = \mathrm{End}_H(T)$ jest kołczanem o grafie G z dowolnie ustaloną orientacją. Ponadto z twierdzenia o odwracaniu Brenner-Butlera wiemy, że mamy równoważność kategorii $\mathscr{F}(T) = \{M \mid \mathrm{Hom}_H(T, M) = 0\}$ w mod H, która zawiera $\mathscr{DP}(H)$, oraz kategorii $\mathscr{X}(T) = \{X_B \mid \mathrm{Hom}_B(X, \mathrm{D}\,T)\}$ w mod B (patrz [2, Chapter VI.3]).

Wobec powyższej obserwacji wystarczy rozważać jedynie przypadek algebr dziedzicznych, których wartościowany kołczan Gabriela, oznaczony przez $\Delta(G)$, gdzie G należy do rodziny małych grafów Euklidesa, ma orientację strzałek z prawa na lewo. Moduły odwracające w utajonych dziedzinach takich algebr dziedzicznych zostały wyliczone przez algorytm (patrz Dodatek A). Wobec tego, podamy jedynie listę możliwych kształtów (ramek) wartościowanych kołczanów Gabriela algebr utajonych. W poniższej liście niezorientowane krawędzie mogą mieć dowolną orientację.

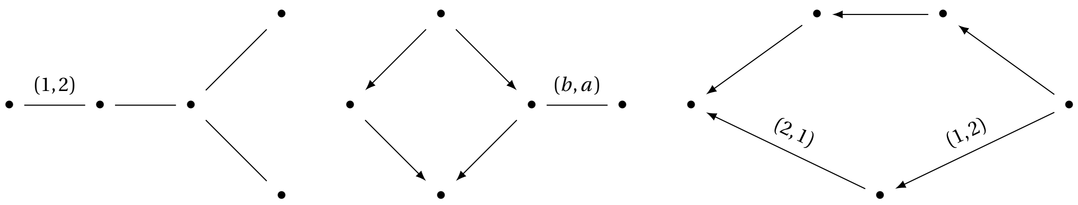
(i) Dla algebry dziedzicznej H, której kołczan wartościowany jest postaci $\Delta(\widetilde{\mathbb{B}}_2)$ (odpowiednio, $\Delta(\widetilde{\mathbb{B}}_3)$, $\Delta(\widetilde{\mathbb{B}}_4)$, $\Delta(\widetilde{\mathbb{BC}}_2)$, $\Delta(\widetilde{\mathbb{BC}}_3)$, $\Delta(\widetilde{\mathbb{BC}}_4)$, $\Delta(\widetilde{\mathbb{C}}_2)$, $\Delta(\widetilde{\mathbb{C}}_3)$ i $\Delta(\widetilde{\mathbb{C}}_4)$) otrzymujemy ramkę $\widetilde{\mathbb{B}}_2$ (odpowiednio, $\widetilde{\mathbb{B}}_3$, $\widetilde{\mathbb{B}}_4$, $\widetilde{\mathbb{BC}}_2$, $\widetilde{\mathbb{BC}}_3$, $\widetilde{\mathbb{BC}}_4$, $\widetilde{\mathbb{C}}_2$, $\widetilde{\mathbb{C}}_3$ i $\widetilde{\mathbb{C}}_4$).

(ii) Dla algebry dziedzicznej H, której kołczan wartościowany jest postaci $\Delta(\widetilde{\mathbb{BD}}_3)$ (odpowiednio, $\Delta(\widetilde{\mathbb{CD}}_3)$) mamy następujące ramki:



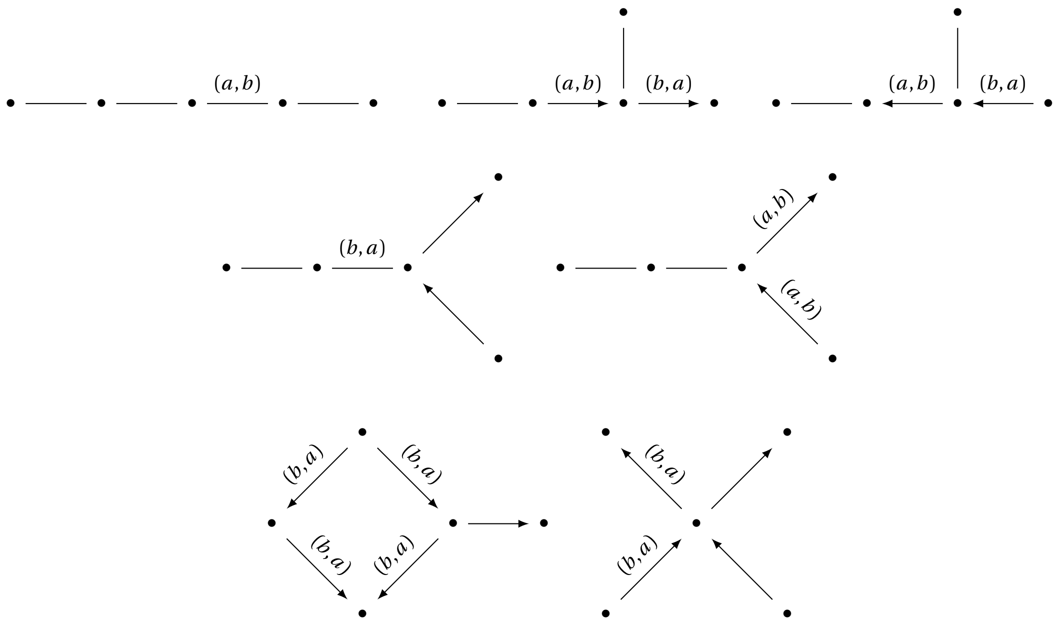
gdzie $(a,b) = (1,2)$ (odpowiednio, $(a,b) = (2,1)$).

(iii) Dla algebry dziedzicznej H, której kołczan wartościowany jest postaci $\Delta = \widetilde{\mathbb{BD}}_4$ (odpowiednio, $\widetilde{\mathbb{CD}}_4$) mamy następujące ramki:



gdzie $(a,b)=(1,2)$ (odpowiednio, $(a,b)=(2,1)$).

(iv) Dla algebry dziedzicznej H, której kołczan wartościowany jest postaci $\Delta(\widetilde{\mathbb{F}}_{41})$ (odpowiednio, $\Delta(\widetilde{\mathbb{F}}_{42})$) mamy następujące ramki:



gdzie $(a,b)=(1,2)$ (odpowiednio, $(a,b)=(2,1)$).

(v) Dla algebry dziedzicznej H, której kołczan wartościowany jest postaci $\Delta(\widetilde{\mathbb{G}}_{21})$ (odpowiednio, $\Delta(\widetilde{\mathbb{G}}_{22})$) mamy następujące dwie ramki:

gdzie $(a,b)=(1,3)$ (odpowiednio, $(a,b)=(3,1)$).

Prosta analiza ramek z powyższej listy pokazuje, iż każdy automorfizm utajonej algebry typu Euklidesa Δ, gdzie Δ jest jednym z małych grafów Euklidesa, ma punkt stały. $\square$

Rozdział III

Samoinjektywne algebry orbit

1 Algebry samoinjektywne

Powiemy, że algebra bazowa A jest *algebrą samoinjektywną*, o ile $A \cong \mathrm{D}(A)$ w $\operatorname{mod} A$, czyli A jest algebrą samoinjektywną dokładnie wtedy, gdy każdy moduł projektywny w $\operatorname{mod} A$ jest również injektywny.

Niech A będzie algebrą samoinjektywną, a $\{e_i \mid 1 \leq i \leq s\}$ pełnym zbiorem parami ortogonalnych, prymitywnych idempotentów algebry A. Oznaczmy przez $\nu = \nu_A$ *automorfizm Nakayamy* algebry A indukujący A-A-bimodułowy izomorfizm $A \cong \mathrm{D}(A)_\nu$, gdzie $\mathrm{D}(A)_\nu$ oznacza prawy A-moduł otrzymany z $\mathrm{D}(A)$ poprzez następującą zmianę prawego działania algebry A na $\mathrm{D}(A)$: $f \cdot a = f\nu(a)$ dla każdych $a \in A$ i $f \in \mathrm{D}(A)$. Zatem $\operatorname{soc}(\nu(e_i)A) \cong \operatorname{top}(e_iA)$ $(= e_iA/\operatorname{rad}_A(e_iA))$ jako prawe A-moduły dla każdego $i \in \{1,\dots,s\}$. Wówczas $\{\nu(e_i)A \mid 1 \leq i \leq s\}$ jest pełnym zbiorem reprezentantów nierozkładalnych, projektywnych prawych A-modułów oraz istnieje *permutacja (Nakayamy)* zbioru $\{1,\dots,s\}$, oznaczana również przez ν, taka, że $\nu(e_i)A \cong e_{\nu(i)}A$ dla wszystkich $i \in \{1,\dots,s\}$. Wykorzystując Twierdzenie Krulla-Schmidta, możemy założyć, że $\nu(e_iA) = \nu(e_i)A = e_{\nu(i)}A$ dla wszystkich $i \in \{1,\dots,s\}$.

Prawy cokół algebry samoinjektywnej A pokrywa się z lewym cokołem algebry A i oznaczamy go przez $\operatorname{soc}\Lambda$. Powiemy, że dwie algebry samoinjektywne A nad Λ są *cokołowo równoważne*, o ile algebry ilorazowe $A/\operatorname{soc} A$ oraz $\Lambda/\operatorname{soc}\Lambda$ są izomorficzne. Niech I będzie ideałem w A, $B = A/I$, a e takim idempotentem w A, że $e + I$ jest jedynką w B. Możemy założyć, że $e = e_1 + \dots + e_n$, gdzie $\{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, jest pełnym zbiorem prymitywnych, ortogonalnych idempotentów algebry A, które nie są w I. Wówczas taki idempotent e jest jednoznacznie wyznaczony, z dokładnością do wewnętrznego automorfizmu algebry A, przez I i nazywamy go *ilorazową jedynką* algebry B [71]. Zauważmy, że $B \cong eAe/eIe$ i $1 - e \in I$. Oznaczmy przez $l_A(I)$ lewy, a przez $r_A(I)$ prawy annihilator ideału I w A. Mówimy, za [71, (2.1)], że ideał I jest *deformujący*, o ile $eIe = l_{eAe}(I) = r_{eAe}(I)$ oraz A/I jest *trójkątna*, czyli kołczan Gabriela algebry A/I nie ma zorientowanych cykli. Następujący Lemat został udowodniony w [76, Lemma 4.1].

Lemat 1.1. *Niech A będzie algebrą samoinjektywną, e idempotentem A oraz załóżmy, że*

$l_A(I) = Ie$ lub $r_A(I) = eI$. Wtedy e jest ilorazową jedynką algebry ilorazowej A/I.

Dodatkowo, następujące stwierdzenie zostało udowodnione w [71, Proposition 2.3].

Stwierdzenie 1.2. *Niech A będzie algebrą samoinjektywną, I ideałem w A, $B = A/I$, e ilorazową jedynką w B oraz załóżmy, że $IeI = 0$. Wtedy następujące warunki są równoważne.*

(i) Ie *jest injektywnym kogeneratorem w* $\operatorname{mod} B$.

(ii) eI *jest injektywnym kogeneratorem w* $\operatorname{mod} B^{op}$.

(iii) $l_A(I) = Ie$.

(iv) $r_A(I) = eI$.

Ponadto, jeżeli zachodzi jeden z powyższych warunków, to mamy także $eIe = l_{eAe}(I) = r_{eAe}(I)$ oraz $\operatorname{soc} A \subseteq I$.

Niech I będzie ideałem deformującym algebry samoinjektywnej A, a e ilorazową jedynką A/I. Wtedy I możemy rozważać jako (eAe/eIe)-bimoduł. Oznaczmy przez $A[I]$ sumę prostą k-modułów $(eAe/eIe) \oplus I$ z mnożeniem danym wzorem

$$(b,x)\cdot(b',x') = (bb', bx' + xb' + xx'),$$

dla b, $b' \in eAe/eIe$ i x, $x' \in I$. Wtedy $A[I]$ jest algebrą z jedynką $(e, 1-e)$ oraz, przez utożsamienie $x \in I$ z $(0,x) \in A[I]$, możemy rozważać I jako ideał w $A[I]$.
Następujący wynik łączy fakty udowodnione w [71, Theorem 4.1], [72, Theorem 3] oraz [75, Proposition 3.2] i podaje związek pomiędzy A i $A[I]$.

Twierdzenie 1.3. *Niech A będzie algebrą samoinjektywną, I ideałem deformującym A, a e ilorazową jedynką w A/I. Następujące zdania są prawdziwe.*

(i) $A[I]$ jest algebrą samoinjektywną, I jest ideałem deformującym $A[I]$, a permutacje Nakayamy algebr A i $A[I]$ są takie same.

(ii) Algebry A i $A[I]$ są cokołowo równoważne.

(iii) Jeśli $IeI = 0$ i $e_i \neq e_{\nu(i)}$ dla każdego prymitywnego składnika e_i idempotenta e, to algebry A i $A[i]$ są izomorficzne.

Na zakończenie tego podrozdziału podamy charakteryzację quasi-rur w kołczanach Auslandera-Reiten algebr samoinjektywnych ([42, Theorem A], [41] oraz [79]).

Stwierdzenie 1.4. *Niech A będzie algebrą samoinjektywną, a Γ spójną składową Γ_A. Następujące warunki są równoważne.*

(i) Γ *jest quasi-rurą.*

(ii) *Stabilna część* Γ^s *składowej* Γ *jest stabilną rurą.*

(iii) Γ *zawiera zorientowany cykl.*

2 Funktory nakrycia i kategorie powtórzeń

Podrozdział ten poświęcony będzie przedstawieniu pewnych wiadomości dotyczących teorii nakryć, stosowanej w teorii reprezentacji algebr, które będą niezbędne w naszych dalszych rozważaniach. Przez k oznaczamy przemienny pierścień artinowski z jedynką.

Powiemy, że k-kategoria R jest *lokalnie ograniczona*, o ile czyni zadość następującym warunkom:

- różne obiekty w R nie są izomorficzne;
- dla każdego obiektu x w R algebra $R(x,x)$ jest algebrą lokalną;
- dla każdego obiektu x w R liczby $\sum_{y\in \operatorname{ob} R} |R(x,y)|$ oraz $\sum_{y\in \operatorname{ob} R} |R(y,x)|$ są skończone.

Lokalnie ograniczoną k-kategorię ze skończoną ilością obiektów nazwiemy *ograniczoną*.

Funktor $F\colon R \to \Lambda$ zadany pomiędzy dwiema lokalnie ograniczonymi k-kategoriami R i Λ nazwiemy *funktorem nakrycia*, o ile k-homomorfizmy indukowane przez F:

$$\bigoplus_{y\in \operatorname{ob} R,\, F(y)=a} R(x,y) \to \Lambda(F(x),a) \quad \text{oraz} \quad \bigoplus_{y\in \operatorname{ob} R,\, F(y)=a} R(y,x) \to \Lambda(A,F(x))$$

są izomorfizmami dla dowolnych obiektów x w R i a w Λ.

Niech G będzie grupą k-liniowych automorfizmów lokalnie ograniczonej k-kategorii R. Załóżmy, że G jest *grupą dopuszczalna*, czyli G działa wolno na obiektach R, tzn. $gx \neq x$ dla dowolnego obiektu x w R i $g \neq 1$ w G oraz ma skończenie wiele orbit. Wówczas istnieje ograniczona k-kategoria ilorazowa R/G i stowarzyszony z nią funktor nakrycia Galois $F\colon R \to R/G$. Obiektami w R/G są G-orbity wszystkich obiektów w R. Morfizmem $f\colon a \to b$ między dwoma obiektami a i b w R/G jest rodzina $f = ({}_y f_x) \in \prod_{x,y} R(x,y)$, gdzie x przebiega a, natomiast y przebiega b, oraz f spełnia relację $g({}_y f_x) = {}_{gy} f_{gx}$ dla dowolnego $g \in G$ oraz $x \in a$, $y \in b$. Wówczas mamy kanoniczny funktor nakrycia $F\colon R \to R/G$, który obiektowi x w R przypisuje jego G-orbitę, a morfizmowi $\zeta \in R(x,y)$ taką rodzinę $F\zeta = ({}_{hy}F\zeta_{gx})_{g,h\in G}$, że ${}_{hy}F\zeta_{gx} = g\zeta$ jeśli $g = h$ albo ${}_{hy}F\zeta_{gx} = 0$ w przeciwnym wypadku. Ponadto mamy także *funktor opuszczania*

$$F_\lambda\colon \operatorname{mod} R \to \operatorname{mod} R/G,$$

gdzie $\operatorname{mod} R$ oznacza kategorię skończenie generowanych, kontrawariantnych funktorów z R do $\operatorname{mod} k$, taki, że $(F_\lambda M)(a) = \bigoplus_{x \in a} M(x)$ dla M w $\operatorname{mod} R$ oraz a w $\operatorname{ob}(R/G)$.

Kategorię ograniczoną R możemy identyfikować z algebrą $\bigoplus_{a,b \in \operatorname{ob} R} R(a,b)$, gdzie każdy obiekt x w R utożsamiamy z prymitywnym idempotentem ϵ_x, będącym morfizmem identycznościowym $x \to x$, algebry $\bigoplus R$.

Niech B będzie bazową, artinowską k-algebrą, a $1_B = e_1 + \cdots + e_n$ rozkładem jej jedynki na sumę parami ortogonalnych, prymitywnych idempotentów. Z algebrą B możemy stowarzyszyć samoinjektywną, lokalnie ograniczoną k-kategorię $\widehat{B}$, nazywaną *kategorią powtórzeń* algebry B wprowadzoną w [25] (patrz także [54]). Obiektami $\widehat{B}$ są $e_{m,i}$, gdzie $m \in \mathbb{Z}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, a przestrzenie morfizmów zdefiniowane są w następujący sposób:

$$\widehat{B}(e_{m,i}, e_{r,j}) = \begin{cases} e_j B e_i, & r = m \\ \mathrm{D}(e_i B e_j), & r = m+1 \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}.$$

Mówimy, że automorfizm $\nu_{\widehat{B}}$ k-kategorii $\widehat{B}$ jest *automorfizmem Nakayamy*, o ile $\nu_{\widehat{B}}(e_{m,i}) = e_{m+1,i}$ dla wszystkich $m \in \mathbb{Z}$, $1 \le i \le n$. Wówczas nieskończona grupa cykliczna $(\nu_{\widehat{B}})$ generowana przez $\nu_{\widehat{B}}$ jest dopuszczalna oraz $\widehat{B}/(\nu_{\widehat{B}})$ jest trywialnym rozszerzeniem $B \ltimes \mathrm{D}(B)$ algebry B przez $\mathrm{D}(B)$. Automorfizm φ k-kategorii $\widehat{B}$ nazywamy:

- *dodatnim*, o ile dla każdej pary $(m,i) \in \mathbb{Z} \times \{1, \ldots, n\}$ mamy $\varphi(e_{m,i}) = e_{p,j}$, dla pewnego $p \ge m$ oraz $j \in \{1, \ldots, n\}$;
- *sztywnym*, o ile dla każdej pary $(m,i) \in \mathbb{Z} \times \{1, \ldots, n\}$ istnieje $j \in \{1, \ldots, n\}$ taka, że $\varphi(e_{m,i}) = e_{m,j}$;
- *ściśle dodatnim*, o ile φ jest dodatni, ale nie sztywny.

Zauważmy, że automorfizm Nakayamy $\nu_{\widehat{B}}$ jest ściśle dodatnim automorfizmem algebry $\widehat{B}$.

Następujące kryterium jest konsekwencją [73, Theorems 3.8 and 4.1] i Stwierdzenia 1.2.

Twierdzenie 2.1. *Niech A będzie algebrą samoinjektywną, I ideałem w A, $B = A/I$, a e ilorazową jedynką w B. Załóżmy, że B jest trójkątna oraz $l_A(I) = Ie$. Wtedy algebra $A[I]$ jest izomorficzna z algebrą $\widehat{B}/(\psi\nu_{\widehat{B}})$, dla pewnego dodatniego automorfizmu ψ algebry $\widehat{B}$.*

3 Samoinjektywne algebry typu kanonicznego

Mówimy, że algebra samoinjektywna A jest *samoinjektywną algebrą typu kanonicznego*, o ile A jest izomorficzna z algebrą orbit $\widehat{B}/G$, gdzie B jest quasi-odwróconą algebrą typu kanonicznego, a G dopuszczalną, beztorsyjną grupą automorfizmów algebry $\widehat{B}$.

Poniższe twierdzenie jest konsekwencją wyników z [1], [15], [16], [40], [44], [57].

Twierdzenie 3.1. *Niech B będzie quasi-odwróconą algebrą typu kanonicznego, G dopuszczalną, beztorsyjną grupa automorfizmów algebry $\widehat{B}$, a $A = \widehat{B}/G$ stowarzyszoną algebrą orbit. Wówczas następujące zdania są prawdziwe.*

(i) *G jest nieskończoną grupą cykliczną generowaną przez ściśle dodatni automorfizm ψ algebry $\widehat{B}$.*

(ii) *Funktor opuszczania $F_\lambda\colon \operatorname{mod}\widehat{B} \to \operatorname{mod} A$ stowarzyszony z nakryciem Galois $F\colon \widehat{B} \to \widehat{B}/G = A$ jest gęsty.*

(iii) *Kołczan Auslandera-Reiten Γ_A algebry A jest izomorficzny z kołczanem orbit $\Gamma_{\widehat{B}}/G$ kołczanu Auslandera-Reiten $\Gamma_{\widehat{B}}$ algebry $\widehat{B}$ ze względu na indukowane działanie grupy G na $\Gamma_{\widehat{B}}$.*

Poniższe stwierdzenie (patrz [1], [40], [44], [57]) wiąże algebry samoinjektywne typu kanonicznego z prawie utajonymi algebrami kanonicznymi.

Stwierdzenie 3.2. *Niech B będzie quasi-odwróconą algebrą typu kanonicznego. Wówczas istnieje taka prawie utajona algebra kanoniczna B^*, że $\widehat{B} = \widehat{B}^*$.*

Odnotujmy, że w ogólności może istnieć kilka prawie utajonych algebr kanonicznych, których algebry powtórzeń są izomorficzne.

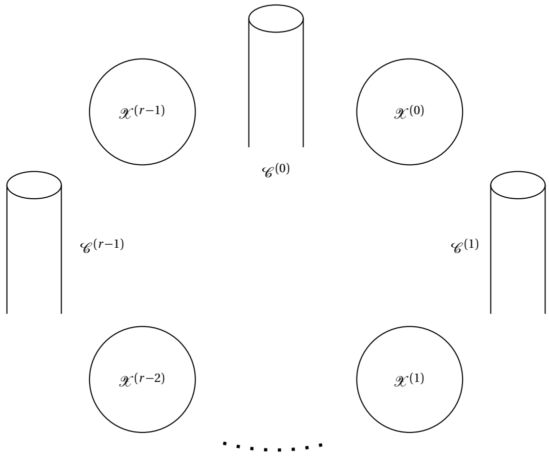
Korzystając z naturalnego podziału prawie utajonych algebr kanonicznych, możemy podzielić klasę algebr samoinjektywnych typu kanonicznego na trzy rozłączne klasy. Niech B będzie prawie utajoną algebrą kanoniczną, G nieskończoną, dopuszczalną i cykliczną grupą automorfizmów algebry $\widehat{B}$, a $A = \widehat{B}/G$. Wówczas mówimy, że A jest:

- *algebrą samoinjektywną typu Euklidesa*, o ile B jest algebrą odwróconą typu Euklidesa;
- *algebrą samoinjektywną typu tubularnego*, o ile B jest algebrą tubularną;
- *algebrą samoinjektywną dzikiego kanonicznego typu*, o ile B jest algebrą dzikiego kanonicznego typu

(patrz [77, Section 7]).

Następne twierdzenie dostarcza bardziej szczegółowych informacji o strukturze kołczanu Auslandera-Reiten samoinjektywnej algebry typu kanonicznego (patrz [1], [40], [44], [57]).

Twierdzenie 3.3. *Niech A będzie algebrą samoinjektywną typu kanonicznego. Wówczas kołczan Auslandera-Reiten Γ_A algebry A ma postać*



dla pewnej liczby całkowitej $r \geq 1$, gdzie $\mathscr{C}^{(i)}$, dla dowolnego $i \in \{0, \ldots, r-1\}$, jest nieskończoną rodziną quasi-rur oraz

(1) jeśli A jest typu Euklidesa, to $\mathscr{X}^{(i)}$, dla $i \in \{0, \ldots, r-1\}$, jest acykliczną składową typu Euklidesa (stabilna część jest postaci $\mathbb{Z}\Delta$ dla pewnego kołczanu Euklidesa Δ).

(2) jeśli A jest typu tubularnego, to $\mathscr{X}^{(i)}$, dla $i \in \{0, \ldots, r-1\}$, jest rozłączna sumą $\bigvee_{q \in \mathbb{Q}^i_{i+1}} \mathscr{C}^{(i)}_q$, gdzie dla każdej liczby $q \in \mathbb{Q}^i_{i+1} = \mathbb{Q} \cap (i, i+1)$ rodzina $\mathscr{C}^{(i)}_q$ jest nieskończoną rodziną stabilnych rur.

(3) jeśli A jest dzikiego kanonicznego typu, to $\mathscr{X}^{(i)}$, dla $i \in \{0, \ldots, r-1\}$, jest nieskończoną rodziną składowych, których stabilne części są postaci $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$.

Powyższy rozkład kołczanu Γ_A nazywamy *kanonicznym rozkładem kołczanu* Γ_A.

Zanim przystąpimy do sformułowania i udowodnienia głównych wyników w tym podrozdziale zbierzemy informacje o strukturze kołczanu $\Gamma_{\widehat{B}}$ algebry $\widehat{B}$. Załóżmy najpierw, że B jest algebrą tubularną. Z wyników otrzymanych w [17], [23], [44], [57] (patrz też [9], [33]) kołczan Auslandera-Reitena $\Gamma_{\widehat{B}}$ algebry $\widehat{B}$ ma rozkład

$$\Gamma_{\widehat{B}} = \bigvee_{q \in \mathbb{Q}} \mathscr{C}^{\widehat{B}}_q = \bigvee_{q \in \mathbb{Q}} \bigvee_{x \in \mathbb{X}_q} \mathscr{C}^{\widehat{B}}_{q,x},$$

o następujących własnościach.

(T1) Dla każdego $q \in \mathbb{Z}$, $\mathscr{C}^{\widehat{B}}_q$ jest nieskończoną rodziną $\mathscr{C}^{\widehat{B}}_{q,x}$, $x \in \mathbb{X}_q$, quasi-rur, która zawiera co najmniej jeden moduł projektywny.

(T2) Dla każdego $q \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $\mathscr{C}^{\widehat{B}}_q$ jest nieskończoną rodziną $\mathscr{C}^{\widehat{B}}_{q,x}$, $x \in \mathbb{X}_q$, stabilnych rur.

(T3) Dla każdego $q \in \mathbb{Q}$, $\mathscr{C}_q^{\widehat{B}}$ jest rodziną parami ortogonalnych, uogólnionych standardowych quasi-rur ze wspólnymi składnikami kompozycyjnymi, zamkniętą na składniki kompozycyjne oraz składającą się z modułów, które nie leżą na krótkich nieskończonych cyklach w mod $\widehat{B}$.

(T4) Istnieje taka dodatnia liczba całkowita m, że $3 \leq m \leq \operatorname{rk} K_0(B)$ i $\nu_{\widehat{B}}(\mathscr{C}_q^{\widehat{B}}) = \mathscr{C}_{q+m}^{\widehat{B}}$ dla dowolnego $q \in \mathbb{Q}$.

(T5) $\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(\mathscr{C}_q^{\widehat{B}}, \mathscr{C}_r^{\widehat{B}}) = 0$ dla wszystkich $q > r$ w $\mathbb{Q}$.

(T6) $\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(\mathscr{C}_q^{\widehat{B}}, \mathscr{C}_r^{\widehat{B}}) = 0$ dla wszystkich $r > q + m$ w $\mathbb{Q}$.

(T7) Dla $q \in \mathbb{Q}$ mamy $\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(\mathscr{C}_q^{\widehat{B}}, \mathscr{C}_{q+m}^{\widehat{B}}) \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $q \in \mathbb{Z}$.

(T8) Dla wszystkich $p < q$ w $\mathbb{Q}$ takich, że $\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(\mathscr{C}_p^{\widehat{B}}, \mathscr{C}_q^{\widehat{B}}) \neq 0$ zachodzi $\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(\mathscr{C}_p^{\widehat{B}}, \mathscr{C}_r^{\widehat{B}}) \neq 0$ oraz $\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(\mathscr{C}_r^{\widehat{B}}, \mathscr{C}_q^{\widehat{B}}) \neq 0$ dla dowolnego $r \in \mathbb{Q}$ o własności $p \leq r \leq q$.

(T9) Dla każdego $p \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ oraz takich $q \in \mathbb{Q}$, że $\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(\mathscr{C}_p^{\widehat{B}}, \mathscr{C}_q^{\widehat{B}}) \neq 0$ mamy $\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(\mathscr{C}_{p,x}^{\widehat{B}}, \mathscr{C}_{q,y}^{\widehat{B}}) \neq 0$, dla wszystkich $x \in \mathbb{X}_p$ i $y \in \mathbb{X}_q$.

(T10) Dla każdego $p \in \mathbb{Q}$ i takich $q \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, że $\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(\mathscr{C}_p^{\widehat{B}}, \mathscr{C}_q^{\widehat{B}}) \neq 0$ mamy $\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(\mathscr{C}_{p,x}^{\widehat{B}}, \mathscr{C}_{q,y}^{\widehat{B}}) \neq 0$, dla wszystkich $x \in \mathbb{X}_p$ i $y \in \mathbb{X}_q$.

Załóżmy teraz, że B jest algebrą jednego z następujących typów: Euklidesa lub dzikiego. Z [1], [3], [40] wynika, że kołczan Auslandera-Reiten $\Gamma_{\widehat{B}}$ algebry $\widehat{B}$ ma rozkład

$$\Gamma_{\widehat{B}} = \bigvee_{q \in \mathbb{Z}} \left(\mathscr{C}_q^{\widehat{B}} \vee \mathscr{X}_q^{\widehat{B}} \right),$$

o następujących własnościach.

(E1) Dla każdego $q \in \mathbb{Z}$, $\mathscr{C}_q^{\widehat{B}}$ jest rodziną $\mathscr{C}_{q,x}^{\widehat{B}}$, $x \in \mathbb{X}_q$, parami ortogonalnych, uogólnionych standardowych quasi-rur ze wspólnymi składnikami kompozycyjnymi, zamkniętą na składniki kompozycyjne oraz składającą się z modułów, które nie leżą na nieskończonych krótkich cyklach w mod $\widehat{B}$.

(E2) Dla każdego $q \in \mathbb{Z}$, $\mathscr{X}_q^{\widehat{B}}$ jest albo acykliczną składową typu Euklidesa, o ile B jest typu Euklidesa, albo nieskończoną rodziną składowych, których stabilna część jest postaci $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$, o ile B jest dzikiego typu.

(E3) Dla każdego $q \in \mathbb{Z}$ mamy $\nu_{\widehat{B}}(\mathscr{C}_q^{\widehat{B}}) = \mathscr{C}_{q+2}^{\widehat{B}}$ i $\nu_{\widehat{B}}(\mathscr{X}_q^{\widehat{B}}) = \mathscr{X}_{q+2}^{\widehat{B}}$.

(E4) $\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(\mathscr{X}_q^{\widehat{B}}, \mathscr{C}_q^{\widehat{B}} \vee \bigvee_{r<q} (\mathscr{C}_r^{\widehat{B}} \vee \mathscr{X}_r^{\widehat{B}})) = 0$ oraz $\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(\mathscr{C}_q^{\widehat{B}}, \bigvee_{r<q} (\mathscr{C}_r^{\widehat{B}} \vee \mathscr{X}_r^{\widehat{B}})) = 0$ dla każdego $q \in \mathbb{Z}$.

(E5) $\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(\mathscr{X}_q^{\widehat{B}}, \bigvee_{r>q+2}(\mathscr{C}_r^{\widehat{B}} \vee \mathscr{X}_r^{\widehat{B}})) = 0$ oraz $\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(\mathscr{C}_q^{\widehat{B}}, \mathscr{X}_{q+2}^{\widehat{B}} \vee \bigvee_{r>q+2}(\mathscr{C}_r^{\widehat{B}} \vee \mathscr{X}_r^{\widehat{B}})) = 0$ dla każdego $q \in \mathbb{Z}$.

(E6) Dla $q \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{X}_q$ i $y \in \mathbb{X}_{q+2}$ mamy $\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(\mathscr{C}_{q,x}^{\widehat{B}}, \mathscr{C}_{q+2,y}^{\widehat{B}}) \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy quasi-rura $\mathscr{C}_{q,x}^{\widehat{B}}$ nie jest stabilna i $\nu_{\widehat{B}}(\mathscr{C}_{q,x}^{\widehat{B}}) = \mathscr{C}_{q+2,y}^{\widehat{B}}$.

(E7) Dla wszystkich $q \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{X}_q$ oraz $y \in \mathbb{X}_{q+1}$ zachodzi $\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(\mathscr{C}_{q,x}^{\widehat{B}}, \mathscr{C}_{q+1,y}^{\widehat{B}}) \neq 0$.

(E8) Dla wszystkich $q \in \mathbb{Z}$ i dowolnych stabilnych rur $\mathscr{C}_{q,x}^{\widehat{B}}$ w $\mathscr{C}_q^{\widehat{B}}$ oraz $\mathscr{C}_{q+3,y}^{\widehat{B}}$ w $\mathscr{C}_{q+3}^{\widehat{B}}$ istnieje taki nierozkładalny $\widehat{B}$-moduł projektywny P w $\mathscr{X}_{q+1}^{\widehat{B}}$, że $\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(\mathscr{C}_{q,x}^{\widehat{B}}, P) \neq 0$ oraz $\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(P, \mathscr{C}_{q+3,y}^{\widehat{B}}) \neq 0$.

Stwierdzenie 3.4. *Niech B będzie algebrą tubularną, G nieskończoną, dopuszczalną i cykliczną grupą automorfizmów algebry $\widehat{B}$, a $A = \widehat{B}/G$. Wówczas następujące zdania są równoważne:*

(i) Γ_A ma rodzinę quasi-rur ze wspólnymi składnikami kompozycyjnymi, zamkniętą na składniki kompozycyjne oraz składającą się z modułów nie leżących na krótkich nieskończonych cyklach.

(ii) Γ_A ma rodzinę stabilnych rur ze wspólnymi składnikami kompozycyjnymi, zamkniętą na składniki kompozycyjne oraz składającą się z modułów nie leżących na krótkich nieskończonych cyklach.

(iii) $G = (\varphi\nu_{\widehat{B}}^2)$ dla dodatniego automorfizmu φ algebry powtórzeń $\widehat{B}$.

Dowód. Z Twierdzenia 3.1(i) wiemy, że G jest generowana przez ściśle dodatni automorfizm g algebry $\widehat{B}$. Rozważmy kanoniczne nakrycie Galois $F\colon \widehat{B} \to \widehat{B}/G = A$ oraz stowarzyszony funktor opuszczania $F_\lambda\colon \operatorname{mod} \widehat{B} \to \operatorname{mod} A$. Ponieważ F_λ jest gęsty, to otrzymujemy naturalne izomorfizmy k-modułów

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \operatorname{Hom}_{\widehat{B}}\left(X, {}^{g^i}Y\right) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(F_\lambda(X), F_\lambda(Y)),$$

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \operatorname{Hom}_{\widehat{B}}\left({}^{g^i}X, Y\right) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(F_\lambda(X), F_\lambda(Y)),$$

dla wszystkich nierozkładalnych modułów X oraz Y w $\operatorname{mod} \widehat{B}$.

Najpierw pokażemy, że (iii) implikuje (ii). Załóżmy, że $g = \varphi\nu_{\widehat{B}}^2$ dla pewnego dodatniego automorfizmu φ algebry $\widehat{B}$. Wtedy z własności $(T4)$ wynika istnienie takiej dodatniej liczby całkowitej $l \geq 2m$, że $g(\mathscr{C}_q^{\widehat{B}}) = \mathscr{C}_{q+l}^{\widehat{B}}$ dla dowolnego $q \in \mathbb{Q}$. Ponieważ $g = \varphi\nu_{\widehat{B}}^2 = (\varphi\nu_{\widehat{B}})\nu_{\widehat{B}}$, gdzie $\varphi\nu_{\widehat{B}}$ jest ściśle dodatnim automorfizmem $\widehat{B}$, to wykorzystując wiedzę o nośnikach nierozkładalnych modułów w $\operatorname{mod} \widehat{B}$ (patrz [44, Section 3]) stwierdzamy, że obrazy $F_\lambda(S)$ i $F_\lambda(T)$

nieizomorficznych, prostych $\widehat{B}$-modułów S i T, które występują jako składniki kompozycyjne modułów w ustalonej rodzinie $\mathscr{C}_q^{\widehat{B}}$, są nieizomorficznymi prostymi A-modułami. Zatem z Twierdzenia 3.1 oraz własności $(T1)$-$(T4)$ dostajemy, że dla każdego $q \in \mathbb{Q}$, $\mathscr{C}_q^A = F_\lambda(\mathscr{C}_q^{\widehat{B}})$ jest nieskończoną rodziną $\mathscr{C}_{q,x}^A = F_\lambda(\mathscr{C}_{q,x}^{\widehat{B}})$, $x \in \mathbb{X}_q$, quasi-rur kołczanu Γ_A ze wspólnymi składnikami kompozycyjnymi i zamkniętą na składniki kompozycyjne. Weźmy teraz $p \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. Wtedy z własności $(T2)$ otrzymujemy, że $\mathscr{C}_p^A = (\mathscr{C}_{p,x}^A)_{x \in \mathbb{X}_p}$ jest rodziną stabilnych rur w Γ_A. Twierdzimy, że $\mathscr{C}_p^A$ składa się z nierozkładalnych A-modułów, które nie leżą na krótkich nieskończonych cyklach w $\operatorname{mod} A$. Zauważmy najpierw, że dla dwóch nierozkładalnych modułów M i N w $\mathscr{C}_p^A$ mamy $M = F_\lambda(X)$ oraz $N = F_\lambda(Y)$ dla pewnych nierozkładalnych modułów X i Y w $\mathscr{C}_p^{\widehat{B}}$, a F_λ, korzystając z własności $(T5)$, $(T6)$ i nierówności $q + l \geq q + 2m > q + m$, indukuje izomorfizm k-modułów $\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(M, N)$. W szczególności z Twierdzenia I.6.4 oraz własności $(T3)$, $\mathscr{C}_p^A$ jest rodziną parami ortogonalnych, uogólnionych standardowych stabilnych rur w kołczanie Γ_A. Przypuśćmy, że istnieje nieskończony krótki cykl $M \to L \to M$ w $\operatorname{mod} A$, gdzie M jest w $\mathscr{C}_{p,x}^A$ dla pewnego $x \in \mathbb{X}_p$. Z faktu, że $\mathscr{C}_p^A$ jest rodziną parami ortogonalnych, uogólnionych standardowych stabilnych rur kołczanu Γ_A wnosimy, iż L nie należy do $\mathscr{C}_p^A$. Wtedy $M = F_\lambda(X)$ dla pewnego X w $\mathscr{C}_{p,x}^{\widehat{B}}$, a $L = F_\lambda(Z)$ dla pewnego Z w $\mathscr{C}_r^{\widehat{B}}$, gdzie $r > p$. Otrzymujemy więc izomorfizm k-modułów indukowany przez F_λ,

$$\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \operatorname{Hom}_{\widehat{B}}\left(X, {}^{g^i}Z\right) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(M, L).$$

Ponieważ $\operatorname{Hom}_A(M, L) \neq 0$, więc, korzystając z $(T5)$, możemy wybrać taką minimalną liczbę $r > p$ i $Z \in \mathscr{C}_r^{\widehat{B}}$, że $L = F_\lambda(Z)$ i $\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(X, Z) \neq 0$. Z faktu, że $p \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ oraz X leży w $\mathscr{C}_p^{\widehat{B}}$, stosując własności $(T6)$ i $(T7)$, wnosimy, iż $p < r < p + m$. Co więcej, mamy także izomorfizm k-modułów indukowany przez F_λ:

$$\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \operatorname{Hom}_{\widehat{B}}\left(Z, {}^{g^i}X\right) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(L, M).$$

Zauważmy, że dla każdego $i \in \mathbb{Z}$, ${}^{g^i}X$ jest nierozkładalnym modułem z $\mathscr{C}_{p+li}^{\widehat{B}}$ i oczywiście $F_\lambda({}^{g^i}X) = F_\lambda(X) = M$. Dodatkowo ponieważ $\operatorname{Hom}_A(L, M) \neq 0$, $L = F_\lambda(Z)$ dla $Z \in \mathscr{C}_r^{\widehat{B}}$ i $r > p$, a $X \in \mathscr{C}_p^{\widehat{B}}$, to stosując własność $(T5)$ wnosimy, że $\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(Z, {}^{g^i}X) \neq 0$, dla pewnego $i \geq 1$. Wtedy $p + li \geq p + l \geq p + 2m > r + m$, bo $r < p + m$, co stanowi sprzeczność z własnością $(T6)$.

Podsumowując pokazaliśmy, że $\mathscr{C}_p^A = F_\lambda(\mathscr{C}_p^{\widehat{B}})$ jest rodziną stabilnych rur kołczanu Γ_A ze wspólnymi składnikami kompozycyjnymi, zamkniętą na składniki kompozycyjne oraz składającą się z modułów, które nie leżą na nieskończonych krótkich cyklach w $\operatorname{mod} A$. Zatem (iii) implikuje (ii).

Oczywiście (ii) implikuje (i), więc musimy jedynie pokazać, iż (i) implikuje (iii). Załóżmy, że Γ_A ma rodzinę quasi-rur $\mathscr{C} = (\mathscr{C}_x)_{x \in \mathbb{X}}$ ze wspólnymi składnikami kompozycyjnymi, zamkniętą na składniki kompozycyjne i składającą się z modułów, które nie leżą na krótkich nieskończonych cyklach w $\operatorname{mod} A$. Z własności $(T3)$ wiemy, że dla każdego $q \in \mathbb{Q}$ rodzina

$\mathscr{C}_q^A = F_\lambda(\mathscr{C}_q^{\widehat{B}})$ jest rodziną $\mathscr{C}_{q,x}^A = F_\lambda(\mathscr{C}_{q,x}^{\widehat{B}})$, $x \in \mathbb{X}_q$, quasi-rur ze wspólnymi składnikami kompozycyjnymi. Co więcej, funktor opuszczania F_λ indukuje izomorfizm kołczanów z translacją $\Gamma_{\widehat{B}}/G \xrightarrow{\sim} \Gamma_A$ (patrz Twierdzenie 3.1), a stąd każda składowa kołczanu Γ_A jest quasi-rurą postaci $\mathscr{C}_{q,x}^A = F_\lambda(\mathscr{C}_{q,x}^{\widehat{B}})$ dla pewnych $q \in \mathbb{Z}$ i $x \in \mathbb{X}_q$. Wówczas z faktu, że rodzina $\mathscr{C}$ jest zamknięta na składniki kompozycyjne wnosimy istnienie takiego $r \in \mathbb{Q}$, że $\mathscr{C}$ zawiera wszystkie quasi-rury $\mathscr{C}_{r,x}^A$, $x \in \mathbb{X}_r$, rodziny $\mathscr{C}_r^A$. W szczególności, wnioskujemy, że rodzina $\mathscr{C}_r^A = (\mathscr{C}_{r,x}^A)_{x \in \mathbb{X}_r}$ składa się z modułów, które nie leżą na nieskończonych krótkich cyklach w $\operatorname{mod} A$. Twierdzimy, że w konsekwencji g jest postaci $g = \varphi \nu_{\widehat{B}}^2$ dla pewnego dodatniego automorfizmu φ algebry $\widehat{B}$. Załóżmy, że nie jest to prawdą. Ponieważ g jest ściśle dodatnim automorfizmem algebry powtórzeń $\widehat{B}$, a wszystkie $\widehat{B}$-moduły projektywne leżą w $\bigvee_{p \in \mathbb{Z}} \mathscr{C}_p^{\widehat{B}}$, to stosując własność $(T4)$ wnioskujemy istnienie takiej dodatniej liczby całkowitej $s < 2m$, że $g(\mathscr{C}_q^{\widehat{B}}) = \mathscr{C}_{q+s}^{\widehat{B}}$ dla dowolnego $q \in \mathbb{Q}$. Niech p będzie liczbą naturalną, o własności $r \in [p, p+1) \cap \mathbb{Q}$. Mamy dwa przypadki do rozpatrzenia.

Załóżmy najpierw, że $s < m$. Weźmy $q \in (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}) \cap (p+1, p+s)$. Ponieważ $m \geq 3$, to otrzymujemy nierówności

$$p \leq r < p+1 < q < p+s \leq r+s < p+m,$$

które w połączeniu z własnościami $(T7)$ i $(T8)$ implikują, że $\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(\mathscr{C}_r^{\widehat{B}}, \mathscr{C}_q^{\widehat{B}}) \neq 0$ oraz $\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(\mathscr{C}_q^{\widehat{B}}, \mathscr{C}_{r+s}^{\widehat{B}}) \neq 0$. Ponadto z własności $(T9)$ i $(T10)$ dostajemy, że

$$\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}\left(\mathscr{C}_{r,x}^{\widehat{B}}, \mathscr{C}_{q,y}^{\widehat{B}}\right) \neq 0 \text{ dla każdego } x \in \mathbb{X}_r \text{ i } y \in \mathbb{X}_q,$$
$$\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}\left(\mathscr{C}_{q,y'}^{\widehat{B}}, \mathscr{C}_{r+s,x'}^{\widehat{B}}\right) \neq 0 \text{ dla każdego } x' \in \mathbb{X}_{r+s} \text{ i } y' \in \mathbb{X}_q,$$

gdyż $q \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. Ponieważ $\mathscr{C}_{r+s}^{\widehat{B}} = g(\mathscr{C}_r^{\widehat{B}})$, to istnieją $x \in \mathbb{X}_r$ i $y \in \mathbb{X}_q$ oraz moduły $X \in \mathscr{C}_{r,x}^{\widehat{B}}$, $Y \in \mathscr{C}_{q,y}^{\widehat{B}}$ i $X' \in \mathscr{C}_{r+s,x}^{\widehat{B}}$, że $\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(X, Y) \neq 0$, $\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(Y, X') \neq 0$ oraz $F_\lambda(X) = F_\lambda(X')$. Stąd otrzymujemy nieskończony krótki cykl $F_\lambda(X) \to F_\lambda(Y) \to F_\lambda(X') = F_\lambda(X)$ w $\operatorname{mod} A$, gdzie $F_\lambda(X)$ jest w $\mathscr{C}_r^A$, co przeczy założeniu.

Załóżmy teraz, że $m \leq s < 2m$. Weźmy $q \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cap (p+m-1, p+m)$. Zachodzą wówczas nierówności:

$$p \leq r < p+1 < q < p+s \leq r+s < p+2m.$$

Zauważmy najpierw, że $\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(\mathscr{C}_r^{\widehat{B}}, \mathscr{C}_q^{\widehat{B}}) \neq 0$, gdyż $\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(\mathscr{C}_p^{\widehat{B}}, \mathscr{C}_{p+m}^{\widehat{B}}) \neq 0$ oraz mamy własność $(T8)$ i nierówności $p \leq r < q < p+m$. Dodatkowo, ponieważ $p+m-1 \in \mathbb{Z}$, to $\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(\mathscr{C}_{p+m-1}^{\widehat{B}}, \mathscr{C}_{p+2m-1}^{\widehat{B}}) \neq 0$, a z własności $(T8)$ otrzymujemy $\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(\mathscr{C}_q^{\widehat{B}}, \mathscr{C}_{p+2m-1}^{\widehat{B}}) \neq 0$, więc $\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(\mathscr{C}_q^{\widehat{B}}, \mathscr{C}_{r+s}^{\widehat{B}}) \neq 0$. Korzystając z własności $(T9)$ i $(T10)$ otrzymujemy

$$\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}\left(\mathscr{C}_{r,x}^{\widehat{B}}, \mathscr{C}_{q,y}^{\widehat{B}}\right) \neq 0 \text{ dla } x \in \mathbb{X}_r \text{ i } y \in \mathbb{X}_q,$$
$$\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}\left(\mathscr{C}_{q,y'}^{\widehat{B}}, \mathscr{C}_{r+s,x'}^{\widehat{B}}\right) \neq 0 \text{ dla } x' \in \mathbb{X}_{r+s} \text{ i } y' \in \mathbb{X}_q,$$

gdyż $q \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. Podobnie jak wcześniej wnosimy istnienie nieskończonego krótkiego cyklu $F_\lambda(X) \to F_\lambda(Y) \to F_\lambda(X') = F_\lambda(X)$ w $\operatorname{mod} A$, gdzie $F_\lambda(X)$ jest w $\mathscr{C}_r^A$, co przeczy założeniu. □

Stwierdzenie 3.5. *Niech B będzie prawie utajoną algebrą kanoniczną typu Euklidesa lub typu dzikiego, G nieskończoną, dopuszczalną i cykliczną grupą automorfizmów algebry powtórzeń $\widehat{B}$, a $A = \widehat{B}/G$. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) Γ_A *ma rodzinę quasi-rur ze wspólnymi składnikami kompozycyjnymi, zamkniętą na składniki kompozycyjne i składającą się z modułów, które nie leżą na nieskończonych krótkich cyklach.*

(ii) G *jest jednej z postaci*

(a) $G = (\varphi\nu_{\widehat{B}}^2)$, *dla ściśle dodatniego automorfizmu φ algebry $\widehat{B}$,*

(b) $G = (\varphi\nu_{\widehat{B}}^2)$, *dla sztywnego automorfizmu φ algebry $\widehat{B}$, którego ograniczenie do B nie zachowuje niestabilnej rury promieniowej z jedynej rodziny $\mathscr{T}^B$ rur promieniowych w kołczanie Γ_B.*

Dowód. Z Twierdzenia 3.1 wiemy, że G jest generowana przez ściśle dodatni automorfizm g algebry $\widehat{B}$. Stąd istnieje dodatnia liczba całkowita l taka, że $g(\mathscr{C}_q^{\widehat{B}}) = \mathscr{C}_{q+l}^{\widehat{B}}$ oraz $g(\mathscr{X}_q^{\widehat{B}}) = \mathscr{X}_{q+l}^{\widehat{B}}$ dla dowolnego $q \in \mathbb{Z}$. Rozważmy nakrycie Galois $F\colon \widehat{B} \to \widehat{B}/G = A$ i stowarzyszony z nim funktor opuszczania $F_\lambda\colon \operatorname{mod}\widehat{B} \to \operatorname{mod} A$. Ponieważ F_λ jest gęsty, to dla nierozkładalnych modułów X i Y w $\operatorname{mod}\widehat{B}$ otrzymujemy naturalne izomorfizmy k-modułów:

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \operatorname{Hom}_{\widehat{B}}\left(X, {}^{g^i}Y\right) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(F_\lambda(X), F_\lambda(Y)),$$

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \operatorname{Hom}_{\widehat{B}}\left({}^{g^i}X, Y\right) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(F_\lambda(X), F_\lambda(Y)).$$

Pokażemy najpierw implikację $(i) \Rightarrow (ii)$. Załóżmy, że Γ_A ma rodzinę $\mathscr{C} = (\mathscr{C}_x)_{x\in\mathbb{X}}$ quasi-rur ze wspólnymi składnikami kompozycyjnymi, zamkniętą na składniki kompozycyjne oraz składającą się z modułów, które nie leżą na krótkich nieskończonych cyklach w $\operatorname{mod} A$. Ze Stwierdzenia I.6.10 wynika, że quasi-rury $\mathscr{C}_x$, $x \in \mathbb{X}$, są uogólnione standardowe. W istocie, ponieważ $A = \widehat{B}/G$, gdzie B jest prawie utajoną algebrą kanoniczną wraz z separującą rodziną rur promieniowych $\mathscr{T} = (\mathscr{T}_x)_{x\in\mathbb{X}}$, to wnioskujemy, że quasi-rury $\mathscr{C}_x$, $x \in \mathbb{X}$, są otrzymane z rur promieniowych $\mathscr{T}_x$, $x \in \mathbb{X}$, poprzez zastosowanie operacji dopuszczalnych typu $(ad\,1^*)$ i $(ad\,2^*)$. Wobec tego, korzystając z Lematu I.6.9 oraz argumentów użytych w dowodzie Lematu I.6.11 otrzymujemy, że quasi-rury $\mathscr{C}_x$, gdzie $x \in \mathbb{X}$, są parami ortogonalne, gdyż rury promieniowe $\mathscr{T}_x$, $x \in \mathbb{X}$, są parami ortogonalne.

Z własności $(E1)$ wiemy, że dla każdego $q \in \mathbb{Z}$ rodzina składowych $\mathscr{C}_q^A = F_\lambda(\mathscr{C}_q^{\widehat{B}})$ jest nieskończoną rodziną $\mathscr{C}_{q,x}^A = F_\lambda(\mathscr{C}_{q,x}^{\widehat{B}})$, $x \in \mathbb{X}_q$, quasi-rur ze wspólnymi składnikami kompozycyjnymi. Ponadto

$$\Gamma_A = \mathscr{C}_0^A \vee \mathscr{X}_0^A \vee \mathscr{C}_1^A \vee \mathscr{X}_1^A \vee \ldots \vee \mathscr{C}_{l-1}^A \vee \mathscr{X}_{l-1}^A,$$

gdzie $\mathscr{X}_q^A = F_\lambda(\mathscr{X}_q^{\widehat{B}})$, dla $q \in \{0,1,\ldots,l-1\}$, gdyż F_λ indukuje izomorfizm kołczanów z translacją $\Gamma_{\widehat{B}}/G \xrightarrow{\sim} \Gamma_A$, gdzie $G = (g)$, a $g(\mathscr{C}_q^{\widehat{B}}) = \mathscr{C}_{q+l}^{\widehat{B}}$ oraz $g(\mathscr{X}_q^{\widehat{B}}) = \mathscr{X}_{q+l}^{\widehat{B}}$, dla $q \in \mathbb{Z}$. Wówczas z faktu, że $\mathscr{C}$ jest rodziną quasi-rur w Γ_A zamkniętą na składniki kompozycyjne wnioskujemy istnienie takiej liczby $r \in \{0,1,\ldots,l-1\}$, że $\mathscr{C}$ zawiera wszystkie quasi-rury $\mathscr{C}_{r,x}^A$, gdzie $x \in \mathbb{X}_r$, rodziny $\mathscr{C}_r^A$. W szczególności otrzymujemy, iż $\mathscr{C}_r^A = (\mathscr{C}_{r,x}^A)_{x\in\mathbb{X}_r}$ jest rodziną parami ortogonalnych, uogólnionych standardowych quasi-rur składających się z modułów, które nie leżą na nieskończonych krótkich cyklach w $\operatorname{mod} A$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $r = 0$.

Twierdzimy, że to implikuje, iż G jest jednej z postaci (a) lub (b) warunku (ii). Pokażemy najpierw, że $g = \varphi\nu_{\widehat{B}}^2$ dla dodatniego automorfizmu φ algebry $\widehat{B}$. Załóżmy, że to nie jest prawdą. Wówczas z własności $(E3)$ otrzymujemy, że $l \in \{1,2,3\}$. Mamy trzy przypadki do rozpatrzenia.

W pierwszym przypadku załóżmy, że $l = 1$. Wówczas mamy $F_\lambda(\mathscr{C}_0^{\widehat{B}}) = \mathscr{C}_0^A = F_\lambda(\mathscr{C}_1^{\widehat{B}})$. Stosując własność $(E7)$ otrzymujemy, że dla każdego $x \in \mathbb{X}_0$ quasi-rura $\mathscr{C}_{0,x}^A$ nie jest uogólniona standardowa, sprzeczność.

W drugim przypadku załóżmy, że $l = 2$. Wówczas mamy $F_\lambda(\mathscr{C}_0^{\widehat{B}}) = \mathscr{C}_0^A = F_\lambda(\mathscr{C}_2^{\widehat{B}})$. Z własności $(E1)$ wiemy, iż $\mathscr{C}_0^A = (\mathscr{C}_{0,x}^A)_{x\in\mathbb{X}_0}$ i $\mathscr{C}_1^A = (\mathscr{C}_{1,x}^A)_{x\in\mathbb{X}_1}$ są nieskończonymi rodzinami quasi-rur. Ponieważ Γ_A zawiera tylko skończenie wiele modułów projektywnych, to możemy wybrać takie $x_0 \in \mathbb{X}_0$ oraz $x_1 \in \mathbb{X}_1$, że $\mathscr{C}_{0,x_0}^A$ i $\mathscr{C}_{1,x_1}^A$ są stabilnymi rurami. Zauważmy, że z własności $(E3)$ $\mathscr{C}_{0,x_0}^A = F_\lambda(\mathscr{C}_{0,x_0}^{\widehat{B}})$, $\mathscr{C}_{1,x_1}^A = F_\lambda(\mathscr{C}_{1,x_1}^{\widehat{B}})$ i $\mathscr{C}_{0,x_0}^A = F_\lambda(\mathscr{C}_{2,x_2}^{\widehat{B}})$, dla takiego $x_2 \in \mathbb{X}_2$, że $g(\mathscr{C}_{0,x_0}^{\widehat{B}}) = \mathscr{C}_{2,x_2}^{\widehat{B}}$. Stosując własność $(E7)$ wnosimy, że $\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(\mathscr{C}_{0,x_0}^{\widehat{B}}, \mathscr{C}_{1,x_1}^{\widehat{B}}) \neq 0$ i $\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(\mathscr{C}_{1,x_1}^{\widehat{B}}, \mathscr{C}_{2,x_2}^{\widehat{B}}) \neq 0$, a stąd $\operatorname{Hom}_A(\mathscr{C}_{0,x_0}^A, \mathscr{C}_{1,x_1}^A) \neq 0$ oraz $\operatorname{Hom}_A(\mathscr{C}_{1,x_1}^A, \mathscr{C}_{0,x_0}^A) \neq 0$. Wtedy z Lematu I.6.11 wynika, że w $\operatorname{mod} A$ istnieje nieskończony krótki cykl $M \to N \to M$, gdzie M jest w $\mathscr{C}_{0,x_0}^A$, $N \in \mathscr{C}_{1,x_1}^A$, co daje sprzeczność, gdyż $\mathscr{C}_{0,x_0}^A$ jest quasi-rurą w rodzinie $\mathscr{C} = (\mathscr{C}_x)_{x\in\mathbb{X}}$.

W trzecim przypadku załóżmy, że $l = 3$. Wtedy $F_\lambda(\mathscr{C}_0^{\widehat{B}}) = \mathscr{C}_0^A = F_\lambda(\mathscr{C}_3^{\widehat{B}})$. Ponieważ $\mathscr{C}_0^A = (\mathscr{C}_{0,x}^A)_{x\in\mathbb{X}_0}$ jest nieskończoną rodziną quasi-rur, a liczba projektywnych modułów w Γ_A jest skończona, więc możemy wybrać takie $x_0 \in \mathbb{X}_0$, że $\mathscr{C}_{0,x_0}^A$ jest stabilną rurą w Γ_A. Zauważmy, że wówczas $\mathscr{C}_{0,x_0}^A = F_\lambda(\mathscr{C}_{0,x_0}^{\widehat{B}})$, gdzie $\mathscr{C}_{0,x_0}^{\widehat{B}}$ jest stabilną rurą w $\Gamma_{\widehat{B}}$, a stąd $g(\mathscr{C}_{0,x_0}^{\widehat{B}})$ jest stabilną rurą $\mathscr{C}_{3,x_3}^{\widehat{B}}$ w kołczanie $\Gamma_{\widehat{B}}$ dla pewnego $x_3 \in \mathbb{X}_3$. Stosując własność $(E8)$ dostajemy, że istnieje taki nierozkładalny moduł projektywny P w $\mathscr{X}_1^{\widehat{B}}$, że $\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(\mathscr{C}_{0,x_0}^{\widehat{B}}, P) \neq 0$ oraz $\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(P, \mathscr{C}_{3,x_3}^{\widehat{B}}) \neq 0$. Wtedy $F_\lambda(\mathscr{C}_{0,x_0}^{\widehat{B}}) = \mathscr{C}_{0,x_0}^A = F_\lambda(\mathscr{C}_{3,x_3}^{\widehat{B}})$, a $F_\lambda(P)$ jest takim nierozkładalnym A-modułem projektywnym w $F_\lambda(\mathscr{X}_1^{\widehat{B}})$, że $\operatorname{Hom}_A(\mathscr{C}_{0,x_0}^A, F_\lambda(P)) \neq 0$ i $\operatorname{Hom}_A(F_\lambda(P), \mathscr{C}_{0,x_0}^A) \neq 0$. Wtedy z Lematu I.6.11 istnieje w $\operatorname{mod} A$ nieskończony krótki cykl $M \to F_\lambda(P) \to M$, gdzie M należy do $\mathscr{C}_{0,x_0}^A$, co ponownie daje sprzeczność, gdyż $\mathscr{C}_{0,x_0}^A$ jest quasi-rurą z rodziny $\mathscr{C} = (\mathscr{C}_x)_{x\in\mathbb{X}}$.

Podsumowując pokazaliśmy, że $g = \varphi\nu_{\widehat{B}}^2$ dla pewnego dodatniego automorfizmu φ algebry powtórzeń $\widehat{B}$.

Załóżmy teraz, że φ jest sztywnym automorfizmem $\widehat{B}$, a B jest prawie utajoną algebrą kanoniczną typu Euklidesa lub dzikiego typu, której jedyna separująca rodzina rur promieniowych $\mathscr{T}^B$ zawiera co najmniej jeden moduł projektywny lub równoważnie (patrz [36], [40]) B nie jest utajoną algebrą kanoniczną. Wtedy rodzina $\mathscr{C}_0^{\widehat{B}}$ quasi-rur w $\Gamma_{\widehat{B}}$, a stąd również rodzina $\mathscr{C}_0^A = F_\lambda(\mathscr{C}_0^{\widehat{B}})$ quasi-rur w Γ_A, zawiera co najmniej jeden moduł projektywny. Zauważmy także, że ponieważ φ jest sztywnym automorfizmem algebry $\widehat{B}$, to jego ograniczenie φ_B do $B = B_0$ jest k-algebrowym automorfizmem i φ_B działa na jedynej separującej rodzinie rur promieniowych $\mathscr{T}^B$ w kołczanie Γ_B. Załóżmy, że φ_B ustala niestabilną rurę, tzn. rurę zawierającą moduł projektywny. Wtedy istnieje taki $x_0 \in \mathbb{X}_0$, że $\mathscr{C}_{0,x_0}^{\widehat{B}}$ jest quasi-rurą zawierającą co najmniej jeden moduł projektywny taki, że $\varphi(\mathscr{C}_{0,x_0}^{\widehat{B}}) = \mathscr{C}_{0,x_0}^{\widehat{B}}$. Ponieważ $g = \varphi\nu_{\widehat{B}}^2$, to stosując własność $(E3)$, otrzymujemy, iż $g(\mathscr{C}_{0,x_0}^{\widehat{B}}) = \mathscr{C}_{4,x_0}^{\widehat{B}}$. Rozważmy nierozkładalny $\widehat{B}$-moduł projektywny P w $\mathscr{C}_{0,x_0}^{\widehat{B}}$. Wtedy z własności $(E3)$ wnosimy, że $\nu_{\widehat{B}}(P) \in \mathscr{C}_{2,x_0}^{\widehat{B}}$ i $\nu_{\widehat{B}}^2(P) \in \mathscr{C}_{4,x_0}^{\widehat{B}}$. Oczywiście $\mathrm{Hom}_{\widehat{B}}(P, \nu_{\widehat{B}}(P)) \neq 0$ i $\mathrm{Hom}_{\widehat{B}}(\nu_{\widehat{B}}(P), \nu_{\widehat{B}}^2(P)) \neq 0$ bo $\mathrm{soc}\, \nu_{\widehat{B}}(P) = \mathrm{top}\, P$ oraz $\mathrm{soc}\, \nu_{\widehat{B}}^2(P) = \mathrm{top}\, \nu_{\widehat{B}}(P)$. Co więcej zarówno $g(P)$ jak i $\nu_{\widehat{B}}^2(P)$ należą do quasi-rury $\mathscr{C}_{4,x_0}^{\widehat{B}}$. Wobec tego wnioskujemy istnienie nierozkładalnych A-modułów projektywnych $F_\lambda(P)$ oraz $F_\lambda(\nu_{\widehat{B}}^2(P))$ w $\mathscr{C}_{0,x_0}^A$ oraz nierozkładalnego A-modułu projektywnego $F_\lambda(\nu_{\widehat{B}}(P))$ w $\mathscr{C}_{2,x_0}^A$ takich, że $\mathrm{Hom}_A(F_\lambda(P), F_\lambda(\nu_{\widehat{B}}(P))) \neq 0$ oraz $\mathrm{Hom}_A(F_\lambda(\nu_{\widehat{B}}(P)), F_\lambda(\nu_{\widehat{B}}^2(P))) \neq 0$. Wówczas z Lematu I.6.11 istnieje w $\mathrm{mod}\, A$ nieskończony krótki cykl $M \to F_\lambda(\nu_{\widehat{B}}(P)) \to M$, gdzie M należy do $\mathscr{C}_{0,x_0}^A$, co prowadzi do sprzeczności, gdyż $\mathscr{C}_{0,x_0}^A$ należy do $\mathscr{C} = (\mathscr{C}_x)_{x\in\mathbb{X}}$. Zatem dowód implikacji $(i) \Rightarrow (ii)$ został zakończony.

Przypuśćmy, że zachodzi (ii). W szczególności $g = \varphi\nu_{\widehat{B}}^2$ dla dodatniego automorfizmu φ algebry $\widehat{B}$. Wówczas własność $(E3)$ implikuje istnienie takiej dodatniej liczby całkowitej $l \geq 4$, że $g(\mathscr{C}_q^{\widehat{B}}) = \mathscr{C}_{q+l}^{\widehat{B}}$, dla każdego $q \in \mathbb{Z}$. Niech $\mathscr{C} = (\mathscr{C}_x)_{x\in\mathbb{X}}$, gdzie $\mathbb{X} = \mathbb{X}_0$, a $\mathscr{C}_x = \mathscr{C}_{0,x}^A = F_\lambda(\mathscr{C}_{0,x}^{\widehat{B}})$ dla każdego $x \in \mathbb{X}$. Ponieważ $g = \varphi\nu_{\widehat{B}}^2 = (\varphi\nu_{\widehat{B}})\nu_{\widehat{B}}$, gdzie $\varphi\nu_{\widehat{B}}$ jest ściśle dodatnim automorfizmem algebry $\widehat{B}$, to wykorzystując wiedzę o nośnikach modułów nierozkładalnych w $\mathrm{mod}\, \widehat{B}$ (patrz [1], [40]) wnioskujemy, że obrazy $F_\lambda(S)$ oraz $F_\lambda(T)$ dowolnych nieizomorficznych $\widehat{B}$-modułów prostych S i T, które występują jako składniki kompozycyjne w ustalonej rodzinie $\mathscr{C}_q^{\widehat{B}}$ są nieizomorficznymi prostymi A-modułami. Wobec tego z Twierdzenia 3.1 i własności $(E1)$-$(E3)$ wynika, że $\mathscr{C}$ jest nieskończoną rodziną quasi-rur ze wspólnymi składnikami kompozycyjnymi i zamkniętą na składniki kompozycyjne. Pokażemy teraz, że $\mathscr{C}$ składa się z nierozkładalnych A-modułów, które nie leżą na nieskończonych krótkich cyklach w $\mathrm{mod}\, A$. Zauważmy, że dla dwóch nierozkładalnych modułów M i N w $\mathscr{C}$ mamy $M = F_\lambda(X)$ oraz $N = F_\lambda(Y)$, gdzie X i Y są pewnymi nierozkładalnym $\widehat{B}$-modułem oraz F_λ indukuje izomorfizm k-modułów $\mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\widehat{B}}(X, Y)$, co wynika z własności $(E4)$, $(E5)$ oraz nierówności $l \geq 4 > 2$. W szczególności z własności $(E2)$ i $(E1)$, $\mathscr{C} = (\mathscr{C}_x)_{x\in\mathbb{X}}$ jest rodziną parami ortogonalnych, uogólnionych standardowych quasi-rur w kołczanie Γ_A. Przypuśćmy, że istnieje nieskończony krótki cykl $M \to L \to M$ w $\mathrm{mod}\, A$, gdzie M należy do quasi-rury $\mathscr{C}_{x_0} = \mathscr{C}_{0,x_0}^A$, dla pewnego $x_0 \in \mathbb{X} = \mathbb{X}_0$. Wówczas L nie należy do $\mathscr{C}_{x_0}$ bo $\mathscr{C}_{x_0}$ jest uogólniona standardowa. Wtedy $M = F_\lambda(X)$ dla pewnego X w $\mathscr{C}_{0,x_0}^{\widehat{B}}$, a $L = F_\lambda(Z)$ dla takiego nierozkładalnego modułu Z w $\operatorname{mod}\widehat{B}$, że $\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(X,Z) \neq 0$. Stosując własności $(E4)$ oraz $(E5)$ dostajemy, że $Z \in \mathscr{X}_0^{\widehat{B}} \vee \mathscr{C}_1^{\widehat{B}} \vee \mathscr{X}_1^{\widehat{B}} \vee \mathscr{C}_2^{\widehat{B}}$. Ponieważ $\operatorname{Hom}_A(L,M) \neq 0$, to korzystając ponownie z własności $(E4)$ oraz $(E5)$ wnosimy, że $\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(Z, {}^gX) \neq 0$. Zauważmy, że ${}^gX \in g(\mathscr{C}_0^{\widehat{B}}) = \mathscr{C}_l^{\widehat{B}}$, gdzie $l \geq 4$. Stąd stosując własności $(E4)$ i $(E5)$ otrzymujemy, iż Z należy do $\mathscr{C}_2^{\widehat{B}}$, a $l = 4$. Jednak wówczas własność $(E6)$ implikuje, że quasi-rura $\mathscr{C}_{0,x_0}^{\widehat{B}}$ nie jest stabilna, $Z \in \nu_{\widehat{B}}(\mathscr{C}_{0,x_0}^{\widehat{B}})$, a ${}^gX \in \nu_{\widehat{B}}^2(\mathscr{C}_{0,x_0}^{\widehat{B}})$. W szczególności otrzymujemy, że

$$(\nu_{\widehat{B}}^2\varphi)\left(\mathscr{C}_{0,x_0}^{\widehat{B}}\right) = (\varphi\nu_{\widehat{B}}^2)\left(\mathscr{C}_{0,x_0}^{\widehat{B}}\right) = g\left(\mathscr{C}_{0,x_0}^{\widehat{B}}\right) = \nu_{\widehat{B}}^2\left(\mathscr{C}_{0,x_0}^{\widehat{B}}\right),$$

a stąd $\varphi(\mathscr{C}_{0,x_0}^{\widehat{B}}) = \mathscr{C}_{0,x_0}^{\widehat{B}}$. Wobec tego φ jest sztywnym automorfizmem algebry $\widehat{B}$, który ustala niestabilną quasi-rurę $\mathscr{C}_{0,x_0}^{\widehat{B}}$ kołczanu $\Gamma_{\widehat{B}}$. Wtedy ograniczenie φ_B automorfizmu φ do algebry B jest k-algebrowym automorfizmem, który ustala niestabilną rurę $\mathscr{T}_{x_0}^B$ w jedynej separującej rodzinie rur promieniowych $\mathscr{T}^B$ kołczanu Γ_B, której wszystkie moduły należą do quasi-rury $\mathscr{C}_{0,x_0}^{\widehat{B}}$ w $\Gamma_{\widehat{B}}$. Zatem otrzymujemy sprzeczność z założeniem (ii). Wobec tego rodzina quasi-rur $\mathscr{C} = \mathscr{C}_0^A = \mathscr{C}_{0,x}^A$, gdzie $x \in \mathbb{X} = X_0$, składa się z nierozkładalnych A-modułów, które nie leżą na krótkich nieskończonych cyklach w $\operatorname{mod} A$. To kończy dowód implikacji $(ii) \Rightarrow (i)$. $\square$

ROZDZIAŁ IV

ALGEBRY SAMOINJEKTYWNE Z UOGÓLNIONYMI STANDARDOWYMI SKŁADOWYMI

1 Algebry samoinjektywne z uogólnionymi standardowymi składowymi acyklicznymi

Przypomnijmy, że badania nad uogólnionymi standardowymi składowymi rozpoczął Skowroński w [60]. Szybko okazało się, że badanie klasy algebr samoinjektywnych z uogólnionymi standardowymi składowymi jest ważnym oraz trudnym zagadnieniem współczesnej teorii reprezentacji algebr gdyż prawdziwe jest poniższe, zaskakujące twierdzenie udowodnione w [68].

Twierdzenie 1.1. *Niech A będzie ustaloną algebrą, a M skończenie wymiarowym, prawym A-modułem. Wówczas istnieje nierozkładalna, symetryczna algebra Λ oraz uogólniona standardowa rodzina $\mathscr{T}_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{P}_1(k)$ wiernych, stabilnych rur w Γ_Λ, dla której prawdziwe są następujące zdania.*

(i) A jest algebrą ilorazową algebry Λ.

(ii) Dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ oraz $\lambda \in \mathbb{P}_1(k)$, A-moduł M jest m-krotnym ilorazem prawie wszystkich modułów z rury $\mathscr{T}_\lambda$.

Niech A będzie algebrą artinowską nad pierścieniem artinowskim k. Na początek, przypomnijmy następujący fakt udowodniony w [60].

Twierdzenie 1.2. *Niech $\mathscr{C}$ będzie uogólnioną standardową składową w Γ_A. Wówczas $\mathscr{C}$ zawiera co najwyżej skończenie wiele nieokresowych τ_A-orbit.*

Happel, Preiser i Ringel udowodnili w [19] następujące, bardzo ważne twierdzenie.

Twierdzenie 1.3. *Niech Γ będzie nieskończonym, pełnym, spójnym i stabilnym podkołczanem kołczanu Γ_A. Jeśli Γ zawiera moduł τ_A-okresowy, to Γ jest stabilną rurą.*

Zauważmy, że jeśli A jest algebrą samoinjektywną, to τ_A-orbity modułów projektywno-injektywnych są jednoelementowe. Wobec tego dla dowolnej uogólnionej standardowej składowej $\mathscr{C}$ w Γ_A jej stabilna część $\mathscr{C}^s$ jest albo stabilną rurą albo postaci $\mathbb{Z}\Delta$ dla pewnego acyklicznego, skończonego kołczanu Δ. Zatem, chcąc badać te algebry samoinjektywne A, które zawierają uogólnione standardowe składowe w kołczanie Auslandera-Reiten Γ_A, możemy rozważyć dwa przypadki: Γ_A zawiera uogólnioną standardową składową acykliczną lub Γ_A zawiera uogólnioną standardową quasi-rurę. W pracach [73], [74] (patrz również [77]) Skowroński i Yamagata podali kompletny opis algebr samoinjektywnych z pierwszego przypadku, a mianowicie, mamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.4. *Niech A będzie bazową i spójną artinowską algebrą samoinjektywną. Wówczas następujące warunki są równoważne.*

(i) Γ_A *zawiera uogólnioną standardową składową acykliczną.*

(ii) *A jest cokołowo równoważna z algebrą orbit jednej z postaci:*

- *(a)* $\widehat{B}/(\varphi\nu_{\widehat{B}})$, *gdzie B jest algebrą odwróconą, która nie jest typu Dynkina, a φ jest ściśle dodatnim automorfizmem $\widehat{B}$;*
- *(b)* $\widehat{B}/(\varphi\nu_{\widehat{B}})$, *gdzie B jest algebrą odwróconą zadaną przez regularny moduł odwracający nad dziką algebrą dziedziczną H, a φ jest sztywnym automorfizmem $\widehat{B}$.*

Poniższe dwa wyniki, które wykorzystamy w dalszej części naszych rozważań, zostały udowodnione przez Skowrońskiego w [60] oraz [61].

Stwierdzenie 1.5. *Niech $\mathscr{C}$ będzie uogólnioną standardową składową w Γ_A. Wtedy dla każdego $d \in \mathbb{N}$ istnieje co najwyżej skończenie wiele modułów w $\mathscr{C}$ o długości d.*

Twierdzenie 1.6. *Niech A będzie algebrą artinowską, dla której każda składowa w Γ_A jest uogólniona standardowa. Wówczas A jest reprezentacyjnie nieskończona wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ideał I w A taki, że A/I jest utajoną algebrą typu Euklidesa.*

Na zakończenie przypomnijmy, że *składową cykliczną* $\mathscr{C}$ nazywamy składową, w której każdy moduł leży na zorientowanym cyklu w Γ_A. W pracy [28] autorzy udowodnili następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.7. *Niech A będzie quasi-odwróconą algebrą, a $\mathscr{C}$ składową w Γ_A. Następujące warunki są równoważne.*

(i) *Nie ma zewnętrznej krótkiej drogi w $\mathscr{C}$.*

(ii) *$\mathscr{C}$ jest prawie okresowa.*

(iii) *$\mathscr{C}$ jest uogólniona standardowa.*

(iv) $\mathscr{C}$ *jest albo składową postprojektywną albo składową preinjektywną albo rurą promieniową albo rurą kopromieniową albo składową łączącą (w przypadku, gdy A jest algebrą odwróconą).*

2 Główne twierdzenie i jego konsekwencje

Twierdzenie 2.1. *Niech A będzie spójną, bazową, artinowską algebrą samoinjektywną. Następujące warunki są równoważne.*

(i) Γ_A *zawiera niepustą rodzinę quasi-rur* $\mathscr{C} = (\mathscr{C}_i)_{i \in I}$ *mającą wspólne składniki kompozycyjne, zamkniętą na składniki kompozycyjne oraz składającą się z modułów, które nie leżą na krótkich nieskończonych cyklach w* $\operatorname{mod} A$.

(ii) *A jest izomorficzna z algebrą orbit $\widehat{B}/G$, gdzie B jest prawie utajoną algebrą kanoniczną, a G nieskończoną cykliczną grupą automorfizmów kategorii $\widehat{B}$ jednej z postaci*

   (a) $G = (\varphi \nu_{\widehat{B}}^2)$, *dla ściśle dodatniego automorfizmu φ algebry $\widehat{B}$,*

   (b) $G = (\varphi \nu_{\widehat{B}}^2)$, *dla algebry tubularnej B oraz sztywnego automorfizmu φ algebry $\widehat{B}$,*

   (c) $G = (\varphi \nu_{\widehat{B}}^2)$, *dla algebry B typu Euklidesa lub dzikiego oraz sztywnego automorfizmu φ algebry $\widehat{B}$, który działa wolno na niestabilnych rurach jedynej separującej rodziny rur promieniowych $\mathscr{T}^B$ w kołczanie Γ_B.*

Poniższy wniosek jest konsekwencją Twierdzenia 2.1 oraz Stwierdzeń III.3.4 i III.3.5.

Wniosek 2.2. *Niech A będzie bazową, spójną, samoinjektywną algebrą artinowską. Następujące warunki są równoważne.*

(i) Γ_A *zawiera rodzinę stabilnych rur* $\mathscr{T} = (\mathscr{T}_i)_{i \in I}$ *ze wspólnymi składnikami kompozycyjnymi, zamkniętą na składniki kompozycyjne i składającą się z modułów, które nie leżą na nieskończonych krótkich cyklach w* $\operatorname{mod} A$.

(ii) *A jest izmorficzna z algebrą orbit $\widehat{B}/G$, gdzie B jest utajoną algebrą kanoniczną, a G jest nieskończona grupa cykliczną automorfizmów algebry $\widehat{B}$ postaci $(\varphi \nu_{\widehat{B}}^2)$ dla dodatniego automorfizmu φ algebry $\widehat{B}$.*

Z ogólnej teorii (patrz [41], [79]) nieskończona składowa $\mathscr{C}$ kołczanu Auslandera-Reiten Γ_A algebry samoinjektywnej A jest cykliczna wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathscr{C}$ jest quasi-rurą. Ponadto mówimy, że Γ_A jest cykliczny, o ile każda składowa w kołczanie Γ_A jest cykliczna. Otrzymujemy wtedy następującą konsekwencję Twierdzenia 2.1 oraz znanej struktury kołczanów Auslandera-Reiten samoinjektywnych algebr typu kanonicznego (patrz Twierdzenie III.3.3 i Stwierdzenie III.3.4).

Wniosek 2.3. *Niech A będzie bazową, spójną, artinowską algebrą samoinjektywną. Następujące stwierdzenia są równoważne.*

(i) Γ_A *jest cykliczny i zawiera rodzinę* $\mathscr{C} = (\mathscr{C}_i)_{i\in I}$ *quasi-rur ze wspólnymi składnikami kompozycyjnymi, zamkniętą na składniki kompozycyjne i składającą się z modułów, które nie leżą na krótkich nieskończonych cyklach w* $\operatorname{mod} A$.

(ii) Γ_A *jest cykliczny i zawiera rodzinę* $\mathscr{T} = (\mathscr{T}_i)_{i\in I}$ *stabilnych rur ze wspólnymi składnikami kompozycyjnymi, zamkniętą na składniki kompozycyjne i składającą się z modułów, które nie leżą na krótkich nieskończonych cyklach w* $\operatorname{mod} A$.

(iii) A *jest izomorficzna z algebrą orbit* $\widehat{B}/G$, *gdzie* B *jest algebrą tubularną, a* G *nieskończoną grupą cykliczną algebry* $\widehat{B}$ *postaci* $(\varphi\nu_{\widehat{B}}^2)$ *dla dodatniego automorfizmu* φ *algebry* $\widehat{B}$.

Jako konsekwencję Twierdzenia 2.1 oraz faktu, że wartościowane kołczany Gabriela quasi-odwróconych algebr są acykliczne [21] otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 2.4. *Niech A będzie bazową, spójną artinowską algebrą samoinjektywną, której kołczan Auslandera-Reitena* Γ_A *zawiera rodzinę quasi-rur* $\mathscr{C}$ *ze wspólnymi składnikami kompozycyjnymi, zamkniętą na składniki kompozycyjne oraz składającą się z modułów, które nie leżą na nieskończonych krótkich cyklach w* $\operatorname{mod} A$. *Wówczas centrum algebry A jest ciałem, a więc A jest skończenie wymiarową algebrą nad ciałem.*

3 Dowód twierdzenia

Załóżmy, że A jest bazową, spójną artinowską algebrą samoinjektywną. Bezpośrednio ze Stwierdzenia III.3.4 oraz ze Stwierdzenia III.3.5 otrzymujemy implikację $(ii) \Rightarrow (i)$ Twierdzenia 2.1.

Pokażemy teraz implikację $(i) \Rightarrow (ii)$ Twierdzenia 2.1, co zakończy jego dowód.

Załóżmy, że $\mathscr{C} = (\mathscr{C}_i)_{i\in I}$ jest rodziną quasi-rur w kołczanie Γ_A ze wspólnymi składnikami kompozycyjnymi, zamknięta na składniki kompozycyjne oraz składającą się z modułów, które nie leżą na krótkich nieskończonych cyklach w $\operatorname{mod} A$. Wówczas ze Stwierdzenia I.6.10 wynika, że quasi-rury $\mathscr{C}_i$ z rodziny $\mathscr{C}$ są uogólnionymi standardowymi składowymi w kołczanie Γ_A.

Pokażemy najpierw, że $\mathscr{C}$ jest rodziną quasi-rur pewnego quasi-rurowego powiększenia Λ pewnej utajonej algebry kanonicznej C.

Ustalmy $i \in I$ oraz rozważmy algebrę ilorazową $A_i = A/\operatorname{ann}_A(\mathscr{C}_i)$. Wówczas ze Stwierdzenia I.6.10 quasi-rura $\mathscr{C}_i$ jest uogólnioną standardową, dokładną, a więc wierną, składową kołczanu Γ_{A_i}. Ponadto z Lematu I.6.12 $\mathscr{C}_i$ jest quasi-rurą bez zewnętrznych krótkich dróg.

Stosując Twierdzenie I.7.8 wnosimy, iż A_i jest quasi-rurowym powiększeniem pewnej utajonej algebry kanonicznej C_i, istnieje separująca rodzina stabilnych rur $\mathscr{T}^{C_i} = (\mathscr{T}_x^{C_i})_{x\in\mathbb{X}_i}$ w kołczanie Γ_{C_i} oraz taka stabilna rura $\mathscr{T}_{x_i}^{C_i}$, dla pewnego $x_i \in \mathbb{X}_i$, że $\mathscr{C}_i$ jest otrzymana z rury $\mathscr{T}_{x_i}^{C_i}$ poprzez ciąg operacji dopuszczczalnych typu $(ad\,1)$, $(ad\,2)$, $(ad\,1^*)$ i $(ad\,2^*)$ odpowiadających operacjom dopuszczalnym prowadzącym od algebry C_i do A_i. Przypomnijmy, że zbiór indeksów $\mathbb{X}_i$ jest nieskończony. Stąd $\mathscr{T}^{C_i}$ jest nieskończoną rodziną parami ortogonalnych stabilnych rur, składających się z modułów, które nie leżą na krótkich nieskończonych cyklach w $\operatorname{mod} C_i$, gdyż $\mathscr{T}^{C_i}$ jest separującą rodziną stabilnych rur w kołczanie Γ_{C_i}. Ponieważ C_i jest algebrą ilorazową algebry A_i, więc także algebrą ilorazową algebry A. Zatem $C_i = A/J_i$ dla pewnego ideału J_i algebry A. Odnotujmy, że $\mathscr{T}^{C_i} = (\mathscr{T}_x^{C_i})_{x\in\mathbb{X}_i}$ jest rodziną stabilnych rur w Γ_{C_i} ze wspólnymi składnikami kompozycyjnymi (patrz [36], [64]). Ponieważ quasi-rury $\mathscr{C}_i$, zawierające wszystkie moduły $\mathscr{T}_{x_i}^{C_i}$, należą do $\mathscr{C}$, a $\mathscr{C}$ jest zamknięta na składniki kompozycyjne wnosimy, że wszystkie moduły w rodzinie $\mathscr{T}^{C_i}$ należą do $\mathscr{C}$. Stosując Lemat I.6.14 wnioskujemy, że dla każdego $x \in \mathbb{X}_i$ istnieje quasi-rura $\mathscr{C}_x^{(i)}$ w $\mathscr{C}$ zawierająca wszystkie moduły ze stabilnej rury $\mathscr{T}_x^{C_i}$ of Γ_{C_i}. Ponadto z Lematu I.6.12 otrzymujemy, że $\mathscr{C}_x^{(i)} \neq \mathscr{C}_y^{(i)}$ dla wszystkich $x \neq y$ w $\mathbb{X}_i$, gdyż rury $\mathscr{T}_x^{(i)}$ i $\mathscr{T}_y^{(i)}$ są ortogonalne. Co więcej, z Lematu I.6.13 wynika, iż $\mathscr{T}_x^{C_i} = \mathscr{C}_x^{(i)}$ dla prawie wszystkich indeksów x in $\mathbb{X}_i$, tzn. dla tych $x \in \mathbb{X}_i$, dla których $\mathscr{C}_x^{(i)}$ jest stabilną rurą. Zauważmy również, że $\mathscr{C}_x^{(i)}$, gdzie $x \in \mathbb{X}_i$, jest rodziną quasi-rur ze wspólnymi składnikami kompozycyjnymi. Dalej, dla $x \in \mathbb{X}_i$ takich, że $\mathscr{T}_x^{C_i} = \mathscr{C}_x^{(i)}$ mamy $J_i = \operatorname{ann}_A(\mathscr{C}_x^{(i)})$ bowiem $\mathscr{T}_x^{C_i}$ jest dokładną składową w kołczanie Γ_{C_i}.

Twierdzimy, że wszystkie utajone algebry kanoniczne C_i, $i \in I$, są sobie równe. Weźmy $i \neq j$ w I. Ponieważ zbiory $\mathbb{X}_i$ oraz $\mathbb{X}_j$ są nieskończone, to możemy wziąć takie $x \in \mathbb{X}_i$ i $y \in \mathbb{X}_j$, że $\mathscr{T}_x^{C_i} = \mathscr{C}_x^{(i)}$ oraz $\mathscr{T}_y^{C_j} = \mathscr{C}_y^{(j)}$. W szczególności mamy $J_i = \operatorname{ann}_A(\mathscr{T}_x^{C_i})$ i $J_j = \operatorname{ann}_A(\mathscr{T}_y^{C_j})$. Fakt, że $\mathscr{T}_x^{C_i} = \mathscr{T}_y^{C_j}$ implikuje $J_i = J_j$, a stąd $C_i = A/J_i = A/J_j = C_j$. Możemy więc założyć, że $\mathscr{T}_x^{C_i}$ oraz $\mathscr{T}_y^{C_j}$ są różne. Zauważmy, że $\mathscr{T}_x^{C_i}$ i $\mathscr{T}_y^{C_j}$ są stabilnymi rurami w Γ_A ze wspólnymi składnikami kompozycyjnymi, które dodatkowo składają się z modułów nie leżących na krótkich nieskończonych cyklach w $\operatorname{mod} A$, bo $\mathscr{T}_x^{C_i}$ oraz $\mathscr{T}_y^{C_j}$ należą do $\mathscr{C} = (\mathscr{C}_i)_{i\in I}$. Twierdzenie I.6.4 oraz Lemat I.6.17 implikują istnienie takich nierozkładalnych A-modułów $M_i \in \mathscr{T}_x^{C_i}$ oraz $M_j \in \mathscr{T}_y^{C_j}$, że $[M_i] = [M_j]$ w $K_0(A)$ i $J_i = \operatorname{ann}_A(M_i)$, $J_j = \operatorname{ann}_A(M_j)$. Ponieważ $[M_i] = [M_j]$, to istnieje taka algebra ilorazowa $D = A/L$, dla ideału $L = AgA$ algebry A zadanego przez idempotent $g \in A$, że M_i i M_j są wiernymi, nierozkładalnymi D-modułami. Oczywiście wówczas $J_i \subseteq L$ i $J_j \subseteq L$, więc $\mathscr{T}_x^{C_i} = \mathscr{C}_x^{(i)}$ oraz $\mathscr{T}_y^{C_j} = \mathscr{C}_y^{(j)}$ są wiernymi stabilnymi rurami w Γ_D składającymi się z nierozkładalnych D-modułów, które nie leżą na krótkich nieskończonych cyklach w $\operatorname{mod} D$. Ponadto $\operatorname{ann}_D(\mathscr{T}_x^{C_i}) = L/J_i$ oraz $\operatorname{ann}_D(\mathscr{T}_y^{(j)}) = L/J_j$. Stosując Wniosek I.7.6 stwierdzamy, że D jest utajoną algebrą kanoniczną, $\mathscr{T}_x^{C_i}$ oraz $\mathscr{T}_y^{C_j}$ są dokładnymi rurami w Γ_D, a w konsekwencji $J_i = L = J_j$. Wobec tego rzeczywiście $C_i = A/J_i = A/J_j = C_j$, dla wszystkich $i, j \in I$.

Podsumowując udowodniliśmy, że istnieje utajona algebra kanoniczna C taka, że C

jest algebrą ilorazową algebry A oraz, dla dowolnego $i \in I$, algebra $A_i = A/\mathrm{ann}_A(\mathscr{C}_i)$ jest quasi-rurowym powiększeniem algebry C, a $\mathscr{C}_i$ jest otrzymana z pewnej stabilnej rury $\mathscr{T}_{x_i}^C$ w Γ_C, gdzie $x_i \in \mathbb{X}$, poprzez zastosowanie ciągu operacji dopuszczalnych typu $(ad\,1)$, $(ad\,2)$, $(ad\,1^*)$ i $(ad\,2^*)$, gdzie $\mathbb{X}$ jest zbiorem indeksów separującej rodziny $\mathscr{T}^C = (\mathscr{T}_x^C)_{x\in\mathbb{X}}$ stabilnych rur w Γ_C. Ponieważ rodzina $\mathscr{C} = (\mathscr{C}_i)_{i\in I}$ składa się z quasi-rur ze wspólnymi składnikami kompozycyjnymi oraz jest zamknięta na składniki kompozycyjne, to stwierdzamy, iż dla każdego $i \in I$, $\mathscr{T}_{x_i}^C$ jest stabilną rurą w $\mathscr{T}^C$. W szczególności dostajemy równość $\mathbb{X}_i = \mathbb{X}$ dla wszystkich $i \in I$. Co więcej, pokazaliśmy, że dla ustalonego indeksu $x \in \mathbb{X}$, wszystkie moduły ze stabilnej rury $\mathscr{T}_x^C$ należą do quasi-rury $\mathscr{C}_x$ z rodziny $\mathscr{C}$. Dlatego wnioskujemy, że $\Lambda = A/\mathrm{ann}_A(\mathscr{C})$ jest quasi-rurowym powiększeniem utajonej algebry kanonicznej C, które wykorzystuje moduły z separującej rodziny $\mathscr{T}^C = (\mathscr{T}_x^C)_{x\in\mathbb{X}}$ stabilnych rur w Γ_C, a $\mathscr{C}$ jest separującą rodziną quasi-rur w Γ_Λ otrzymaną z rodziny $\mathscr{T}^C$ poprzez iteracyjne zastosowanie ciągu operacji dopuszczalnych typu $(ad\,1)$, $(ad\,2)$, $(ad\,1^*)$ i $(ad\,2^*)$. Stosując Twierdzenie I.7.7 wnioskujemy, że istnieje jedyna prawie utajona kanoniczna algebra ilorazowa $B = \Lambda_r$ algebry Λ (tak zwana prawa quasi-odwrócona część algebry Λ), która jest rurowym rozszerzeniem algebry C, a kołczan Γ_{B_r} zawiera separującą rodzinę $\mathscr{C}^r = (\mathscr{C}_x^r)_{x\in\mathbb{X}}$ rur promieniowych otrzymaną z rodziny $\mathscr{T}^C = (\mathscr{T}_x^C)_{x\in\mathbb{X}}$ kołczanu Γ_C poprzez iteracyjne zastosowanie ciągu operacji dopuszczalnych typu $(ad\,1)$. Ponadto rodzina $\mathscr{C} = (\mathscr{C}_x)_{x\in\mathbb{X}}$ quasi-rur w kołczanie Γ_Λ (oraz Γ_A) otrzymana jest z rodziny $\mathscr{C}^r$ poprzez ciąg operacji dopuszczalnych typu $(ad\,1^*)$ i $(ad\,2^*)$.

Połóżmy $I = \mathrm{ann}_A(\mathscr{C}^r)$, tzn. I jest ideałem w A będącym annihilatorem modułów z rodziny $\mathscr{C}^r$. Ponieważ $\mathscr{C}^r$ jest dokładną rodziną rur promieniowych w kołczanie Γ_B, to $B = A/I$. Możemy założyć, że istnieje taki pełny układ parami ortogonalnych idempotentów $e_1, \ldots, e_n$ algebry A, że $1_A = e_1 + \cdots + e_n$ oraz $e = e_1 + \cdots + e_m$, dla pewnego $m \le n$, jest ilorazową jedynką algebry $B = A/I$. Pokażemy, że I jest ideałem deformującym algebry A takim, że $l_A(I) = Ie$ oraz $r_A(I) = eI$, gdzie $l_A(I) = \{a \in A | aI = 0\}$, a $r_A(I) = \{a \in A | Ia = 0\}$. W tym celu potrzebujemy kilku technicznych lematów.

Oznaczmy przez J ideał śladu rodziny $\mathscr{C}^r$ w A, to jest sumę obrazów wszystkich homomorfizmów z modułów w $\mathscr{C}^r$ do prawego A-modułu A_A. Podobnie przez J' oznaczmy ślad rodziny $\mathrm{D}(\mathscr{C}^r)$ lewych A-modułów w A.

Stwierdzenie 3.1. $J \cup J' \subseteq I$.

Dowód. Zauważmy najpierw, że annihilator $I = \mathrm{ann}_A(\mathscr{C}^r)$ rodziny $\mathscr{C}^r$ jest annihilatorem $\mathrm{ann}_A(M)$ pewnego modułu M w addytywnym domknięciu $\mathrm{add}(\mathscr{C}^r)$ rodziny $\mathscr{C}^r$. Rzeczywiście ponieważ A ma skończoną długość nad k, to

$$I = \mathrm{ann}_A(\mathscr{C}^r) = \bigcap_{X\in\mathscr{C}^r} \mathrm{ann}_A(X) = \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{ann}_A(M_i) = \mathrm{ann}_A\left(\bigoplus_{i=1}^{r} M_i\right)$$

dla skończonej ilości $M_1, \ldots, M_r$ nierozkładalnych modułów z $\mathscr{C}^r$, więc możemy wziąć $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_r$. Zauważmy także, że I jest annihilatorem lewego A-modułu $\mathrm{D}(M)$ z $\mathrm{add}\,\mathrm{D}(\mathscr{C}^r)$.

W szczególności otrzymujemy, że M jest dokładnym, prawym B-modułem, a $\mathrm{D}(M)$ jest dokładnym, lewym B-modułem.

Ponownie wykorzystując fakt, iż A_A jest skończonej długości nad k dostajemy

$$J = \sum_{h \in \mathrm{Hom}_A(Y, A_A),\ Y \in \mathscr{C}^r} \mathrm{Im}\, h = \sum_{i=1}^{s} \mathrm{Im}\, h_i,$$

dla pewnych homomorfizmów $h_i \in \mathrm{Hom}_A(Y_i, A)$, gdzie Y_i należy do $\mathscr{C}^r$ dla $i \in \{1, \dots, s\}$, a stąd mamy epimorfizm prawych A-modułów

$$[h_1 \dots h_s] \colon Y = \bigoplus_{i=1}^{s} Y_i \to J.$$

Wówczas $N = M \oplus Y$ jest modułem z $\operatorname{add} \mathscr{C}^r$ oraz $\mathrm{ann}_A(N) = \mathrm{ann}_A(M) = I$, więc N jest dokładnym, prawym B-modułem oraz istnieje empimorfizm prawych A-modułów $g \colon N \to J$. Wtedy J jest prawym B-modułem, gdyż $JI = g(N)I = g(NI) = g(0) = 0$.

Pokażemy teraz inkluzję $J \subseteq I$. Przypuśćmy, że $J \nsubseteq I$. Ponieważ $I = \mathrm{ann}_A(N)$ jest przecięciem jąder wszystkich homomorfizmów z $\mathrm{Hom}_A(A_A, N)$, to istnieje taki homomorfizm $f \colon A \to N$ w $\operatorname{mod} A$, że $f(J) \neq 0$. Wówczas istnieją składniki proste U i V modułu N oraz P modułu A_A takie, że $f(g(U) \cap P) \cap V \neq 0$, a w konsekwencji dostajemy krótką drogę w $\operatorname{mod} A$

$$U \xrightarrow{u} P \xrightarrow{v} V,$$

gdzie U oraz V należą do $\mathscr{C}^r$, P jest nierozkładalnym, projektywnym, prawym A-modułem, a $vu \neq 0$. Ponadto $\mathrm{Im}\, u$ zawiera $\operatorname{soc} P$, więc $\operatorname{soc} P$ jest prostym prawym B-modułem gdyż $\mathrm{Im}\, u$ jest prawym B-modułem. Z drugiej strony, rodzina $\mathscr{C}$ otrzymana jest z rodziny rur promieniowych $\mathscr{C}^r$ poprzez ciąg operacji dopuszczalnych typu $(ad\,1^*)$ i $(ad\,2^*)$, a zatem $P \notin \mathscr{C}^r$. Stąd u i v należą do rad_A^∞, a więc $0 \neq vu \in \mathrm{rad}_A^\infty(U, V)$, co daje sprzeczność gdyż $\mathscr{C}$ jest uogólnioną standardową rodziną modułów w $\operatorname{mod} B$, więc także w $\operatorname{mod} A$. Wobec tego istotnie $J \subseteq I$.

Następnie, ponieważ ${}_AA$ jest skończonej długości nad k, to

$$J' = \sum_{h' \in \mathrm{Hom}_{A^{op}}(\mathrm{D}(Y'), {}_AA),\ Y' \in \mathscr{C}^r} \mathrm{Im}\, h' = \sum_{j=1}^{t} \mathrm{Im}\, h'_j$$

dla pewnych homomorfizmów $h'_j \in \mathrm{Hom}_{A^{op}}(\mathrm{D}(Y'_j), {}_AA)$, gdzie $Y'_j \in \mathscr{C}^r$ dla $j \in \{1, \dots, t\}$, a stąd mamy epimorfizm lewych A-modułów

$$[h'_1 \dots h'_t] \colon \mathrm{D}(Y') = \bigoplus_{j=1}^{t} \mathrm{D}(Y'_j) \to {}_AA.$$

Wówczas $N' = M \oplus Y'$ jest modułem w $\operatorname{add} \mathscr{C}^r$, $\mathrm{D}(N')$ jest modułem w kategorii $\operatorname{add} \mathrm{D}(\mathscr{C}^r)$, a $\operatorname{ann}_A \mathrm{D}(N') = \operatorname{ann}_A \mathrm{D}(M) = I$. Wtedy $\mathrm{D}(N')$ jest dokładnym, lewym B-modułem oraz istnieje epimorfizm $g' \colon \mathrm{D}(N') \to J'$ lewych A-modułów. Oczywiście wówczas J' jest lewym B-modułem gdyż $IJ' = Ig'(\mathrm{D}(N')) = g'(I\,\mathrm{D}(N')) = g'(0) = 0$.

Twierdzimy teraz, że $J' \subseteq I$. Przypuśćmy, iż $J' \nsubseteq I$. Ponieważ $I = \operatorname{ann}_A \mathrm{D}(N')$ jest przecięciem jąder wszystkich homomorfizmów z $\operatorname{Hom}_{A^{op}}({}_AA, \mathrm{D}(N'))$, to istnieje taki homomorfizm $f' \colon {}_AA \to \mathrm{D}(N')$ lewych A-modułów, że $f'(J') \neq 0$. Mamy więc ciąg homomorfizmów lewych A-modułów

$$\mathrm{D}(N') \xrightarrow{g'} J' \xrightarrow{w'} {}_AA \xrightarrow{f'} \mathrm{D}(N'),$$

gdzie w' jest kanonicznym włożeniem, a $f'w'g' \neq 0$. Stosując dualność $\mathrm{D} \colon \operatorname{mod} A^{op} \to \operatorname{mod} A$ otrzymujemy homomorfizmy w $\operatorname{mod} A$

$$N' \xrightarrow{\mathrm{D}(f')} \mathrm{D}({}_AA) \xrightarrow{\mathrm{D}(w'g')} N',$$

gdzie $\mathrm{D}(w'g')(D(f')(U') \cap P') \cap V' \neq 0$, a w konsekwencji otrzymujemy krótką drogę w $\operatorname{mod} A$

$$U' \xrightarrow{u'} P' \xrightarrow{v'} V',$$

gdzie U' i V' należą do $\mathscr{C}^r$, P' jest nierozkładalnym, projektywnym, prawym A-modułem, a $v'u' \neq 0$. Ponieważ $\operatorname{Im} u'$ jest niezerowym, prawym B-modułem zawierającym $\operatorname{soc} P'$, otrzymujemy, że $\operatorname{soc} P'$ jest prostym, prawym B-modułem. Stąd wnosimy jak wcześniej, że $P' \notin \mathscr{C}$. Zatem u' oraz v' należą do $\operatorname{rad}_A^\infty$, a stąd $0 \neq v'u' \in \operatorname{rad}_A^\infty(U', V')$, co stanowi sprzeczność, gdyż $\mathscr{C}^r$ jest uogólnioną standardową rodziną modułów w $\operatorname{mod} A$. □

Lemat 3.2. *$l_A(I) = J$, $r_A(I) = J'$ oraz $I = r_A(J) = l_A(J')$.*

Dowód. Ponieważ J jest prawym B-modułem, to $I \subseteq r_A(J)$. Niech N będzie takim modułem z $\operatorname{add} \mathscr{C}^r$, że $I = r_A(N)$. Dodatkowo, niech $\rho \colon N \to A^t$ będzie włożeniem N w skończenie generowanym, wolny, prawy A-moduł A, który jest modułem injektywnym. Oznaczmy przez $\rho_i \colon N \to A$, dla $i \in \{1, \dots, t\}$, złożenie ρ z rzutem na i-tą składową A^t. Wówczas istnieje włożenie N w sumę prostą $\bigoplus_{i=1}^t \rho_i(N)$, które jest zawarte w $\bigoplus_{i=1}^t J$. Stąd mamy

$$I = r_A(N) \supseteq r_A\left(\bigoplus_{i=1}^t \rho_i(N)\right) \supseteq r_A\left(\bigoplus_{i=1}^t J\right) = r_A(J).$$

Jako konsekwencję dostajemy równość $I = r_A(J)$. Stosując teraz twierdzenie Nakayamy [78, Theorem IV.6.10] otrzymujemy, że $J = l_A r_A(J) = l_A(I)$.

Pokażemy, iż $J' = r_A(I)$. Najpierw zauważmy, ponieważ J' jest lewym B-modułem, że $I \subseteq l_A(J')$. Niech N' będzie takim modułem z $\operatorname{add}\mathscr{C}^r$, że $I = l_A(\mathrm{D}(N'))$. Niech $\rho'\colon \mathrm{D}(N') \to A^s$ będzie włożeniem $\mathrm{D}(N')$ w skończenie generowany, wolny, lewy A-moduł. Oznaczmy przez $\rho'_i\colon \mathrm{D}(N') \to A$, dla $i \in \{1,\dots,s\}$, złożenie ρ' z rzutem na i-tą składową A^s. Wtedy istnieje włożenie $\mathrm{D}(N')$ w sumę prostą $\bigoplus_{i=1}^s \rho'_i(\mathrm{D}(N'))$, która jest zawarta w $\bigoplus_{i=1}^s J'$. Stąd otrzymujemy, że

$$I = l_A\left(\mathrm{D}(N')\right) \supseteq l_A\left(\bigoplus_{i=1}^{s} \rho'_i(\mathrm{D}(N'))\right) \supseteq l_A\left(\bigoplus_{i=1}^{s} J'\right) = l_A(J').$$

Zatem $I = l_A(J')$, więc stosując ponownie wspomniane wyżej twierdzenie Nakayamy dostajemy, iż $J' = r_A l_A(J') = r_A(I)$. □

Lemat 3.3. *$eIe = eJe = eJ'e$. W szczególności $(eIe)^2 = 0$.*

Dowód. Ponieważ e jest ilorazową jedynką algebry ilorazowej $B = A/I$, to $B \cong eAe/eIe$. Zatem $\mathscr{C}^r$ jest dokładną, uogólnioną standardową rodziną rur promieniowych w kołczanie $\Gamma_{eAe/eIe}$. Dalej, J jest prawym B-modułem, $1-e \in I$, więc $J = Je + J(1-e) = Je$, gdyż $J(1-e) \subseteq JI = 0$. Wtedy eJ jest ideałem w eAe takim, że $eJ \subseteq eIe$, co wynika ze Stwierdzenia 3.1.

Rozważmy algebrę ilorazową $B' = eAe/eJ$. Wtedy $\mathscr{C}^r$ jest wierną, uogólnioną standardową rodziną rur promieniowych w $\Gamma_{B'}$. Ponieważ rodzina $\mathscr{C}^r$ w Γ_A składa się z B-modułów, które nie leżą na nieskończonych krótkich cyklach w $\operatorname{mod} A$, to moduły z rodziny $\mathscr{C}^r$ w $\Gamma_{B'}$ nie leżą na krótkich nieskończonych cyklach w $\operatorname{mod} B'$, gdyż B jest algebrą ilorazową algebry B'. Dla każdych $x \neq y$ w $\mathbb{X}$ rury promieniowe $\mathscr{C}_x^r$ oraz $\mathscr{C}_y^r$ składają się z nieskończenie wielu modułów ze wspólnymi składnikami kompozycyjnymi bowiem $\mathscr{C}_x^r$ zawiera wszystkie moduły rury $\mathscr{T}_x^C$, a $\mathscr{C}_y^C$ zawiera wszystkie moduły rury $\mathscr{T}_y^C$. Wobec Lematu I.6.12 rodzina $\mathscr{C}^r$ składa się z modułów, które nie leżą na zewnętrznych krótkich drogach w $\operatorname{mod} B'$. Zatem korzystając z Twierdzenia I.7.4 wnosimy, że B' jest prawie utajoną algebrą kanoniczną, a $\mathscr{C}^r$ jest separującą rodziną rur promieniowych w $\Gamma_{B'}$. Jednak wówczas wierna, uogólniona standardowa rodzina $\mathscr{C}^r$ rur promieniowych w $\Gamma_{B'}$ jest dokładna w $\operatorname{mod} B'$. Implikuje to, iż $eIe/eJ = \operatorname{ann}_{B'}(\mathscr{C}^r) = 0$, a więc $eIe = eJ$. W podobny sposób pokażemy, że $eIe = J'e$. Stosując Lemat 3.2 otrzymujemy równości $(eIe)^2 = eJeeIe = eJeIe = (eJe)Ie = eJIe = 0$. □

W dalszych rozważaniach będziemy wykorzystywać następujący, ogólny lemat traktujący o ciągach prawie rozszczepialnych nad algebrami trójkątnymi (patrz [71, Lemma 5.6]).

Lemat 3.4. *Niech R oraz S będą algebrami, a N S-R-bimodułem. Niech $\Gamma = \left(\begin{smallmatrix} S & N \\ 0 & R \end{smallmatrix}\right)$ będzie trójkątną algebrą macierzową daną przez bimoduł ${}_SN_R$. Wtedy ciąg prawie rozszczepialny $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ w $\operatorname{mod} R$ jest ciągiem prawie rozszczepialnym w $\operatorname{mod}\Gamma$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{Hom}_R(N, X) = 0$.*

Lemat 3.5. *Niech f będzie takim prymitywnym idempotentem w I, że $fJ \neq fAe$. Wtedy $K = fAeAf + fJ + fAeAfAe + eAf + eIe$ jest ideałem algebry $F = (e+f)A(e+f)$, a $N = fAe/fKe$ jest takim prawym B-modułem, że* $\mathrm{Hom}_B(\mathscr{C}^r, N) \neq 0$ *oraz* $\mathrm{Hom}_B(N, \mathscr{C}^r) = 0$.

Dowód. Z Lematu 3.3 wynika, iż $eIe = eJe$. Ponieważ $eJe \subseteq J$, to mamy inkluzje $fAeIe \subseteq f(eIe) \subseteq fJ$. Zatem K jest ideałem w F. Zauważmy również, iż $fKe = fJ + fAeAfAe$, $fKf \subseteq \mathrm{rad}(fAf)$, gdyż $(fKf)^2 = (fAeAf)(fAeAf) \subseteq IeIeI \subseteq IeJI = 0$, $eKe = eIe$ oraz $eKf = eAf$. Co więcej, $N \neq 0$. Istotnie, jeśli $fAe = fKe$, to ponieważ $eAfAe \subseteq eIe \subseteq \mathrm{rad}(eAe)$, więc Lemat 3.3 implikuje $fAe = fJ + fAe(\mathrm{rad}(eAe))$, a stąd $fAe = fJ$ na mocy lematu Nakayamy, co daje sprzeczność z założeniem. Dalej, $B = eAe/eIe$ oraz $(fAe)(eIe) = fAeJ \subseteq fJ \subseteq fKe$, a stąd N jest prawym B-modułem. Ostatecznie N jest również lewym modułem nad $S = fAf/fKf$, a $\Gamma = F/K$ jest izomorficzna z algebrą trójkątną $\left(\begin{smallmatrix} S & N \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$. Przywołując strukturę rodziny $\mathscr{C} = (\mathscr{C}_x)_{x \in I}$ quasi-rur w Γ_A wnioskujemy, że rodzina $\mathscr{C}^r = (\mathscr{C}_x^r)_{x \in \mathbb{X}}$ rur promieniowych w Γ_B jest obrazem rodziny $\mathscr{C}$ poprzez funktor ograniczenia $(-)(e+f)\colon \mathrm{mod}\, A \to \mathrm{mod}\, F$, a w konsekwencji $\mathscr{C}^r$ jest rodziną rur promieniowych w Γ_F. Odnotujmy, że rury promieniowe $\mathscr{C}_x^r$, dla $x \in I$, nie zawierają modułu injektywnego, więc dla dowolnego modułu X w $\mathscr{C}^r$ istnieje ciąg prawie rozszczepialny $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ w $\mathrm{mod}\, F$ składający się w całości z B-modułów. Dlatego stosując Lemat 3.4 otrzymujemy, że $\mathrm{Hom}_B(N, X) = 0$ dla wszystkich modułów X w $\mathscr{C}^r$, a więc $\mathrm{Hom}_B(N, \mathscr{C}^r) = 0$. Następnie $\mathscr{C}^r$ jest separującą rodziną rur promieniowych w Γ_B, co implikuje, że każdy nierozkładalny moduł w $\mathrm{mod}\, B$ jest albo generowany albo kogenerowany przez $\mathscr{C}^r$. Stąd wnosimy, że $\mathrm{Hom}_B(\mathscr{C}^r, N) \neq 0$. □

Przypomnijmy, że przez ν oznaczamy automorfizm Nakayamy algebry A, a przez ν^- jego odwrotność. Jak pamiętamy, dla każdego prymitywnego idempotenta f algebry A mamy $\mathrm{soc}(\nu(f)A) \cong \mathrm{top}(fA) = fA/\mathrm{rad}_A(fA)$. Następujące dwa Lematy zostały udowodnione w [71, Lemmas 1.1 and 5.11].

Lemat 3.6. *Prawy ideał $\nu(e)l_A(I)$ jest minimalnym injektywnym generatorem w* $\mathrm{mod}\, B$, *a lewy ideał $r_A(I)\nu^-(e)$ jest minimalnym injektywnym kogeneratorem w* $\mathrm{mod}\, B^{op}$.

Lemat 3.7. $\nu(e)J = l_{\nu(e)Ae}(eIe)$ *oraz* $J'\nu^-(e) = r_{eA\nu^-(e)}(eIe)$.

Pokażemy teraz następujący Lemat.

Lemat 3.8. $\nu(e)Ie = \nu(e)J$ *oraz* $eI\nu^-(e) = J'\nu^-(e)$.

Dowód. Niech e_i będzie prymitywnym składnikiem prostym idempotenta e oraz połóżmy $f = \nu(e_i)$. Pokażemy, że $fIe = fJ$. W tym celu wystarczy pokazać, że $fIeI = 0$, gdyż wtedy Lemat 3.7 implikuje $fIe \subseteq l_{fAe}(eIe) = fJ$, a $fJ \subseteq fIe$ wynika ze Stwierdzenia 3.1. Załóżmy, że $fIeI \neq 0$. Wtedy $f \in I$, gdyż $\mathrm{soc}(fIeI_A) \subseteq \mathrm{top}(e_iA)$, więc $fIeIe_i \neq 0$, ale $(eIe)^2 = 0$, co wynika z Lematu 3.3. Ponadto jeśli $fAe = fJ$, to $(fIe)I \subseteq (fAe)I = fJI = 0$, gdyż $f \in I$, co oznacza sprzeczność z założeniem. Wobec tego otrzymujemy, że $fAe \neq fJ$. Rozważmy teraz takie K i N jak w Lemacie 3.5. Wtedy $\operatorname{Hom}_B(\mathscr{C}^r, N) \neq 0$ oraz $\operatorname{Hom}_B(N, \mathscr{C}^r) = 0$. Wybierzmy taki moduł M z $\mathscr{C}^r$, że $\operatorname{Hom}_B(M, N) \neq 0$.

(1) Niech $L = fKe/fJ$. Zauważmy, że L jest prawym B-modułem bowiem z Lematu 3.3 $B \cong eAe/eIe$ i $eIe = eJ$. Twierdzimy, że $\operatorname{Hom}_B(L, M) = 0$. Wystarczy pokazać, że L jest generowany przez N, gdyż $\operatorname{Hom}_B(N, M) = 0$. Istotnie

$$L \cong (fAeAf)fAe/(fJ \cap fAeAfAe)$$

jako B-moduł, a moduł po prawej stronie jest generowany przez $N = fAe/(fJ + fAeAfAe)$, gdzie

$$\begin{gathered}(fAeAf)fJ \subseteq fJ \cap fAeAfAe,\\ (fAeAf)(fAeAfAe) = (fAe)(eAfAe)(eAfAe) \subseteq (fAe)(eIe)^2,\end{gathered}$$

oraz $(eIe)^2 = 0$, co wynika z Lematu 3.3. Ponieważ $\tau_B M = 0$ lub $\tau_B M$ należy do $\mathscr{C}^r$, to mamy także $\operatorname{Hom}_B(N, \tau_B M) = 0$, a w konsekwencji $\operatorname{Hom}_B(L, \tau_B M) = 0$.

(2) Pokażemy, że $\operatorname{Hom}_{eAe}(fKe, \tau_{eAe}M) = 0$. Stosując funktor $\operatorname{Hom}_{eAe}(-, \tau_{eAe}M)\colon \operatorname{mod} eAe \to \operatorname{mod} k$ do ciągu dokładnego $0 \to fJ \to fKe \to L \to 0$, otrzymujemy ciąg dokładny k-modułów

$$\begin{gathered}0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{eAe}(L, \tau_{eAe}M) \xrightarrow{\ \alpha\ } \operatorname{Hom}_{eAe}(fKe, \tau_{eAe}M) \longrightarrow \\ \longrightarrow \operatorname{Hom}_{eAe}(fJ, \tau_{eAe}M),\end{gathered}$$

gdzie $\operatorname{Hom}_{eAe}(fJ, \tau_{eAe}M) = \operatorname{Hom}_B(fJ, \tau_B M)$. Lematy 3.2 oraz 3.6 implikują, że fJ jest nierozkładalnym injektywnym B-modułem generowanym przez $\mathscr{C}^r$, który nie jest w $\mathscr{C}^r$. Wykorzystując fakt, że $\mathscr{C}^r$ jest rodziną separującą rur promieniowych kołczanu Γ_B dostajemy, że $\operatorname{Hom}_{eAe}(fJ, \tau_{eAe}M) = 0$, a w konsekwencji α jest izomorfizmem. Stąd z (1) mamy $\operatorname{Hom}_{eAe}(fKe, \tau_{eAe}M) = 0$.

(3) Ostatecznie stosując funktor $\operatorname{Hom}_{eAe}(M, -)\colon \operatorname{mod} eAe \to \operatorname{mod} k$ do kanonicznego ciągu dokładnego $0 \to fKe \to fAe \to N \to 0$, mamy ciąg dokładny k-modułów

$$\begin{gathered}0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{eAe}(M, fKe) \xrightarrow{\ \beta\ } \operatorname{Hom}_{eAe}(M, fAe) \longrightarrow \\ \longrightarrow \operatorname{Hom}_{eAe}(M, N) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_{eAe}(M, fKe),\end{gathered}$$

gdzie β jest izomorfizmem bowiem $MeIe = 0$ oraz $l_{fAe}(eIe) = fJ \subseteq fKe$, co wynika z Lematu 3.7. Dalej, $\mathrm{Ext}^1_{eAe}(M, fKe) \cong \mathrm{D}\overline{\mathrm{Hom}}_{eAe}(fKe, \tau_{eAe}M) = 0$ z (2). To implikuje, że $\mathrm{Hom}_B(M,N) = \mathrm{Hom}_{eAe}(M,N) = 0$, przecząc tym samym wyborowi M. Wobec tego udowodniliśmy, że $\nu(e)J = l_{\nu(e)Ae}(eIe)$.

Dowód drugiej równości jest podobny. □

Lemat 3.9. *$IeIe = 0$.*

Dowód. Załóżmy, że $IeIe \neq 0$. Wtedy $0 \neq \mathrm{soc}({}_AIeIe) \subseteq \mathrm{soc}({}_AAe) \cong \mathrm{top}({}_AA\nu(e))$. Stąd otrzymujemy, że $\nu(e)IeIe = \mathrm{Hom}_{A^{op}}(A\nu(e), IeIe) \neq 0$, gdyż $\mathrm{Hom}_{A^{op}}(A\nu(e), \mathrm{soc}(Ae)) \cong \mathrm{Hom}_{A^{op}}(A\nu(e), \mathrm{top}(A\nu(e))) \neq 0$. Wtedy $\nu(e)IeIe \neq 0$ bo $\mathrm{soc}({}_AIeIe) \cong \mathrm{top}(A\nu(e))$. Jednak wówczas z Lematu 3.8 mamy $\nu(e)IeIe = \nu(e)JIe = 0$, co daje sprzeczność. Zatem $IeIe = 0$. □

Lemat 3.10. *Niech f będzie prymitywnym idempotentem w I takim, że $fAe \neq fJe$. Wtedy $\mathrm{Hom}_B(\mathscr{C}^r, fAe/fJe) \neq 0$ oraz $\mathrm{Hom}_B(eAf/eJ', \mathrm{D}(\mathscr{C}^r)) = 0$.*

Dowód. Rozważmy K i N jak w Lemacie 3.5. Zauważmy, że $fAeAfAe = (fAe)(eAfAe) \subseteq IeIe$. Ponieważ z Lematu 3.9 $IeIe = 0$, to $N = fAe/fKe = fAe/fJ$. Teza wynika z Lematu 3.5 oraz z dualnych argumentów. □

Lemat 3.11. *Niech f będzie prymitywnym idempotentem w I takim, że $\nu^-(f) \in I$. Wtedy $\mathrm{Hom}_B(\mathscr{C}^r, fAe) = 0$.*

Dowód. Zauważmy, że fAe jest prawym B-modułem, gdyż $B \cong eAe/eIe$ oraz $(fAe)(eIe) \subseteq IeIe$ i $IeIe = 0$, co wynika z Lematu 3.9. Ograniczenie izomorfizmów A-A-bimodułów $\mathrm{D}(A) \cong A_{\nu^-}$ jest izomorfizmem $\mathrm{D}(fAe) \cong eA\nu^-(f)$ lewych (eAe/eIe)-modułów. Ponieważ mamy izomorfizm $\mathrm{top}(A\nu^-(f)) \cong \mathrm{soc}(Af)$ lewych A-modułów i $f \in I$, to $eJ'\nu^-(f) = 0$. Zatem z Lematu 3.3 otrzymujemy izomorfizm lewych (eAe/eIe)-modułów $eA\nu^-(f)/eJ'\nu^-(f) = eA\nu^-(f) \cong \mathrm{D}(fAe)$, gdzie $\nu^-(f) \in I$ i $eIe = eJe$. W konsekwencji z Lematu 3.10 mamy $\mathrm{Hom}_B(\mathrm{D}(fAe), \mathrm{D}(\mathscr{C}^r)) = 0$, co implikuje $\mathrm{Hom}_B(\mathscr{C}^r, fAe) = 0$. □

Lemat 3.12. *Niech f będzie prymitywnym idempotentem w ideale I. Wtedy $fAe = fJe$ oraz $eAf = eJ'f$.*

Dowód. Wystarczy pokazać pierwszą równość. Możemy założyć, że $fAe \neq 0$, gdyż teza jest oczywista w przypadku $fAe = 0$. Załóżmy, że $fAe \neq fJe$. Weźmy K oraz N jak w Lemacie 3.5. Zauważmy, jak w dowodzie Lematu 3.10, że $N = fAe/fKe = fAe/fJ$. Stosując Lemat 3.5 dostajemy, że $\mathrm{Hom}_B(\mathscr{C}^r, N) \neq 0$. Ponadto $\nu^-(f) \in I$. Istotnie, jeśli $\nu^-(f) \notin I$, to $fIe = fJ$, co wynika z Lematu 3.8, a więc $fJe = fAe$, czyli sprzeczność. Jednak wtedy $\nu^-(f) \in I$ implikuje $fJ = 0$, bo fJ jest prawym ideałem w A, $JI = 0$ i $\mathrm{soc}(fJ) \cong \mathrm{top}(\nu^-(f)A)$, o ile $fJ \neq 0$. Wobec tego $N = fAe/fJ = fAe$ i korzystając z Lematu 3.11 dostajemy $\mathrm{Hom}_B(\mathscr{C}^r, fAe) = 0$, co stanowi sprzeczność z wcześniej udowodnionym faktem. □

Udowodnimy teraz następujący kluczowe Stwierdzenie.

Stwierdzenie 3.13. *$Ie = J$, $eI = J'$ oraz $eIe = J \cap J'$.*

Dowód. Zauważmy, że $Ie = eIe \oplus (1-e)Ie$. Z Lematu 3.3 mamy $eIe = eJe = eJ$. Dalej, Lemat 3.12 implikuje, że $(1-e)Ie = (1-e)Ae = (1-e)Je = (1-e)J$ gdyż $1-e \in I$, co wynika z definicji e. Zatem $IeI = eIeI \oplus (1-e)JI = 0$ z Lematu 3.9 oraz definicji J. Korzystając z Lematu 3.2 otrzymujemy, że $Ie \subseteq l_A(I) = J$, więc $Ie = J$. Równość $eI = eJ'$ dowodzimy podobnie. Ponadto zauważmy, że $J \cap J' = e(J \cap J')e = eJ \cap J'e = eIe$. □

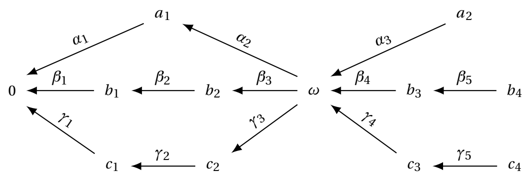
Twierdzenie 3.14. *I jest ideałem deformującym algebry A takim, że $l_A(I) = Ie$ oraz $r_A(I) = eI$.*

Dowód. Z Lematu 3.2 oraz Stwierdzenia 3.13 wiemy, że $l_A(I) = J = Ie$ i $r_A(I) = J' = eI$. W szczególności $IeI = 0$. Zatem ze Stwierdzenia III.1.2 mamy, że $eIe = l_{eAe}(I) = r_{eAe}(I)$. Ostatecznie $B = A/I$ jest prawie utajoną algebrą kanoniczną, a stąd algebrą quasi-odwróconą. Wtedy kołczan Gabriela Q_B algebry B jest acykliczny [21, Proposition III.1.1]. To pokazuje, że I jest ideałem deformującym algebry A. □

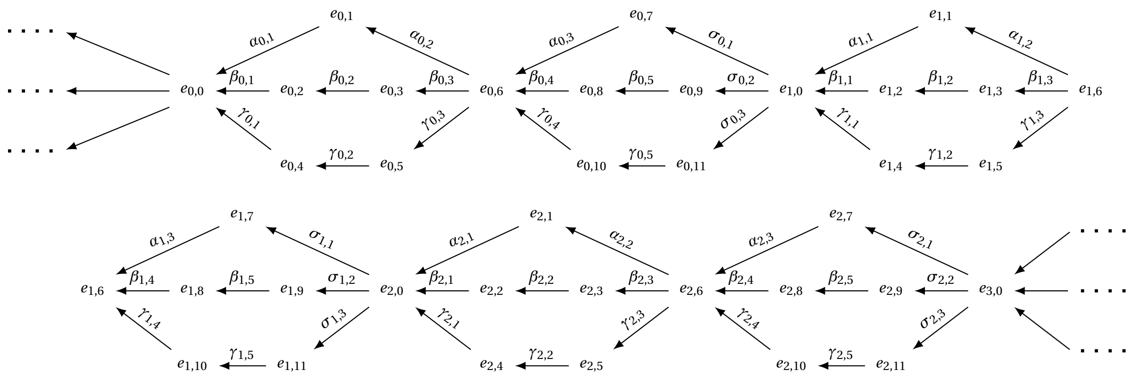
Dokończymy teraz dowód implikacji $(i) \Rightarrow (ii)$ Twierdzenia 2.1. Wiemy, że $I = \mathrm{ann}_A(\mathscr{C}^r)$ jest ideałem deformującym algebry A, gdzie $l_A(I) = Ie$, a $B = A/I$ jest prawie utajoną algebrą kanoniczną. Wtedy z Twierdzenia III.2.1 wynika, iż zdeformowana algebra samoinjektywna $A[I]$ jest izomorficzna z algebrą orbit $\widehat{B}/(\psi\nu_{\widehat{B}})$, dla pewnego dodatniego automorfizmu ψ algebry $\widehat{B}$. Ponadto wykorzystując Twierdzenie III.1.3(ii) wnioskujemy, że algebry A i $A[I]$ są cokołowo równoważne, a w konsekwencji pokrywają się kategorie modułów $\mathrm{mod}(A/\operatorname{soc} A)$ i $\mathrm{mod}(A[I]/\operatorname{soc} A[I])$. Zauważmy, że kołczany Auslandera-Reiten Γ_A i $\Gamma_{A[I]}$ są izomorficzne. Wtedy założenie (i) na A pociąga za sobą, iż $\Gamma_{A[I]}$ zawiera rodzinę $\mathscr{C}' = (\mathscr{C}'_i)_{i\in I}$ quasi-rur ze wspólnymi składnikami kompozycyjnymi, zamkniętą na składniki kompozycyjne i składająca się z modułów, które nie leżą na krótkich nieskończonych cyklach w $\mathrm{mod}\, A[I]$. W istocie, dla każdego $i \in I$ quasi-rura $\mathscr{C}'_i$ otrzymana jest z quasi-rury $\mathscr{C}_i$ poprzez zastąpienie nierozkładalnego, projektywnego A-modułu P przez odpowiadający nierozkładalny, projektywny $A[I]$-moduł P' oraz pozostawiając pozostałe nierozkładalne A-moduły w $\mathscr{C}_i$. Wtedy ze Stwierdzeń III.3.4 i III.3.5 wynika, że $G = (\psi\nu_{\widehat{B}})$ spełnia warunek (ii) Twierdzenia 2.1. W szczególności stwierdzamy, iż $e_i \neq e_{\nu(i)}$ dla prymitywnego składnika e_i idempotenta e. Stosując Twierdzenie III.1.3(iii) wnioskujemy, że A oraz $A[I]$ są izomorficznymi k-algebrami. Zatem A jest izomorficzna z algebrą orbit $\widehat{B}/G$, gdzie G spełnia warunek (ii) Twierdzenia 2.1. To kończy dowód implikacji $(i) \Rightarrow (ii)$ Twierdzenia 2.1.

4 Przykład

Celem niniejszego podrozdziału jest przedstawienie przykładu ilustrującego Twierdzenie 2.1. Niech k będzie ciałem algebraicznie domkniętym. Rozważmy quasi-odwróconą algebrę typu kanonicznego $B = kQ_B/I$, będącą gałęziowym rozszerzeniem algebry kanonicznej C typu Euklidesa $(2,3,3)$ (patrz [55, Chapter XII]), gdzie Q_B jest kołczanem postaci

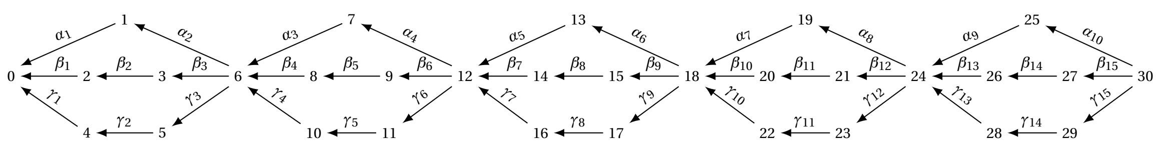


a I ideałem w kQ_B generowanym przez kombinacje dróg $\alpha_2\alpha_1 + \beta_3\beta_2\beta_1 + \gamma_3\gamma_2\gamma_1$, $\alpha_3\alpha_2$, $\beta_4\beta_3$ i $\gamma_4\gamma_3$ (patrz [2, Chapter II]). Wówczas kategoria powtórzeń $\widehat{B}$ algebry B jest nieskończenie wymiarową algebrą postaci $KQ_{\widehat{B}}/I_{\widehat{B}}$, gdzie $Q_{\widehat{B}}$ jest następującym kołczanem



a ideał $I_{\widehat{B}}$ w $kQ_{\widehat{B}}$ jest ideałem generowanym przez kombinacje dróg $\alpha_{i,2}\alpha_{i,1} + \beta_{i,3}\beta_{i,2}\beta_{i,1} + \gamma_{i,3}\gamma_{i,2}\gamma_{i,1}$, $\alpha_{i,3}\alpha_{i,2}$, $\beta_{i,4}\beta_{i,3}$, $\gamma_{i,4}\gamma_{i,3}$, $\gamma_{i+1,2}\gamma_{i+1,1}\sigma_{i,1}\alpha_{i,3}\gamma_{i,3}\gamma_{i,2}$, $\sigma_{i,1}\alpha_{i,3} + \sigma_{i,2}\beta_{i,5}\beta_{i,4} + \sigma_{i,3}\gamma_{i,5}\gamma_{i,4}$, $\beta_{i+1,2}\beta_{i+1,1}\sigma_{i,1}\alpha_{i,3}\beta_{i,3}\beta_{i,2}$, $\alpha_{i+1,1}\sigma_{i,2}\beta_{i,5}\beta_{i,4}\alpha_{i,2}$, gdzie $i \in \mathbb{Z}$.

Rozważmy teraz automorfizm $\varphi\colon \widehat{B} \to \widehat{B}$ algebry powtórzeń $\widehat{B}$ o własności $\varphi^2 = \nu_{\widehat{B}}$. Połóżmy $A = \widehat{B}/(\varphi\nu_{\widehat{B}}^2)$. Wówczas $A = kQ_A/I_A$ jest algebrą dróg kołczanu ograniczonego, gdzie kołczan Q_A jest postaci



w którym utożsamiamy wierzchołki 0 oraz 30, a I_A jest ideałem w kQ_A generowanym przez kombinacje dróg:

- $\alpha_{2+2i}\alpha_{1+2i} + \beta_{3+3i}\beta_{2+3i}\beta_{1+3i} + \gamma_{3+3i}\gamma_{2+3i}\gamma_{1+3i}$, dla $i = 0, \ldots, 4$,
- $\alpha_1\alpha_{10}$, $\beta_1\beta_{15}$, $\gamma_1\gamma_{15}$ oraz $\alpha_{3+2i}\alpha_{2+2i}$, $\beta_{4+3i}\beta_{3+3i}$, $\gamma_{4+3i}\gamma_{3+3i}$, dla $i = 0, \ldots, 3$,
- $\alpha_1\beta_{15}\beta_{14}\beta_{13}\alpha_8$, $\alpha_3\beta_3\beta_2\beta_1\alpha_{10}$ oraz $\alpha_{5+2i}\beta_{6+3i}\beta_{5+3i}\beta_{4+3i}\alpha_{4+2i}$, dla $i = 0, \ldots, 3$,
- $\beta_2\beta_1\alpha_{10}\alpha_9\beta_{12}\beta_{11}$, $\beta_5\beta_4\alpha_2\alpha_1\beta_{15}\beta_{14}$ oraz $\beta_{8+3i}\beta_{7+3i}\alpha_{4+2i}\alpha_{3+2i}\beta_{6+3i}\beta_{5+3i}$, dla $i = 0, \ldots, 3$,
- $\gamma_2\gamma_1\alpha_{10}\alpha_9\gamma_{12}\gamma_{11}$, $\gamma_5\gamma_4\alpha_2\alpha_1\gamma_{15}\gamma_{14}$ oraz $\gamma_{8+3i}\gamma_{7+3i}\alpha_{4+2i}\alpha_{3+2i}\gamma_{6+3i}\gamma_{5+3i}$, dla $i = 0, \ldots, 3$,

Zauważmy, że automorfizm φ algebry powtórzeń $\widehat{B}$ jest ściśle dodatni. Zatem z Twierdzenia 2.1 wynika, że A jest algebrą samoinjektywną, której kołczan Auslandera-Reiten Γ_A zawiera rodzinę quasi-rur $\mathscr{C}$ mającą wspólne składniki kompozycyjne, zamkniętą na składniki kompozycyjne oraz składającą się z modułów, które nie leżą na krótkich nieskończonych cyklach w $\operatorname{mod} A$. Ponadto algebra A jest dzikiego reprezentacyjnego typu (patrz np. [56, Chapter XIX.1]), gdyż algebra B jest dzikiego reprezentacyjnego typu (patrz [40, Section 3.7]).

Rozdział V

Algebry samoinjektywne z kołczanem składowych bez krótkich cykli

1 Kołczan składowych

Za [59] *kołczanem składowych* Σ_A algebry artinowskiej A nazywamy kołczan, którego wierzchołkami są spójne składowe kołczanu Γ_A, a strzałka $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$ między dwoma wierzchołkami $\mathscr{C}$ i $\mathscr{D}$ w Σ_A istnieje dokładnie wtedy, gdy $\operatorname{rad}_A^{\infty}(X, Y) \neq 0$ dla pewnych $X \in \mathscr{C}$ oraz $Y \in \mathscr{D}$. Zauważmy, że składowa $\mathscr{C}$ kołczanu Γ_A jest uogólniona standardowa wtedy i tylko wtedy, gdy w Σ_A nie ma pętli o początku w $\mathscr{C}$. Jeśli kołczan składowych nie zwiera krótkich cykli, to znaczy ciągów postaci $\mathscr{C} \to \mathscr{D} \to \mathscr{C}$, gdzie dopuszczamy $\mathscr{C} = \mathscr{D}$, to wszystkie składowe w Γ_A są uogólnione standardowe. Istotnie, jeśli $\operatorname{rad}_A^{\infty}(X, Y) \neq 0$ dla pewnych modułów X i Y w składowej $\mathscr{C}$, to wówczas mamy pętlę o początku w $\mathscr{C}$, a tym samym krótki cykl $\mathscr{C} \to \mathscr{C} \to \mathscr{C}$.

Kołczan składowych algebr samoinjektywnych nieskończonego reprezentacyjnego typu ma szczególną własność, a mianowicie jest w pełni cykliczny w następującym sensie (patrz [29]):

Twierdzenie 1.1. *Niech A będzie spójną, artinowską algebrą samoinjektywną nieskończonego typu reprezentacyjnego, a $\mathscr{C}_1, \ldots, \mathscr{C}_r$, $r \geq 1$, rodziną spójnych składowych w Γ_A. Wówczas istnieje zorientowany cykl w Σ_A przechodzący przez wszystkie składowe $\mathscr{C}_1, \ldots, \mathscr{C}_r$.*

Pokażemy teraz, że artinowskie algebry samoinjektywne nieskończonego typu reprezentacyjnego z kołczanem składowych bez krótkich cykli spełniają założenia Twierdzenia IV.2.1.

Stwierdzenie 1.2. *Niech A będzie bazową, spójną, artinowską algebrą samoinjekytwną nieskończonego typu reprezentacyjnego, której kołczan składowych Σ_A nie zawiera krótkich cykli. Wówczas kołczan Auslandera-Reiten Γ_A zawiera rodzinę $\mathscr{C} = (\mathscr{C})_{x \in \mathbb{X}}$ quasi-rur mającą wspólne składniki kompozycyjne, zamknięta na składniki kompozycyjne oraz składającą się z modułów, które nie leżą na nieskończonych krótkich cyklach w* $\operatorname{mod} A$.

Dowód. Z założenia kołczan składowych Σ_A algebry A nie zawiera krótkich cykli, więc każda składowa $\mathscr{C}$ w kołczanie Γ_A jest uogólniona standardowa. Ponieważ algebra A jest nieskończonego typu reprezentacyjnego, to z Twierdzenia IV.1.6 istnieje ideał I w A taki, że $C = A/I$ jest utajoną algebrą typu Euklidesa. Zatem istnieje rodzina $\mathscr{T}^C = (\mathscr{T}^C_x)_{x\in\mathbb{X}}$ stabilnych rur w Γ_C mająca wspólne składniki kompozycyjne. Z Lematu I.6.14, Lematu I.6.15 i Lematu I.6.16 wynika istnienie takiej rodziny quasi-rur $\mathscr{C} = (\mathscr{C}_x)_{x\in\mathbb{X}}$ w Γ_A, że $\mathscr{T}^C_x \subseteq \mathscr{C}_x$ dla każdego $x \in \mathbb{X}$, przy czym równość zachodzi dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{X}$. Oczywiście ponieważ $\mathscr{T}^C$ jest rodziną stabilnych rur w Γ_C ze wspólnymi składnikami kompozycyjnymi, to rodzina $\mathscr{C}$ jest rodziną quasi-rur ze wspólnymi składnikami kompozycyjnymi. Twierdzimy, że $\mathscr{C}$ jest zamknięta na składniki kompozycyjne.

Niech N będzie modułem w Γ_A, a M modułem w $\mathscr{C} = (\mathscr{C}_x)_{x\in\mathbb{X}}$. Załóżmy, że $[M] = [N]$. Pokażemy, że N należy do $\mathscr{C}$. Niech $\mathscr{C}_y$, dla pewnego $y \in \mathbb{X}$, będzie quasi-rurą w $\mathscr{C}$, która zawiera M. Niech f i e będą takimi idempotentami algebry A, że $A_A = eA \oplus fA$ oraz składniki proste $eA/\operatorname{rad}_A eA$ są izomorficzne ze składnikami kompozycyjnymi modułów w rodzinie $\mathscr{C}$, a moduł $fA/\operatorname{rad}_A fA$ nie ma takich składników prostych. Rozważmy algebrę ilorazową $B = A/AfA$. Wówczas $\mathscr{C}_y$ jest składową w Γ_B. Ponadto A-moduł N jest także modułem nad B, ponieważ $[N] = [M]$.

Następnie, ponieważ $\mathscr{C}_y$ jest uogólnioną standardową quasi-rurą bez zewnętrznych krótkich dróg, to stosując Twierdzenie I.7.8 wnosimy, iż B jest quasi-rurowym powiększeniem utajonej algebry kanonicznej C oraz istnieje separująca rodzina quasi-rur $\mathscr{C}^B$ zawierająca quasi-rurę $\mathscr{C}_y$. W szczególności dostajemy rozkład $\Gamma_B = \mathscr{P}^B \vee \mathscr{C}^B \vee \mathscr{Q}^B$.

Ponieważ możemy zastosować dualne rozumowanie, więc załóżmy, że N należy do $\mathscr{P}^B \vee \mathscr{C}^B$.

Z Twierdzenia I.7.7 istnieje takie jedyne, maksymalne korozszerzenie tubularne B_l algebry C wewnątrz B oraz uogólniona standardowa rodzina $\mathscr{C}^l$ rur kopromieniowych Γ_{B_l}, że B otrzymane jest z B_l (odpowiednio, $\mathscr{C}^B$ otrzymane jest z $\mathscr{C}^l$) przez ciąg operacji dopuszczalnych typów $(ad\,1)$ lub $(ad\,2)$, używając modułów z $\mathscr{C}^l$. Dodatkowo $\mathscr{P}^B = \mathscr{P}^{B^l}$. Oczywiście możemy założyć, że N należy do $\mathscr{P}^B$. Stąd N jest również B^l-modułem, więc M jest także B^l-modułem, gdyż B^l jest algebrą ilorazową algebry B przez ideał AhA dla idempotenta h. Każda składowa w B_l jest uogólniona standardowa, więc z Twierdzenia IV.1.7 wnosimy, że algebra B_l jest prawie utajoną algebrą kanoniczną typu Euklidesa lub typu tubularnego.

Załóżmy najpierw, że B_l jest typu Euklidesa. Wówczas $\mathscr{P}^{B_l}$ jest składową postprojektywną, więc każdy moduł ze składowej $\mathscr{P}^{B_l}$ jest jednoznacznie wyznaczony przez składniki kompozycyjne. Stąd N należy do $\mathscr{C}^l$ w Γ_{B_l}. Zatem N jest modułem z rodziny $\mathscr{C} = \mathscr{C}^B$ w Γ_A.

Załóżmy, że B_l jest typu tubularnego. Wtedy $\mathscr{P}^{B_l}$ składa się ze wszystkich nierozkładalnych modułów, które poprzedzają rodzinę $\mathscr{C}^l$ rur kopromieniowych w Γ_{B_l}. Zatem, stosując Stwierdzenie II.1.1 wnosimy, że N należy do $\mathscr{C}^l$, a stąd N jest modułem z rodziny $\mathscr{C} = \mathscr{C}^B$ w Γ_A.

Podsumowując, rodzina $\mathscr{C}^A$ składa się z quasi-rur ze wspólnymi składnikami kompozycyjnymi, jest zamknięta na składniki kompozycyjne oraz, z założenia na Σ_A, składa się z modułów, które nie leżą na krótkich nieskończonych cyklach. □

2 Główne twierdzenie

Celem tego rozdziału jest udowodnienie następującego twierdzenia.

Twierdzenie 2.1. *Niech A będzie bazową, spójną artinowską algebrą samoinjektywną nieskończonego typu reprezentacyjnego nad artinowskim pierścieniem k. Następujące warunki są równoważne.*

(i) Kołczan składowych Σ_A nie zawiera krótkich cykli.

(ii) k jest ciałem, a A jest izomorficzna z algebrą orbit $\widehat{B}/G$, gdzie B jest algebrą odwróconą typu Euklidesa albo algebrą tubularną nad k, a G jest nieskończoną, cykliczną grupą automorfizmów algebry $\widehat{B}$ jednej z następujących postaci:

(a) $G=(\varphi\nu_{\widehat{B}}^2)$ dla ściśle dodatniego automorfizmu φ algebry $\widehat{B}$,

(b) $G=(\varphi\nu_{\widehat{B}}^2)$ dla wyjątkowej algebry tubularnej B oraz sztywnego automorfizmu φ algebry $\widehat{B}$, którego ograniczenie do B jest wyróżnionym automorfizmem algebry B.

Z Lematu 1.2 oraz Twierdzenia IV.2.1 wynika, iż algebra A jest postaci $\widehat{B}/(\varphi\nu_{\widehat{B}}^2)$, gdzie B jest prawie utajoną algebrą kanoniczną, a φ jest dodatnim automorfizmem $\widehat{B}$. Ponadto, z racji, iż Σ_A nie zawiera krótkich cykli, to Twierdzenie IV.1.7 implikuje, że B jest algebrą odwróconą typu Euklidesa albo B jest algebrą tubularną. Zatem aby udowodnić Twierdzenie 2.1 wystarczy pokazać, że φ jest ściśle dodatnim automorfizmem $\widehat{B}$ pod warunkiem, że B nie jest wyjątkową algebrą tubularną, co będzie będzie konsekwencją Stwierdzenia 2.2 i Stwierdzenia 2.3.

Stwierdzenie 2.2. *Niech B będzie algebrą tubularną, która nie jest wyjątkowa, G nieskończoną cykliczną, dopuszczalną grupą automorfizmów algebry powtórzeń $\widehat{B}$, a $A=\widehat{B}/G$. Wówczas następujące zdania są równoważne:*

(i) Kołczan składowych Σ_A algebry A nie zwiera krótkich cykli.

(ii) $G=(\varphi\nu_{\widehat{B}}^2)$, gdzie φ jest ściśle dodatnim automorfizmem algebry $\widehat{B}$.

Dowód. Z Twierdzenia III.3.1 wiemy, iż G jest generowana przez ściśle dodatni automorfizm g algebry $\widehat{B}$. Rozważmy kanoniczne nakrycie Galois $F\colon \widehat{B}\to\widehat{B}/G=A$ i stowarzyszony z nim funktor opuszczania $F_\lambda\colon \operatorname{mod}\widehat{B}\to\operatorname{mod}A$. Ponieważ F_λ jest gęsty, to otrzymujemy naturalne izomorfizmy k-modułów

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(X,{}^{g^i}Y)\xrightarrow{\sim}\operatorname{Hom}_A(F_\lambda(X),F_\lambda(Y)),$$

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\widehat{B}}({}^{g^i}X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(F_\lambda(X), F_\lambda(Y)),$$

dla wszystkich nierozkładalnych modułów X oraz Y w mod $\widehat{B}$.

Najpierw pokażemy, że (ii) implikuje (i). Załóżmy, że $g = \varphi\nu_{\widehat{B}}^2$ dla pewnego ściśle dodatniego automorfizmu φ algebry $\widehat{B}$. Wówczas własność $(T4)$ implikuje istnienie dodatniej liczby całkowitej $l > 2m$ o własności $g(\mathscr{C}_q^{\widehat{B}}) = \mathscr{C}_{q+l}^{\widehat{B}}$ dla dowolnego $q \in \mathbb{Q}$. Przypomnijmy, że liczba m z własności $(T4)$ jest taką liczbą całkowitą, że $\nu_{\widehat{B}}(\mathscr{C}_q^{\widehat{B}}) = \mathscr{C}_{q+m}^{\widehat{B}}$, dla dowolnego $q \in \mathbb{Q}$. Ponieważ $g = \varphi\nu_{\widehat{B}}^2 = (\varphi\nu_{\widehat{B}})\nu_{\widehat{B}}$, gdzie $\varphi\nu_{\widehat{B}}$ jest ściśle dodatnim automorfizmem $\widehat{B}$, to wykorzystując wiedzę o nośnikach nierozkładalnych modułów w mod $\widehat{B}$ (patrz [44, Section 3]) dostajemy, że obrazy $F_\lambda(S)$ i $F_\lambda(T)$ dowolnych nieizomorficznych $\widehat{B}$-modułów prostych S i T, które występują jako składniki kompozycyjne modułów w ustalonej rodzinie $\mathscr{C}_q^{\widehat{B}}$ są nieizomorficznymi prostymi A-modułami. Zatem z Twierdzenia III.3.1 oraz własności $(T1)$-$(T4)$ wnioskujemy, że $\mathscr{C}_q^{A} = F_\lambda(\mathscr{C}_q^{\widehat{B}}) = (\mathscr{C}_{q,x}^{A})_{x\in\mathbb{X}_q}$ dla każdego $q \in \mathbb{Q}$, gdzie $\mathscr{C}_{q,x}^{A} = F_\lambda(\mathscr{C}_{q,x}^{\widehat{B}})$, dla $x \in \mathbb{X}_q$, jest nieskończoną rodziną quasi-rur w Γ_A o wspólnych składnikach kompozycyjnych i zamkniętą na składniki kompozycyjne. Weźmy teraz $p \in \mathbb{Q}$. Twierdzimy, że dla każdego $x \in \mathbb{X}_p$ quasi-rura $\mathscr{C}_{p,x}^{A}$ jest quasi-rurą bez zewnętrznych krótkich dróg w mod A. Zauważmy najpierw, że dla nierozkładalnych modułów M i N w $\mathscr{C}_p^{A}$ mamy $M = F_\lambda(X)$ oraz $N = F_\lambda(Y)$, dla pewnych nierozkładalnych modułów X i Y w $\mathscr{C}_p^{\widehat{B}}$, oraz F_λ indukuje izomorfizm k-modułów $\mathrm{Hom}_A(M,N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\widehat{B}}(X,Y)$, co wynika z własności $(T5)$, $(T6)$ oraz nierówności $q+l > q+2m > q+m$. Przypuśćmy, że istnieje zewnętrzna krótka droga $M \to L \to N$ w mod A z M oraz N w $\mathscr{C}_{p,x}^{A}$, dla pewnego $x \in \mathbb{X}_p$, a $L \notin \mathscr{C}_{p,x}^{A}$. Zauważmy, że L nie leży w $\mathscr{C}_p^{A}$, gdyż z własności $(T3)$ różne quasi-rury w $\mathscr{C}_p^{A}$ są ortogonalne. Zatem $M = F_\lambda(X)$, a $N = F_\lambda(Y)$, dla pewnych X i Y w $\mathscr{C}_{p,x}^{\widehat{B}}$ oraz $L = F_\lambda(Z)$ dla pewnego Z w $\mathscr{C}_r^{\widehat{B}}$, gdzie $r > p$. Wobec tego mamy izomorfizm k-modułów indukowany przez F_λ

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\widehat{B}}(X, {}^{g^i}Z) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(M, L).$$

Ponieważ $\mathrm{Hom}_A(M,L) \neq 0$, to korzystając z własności $(T5)$ możemy wybrać takie $r > p$ oraz $Z \in \mathscr{C}_r^{\widehat{B}}$, że $L = F_\lambda(Z)$ i $\mathrm{Hom}_{\widehat{B}}(X,Z) \neq 0$. Z racji tego, że X należy do $\mathscr{C}_p^{\widehat{B}}$, stosując własności $(T6)$ i $(T7)$ wnosimy, iż $p < r \leq p+m$. Ponadto mamy także następujący izomorfizm k-modułów indukowany przez F_λ

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\widehat{B}}(Z, {}^{g^i}Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(L, N).$$

Zauważmy, że dla każdego $i \in \mathbb{Z}$, ${}^{g^i}Y$ jest nierozkładalnym modułem z $\mathscr{C}_{p+li}^{\widehat{B}}$ i oczywiście $F_\lambda({}^{g^i}Y) = F_\lambda(Y) = N$. Stosując własność $(T5)$ otrzymujemy, że dla pewnego $i \geq 1$ mamy $\mathrm{Hom}_{\widehat{B}}(Z, {}^{g^i}Y) \neq 0$ bowiem $\mathrm{Hom}_A(L,N) \neq 0$, $L = F_\lambda(Z)$ dla $Z \in \mathscr{C}_r^{\widehat{B}}$, gdzie $r > p$, a $Y \in \mathscr{C}_p^{\widehat{B}}$. Jednakże wówczas $p + li \geq p + l > p + 2m > r + m$, gdyż $r \leq p+m$, co prowadzi do sprzeczności z własnością $(T6)$.

Podsumowując pokazaliśmy, że wszystkie quasi-rury w Γ_A są uogólnione standardowe i składają się z modułów, które nie leżą na zewnętrznych krótkich drogach w $\operatorname{mod} A$. Zatem kołczan składowych Σ_A w A nie ma krótkich cykli, czyli (ii) implikuje (i).

Pokażemy teraz, że (i) implikuje (ii). Załóżmy więc, że nie istnieją krótkie cykle w kołczanie składowych Σ_A. Wówczas ze Stwierdzenia 1.2 kołczan Γ_A zawiera rodzinę quasi-rur $\mathscr{C} = (\mathscr{C}_x)_{x\in\mathbb{X}}$ ze wspólnymi składnikami kompozycyjnymi, zamkniętą na składniki kompozycyjne i składającą się z modułów, które nie leżą na krótkich nieskończonych cyklach w $\operatorname{mod} A$. Z własności $(T3)$ wiemy, że dla każdego $q \in \mathbb{Q}$ rodzina $\mathscr{C}_q^A = F_\lambda(\mathscr{C}_q^{\widehat{B}})$ jest rodziną $\mathscr{C}_{q,x}^A = F_\lambda(\mathscr{C}_{q,x}^{\widehat{B}})$, $x \in \mathbb{X}_q$, quasi-rur ze wspólnymi składnikami kompozycyjnymi. Ponadto funktor opuszczania F_λ indukuje izomorfizm kołczanów z translacją $\Gamma_{\widehat{B}}/G \xrightarrow{\sim} \Gamma_A$ (patrz Twierdzenie III.3.1), a więc każda składowa w Γ_A jest quasi-rurą postaci $\mathscr{C}_{q,x}^A = F_\lambda(\mathscr{C}_{q,x}^{\widehat{B}})$ dla pewnych $q \in \mathbb{Q}$ oraz $x \in \mathbb{X}_q$. Ze względu na fakt, że rodzina $\mathscr{C}$ jest zamknięta na składniki kompozycyjne, wnosimy istnienie takiego $r \in \mathbb{Q}$, że $\mathscr{C}$ zawiera wszystkie quasi-rury $\mathscr{C}_{r,x}^A$ z $\mathscr{C}_r^A$, dla $x \in \mathbb{X}_r$. Wtedy Stwierdzenie III.3.4 implikuje, że g jest postaci $g = \varphi\nu_{\widehat{B}}^2$ dla pewnego dodatniego automorfizmu φ algebry $\widehat{B}$. Przypuśćmy, że φ jest sztywnym automorfizmem $\widehat{B}$. Wówczas ze Stwierdzenia II.2.2 dostajemy, iż ograniczenie φ do B ustala nierozkładalny moduł projektywny, to znaczy, istnieje nierozkładalny moduł projektywny P taki, że $\varphi(P) = P$. Niech więc $\mathscr{C}_{p,x}$, dla pewnego $p \in \mathbb{Z}$ oraz pewnego $x \in \mathbb{X}_p$, będzie quasi-rurą w $\Gamma_{\widehat{B}}$, która zawiera P. Bez straty ogólności możemy założyć, że $p = 0$. Dostajemy krótki cykl modułów w $\operatorname{mod}\widehat{B}$ postaci $P \xrightarrow{f} \nu_{\widehat{B}}(P) \xrightarrow{g} \nu_{\widehat{B}}^2(P)$, gdzie f oraz g są następującymi złożeniami homomorfizmów

$$P \longrightarrow \operatorname{top}(P) \xrightarrow{\sim} \operatorname{soc}(\nu_{\widehat{B}}(P)) \longrightarrow \nu_{\widehat{B}}(P)$$

oraz

$$\nu_{\widehat{B}}(P) \longrightarrow \operatorname{top}(\nu_{\widehat{B}}(P)) \xrightarrow{\sim} \operatorname{soc}(\nu_{\widehat{B}}^2(P)) \longrightarrow \nu_{\widehat{B}}^2(P).$$

W konsekwencji otrzymujemy krótki cykl w Σ_A

$$F_\lambda(\mathscr{C}_{0,x}) \longrightarrow F_\lambda(\mathscr{C}_{m,y}) \longrightarrow F_\lambda(\mathscr{C}_{0,x})$$

gdzie $\nu_{\widehat{B}}(P) \in \mathscr{C}_{m,y}$, dla pewnego $y \in \mathbb{X}_m$, co przeczy (i). □

Stwierdzenie 2.3. *Niech B będzie algebrą odwróconą typu Euklidesa, G nieskończoną, cykliczną, dopuszczalną grupą automorfizmów $\widehat{B}$, a $A = \widehat{B}/G$. Wtedy następujące zdania są równoważne:*

(i) Kołczan składowych Σ_A algebry A nie zawiera krótkich cykli.

(ii) $G=(\varphi\nu_{\widehat{B}}^{2})$ *dla ściśle dodatniego automorfizmu* φ *algebry* $\widehat{B}$.

Dowód. Z Twierdzenia III.3.1 wiemy, że G jest generowana przez ściśle dodatni automorfizm g algebry $\widehat{B}$. Zatem istnieje taka dodatnia liczba $l\in\mathbb{Z}$, że $g(\mathscr{C}_q^{\widehat{B}})=\mathscr{C}_{q+l}^{\widehat{B}}$ oraz $g(\mathscr{X}_q^{\widehat{B}})=\mathscr{X}_{q+l}^{\widehat{B}}$ dla wszystkich $q\in\mathbb{Z}$. Rozważmy kanoniczne nakrycie Galois $F\colon\widehat{B}\to\widehat{B}/G=A$ oraz stowarzyszony z nim funktor opuszczania $F_\lambda\colon\operatorname{mod}\widehat{B}\to\operatorname{mod}A$. Ponieważ F_λ jest gęsty, to otrzymujemy naturalne izomorfizmy k-modułów

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(X,{}^{g^i}Y)\xrightarrow{\sim}\operatorname{Hom}_A(F_\lambda(X),F_\lambda(Y)),$$

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}\operatorname{Hom}_{\widehat{B}}({}^{g^i}X,Y)\xrightarrow{\sim}\operatorname{Hom}_A(F_\lambda(X),F_\lambda(Y)),$$

dla wszystkich nierozkładalnych modułów X oraz Y w $\operatorname{mod}\widehat{B}$.

Pokażemy najpierw, że $(i)\Rightarrow(ii)$. Załóżmy, że nie istnieją krótkie cykle w kołczanie składowych Σ_A. Wówczas Stwierdzenie 1.2 implikuje istnienie w Γ_A rodziny $\mathscr{C}=(\mathscr{C}_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{X}}$ quasi-rur ze wspólnymi składnikami kompozycyjnymi, zamkniętej na składniki kompozycyjne i składającej się z modułów, które nie leżą na krótkich nieskończonych cyklach w $\operatorname{mod}A$. Wtedy ze Stwierdzenia III.3.5 wynika, że $g=\varphi\nu_{\widehat{B}}^2$ dla pewnego dodatniego automorfizmu φ algebry $\widehat{B}$. Twierdzimy, że φ jest ściśle dodatnim automorfizmem algebry $\widehat{B}$.

Załóżmy, że φ jest sztywnym automorfizmem algebry $\widehat{B}$. Weźmy $q=0$ i korzystając z własności $(E8)$, moduł projektywno-injektywny P w $\mathscr{X}_0$. Niech f oraz g będą następującymi złożeniami homomorfizmów

$$P\longrightarrow\operatorname{top}(P)\xrightarrow{\sim}\operatorname{soc}(\nu_{\widehat{B}}(P))\longrightarrow\nu_{\widehat{B}}(P)$$

oraz

$$\nu_{\widehat{B}}(P)\longrightarrow\operatorname{top}(\nu_{hB}(P))\xrightarrow{\sim}\operatorname{soc}(\nu_{\widehat{B}}^2(P))\longrightarrow\nu_{\widehat{B}}^2(P),$$

odpowiednio. Wówczas mamy krótką drogę między modułami nierozkładalnymi

$$P\xrightarrow{f}\nu_{\widehat{B}}(P)\xrightarrow{g}\nu_{\widehat{B}}^2(P)$$

w $\operatorname{mod}\widehat{B}$, gdzie na podstawie własności $(E3)$ mamy $P\in\mathscr{X}_0$, $\nu_{\widehat{B}}(P)\in\mathscr{X}_2$ oraz $\nu_{\widehat{B}}^2(P)\in\mathscr{X}_4$. Zatem z Twierdzenia III.3.1 otrzymujemy krótką drogę między nierozkładalnymi modułami $F_\lambda(P)\to F_\lambda(\nu_{\widehat{B}}(P))\to F_\lambda(\nu_{\widehat{B}}^2(P))$ w $\operatorname{mod}A$. Ponieważ φ jest sztywnym automorfizmem $\widehat{B}$, to wnioskujemy, że $F_\lambda(P)$ oraz $F_\lambda(\nu_{\widehat{B}}^2(P))$ należą do tej samej składowej $F_\lambda(\mathscr{X}_0)$. Oczywiście

$\operatorname{rad}_A^\infty(F_\lambda(P), F_\lambda(\nu_{\widehat{B}}(P)) \neq 0$ oraz $\operatorname{rad}_A^\infty(F_\lambda(\nu_{\widehat{B}}(P), F_\lambda(\nu_{\widehat{B}}^2(P)) \neq 0$. Stąd kołczan składowych Σ_A zawiera krótki cykl $F_\lambda(\mathscr{X}_0) \to F_\lambda(\mathscr{X}_2) \to F_\lambda(\mathscr{X}_0)$, co daje sprzeczność. Wobec tego dowód implikacji $(i) \Rightarrow (ii)$ został zakończony.

Przypuśćmy teraz, że zachodzi (ii). W szczególności mamy, że $g = \varphi\nu_{\widehat{B}}^2$, dla ściśle dodatniego automorfizmu φ algebry $\widehat{B}$. Wówczas własność $(E3)$ implikuje istnienie dodatniej liczby całkowitej $l > 4$, dla której $g(\mathscr{C}_q^{\widehat{B}}) = \mathscr{C}_{q+l}^{\widehat{B}}$ oraz $g(\mathscr{X}_q^{\widehat{B}}) = \mathscr{X}_{q+l}^{\widehat{B}}$ dla dowolnego $q \in \mathbb{Z}$. Z własności $(E1)$ oraz Twierdzenia III.3.1 wnioskujemy, że aby pokazać brak krótkich cykli w Σ_A musimy pokazać, że Γ_A nie zawiera zewnętrznych krótkich dróg oraz każda składowa w G_A jest uogólniona standardowa. Z własności $(E1)$ oraz [74, Theorem 3] każda składowa w Γ_A jest uogólniona standardowa. Przypuśćmy, że istnieje składowa $\mathscr{C}$ w Γ_A oraz krótka zewnętrzna droga $M \to N \to L$, gdzie $M, L \in \mathscr{C}$ oraz $N \notin \mathscr{C}$. Korzystając ponownie z Twierdzenia III.3.1 wnioskujemy istnienie nierozkładalnych modułów X, Y i Z w mod $\widehat{B}$ o własności $M = F_\lambda(X)$, $N = F_\lambda(Y)$ oraz $L = F_\lambda(Z)$. Co więcej X należy albo do $\mathscr{C}_{p,x}$, dla pewnych $p \in \mathbb{Z}$ i $x \in \mathbb{X}_p$, albo do $\mathscr{X}_p$, dla pewnego $p \in \mathbb{Z}$. Wtedy $\mathscr{C} = F_\lambda(\mathscr{C}_{p,x})$ albo $\mathscr{C} = F_\lambda(\mathscr{X}_p)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $p = 0$. Zatem mamy do rozpatrzenia dwa przypadki.

Załóżmy najpierw, że $X \in \mathscr{C}_{0,x}$. Mamy indukowany przez F_λ izomorfizm k-modułów

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(X, {}^{g^i}Y) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(M, N).$$

Ponieważ $\operatorname{Hom}_A(M, N) \neq 0$, to stosując własność $(E5)$ wnosimy, że Y należy do

$$\mathscr{X}_0 \vee \mathscr{C}_1 \vee \mathscr{X}_1 \vee \mathscr{C}_2.$$

Mamy także izomorfizm k-modułów

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(Y, {}^{g^i}Z) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(N, L).$$

Ponownie, ponieważ $\operatorname{Hom}_A(N, L) \neq 0$, to stosując własność $(E5)$ wnosimy, że Z należy do

$$\mathscr{X}_2 \vee \mathscr{C}_2 \vee \mathscr{X}_3 \vee \mathscr{C}_3 \vee \mathscr{X}_4 \vee \mathscr{C}_4.$$

Z drugiej strony z własności $(E4)$ oraz założenia poczynionego na φ dostajemy, iż $Z \in \mathscr{C}_{l,\lambda}$ dla pewnego $l > 4$, co prowadzi do sprzeczności.

Załóżmy teraz, że $X \in \mathscr{X}_0$. Mamy indukowany przez F_λ izomorfizm k-modułów

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \operatorname{Hom}_{\widehat{B}}(X, {}^{g^i}Y) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(M, N).$$

Ponieważ $\operatorname{Hom}_A(M, N) \neq 0$, to stosując własność $(E5)$ wnosimy, iż Y należy do

$$\mathscr{C}_1 \vee \mathscr{X}_1 \vee \mathscr{C}_2 \vee \mathscr{X}_2.$$

Mamy także izomorfizm k-modułów

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\widehat{B}}(Y, {}^{g^i}Z) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(N, L).$$

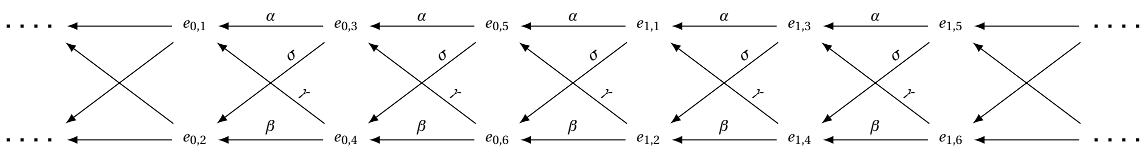
Ponownie, ponieważ $\mathrm{Hom}_A(N, L) \neq 0$, to stosując własność $(E5)$ wnosimy, że Z należy do

$$\mathscr{X}_1 \vee \mathscr{X}_2 \vee \mathscr{X}_3 \vee \mathscr{X}_4.$$

Z drugiej strony z własności $(E4)$ oraz założenia poczynionego na φ dostajemy, iż $Z \in \mathscr{X}_l$ dla pewnego $l > 4$, co prowadzi do sprzeczności. □

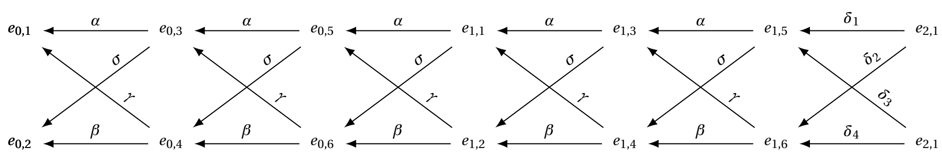
3 Przykład

Niech k będzie ciałem algebraicznie domkniętym. Rozważmy wyjątkową k-algebrę tubularną $B = B_{ex}$ oraz kategorię powtórzeń $\widehat{B} = kQ_{\widehat{B}}/I_{\widehat{B}}$, będącą nieskończenie wymiarową algebrą, algebry B, gdzie kołczan $Q_{\widehat{B}}$ jest postaci



a $I_{\widehat{B}}$ jest ideałem w $kQ_{\widehat{B}}$ generowanym przez wszystkie kombinacje dróg postaci $\gamma\sigma + \beta^2$, $\sigma\gamma - \alpha^2$, $\gamma\alpha - \beta\gamma$, $\alpha\sigma - \sigma\beta$, α^4, β^4, $\alpha^2\sigma$ oraz $\beta^2\gamma$. Zaznaczmy, że celem uproszczenia notacji pominęliśmy indeksy strzałek α, β, σ oraz γ.

Połóżmy $A = \widehat{B}/(\varphi \nu_{\widehat{B}}^2)$, gdzie $\varphi \colon \widehat{B} \to \widehat{B}$ jest sztywnym automorfizmem algebry powtórzeń $\widehat{B}$, którego obcięcie do B jest wyróżnionym automorfizmem algebry B takim, że $b = c = d = r = u = v = 1$ oraz $a = e = -1$, gdzie $a, b, c, d, e, r, u, v \in k \setminus \{0\}$ są skalarami z definicji automorfizmu wyróżnionego. Wówczas z Twierdzenia 2.1 k-algebra samoinjektywna A jest algebrą, której kołczan składowych nie zawiera krótkich cykli. Ponadto algebra A jest postaci kQ_A/I_A, gdzie Q_A jest następującym kołczanem



w którym utożsamiamy wierzchołek $e_{0,1}$ z $e_{2,1}$ oraz wierzchołek $e_{0,2}$ z $e_{2,1}$, a I_A jest ideałem w kQ_A generowanym przez kombinacje dróg $\gamma\sigma + \beta^2$, $\sigma\gamma - \alpha^2$, $\gamma\alpha - \beta\gamma$, $\alpha\sigma - \sigma\beta$, α^4, β^4, $\alpha^2\sigma$, $\beta^2\gamma$ oraz $\delta_1\alpha^3$, $\delta_1\alpha\sigma$, $\delta_1\alpha - \delta_2\gamma$, $\delta_1\sigma - \delta_2\beta$, $\delta_4\beta^3$, $\delta_4\beta\gamma$, $\delta_4\gamma - \delta_3\alpha$, $\delta_3\sigma + \delta_4\beta$, $\alpha^3\delta_4$, $\alpha^2\delta_4\beta$, $\alpha\delta_4\beta^2$, $\beta^3\delta_1$, $\beta^2\delta_1\alpha$, $\beta\delta_1\alpha^2$, $\alpha^2\delta_3$, $\alpha\delta_4\gamma$, $\beta^2\delta_2$, $\beta\delta_1\sigma$, $\alpha\delta_3 - \sigma\delta_1$, $\beta\delta_2 - \gamma\delta_4$, $\alpha\delta_4 - \sigma\delta_2$ i $\beta\delta_1 + \gamma\delta_3$.

Dodatek A

Kod źródłowy algorytmu

Poniższy algorytm został napisany w środowisku Maple 15 i używa pakietów $linalg$ oraz $combinat$. Algorytm służy do wyliczenia modułów odwracających w składowej postprojektywnej algebry dziedzicznej typu Euklidesa, co sprowadza się do wyznaczenia modułów odwracających w utajonej dziedzinie tej składowej (patrz [55, Podrozdział XIV.4]). Algorytm na wejściu przyjmuje algebrę dziedziczną, którą kodujemy w postaci macierzy dolnotrójkątnej H w następujący sposób: Z pracy [14] wiemy, że algebrę dziedziczną H możemy przedstawić jako dolnotrójkątną algebrę macierzową, w której jako współczynnik H_{ij} przyjmujemy ciało K_{ij} lub ciało będące skończonym rozszerzeniem pewnego ciała K_{st}, gdzie $j \leq i$, $t \leq s$ oraz $i, j, s, t \in \{1, \ldots, \operatorname{rk} K_0(H)\}$. Wówczas współczynnik H_{ij} macierzy H w naszym algorytmie wynosi albo 1, jeśli ciało K_{ij} nie jest rozszerzeniem innego ciała K_{st} z macierzy H, albo największy spośród stopni rozszerzenia $[K_{ij} : K_{st}]$ dla tych $s, t \in \{1, \ldots, n\}$, dla których ciało K_{ij} jest rozszerzeniem ciała K_{st}.

```
# H = algebra dziedziczna zadana macierzą.
H := convert( Macierz_algebry_dziedzicznej, matrix );

# n jest rangą grupy Grothendiecka K0(H).
n := Size(H, 1) ;

# Szukamy homomorfizmów między nierozkładalnymi modułami projektywnymi.
HOMS := FindHoms(H) ;

# Wygenerujemy teraz pełen układ parami ortogonalnych idempotentów algebry H
for s to n do
   e[s] := array(1 .. n) ;
   for i to n do
      if i = s
         then e[s][i] := 1
      else
         e[s][i] := 0
      fi
   od ;

   # e[s] jest s-tym idempotentem zapisanym jako macierz wektorowa.
   e[s] := Vector(e[s]) ;
```

```
   # Macierz E zawiera wszystkie parami ortogonalne idempotenty algebry H,
   # których suma jest jedynką H.
   # Zatem E[s] jest s-tym idempotentem H zapisanym w postaci macierzy n×n.
   E[s] := Matrix(1 .. n, 1 .. n, e[s], shape = diagonal)
od;

# Wygenerujemy teraz początek składowej postprojektywnej.
# Przy czym mamy P[i,j] = τ_H^{-j} P_i, gdzie P_i = e_i H jest H-modułem projektywnym.
for i to n do
   P[i, 0] := convert( Matrix( multiply(e[i], HOMS)), list) ;
od ;

for i to n do
   P[i, -1] := convert([0, 0, 0, 0, 0], list)
od ;
```

Kolejnym krokiem jest wyliczenie utajonej dziedziny $\mathscr{DP}(H)$ składowej postprojektywnej algebry H oraz związanej z nią liczby całkowitej r. Przypomnijmy, że r jest najmniejszą liczbą całkowitą, dla której obrazy modułów $\tau^{-r}P_i$ w grupie Grothendiecka nie mają zerowych składowych dla $i = 1, \ldots, n$.

```
# Ciągi Auslandera-Reiten o początku w module projektywnym,
# kodujemy w macierzy ARseq, dla której każdy wiersz
# zawiera w sobie ciąg Auslandera-Reiten.
ARseq := FindARseq(H) ;

# Używając ciągów prawie rozszczepialnych, podajemy wzory
# na obrazy modułów postprojektywnych w grupie Grothendiecka.
# Następnie, używając tych wzorów, liczymy utajoną dziedzinę.
r := 0 ;
i := 0 ;
while r = 0 do
   i := i + 1 ;
   for j to n do
      P[j, i] := [seq(0, k = 1 .. n)] ;
      for s to n do
         if ARseq[j, s][1] <> 0 then
            # Wzór:
            P[j, i] := P[j, i] + ARseq[j, s][1] * P[s, i + ARseq[j, s][2]]
         fi
      od
   od ;

   # Sprawdzimy teraz czy wszystkie składowe obrazów P[j,i] są niezerowe.
   TempA := {} ;
   for l to n do
      TempA := union(TempA, convert(P[l, i], set))
   od ;
```

```
    # Sprawdź definicję liczby r.
    if evalb(not in(0, TempA))
        r := i ;
    fi ;

    # Zresetuj zmienną tymczasową TempA.
    TempA := 'TempA' ;
od ;
```

Przejdziemy teraz do opisania używanych wcześniej procedur. Zaczniemy od procedury $FindHoms$, która szuka homomorfizmów między modułami projektywnymi, co sprowadzimy do podania macierz o współczynnikach $a[ij] = \dim_{F_i} \mathrm{Hom}_H(P_i, P_j)$, gdzie $F_i = \mathrm{End}_H(P_i)$ oraz $i, j = 1, \ldots, n$.

```
FindHoms := proc(M::matrix)
    local Homs, i, j ;
    Homs := Matrix(n, n, fill = 0) ;

    for i to n do
        for j from i to n do
            # Dzielenie w poniższym przypisaniu jest konsekwencją
            # kodowania algebry dziedzicznej H.
            Homs[j, i] := M[j, i] / M[i, i]
        od
    od ;

    return Homs;
end proc:
```

Kolejną procedurą jest procedura $FindIrr$, która jako argument przyjmuje macierz algebry H i szuka nieprzywiedlnych homomorfizmów między nierozkładalnymi H-modułami projektywnymi. Z ogólnej teorii wiemy, że istnieje nieprzywiedlny homomorfizm $f\colon X \to Y$ pomiędzy nierozkładalnymi modułami X i Y wtedy i tylko wtedy, gdy $f \in \mathrm{rad}_H(X,Y) \setminus \mathrm{rad}^2_H(X,Y)$. Na wyjściu, procedura $FindIrr$ zwraca macierz $IrrMaps$, w której element $IrrMaps_{ij}$ równy jest liczbie nieprzywiedlnych homomorfizmów z P_i do P_j.

```
FindIrr := proc(M::matrix)
    local i, j, radH, radHsq, IrrMaps ;

    # Zaczniemy od zbudowania macierzy radykału algebry H.

    radH := Matrix(n, n, fill = 0) ;
    for i to n do
        for j to i - 1 do
            radH[i, j] := M[i, j]
        od
    od

    # Definiujemy radHsq jako radH^2.
```

```
    radHsq := Matrix(n, n, fill = 0) ;
    radHsq := multiply(radH, radH) ;

    # Budujemy macierzy IrrMaps.
    IrrMaps := Matrix(n, n, fill = 0) ;
    for i to n do
       for j to n do
       # Ponieważ rad^2(H) jest podprzestrzenią rad(H), to po mnożeniu
       # macierzy, które zdefiniowało radHsq, musimy "zresetować" niezerowe
       # elementy macierzy rad^2(H).
          if radHsq[i, j] <> 0 then
             radHsq[i, j] := radH[i, j]
          fi;
          IrrMaps[i, j] := radH[i, j] - radHsq[i, j]
       od
    od

    # Zwracamy macierz IrrMaps.
    return IrrMaps ;

end proc :
```

Przejdziemy teraz do procedury $FindARseq$, która szuka ciągów Auslandera-Reiten o początku w module projektywnym. Macierz, którą otrzymujemy na wyjściu, służy do wyliczenia obrazów modułów postprojektywnych w grupie Grothendiecka. Przypomnijmy, że moduły w składowej postprojektywnej są jednoznacznie wyznaczone przez swoje obrazy w grupie Grothendiecka.

Ponieważ dla krótkiego ciągu dokładnego $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ mamy $[Z] = [Y] - [X]$, to $FindARseq$ na wyjściu zwraca macierz $ARseq$, dla której każdy element $ARseq_{ij}$, gdzie $i \neq j$, zawiera taką parę $[s, k]$, że albo s jest liczbą nieprzywiedlnych homomorfizmów z P_i do P_j, jeśli $k = 0$ albo s jest liczbą nieprzywiedlnych homomorfizmów z P_i do $\tau^{-1}P_j$, jeśli $k = -1$. W przypadku gdy $i = j$, element $ARseq_{ij}$ zawiera parę $[-1, -1]$, która odzwierciedla odejmowanie obrazu $[X]$ w powyższym wzorze na obraz $[Y]$ w grupie Grothendiecka.

Procedura $FindARseq$ jako argument przyjmuje macierz algebry H.

```
FindARseq := proc(M::matrix)
    local i, j, IrrMaps, ARseq, Zero ;

    # Zarówno ARseq jak i Zero są macierzami.
    ARseq := Matrix(n,n,fill=0) ;
    Zero := ARseq ;

    # Wywołujemy procedurę FindIrr.
    IrrMaps := FindIrr(M) ;

    # Zaczynamy budowę macierzy ARseq.
    for i to n do
```

```
      for j to n do
         if i = j then
            ARseq[i, j] := [-1, -1]
         else
            if multiply(E[j], multiply(IrrMaps, E[i]))[j, i] = 0 then
               if multiply(E[i], multiply(IrrMaps, E[j]))[i, j] = 0 then
                  ARseq[i, j] := [0, 0]
               else
                  ARseq[i, j] := [M[i, j] / M[j, j], 0]
               fi
            else
               ARseq[i, j] := [M[j, i] / M[j, j], -1]
            fi
         fi
      od
   od

   return ARseq ;
end proc :
```

Przejdziemy teraz do procedury $IfTilting$, która sprawdza czy moduł zakodowany w zmiennej $tilt$ jest modułem odwracającym. Przypomnijmy, że dla algebry dziedzicznej T jest modułem odwracającym wtedy i tylko wtedy, gdy T ma n parami nieizomorficznych składników prostych oraz $\mathrm{Hom}_H(T, \tau T) = 0$.

Procedura $IfTilting$ na wejściu przyjmuje zbiór $tilt$, którego elementami są pary liczb $[i, j]$ odpowiadające modułom ze składowej postprojektywnej. Na wyjściu procedura $IfTilting$ zwraca wartość PRAWDA, o ile $tilt$ jest modułem projektywnym albo FAŁSZ w przeciwnym wypadku.

```
IfTilting := proc(tilt::set)
   local L, i, j, k, s, a, b ;
   # Konwertujemy zbiór tilt na listę.
   L := convert(tilt, list) ;

   for k to n do
   # Najpierw ustalamy k-ty składnik prosty T_k (=L[k]) modułu zakodowanego w tilt.
   # Jest on postaci T_i = τ^{-a}(P_i), gdzie P_i jest modułem projektywnym.
      a := L[k][2] ;
      i := L[k][1] ;
         for s to n do
         # Sprawdźmy czy istnieje niezerowy homomorfizm
         # z T_k do τ(T_s) dla s = 1,...,n.
            j := L[s][1] ;
            b := L[s][2] ;
            if not(b-1 < a) then
               if P[j, b - 1 - a][i] <> 0 then return false fi
            fi
         od
```

```
   od ;

   return true ;
end proc :
```

Ostatnią procedurą jest procedura $TiltingMod$, która zwraca listę modułów odwracających, których jednym ze składników prostych jest ustalony, przyjęty na wejściu, moduł projektywny.

```
TiltingMod := proc (FixProj::set)
   local ConcealedDomain, tiltTemp, i, s, ListOfComplements, TiltingList ;
   global r ;

   TiltingList := {};
   s := nops(FixProj) ;

   # Zacznijmy od wygenerowania wszystkich par [i,j], dla których
   # τ_H^j P_i jest modułem, różnym od modułu zakodowanego
   # w FixProj, w utajonej dziedzinie.
   ConcealedDomain :=
    convert(minus({seq(seq([i, j], i = 1 .. n), j = 0 .. r)}, FixProj), list) ;

   # Następnie wygenerujmy zbiór złożony ze zbiorów (nierozkładalnych modułów)
   # mogących uzupełnić moduł FixProj do modułu odwracającego.
   # Robimy to przez wybranie wszystkich kombinacji n-s elementów ze zbioru
   # ConcealedDomain, gdzie s jest liczbą modułów w FixProj.
   ListOfComplements := choose(ConcealedDomain, n - s) ;

   # Teraz zaczniemy sprawdzać, które elementy listy ListOfComplements
   # uzupełnią moduł FixProj do modułu odwracającego.
   for i to nops(ListOfComplements) do
      # Uzupełniamy moduł FixProj o n-s składników prostych z utajonej dziedziny.
      tiltTemp := union(FixProj, convert(ListOfComplements[i], set)) ;

      # Sprawdzamy czy tiltTemp jest modułem odwracającym.
      # Jeśli tak, to dodajemy go do listy TiltingList.
      if IfTilting(tiltTemp) then
         TiltingList := union(TiltingList, {tiltTemp})
      fi
   od

   end TiltingList ;
end proc :
```

BIBLIOGRAFIA

[1] I. ASSEM, J. NEHRING oraz A. SKOWROŃSKI, *Domestic trivial extensions of simply connected algebras*, Tsukuba J. Math. **13** (1989), 31–72.

[2] I. ASSEM, D. SIMSON oraz A. SKOWROŃSKI, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras 1: Techniques of Representation Theory*, London Mathematical Society Student Texts 65, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[3] I. ASSEM oraz A. SKOWROŃSKI, *Iterated tilted algebras of type* $\tilde{\mathbb{A}}_n$, Math. Z. **195** (1987), 269–290.

[4] I. ASSEM oraz A. SKOWROŃSKI, *Multicoil algebras*, w: *Representations of Algebras*, Canad. Math. Soc. Conference Proc. 14, Amer. Math. Soc., 1993, 29–68.

[5] I. ASSEM, A. SKOWROŃSKI oraz B. TOMÉ, *Coil enlargements of algebras*, Tsukuba J. Math. **19** (1995), 453–478.

[6] M. AUSLANDER, *Representation theory of artin algebras II*, Comm. Algebra **1** (1974), 269–310.

[7] M. AUSLANDER oraz I. REITEN, *Modules determined by their composition factors*, Illinois J. Math. **29** (1985), 280–301.

[8] M. AUSLANDER, I. REITEN oraz S. O. SMALØ, *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 36, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[9] J. BIAŁKOWSKI, *On the trivial extensions of tubular algebras*, Colloq. Math. **101** (2004), 259–269.

[10] K. BONGARTZ, *Critical simply connected algebras*, Manuscr. Math. **46** (1984), 1–12.

[11] W. CRAWLEY-BOEVEY, *Regular modules for tame hereditary algebras*, Proc. Lond. Math. Soc. **63** (1991), 241–265.

[12] W. CRAWLEY-BOEVEY, *Tame algebras and generic modules*, Proc. London Math. Soc. **63** (1991), 241–265.

[13] V. DLAB oraz C. M. RINGEL, *On algebras of finite representation type*, J. Algebra **33** (1975), 306–394.

[14] V. DLAB oraz C. M. RINGEL, *Indecomposable representations of graphs and algebras*, Memoirs Amer. Math. Soc. **6** (1976), no. 173.

[15] P. DOWBOR oraz A. SKOWROŃSKI, *Galois coverings of representation-infinite algebras*, Comment. Math. Helv. **62** (1987), 311–337.

[16] P. GABRIEL, *The universal cover of a representation-finite algebra*, w: *Representations of Algebras*, Lecture Notes in Math. 903, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1981, 68–105.

[17] W. GEIGLE oraz H. LENZING, *A class of weighted projective curves arising in representation theory of finite dimensional algebras*, w: *Singularities, Representation of Algebras and Vector Bundles*, Lecture Notes in Mathematics 1273, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1987, 265–297.

[18] D. HAPPEL oraz S. LIU, *Module categories without short cycles are of finite type*, Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), 371–375.

[19] D. HAPPEL, U. PREISER oraz C. M. RINGEL, *Vinberg's characterization of Dynkin diagrams using subadditive functions with applications to* DTr*-periodic modules*, w: *Representation Theory II*, Lecture Notes in Math. 832, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1980, 280–294.

[20] D. HAPPEL, I. REITEN oraz S. O. SMALØ, *Short cycles and sincere modules*, w: *Representations of Algebras*, Canad. Math. Soc. Conf. Proc. 14, 1993, 233–237.

[21] D. HAPPEL, I. REITEN oraz S. O. SMALØ, *Tilting in abelian categories and quasitilted algebras*, Memoirs Amer. Math. Soc. **120** (1996), no. 575.

[22] D. HAPPEL oraz C. M. RINGEL, *Tilted algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **274** (1982), 399–443.

[23] D. HAPPEL oraz C. M. RINGEL, *The derived category of a tubular algebra*, w: *Representation Theory I. Finite Dimensional Algebras*, Lecture Notes in Mathematics 1177, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1986, 156–180.

[24] D. HAPPEL oraz D. VOSSIECK, *Minimal algebras of infinite representation type with preprojective component*, Manuscr. Math. **42** (1983), 221–243.

[25] D. HUGHES oraz J. WASCHBÜSCH, *Trivial extensions of tilted algebras*, Proc. London Math. Soc. **46** (1983), 347–364.

[26] K. IGUSA oraz G. TODOROV, *A characterization of finite Auslander-Reiten quivers*, J. Algebra **89** (1984), 148–177.

[27] A. JAWORSKA, M. MALICKI oraz A. SKOWROŃSKI, *Auslander-Reiten components determined by their composition factors*, Proc. Amer. Math. Soc. **140** (2012), 4131–4140.

[28] A. JAWORSKA, P. MALICKI oraz A. SKOWROŃSKI, *On Auslander-Reiten components of algebras without external short paths*, J. London Math. Soc. **85** (2012), 245–268.

[29] A. JAWORSKA oraz A. SKOWROŃSKI, *The component quiver of a self-injective artin algebra*, Colloq. Math. (2010), 233–239.

[30] M. KARPICZ, A. SKOWROŃSKI oraz K. YAMAGATA, *On selfinjective artin algebras having generalized standard quasitubes*, J. Pure Appl. Algebra **215** (2011), 2738–2760.

[31] O. KERNER, *Tilting wild algebras*, J. London Math. Soc. **39** (1989), 29–47.

[32] O. KERNER oraz A. SKOWROŃSKI, *Quasitilted one-point extensions of wild hereditary algebras*, J. Algebra **244** (2001), 785–827.

[33] D. KUSSIN, *On the K-theory of tubular algebras*, Colloq. Math. **86** (2000), 137–152.

[34] H. LENZING, *A K-theoretic study of canonical algebras*, w: *Representation Theory of Algebras*, Canad. Math. Soc. Conf. Proc. 18, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, 433–454.

[35] H. LENZING oraz J. A. DE LA PEÑA, *Wild canonical algebras*, Math. Z. **224** (1997), 403–425.

[36] H. LENZING oraz J. A. DE LA PEÑA, *Concealed-canonical algebras and separating tubular families*, Proc. Lond. Math. Soc. **78** (1999), 513–540.

[37] H. LENZING oraz H. MELTZER, *Sheaves on a weighted projective line of genus one and representations of a tubular algebra*, w: *Representations of Algebras*, Canad. Math. Soc. Conf. Proc. 14, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, 313–337.

[38] H. LENZING oraz H. MELTZER, *Tilting sheaves and concealed-canonical algebras*, w: *Representation Theory of Algebras*, Canad. Math. Soc. Conf. Proc. 18, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, 455–473.

[39] H. LENZING oraz A. SKOWROŃSKI, *Quasi-tilted algebras of canonical type*, Colloq. Math. **71** (1996), 161–181.

[40] H. LENZING oraz A. SKOWROŃSKI, *Selfinjective algebras of wild canonical type*, Colloq. Math. **96** (2003), 245–275.

[41] S. LIU, *The degrees of irreducible maps and the shapes of the Auslander-Reiten quivers*, J. London Math. Soc. **45** (1992), 32–54.

[42] P. MALICKI oraz A. SKOWROŃSKI, *Almost cyclic coherent components of an Auslander-Reiten quiver*, J. Algebra **229** (2000), 695–749.

[43] P. MALICKI oraz A. SKOWROŃSKI, *Algebras with separating almost cyclic coherent Auslander-Reiten components*, J. Algebra **291** (2005), 208–237.

[44] J. NEHRING oraz A. SKOWROŃSKI, *Polynomial growth trivial extensions of simply connected algebras*, Fund. Math. **132** (1989), 117–134.

[45] L. PENG oraz J. XIAO, *On the number of* DTr*-orbits containing directing modules*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), 753–756.

[46] I. REITEN oraz A. SKOWROŃSKI, *Sincere stable tubes*, J. Algebra **232** (2000), 64–75.

[47] I. REITEN oraz A. SKOWROŃSKI, *Characterizations of algebras with small homological dimensions*, Adv. Math. **179** (2003), 122–154.

[48] I. REITEN oraz A. SKOWROŃSKI, *Generalized double tilted algebras*, J. Math. Soc. Japan **56** (2004), 269–288.

[49] I. REITEN, A. SKOWROŃSKI oraz S. O. SMALØ, *Short chains and regular components*, Proc. Amer. Math. Soc. **117** (1993), 601–612.

[50] I. REITEN, A. SKOWROŃSKI oraz S. O. SMALØ, *Short chains and short cycles of modules*, Proc. Amer. Math. Soc. **117** (1993), 343–354.

[51] C. M. RINGEL, *Representations of K-species and bimodules*, J. Algebra **41** (1976), 269–302.

[52] C. M. RINGEL, *Tame Algebras and Integral Quadratic Forms*, Lecture Notes in Math. 1099, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1984.

[53] C. M. RINGEL, *The canonical algebras, with an appendix by W. Crawley-Boevey*, w: *Topics in Algebra. Part 1: Rings and Representations of Algebras*, Banach Center Publications 26, PWN, Warsaw, 1990, 407–432.

[54] D. SIMSON oraz A. SKOWROŃSKI, *Extensions of artinian rings by hereditary injective modules*, w: *Representations of Algebras*, Lecture Notes in Math. 903, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1981, 315–330.

[55] D. SIMSON oraz A. SKOWROŃSKI, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras 2: Tubes and Concealed Algebras of Euclidean Type*, London Mathematical Society Student Texts 71, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[56] D. SIMSON oraz A. SKOWROŃSKI, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras 3: Representation-Infinite Tilted Algebras*, London Mathematical Society Student Texts 72, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[57] A. SKOWROŃSKI, *Selfinjective algebras of polynomial growth*, Math. Ann. **285** (1989), 177–199.

[58] A. SKOWROŃSKI, *Simply connected algebras and Hochschild cohomology*, w: *Representations of Algebras*, Canad. Math. Soc. Conf. Proc. 14, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, 431–447.

[59] A. SKOWROŃSKI, *Cycles in module categories*, w: *Finite Dimensional Algebras and Related Topics*, NATO ASI Series, Series C: Math. and Phys. Sciences 424, Kluwer Acad. Pub., Dordrecht, 1994, 309–345.

[60] A. SKOWROŃSKI, *Generalized standard Auslander-Reiten components*, J. Math. Soc. Japan **46** (1994), 517–543.

[61] A. SKOWROŃSKI, *Minimal representation-infinite artin algebras*, Math. Proc. Cambridge

Phil.. Soc. **116** (1994), 229–243.

[62] A. Skowroński, *On the composition factors of periodic modules*, J. London Math. Soc. **49** (1994), 477–492.

[63] A. Skowroński, *Regular Auslander-Reiten components containing directing modules*, Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), 19–26.

[64] A. Skowroński, *On omnipresent tubular families of modules*, w: *Representation Theory of Algebras*, Canad. Math. Soc. Conf. Proc. 18, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, 641–657.

[65] A. Skowroński, *Tame quasi-tilted algebras*, J. Algebra **203** (1998), 470–490.

[66] A. Skowroński, *Generalized canonical algebras and standard stable tubes*, Colloq. Math. **90** (2001), 77–93.

[67] A. Skowroński, *Generically directed algebras*, Arch. Math. **78** (2002), 358–361.

[68] A. Skowroński, *A construction of complex syzygy periodic modules over symmetric algebras*, Colloq. Math. **103** (2005), 61–69.

[69] A. Skowroński, *Selfinjective algebras: finite and tame type*, w: *Trends in Representation Theory of Algebras and Related Topics*, Contemporary Mathematics 406, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, 169–238.

[70] A. Skowroński oraz S. O. Smalø, *Directing modules*, J. Algebra **147** (1992), 137–146.

[71] A. Skowroński oraz K. Yamagata, *Socle deformations of self-injective algebras*, Proc. London Math. Soc. **72** (1996), 545–566.

[72] A. Skowroński oraz K. Yamagata, *Stable equivalence of selfinjective algebras of tilted type*, Arch. Math. (Basel) **70** (1998), 341–350.

[73] A. Skowroński oraz K. Yamagata, *Galois coverings of selfinjective algebras by repetitive algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999), 715–734.

[74] A. Skowroński oraz K. Yamagata, *On selfinjective artin algebras having nonperiodic generalized standard Auslander-Reiten components*, Colloq. Math. **96** (2003), 235–244.

[75] A. Skowroński oraz K. Yamagata, *On invariability of selfinjective algebras of tilted type under stable equivalences*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), 659–667.

[76] A. Skowroński oraz K. Yamagata, *Positive Galois coverings of selfinjective algebras*, Adv. Math. **194** (2005), 398–436.

[77] A. Skowroński oraz K. Yamagata, *Selfinjective algebras of quasitilted type*, w: *Trends in Representation Theory of Algebras and Related Topics*, European Math. Soc. Series of Congress Reports, European Math. Soc. Publ. House, Zurich, 2008, 639–708.

[78] A. Skowroński oraz K. Yamagata, *Frobenius Algebras I: Basic Representation Theory*,

EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society, 2011.

[79] Y. ZHANG, *The structure of stable components,* Canad. J. Math. **43** (1991), 652–672.

Skorowidz symboli

Skorowidz nazw