# Różne oblicza teorii części

Andrzej Pietruszczak

Katedra Logiki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika

Toruń–Warszawa 11.02.2021

## Wprowadzenie

Mereologia powstała jako teoria zbiorów kolektywnych (lub sum mereologicznych). Skonstruował ją polski logik Stanisław Leśniewski [1927–31]. Zbiory kolektywne są pewnymi całościami złożonymi z części, a samo pojęcie *zbioru kolektywnego* może być zdefiniowane za pomocą pojęcia *bycia częścią*.

## Wprowadzenie

Mereologia powstała jako teoria zbiorów kolektywnych (lub sum mereologicznych). Skonstruował ją polski logik Stanisław Leśniewski [1927–31]. Zbiory kolektywne są pewnymi całościami złożonymi z części, a samo pojęcie *zbioru kolektywnego* może być zdefiniowane za pomocą pojęcia *bycia częścią*.

Dlatego mereologia może być uważana za teorię „stosunku części do całości" (z greckiego: *meros* to część).

## Wprowadzenie

Mereologia Leśniewskiego została sformułowana w sposób specyficzny, odbiegający od standardowych formalizacji. Teoria ta była «nadbudowana» nad innym systemem Leśniewskiego, nazwanym przez niego „ontologią” [zob. np. Pietruszczak, 2000, 2018]

## Wprowadzenie

Mereologia Leśniewskiego została sformułowana w sposób specyficzny, odbiegający od standardowych formalizacji. Teoria ta była «nadbudowana» nad innym systemem Leśniewskiego, nazwanym przez niego „ontologią” [zob. np. Pietruszczak, 2000, 2018]

Teorię Leśniewskiego można jednak przełożyć na język teorii struktur. W tej postaci charakteryzuje się ona (czwartym) aksjomatem ($\exists$sum), który postuluje istnienie elementu danej struktury, który ma być sumą mereologiczną (zbiorem kolektywnym) dowolnie wybranej niepustej grupy elementów tej struktury (w tym również grupy nieskończonej) [zob. np. Pietruszczak, 2000, 2018, 2020].

## Wprowadzenie

Sumy mereologiczne postulowane przez ten aksjomat są z reguły obiektami otrzymanymi *ad hoc*, a w związku z tym ten aksjomat budzi różne kontrowersje.

## Wprowadzenie

Sumy mereologiczne postulowane przez ten aksjomat są z reguły obiektami otrzymanymi *ad hoc*, a w związku z tym ten aksjomat budzi różne kontrowersje.

Przykładowo, trudno uznać, że istnieje taki przedmiot materialny, który miałby być sumą złożoną z Księżyca i mojego serca. Co więcej, nawet problematyczne jest istnienie przedmiotu będącego sumą mereologiczną prawej i lewej ręki danego człowieka.

## Wprowadzenie

Struktury dla teorii części, w których obowiązuje wyżej opisany odpowiednik aksjomatu Leśniewskiego, będziemy nazywać *klasycznymi strukturami mereologicznymi*. Teorię tych struktur możemy zaś nazwać *klasyczną mereologią*.

## Wprowadzenie

Struktury dla teorii części, w których obowiązuje wyżej opisany odpowiednik aksjomatu Leśniewskiego, będziemy nazywać *klasycznymi strukturami mereologicznymi*. Teorię tych struktur możemy zaś nazwać *klasyczną mereologią*.

Wiadomo, że teoria ta odpowiada teorii zupełnych algebr Boole'a (inaczej: zupełnych krat boolowskich).

## Wprowadzenie

Struktury dla teorii części, w których obowiązuje wyżej opisany odpowiednik aksjomatu Leśniewskiego, będziemy nazywać *klasycznymi strukturami mereologicznymi*. Teorię tych struktur możemy zaś nazwać *klasyczną mereologią*.

Wiadomo, że teoria ta odpowiada teorii zupełnych algebr Boole'a (inaczej: zupełnych krat boolowskich).

Mianowicie, klasa wszystkich klasycznych struktur mereologicznych pokrywa się z klasą struktur, które powstają z zupełnych i niezdegenerowanych algebr Boole'a po usunięciu z nich zera [zob. np. Pietruszczak, 2000, 2018, 2020].

## Wprowadzenie

Struktury dla teorii części, w których obowiązuje wyżej opisany odpowiednik aksjomatu Leśniewskiego, będziemy nazywać *klasycznymi strukturami mereologicznymi*. Teorię tych struktur możemy zaś nazwać *klasyczną mereologią*.

Wiadomo, że teoria ta odpowiada teorii zupełnych algebr Boole'a (inaczej: zupełnych krat boolowskich).

Mianowicie, klasa wszystkich klasycznych struktur mereologicznych pokrywa się z klasą struktur, które powstają z zupełnych i niezdegenerowanych algebr Boole'a po usunięciu z nich zera [zob. np. Pietruszczak, 2000, 2018, 2020].

Stąd także z każdej klasycznej struktury mereologicznej po dodaniu do niej odpowiedniego «elementu zerowego» otrzymamy niezdegenerowaną zupełną algebrę Boole'a [zob. np. Pietruszczak, 2000, 2018, 2020].

## Wprowadzenie

Uważam jednak, że metodologicznie poprawne jest tylko takie określenie struktur mereologicznych, w którym nie odwołujemy się do pojęcia *zera* (gdyż to „zero” jest poza owymi strukturami).

## Wprowadzenie

W literaturze przedmiotu termin ‘mereologia’ stosuje się również do tych teorii pojęcia *bycia częścią*, w których nie obowiązuje aksjomat Leśniewskiego istnienia sum mereologicznych.

## Wprowadzenie

W literaturze przedmiotu termin 'mereologia' stosuje się również do tych teorii pojęcia *bycia częścią*, w których nie obowiązuje aksjomat Leśniewskiego istnienia sum mereologicznych.

Chociaż jest to zgodne z etymologią terminu 'mereologia', sądzę jednak, że powoduje to pewne «zamieszanie terminologiczne».

## Wprowadzenie

W literaturze przedmiotu termin 'mereologia' stosuje się również do tych teorii pojęcia *bycia częścią*, w których nie obowiązuje aksjomat Leśniewskiego istnienia sum mereologicznych.

Chociaż jest to zgodne z etymologią terminu 'mereologia', sądzę jednak, że powoduje to pewne «zamieszanie terminologiczne».

W przypadku rozważania słabszych teorii powinniśmy dodać odpowiednie przymiotniki dookreślające, tak jak to np. uczynił Simons [1987], gdy badał „minimalną ekstensjonalną mereologię". Ja zaś badałem różne «egzystencjalnie neutralne» oraz «egzystencjalnie zaangażowane» teorie.

## Wprowadzenie

Aksjomaty teorii «egzystencjalnie neutralnych» mogą postulować istnienie tylko takich obiektów, których istnienie wydaje się «całkowicie naturalne» (czyli wynika z podstawowych własności relacji *bycia częścią*) [zob. Pietruszczak, 2020].

## Wprowadzenie

Aksjomaty teorii «egzystencjalnie neutralnych» mogą postulować istnienie tylko takich obiektów, których istnienie wydaje się «całkowicie naturalne» (czyli wynika z podstawowych własności relacji *bycia częścią*) [zob. Pietruszczak, 2020].

W takich teoriach mamy więc istnienie tylko tych sum mereologicznych (zbiorów kolektywnych), które otrzymamy na mocy definicji i podstawowych własności relacji *bycia częścią*.

## Wprowadzenie

Aksjomaty teorii «egzystencjalnie neutralnych» mogą postulować istnienie tylko takich obiektów, których istnienie wydaje się «całkowicie naturalne» (czyli wynika z podstawowych własności relacji *bycia częścią*) [zob. Pietruszczak, 2020].

W takich teoriach mamy więc istnienie tylko tych sum mereologicznych (zbiorów kolektywnych), które otrzymamy na mocy definicji i podstawowych własności relacji *bycia częścią*.

W «egzystencjalnie neutralnych» teoriach przykładowo nie będzie tak, że każde dwa obiekty, które są częściami trzeciego, mają mieć sumę mereologiczną.

## Wprowadzenie

Aksjomaty teorii «egzystencjalnie neutralnych» mogą postulować istnienie tylko takich obiektów, których istnienie wydaje się «całkowicie naturalne» (czyli wynika z podstawowych własności relacji *bycia częścią*) [zob. Pietruszczak, 2020].

W takich teoriach mamy więc istnienie tylko tych sum mereologicznych (zbiorów kolektywnych), które otrzymamy na mocy definicji i podstawowych własności relacji *bycia częścią*.

W «egzystencjalnie neutralnych» teoriach przykładowo nie będzie tak, że każde dwa obiekty, które są częściami trzeciego, mają mieć sumę mereologiczną. Nie musi więc istnieć obiekt będący mereologiczną sumą prawej i lewej ręki danego człowieka.

## Wprowadzenie

Aksjomaty teorii «egzystencjalnie neutralnych» mogą postulować istnienie tylko takich obiektów, których istnienie wydaje się «całkowicie naturalne» (czyli wynika z podstawowych własności relacji *bycia częścią*) [zob. Pietruszczak, 2020].

W takich teoriach mamy więc istnienie tylko tych sum mereologicznych (zbiorów kolektywnych), które otrzymamy na mocy definicji i podstawowych własności relacji *bycia częścią*.

W «egzystencjalnie neutralnych» teoriach przykładowo nie będzie tak, że każde dwa obiekty, które są częściami trzeciego, mają mieć sumę mereologiczną. Nie musi więc istnieć obiekt będący mereologiczną sumą prawej i lewej ręki danego człowieka.

Sumy mereologiczne postulowane przez różne egzystencjalne założenia, można uważać za obiekty otrzymywane *ad hoc*. (Nie dotyczy to tylko wspomnianego już aksjomatu Leśniewskiego.)

## Spis

## Części jako kawałki

W języku potocznym słowo ‘część’ rozumie się zazwyczaj tak samo, jak słowa ‘fragment’ czy ‘kawałek’ itp., gdy odnosimy je do obiektów przestrzennych (regionów przestrzennych; zdarzeń czasoprzestrzennych). Przy takim rozumieniu stosunek części do całości ma dwie podstawowe właściwości:

1. Żaden przedmiot nie jest swoją częścią.
2. Nie ma takich dwóch przedmiotów, z których jeden byłby częścią drugiego, a ten drugi był częścią pierwszego.

## Części jako kawałki

W języku potocznym słowo ‘część’ rozumie się zazwyczaj tak samo, jak słowa ‘fragment’ czy ‘kawałek’ itp., gdy odnosimy je do obiektów przestrzennych (regionów przestrzennych; zdarzeń czasoprzestrzennych). Przy takim rozumieniu stosunek części do całości ma dwie podstawowe właściwości:

1. Żaden przedmiot nie jest swoją częścią.
2. Nie ma takich dwóch przedmiotów, z których jeden byłby częścią drugiego, a ten drugi był częścią pierwszego.

Dzięki pierwszemu warunkowi nie mamy trudności z interpretacją zwrotu ‘dwa przedmioty’ w drugim warunku. Widać, że chodzi o «dwa różne» przedmioty. Warunki te mówią odpowiednio, że stosunek części do całości jest *przeciwzwrotny* i *antysymetryczny*.

## Części jako kawałki

Aby skrócić zapis tych i innych własności relacji *bycia częścią*, przyjmijmy, że zwrot '$x$ jest częścią $y$-a' będziemy symbolicznie zapisywać jako '$x \sqsubset y$'.

## Części jako kawałki

Aby skrócić zapis tych i innych własności relacji *bycia częścią*, przyjmijmy, że zwrot '$x$ jest częścią $y$-a' będziemy symbolicznie zapisywać jako '$x \sqsubset y$'.

W dowolnym uniwersum rozważań $U$, przeciwzwrotność i antysymetryczność pojęcia *bycia częścią* wyrazimy odpowiednio:

$$\neg\exists_{x\in U}\, x \sqsubset x\,, \tag{irr$_\sqsubset$}$$

$$\neg\exists_{x,y\in U}\big(x \neq y \wedge x \sqsubset y \wedge y \sqsubset x\big). \tag{antis$_\sqsubset$}$$

## Części jako kawałki

Aby skrócić zapis tych i innych własności relacji *bycia częścią*, przyjmijmy, że zwrot '$x$ jest częścią $y$-a' będziemy symbolicznie zapisywać jako '$x \sqsubset y$'.

W dowolnym uniwersum rozważań $U$, przeciwzwrotność i antysymetryczność pojęcia *bycia częścią* wyrazimy odpowiednio:

$$\neg\exists_{x\in U}\, x \sqsubset x\,, \tag{irr$_\sqsubset$}$$

$$\neg\exists_{x,y\in U}\big(x \neq y \wedge x \sqsubset y \wedge y \sqsubset x\big). \tag{antis$_\sqsubset$}$$

Koniunkcja (irr$_\sqsubset$) i (antis$_\sqsubset$) jest logicznie równoważna ze zdaniem wyrażającym *asymetryczność*:

$$\neg\exists_{x,y\in U}\big(x \sqsubset y \wedge y \sqsubset x\big). \tag{as$_\sqsubset$}$$

## Części jako kawałki

Stosunek części do całości jest *acykliczny* w sensie wyrażonym przez następujący schemat (gdzie $n > 0$):

$$\neg\exists_{x_1,\dots,x_n \in U}\Big(x_1 \sqsubset x_2 \wedge \cdots \wedge x_n \sqsubset x_1\Big). \qquad (\mathrm{ac}^n_{\sqsubset})$$

## Części jako kawałki

Stosunek części do całości jest *acykliczny* w sensie wyrażonym przez następujący schemat (gdzie $n > 0$):

$$\neg\exists_{x_1,\dots,x_n\in U}\big(x_1 \sqsubset x_2 \wedge \dots \wedge x_n \sqsubset x_1\big). \qquad (\mathrm{ac}^n_{\sqsubset})$$

Ze schematu $(\mathrm{ac}^n_{\sqsubset})$ otrzymamy asymetryczność i w konsekwencji również przeciwzwrotność i antysymetryczność relacji $\sqsubset$ [zob. Pietruszczak, 2014, 2020].

## Części jako kawałki

Stosunek części do całości jest *acykliczny* w sensie wyrażonym przez następujący schemat (gdzie $n > 0$):

$$\neg\exists_{x_1,\dots,x_n \in U}\Big(x_1 \sqsubset x_2 \wedge \cdots \wedge x_n \sqsubset x_1\Big). \qquad (\mathrm{ac}^n_{\sqsubset})$$

Ze schematu $(\mathrm{ac}^n_{\sqsubset})$ otrzymamy asymetryczność i w konsekwencji również przeciwzwrotność i antysymetryczność relacji $\sqsubset$ [zob. Pietruszczak, 2014, 2020].

Schemat $(\mathrm{ac}^n_{\sqsubset})$ możemy zapisać w języku słabej logiki drugiego rzędu:

$$\forall_{n>0}\neg\exists_{x\in U}\ x \sqsubset^n x\,, \qquad (\mathrm{ac}_{\sqsubset})$$

gdzie $\sqsubset^1 = \sqsubset$ i $\sqsubset^{k+1} = \sqsubset^k \circ \sqsubset$, gdzie:

$$x \sqsubset \circ \sqsubset y \ :\Longleftrightarrow\ \exists_z(x \sqsubset z \wedge z \sqsubset y).$$

## Przechodniość relacji *bycia częścią*

Leśniewski przyjmował, że stosunek części do całości jest asymetryczny oraz *przechodni*:

$$\forall_{x,y,z \in U}\big(x \sqsubset y \wedge y \sqsubset z \implies x \sqsubset z\big). \qquad (\mathrm{t}_{\sqsubset})$$

## Przechodniość relacji *bycia częścią*

Leśniewski przyjmował, że stosunek części do całości jest asymetryczny oraz *przechodni*:

$$\forall_{x,y,z\in U}\big(x \sqsubset y \wedge y \sqsubset z \implies x \sqsubset z\big). \qquad (\mathrm{t}_{\sqsubset})$$

Asymetryczność pociąga przeciwzwrotność.

## Przechodniość relacji *bycia częścią*

Leśniewski przyjmował, że stosunek części do całości jest asymetryczny oraz *przechodni*:

$$\forall_{x,y,z \in U}\big(x \sqsubset y \land y \sqsubset z \implies x \sqsubset z\big). \qquad (\mathrm{t}_{\sqsubset})$$

Asymetryczność pociąga przeciwzwrotność. A przeciwzwrotność z przechodniością pociągają acykliczność.

# Przechodniość relacji *bycia częścią*

Leśniewski przyjmował, że stosunek części do całości jest asymetryczny oraz *przechodni*:

$$\forall_{x,y,z\in U}\big(x \sqsubset y \land y \sqsubset z \implies x \sqsubset z\big). \qquad (\mathrm{t}_{\sqsubset})$$

Asymetryczność pociąga przeciwzwrotność. A przeciwzwrotność z przechodniością pociągają acykliczność. Dlatego przyjmowanie acykliczności jako aksjomatu jest istotne tylko wtedy, gdy nie przyjmujemy, że relacja *bycia częścią* ma być przechodnia.

## Problem z przechodniością relacji *bycia częścią*

Na poparcie własności przechodniości pojęcia *bycia częścią* bywa podawany następujący przykład: moja lewa ręka jest częścią mojego ciała, a to pociąga, że moja lewa dłoń jest również częścią mojego ciała.

## Problem z przechodniością relacji *bycia częścią*

Na poparcie własności przechodniości pojęcia *bycia częścią* bywa podawany następujący przykład: moja lewa ręka jest częścią mojego ciała, a to pociąga, że moja lewa dłoń jest również częścią mojego ciała.

Rescher [1955] pokazuje jednak, że w ogólnym przypadku przechodniość stosunku części do całości jest w istocie problematyczna. Oto jego kontrprzykład:

## Problem z przechodniością relacji *bycia częścią*

Na poparcie własności przechodniości pojęcia *bycia częścią* bywa podawany następujący przykład: moja lewa ręka jest częścią mojego ciała, a to pociąga, że moja lewa dłoń jest również częścią mojego ciała.

Rescher [1955] pokazuje jednak, że w ogólnym przypadku przechodniość stosunku części do całości jest w istocie problematyczna. Oto jego kontrprzykład:

jądro jest częścią komórki, komórka jest częścią organu, lecz jądro nie jest częścią organu.

## Problem z przechodniością relacji *bycia częścią*

Na poparcie własności przechodniości pojęcia *bycia częścią* bywa podawany następujący przykład: moja lewa ręka jest częścią mojego ciała, a to pociąga, że moja lewa dłoń jest również częścią mojego ciała.

Rescher [1955] pokazuje jednak, że w ogólnym przypadku przechodniość stosunku części do całości jest w istocie problematyczna. Oto jego kontrprzykład:

jądro jest częścią komórki, komórka jest częścią organu, lecz jądro nie jest częścią organu.

Jeśli uważamy, że część ma tworzyć bezpośredni funkcjonalny wkład w całość, to istotnie jądro nie jest częścią organu.

## Problem z przechodniością relacji *bycia częścią*

Na poparcie własności przechodniości pojęcia *bycia częścią* bywa podawany następujący przykład: moja lewa ręka jest częścią mojego ciała, a to pociąga, że moja lewa dłoń jest również częścią mojego ciała.

Rescher [1955] pokazuje jednak, że w ogólnym przypadku przechodniość stosunku części do całości jest w istocie problematyczna. Oto jego kontrprzykład:

jądro jest częścią komórki, komórka jest częścią organu, lecz jądro nie jest częścią organu.

Jeśli uważamy, że część ma tworzyć bezpośredni funkcjonalny wkład w całość, to istotnie jądro nie jest częścią organu.

Inny przykład tego rodzaju: pluton jest częścią kompanii, ta zaś jest częścią batalionu, lecz pluton nie jest uważany za część składową batalionu.

## Problem z przechodniością relacji *bycia częścią*

Lyons [1977] przyrównał fakt, że $x$ jest częścią $y$-a do semantycznej poprawności zdania postaci '$y$ ma $x$-a'.

## Problem z przechodniością relacji *bycia częścią*

Lyons [1977] przyrównał fakt, że $x$ jest częścią $y$–a do semantycznej poprawności zdania postaci '$y$ ma $x$–a'.

Semantycznie poprawne są zdania:

- Orkiestra ($z$) ma sekcję pierwszych skrzypiec ($x$). $x \sqsubset z$
- Orkiestra ma skrzypka ($y$). $y \sqsubset z$
- Skrzypek ma serce ($u$). $u \sqsubset y$
- Skrzypek ma ramię ($v$). $v \sqsubset y$

## Problem z przechodniością relacji *bycia częścią*

Lyons [1977] przyrównał fakt, że $x$ jest częścią $y$–a do semantycznej poprawności zdania postaci '$y$ ma $x$–a'.

Semantycznie poprawne są zdania:

- Orkiestra ($z$) ma sekcję pierwszych skrzypiec ($x$). $x \sqsubset z$
- Orkiestra ma skrzypka ($y$). $y \sqsubset z$
- Skrzypek ma serce ($u$). $u \sqsubset y$
- Skrzypek ma ramię ($v$). $v \sqsubset y$

Nie są semantycznie poprawne zdania:

- Orkiestra ma ramię skrzypka. $v \not\sqsubset z$
- Sekcja pierwszych skrzypiec ma serce skrzypka. $u \not\sqsubset x$

## Lokalna przechodniość zamiast przechodniości

W przypadkach, gdy sporne jest zachodzenie przechodniości relacji *bycia częścią*, to — obok jej acykliczności — proponuję przyjąć, że jest ona *lokalnie przechodnia* [zob. Pietruszczak, 2014, 2020].

## Lokalna przechodniość zamiast przechodniości

W przypadkach, gdy sporne jest zachodzenie przechodniości relacji *bycia częścią*, to — obok jej acykliczności — proponuję przyjąć, że jest ona *lokalnie przechodnia* [zob. Pietruszczak, 2014, 2020].

Jeśli obiekt $x$ jest częścią obiektu $z$, to przechodniość ma obowiązywać na dowolnej ścieżce prowadzącej od $x$-a do $z$-a, która złożona jest z obiektów, z których każdy jest częścią kolejnego występującego na tej ścieżce.

## Lokalna przechodniość zamiast przechodniości

W przypadkach, gdy sporne jest zachodzenie przechodniości relacji *bycia częścią*, to — obok jej acykliczności — proponuję przyjąć, że jest ona *lokalnie przechodnia* [zob. Pietruszczak, 2014, 2020].

Jeśli obiekt $x$ jest częścią obiektu $z$, to przechodniość ma obowiązywać na dowolnej ścieżce prowadzącej od $x$-a do $z$-a, która złożona jest z obiektów, z których każdy jest częścią kolejnego występującego na tej ścieżce.

Zatem jeśli mamy $x \sqsubset z$ i $x \sqsubset y_1 \sqsubset \cdots \sqsubset y_n \sqsubset z$, to relacja $\sqsubset$ jest przechodnia w zbiorze $\{x, y_1, \ldots, y_n, z\}$.

## Lokalna przechodniość zamiast przechodniości

Przykład 1:

$x$ – palec prawej dłoni danego skrzypka

$z$ – ten skrzypek

$y_1$ – prawa dłoń tego skrzypka

$y_2$ – prawa ręka tego skrzypka

## Lokalna przechodniość zamiast przechodniości

Przykład 1:

$x$ – palec prawej dłoni danego skrzypka

$z$ – ten skrzypek

$y_1$ – prawa dłoń tego skrzypka

$y_2$ – prawa ręka tego skrzypka

Mamy: $x \sqsubset z$, $x \sqsubset y_1 \sqsubset y_2 \sqsubset z$ oraz $x \sqsubset y_2$ i $y_1 \sqsubset z$.

## Lokalna przechodniość zamiast przechodniości

Przykład 1:
$x$ – palec prawej dłoni danego skrzypka
$z$ – ten skrzypek
$y_1$ – prawa dłoń tego skrzypka
$y_2$ – prawa ręka tego skrzypka

Mamy: $x \sqsubset z$, $x \sqsubset y_1 \sqsubset y_2 \sqsubset z$ oraz $x \sqsubset y_2$ i $y_1 \sqsubset z$.

Przykład 2:
$x$ – skrzypek sekcji pierwszych skrzypiec
$z$ – orkiestra, w której gra ten skrzypek
$y_1$ – sekcja pierwszych skrzypiec w tej orkiestrze
$y_2$ – sekcja instrumentów smyczkowych w tej orkiestrze

## Lokalna przechodniość zamiast przechodniości

Przykład 1:

$x$ – palec prawej dłoni danego skrzypka

$z$ – ten skrzypek

$y_1$ – prawa dłoń tego skrzypka

$y_2$ – prawa ręka tego skrzypka

Mamy: $x \sqsubset z$, $x \sqsubset y_1 \sqsubset y_2 \sqsubset z$ oraz $x \sqsubset y_2$ i $y_1 \sqsubset z$.

Przykład 2:

$x$ – skrzypek sekcji pierwszych skrzypiec

$z$ – orkiestra, w której gra ten skrzypek

$y_1$ – sekcja pierwszych skrzypiec w tej orkiestrze

$y_2$ – sekcja instrumentów smyczkowych w tej orkiestrze

Mamy: $x \sqsubset z$, $x \sqsubset y_1 \sqsubset y_2 \sqsubset z$ oraz $x \sqsubset y_2$ i $y_1 \sqsubset z$.

## Lokalna przechodniość zamiast przechodniości

Orkiestra jest niejako «systemem części, które tworzą bezpośredni funkcjonalny wkład w całość».

## Lokalna przechodniość zamiast przechodniości

Orkiestra jest niejako «systemem części, które tworzą bezpośredni funkcjonalny wkład w całość». W tym systemie muzycy i dyrygent są parami rozłącznymi elementami, minimalnymi ze względu na relację *bycia częścią* [zob. Pietruszczak, 2014, 2020].

## Lokalna przechodniość zamiast przechodniości

Orkiestra jest niejako «systemem części, które tworzą bezpośredni funkcjonalny wkład w całość». W tym systemie muzycy i dyrygent są parami rozłącznymi elementami, minimalnymi ze względu na relację *bycia częścią* [zob. Pietruszczak, 2014, 2020].

Każdy z muzyków danej orkiestry, jak i jej dyrygent, także jest «systemem jego części, które tworzą bezpośredni funkcjonalny wkład w całość».

## Lokalna przechodniość zamiast przechodniości

Orkiestra jest niejako «systemem części, które tworzą bezpośredni funkcjonalny wkład w całość». W tym systemie muzycy i dyrygent są parami rozłącznymi elementami, minimalnymi ze względu na relację *bycia częścią* [zob. Pietruszczak, 2014, 2020].

Każdy z muzyków danej orkiestry, jak i jej dyrygent, także jest «systemem jego części, które tworzą bezpośredni funkcjonalny wkład w całość».

Podobnie, nawiązując do Reschera, komórka jest «systemem jej części, które tworzą bezpośredni funkcjonalny wkład w całość». W śród tych części jest jej jądro.

## Lokalna przechodniość zamiast przechodniości

Jeśli nie zakładam przechodniości relacji $\sqsubset$, to obok acykliczności i lokalnej przechodniości zakładam także inne aksjomaty, a wśród nich taki, który dotyczy maksymalnych domkniętych zbiorów ze względu na relację $\sqsubset$ [zob. Pietruszczak, 2014, 2020].

## Lokalna przechodniość zamiast przechodniości

Jeśli nie zakładam przechodniości relacji $\sqsubset$, to obok acykliczności i lokalnej przechodniości zakładam także inne aksjomaty, a wśród nich taki, który dotyczy maksymalnych domkniętych zbiorów ze względu na relację $\sqsubset$ [zob. Pietruszczak, 2014, 2020].

Przy założonej przechodniości, całe uniwersum rozważań jest jedynym takim zbiorem.

## Lokalna przechodniość zamiast przechodniości

Jeśli nie zakładam przechodniości relacji $\sqsubset$, to obok acykliczności i lokalnej przechodniości zakładam także inne aksjomaty, a wśród nich taki, który dotyczy maksymalnych domkniętych zbiorów ze względu na relację $\sqsubset$ [zob. Pietruszczak, 2014, 2020].

Przy założonej przechodniości, całe uniwersum rozważań jest jedynym takim zbiorem.

Nigdy nie zakładamy, że relacja $\sqsubset$ nie jest przechodnia. Jedynie w pewnych przypadkach rozważamy teorie, w których nie zakładamy przechodniości relacji $\sqsubset$, przyjmując w to miejsce jej lokalną przechodniość.

## Kiedy bezsporna jest przechodniość relacji *bycia częścią*?

Simons [1987] wskazywał, że pojęcie *części* z przechodniością odpowiada przestrzenno-czasowej inkluzji i w tym sensie jądro komórki jest częścią organu. Simons twierdzi, że to, iż wyraz ‘część’ ma dodatkowe znaczenia, nie podważa mereologicznego pojęcia *części*, gdyż nie twierdzi się, że pojęcie mereologiczne zawiera wszystkie znaczenia słowa ‘część’, lecz te „podstawowe i najważniejsze”.

## Kiedy bezsporna jest przechodniość relacji *bycia częścią*?

Simons [1987] wskazywał, że pojęcie *części* z przechodniością odpowiada przestrzenno-czasowej inkluzji i w tym sensie jądro komórki jest częścią organu. Simons twierdzi, że to, iż wyraz 'część' ma dodatkowe znaczenia, nie podważa mereologicznego pojęcia *części*, gdyż nie twierdzi się, że pojęcie mereologiczne zawiera wszystkie znaczenia słowa 'część', lecz te „podstawowe i najważniejsze".

Przechodniość relacji *bycia częścią* jest bezsporna, gdy odnosi się do przestrzennych regionów lub czasoprzestrzennych zdarzeń.

## Kiedy bezsporna jest przechodniość relacji *bycia częścią*?

Simons [1987] wskazywał, że pojęcie *części* z przechodniością odpowiada przestrzenno-czasowej inkluzji i w tym sensie jądro komórki jest częścią organu. Simons twierdzi, że to, iż wyraz 'część' ma dodatkowe znaczenia, nie podważa mereologicznego pojęcia *części*, gdyż nie twierdzi się, że pojęcie mereologiczne zawiera wszystkie znaczenia słowa 'część', lecz te „podstawowe i najważniejsze".

Przechodniość relacji *bycia częścią* jest bezsporna, gdy odnosi się do przestrzennych regionów lub czasoprzestrzennych zdarzeń. W takich przypadkach mamy do czynienia z pewnego rodzaju «zamkniętymi systemami», w których ta relacja jest przechodnia [zob. Pietruszczak, 2014, 2020].

## Inne znaczenia słowa ‘część’

W literaturze przedmiotu rozpowszechnił się zwyczaj, zgodnie z którym używa się frazy ‘część właściwa’ zamiast słowa ‘część’. W takich przypadkach termin ‘część’ nabiera nowego sensu, w którym ma szerszy zakres użycia.

## Inne znaczenia słowa ‘część’

W literaturze przedmiotu rozpowszechnił się zwyczaj, zgodnie z którym używa się frazy ‘część właściwa’ zamiast słowa ‘część’. W takich przypadkach termin ‘część’ nabiera nowego sensu, w którym ma szerszy zakres użycia.

Przyjmuje się, że częścią danego przedmiotu jest on sam oraz każda jego część w potocznym tego słowa znaczeniu.

## Inne znaczenia słowa ‘część’

W literaturze przedmiotu rozpowszechnił się zwyczaj, zgodnie z którym używa się frazy ‘część właściwa’ zamiast słowa ‘część’. W takich przypadkach termin ‘część’ nabiera nowego sensu, w którym ma szerszy zakres użycia.

Przyjmuje się, że częścią danego przedmiotu jest on sam oraz każda jego część w potocznym tego słowa znaczeniu. Każdą część danego przedmiotu różną od niego nazywa się jego *częścią właściwą*.

## Inne znaczenia słowa ‘część’

W nowym znaczeniu słowa ‘część’ wprost z określenia wynika, że jest to pojęcie *zwrotne*:

1. Każdy przedmiot jest swoją częścią (*niewłaściwą*).

# Inne znaczenia słowa ‘część’

W nowym znaczeniu słowa ‘część’ wprost z określenia wynika, że jest to pojęcie *zwrotne*:

1. Każdy przedmiot jest swoją częścią (*niewłaściwą*).

Jest też *antysymetryczne*:

2. Nie ma takich dwóch (różnych) przedmiotów, z których jeden byłby częścią drugiego, a ten drugi był częścią pierwszego.

## Pojęcie *bycia ingrediensem*

Leśniewski nie zmieniał potocznego znaczenia wyrazu ‘część’.
W swoich pracach stosował słowo ‘ingredjens’, którego nie było w międzywojennej polszczyźnie.

## Pojęcie *bycia ingrediensem*

Leśniewski nie zmieniał potocznego znaczenia wyrazu ‘część’.
W swoich pracach stosował słowo ‘ingredjens’, którego nie było w międzywojennej polszczyźnie. Sądzę, że Leśniewski specjalnie użył neologizmu.

## Pojęcie *bycia ingrediensem*

Leśniewski nie zmieniał potocznego znaczenia wyrazu ‘część’. W swoich pracach stosował słowo ‘ingredjens’, którego nie było w międzywojennej polszczyźnie. Sądzę, że Leśniewski specjalnie użył neologizmu. Zastosowałem ten neologizm, zapisując go według współczesnych zasad, czyli jako ‘ingrediens’ [zob. Pietruszczak, 2000, 2018].

## Pojęcie *bycia ingrediensem*

Leśniewski nie zmieniał potocznego znaczenia wyrazu 'część'. W swoich pracach stosował słowo 'ingredjens', którego nie było w międzywojennej polszczyźnie. Sądzę, że Leśniewski specjalnie użył neologizmu. Zastosowałem ten neologizm, zapisując go według współczesnych zasad, czyli jako 'ingrediens' [zob. Pietruszczak, 2000, 2018].

Zatem *ingrediensem* danego przedmiotu jest on sam oraz każda jego część w potocznym tego słowa znaczeniu.

# Pojęcie *bycia ingrediensem*

Leśniewski nie zmieniał potocznego znaczenia wyrazu ‘część’. W swoich pracach stosował słowo ‘ingredjens’, którego nie było w międzywojennej polszczyźnie. Sądzę, że Leśniewski specjalnie użył neologizmu. Zastosowałem ten neologizm, zapisując go według współczesnych zasad, czyli jako ‘ingrediens’ [zob. Pietruszczak, 2000, 2018].

Zatem *ingrediensem* danego przedmiotu jest on sam oraz każda jego część w potocznym tego słowa znaczeniu.

Frazę ‘$x$ jest ingrediensem $y$-a’ będziemy symbolicznie zapisywać jako ‘$x \sqsubseteq y$’:

$$x \sqsubseteq y \;:\Longleftrightarrow\; x \sqsubset y \lor x = y\,. \tag{df $\sqsubseteq$}$$

## Pojęcie *bycia ingrediensem*

Przyjęcie konwencji rozszerzającej zakres słowa ‘część’ może czasami doprowadzić do «nieporozumień». Obce brzmienie wyrazu ‘ingrediens’ przypomina, że jest to «sztuczne pojęcie».

## Pojęcie *bycia ingrediensem*

Przyjęcie konwencji rozszerzającej zakres słowa ‘część’ może czasami doprowadzić do «nieporozumień». Obce brzmienie wyrazu ‘ingrediens’ przypomina, że jest to «sztuczne pojęcie».

Moim zdaniem niezrozumiałe jest zastąpienie w angielskich wydaniach prac Leśniewskiego słowa ‘ingredjens’ przez ‘ingredient’.

## Pojęcie *bycia ingrediensem*

Przyjęcie konwencji rozszerzającej zakres słowa 'część' może czasami doprowadzić do «nieporozumień». Obce brzmienie wyrazu 'ingrediens' przypomina, że jest to «sztuczne pojęcie».

Moim zdaniem niezrozumiałe jest zastąpienie w angielskich wydaniach prac Leśniewskiego słowa 'ingredjens' przez 'ingredient'.

Leśniewskiemu nie chodziło o zastąpienie słowa 'część' słowem 'składnik' ('ingredient'). Przecież całość nie jest swoim składnikiem.

## Pojęcie *bycia ingrediensem*

Przyjęcie konwencji rozszerzającej zakres słowa ‘część’ może czasami doprowadzić do «nieporozumień». Obce brzmienie wyrazu ‘ingrediens’ przypomina, że jest to «sztuczne pojęcie».

Moim zdaniem niezrozumiałe jest zastąpienie w angielskich wydaniach prac Leśniewskiego słowa ‘ingredjens’ przez ‘ingredient’.

Leśniewskiemu nie chodziło o zastąpienie słowa ‘część’ słowem ‘składnik’ (‘ingredient’). Przecież całość nie jest swoim składnikiem.

W tłumaczeniach należało raczej używać zapisu ‘ingrediens’ (oryginalne ‘ingredjens’ raczej nie jest do przyjęcia).

## Relacja *bycia ingrediensem*

Zwrotność relacji *bycia ingrediensem* wynika wprost ze zwrotności predykatu identyczności, a jej antysymetryczność i przechodniość otrzymamy odpowiednio z antysymetryczności i przechodniości relacji $\sqsubset$ oraz własności identyczności.

## Relacja *bycia ingrediensem*

Zwrotność relacji *bycia ingrediensem* wynika wprost ze zwrotności predykatu identyczności, a jej antysymetryczność i przechodniość otrzymamy odpowiednio z antysymetryczności i przechodniości relacji $\sqsubset$ oraz własności identyczności.

$$\forall_{x \in U}\; x \sqsubseteq x\,, \tag{$\mathrm{r}_\sqsubseteq$}$$

$$\neg\exists_{x,y \in U}\big(x \neq y \wedge x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq x\big), \tag{$\mathrm{antis}_\sqsubseteq$}$$

$$\forall_{x,y,z \in U}(x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq z \implies x \sqsubseteq z). \tag{$\mathrm{t}_\sqsubseteq$}$$

## Relacja *bycia ingrediensem*

Zwrotność relacji *bycia ingrediensem* wynika wprost ze zwrotności predykatu identyczności, a jej antysymetryczność i przechodniość otrzymamy odpowiednio z antysymetryczności i przechodniości relacji $\sqsubset$ oraz własności identyczności.

$$\forall_{x \in U}\; x \sqsubseteq x\,, \tag{$\mathrm{r}_\sqsubseteq$}$$

$$\neg\exists_{x,y \in U}\big(x \neq y \wedge x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq x\big), \tag{$\mathrm{antis}_\sqsubseteq$}$$

$$\forall_{x,y,z \in U}(x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq z \implies x \sqsubseteq z). \tag{$\mathrm{t}_\sqsubseteq$}$$

Odpowiednio na mocy przeciwzwrotności i asymetryczności relacji $\sqsubset$ dla dowolnych $x$ i $y$ dostajemy:

$$\begin{aligned} x \sqsubset y &\iff x \sqsubseteq y \wedge x \neq y\,, \\ &\iff x \sqsubseteq y \wedge x \not\sqsupseteq y\,. \end{aligned}$$

Te dwie formuły nie są definicjami relacji $\sqsubset$, gdyż ta jest u nas pierwotna.

## «Trzy teorie w jednym»

1. Przyjmując jako pierwotną relację $\sqsubset$, która ostro częściowo porządkuje uniwersum. Operujemy w klasie $_{\mathbf{s}}\mathbf{POS}$.

## «Trzy teorie w jednym»

1. Przyjmując jako pierwotną relację $\sqsubset$, która ostro częściowo porządkuje uniwersum. Operujemy w klasie $_{\mathbf{s}}\mathbf{POS}$.
2. W rozważanych dalej warunkach, a w tym w definicjach nowych pomocniczych pojęć, występować będzie $\sqsubseteq$, a nie $\sqsubset$.

## «Trzy teorie w jednym»

1. Przyjmując jako pierwotną relację $\sqsubset$, która ostro częściowo porządkuje uniwersum. Operujemy w klasie ${}_{\mathbf{s}}\mathbf{POS}$.
2. W rozważanych dalej warunkach, a w tym w definicjach nowych pomocniczych pojęć, występować będzie $\sqsubseteq$, a nie $\sqsubset$. Z tego powodu w literaturze przedmiotu często przyjmuje się, że pierwotna jest relacja $\sqsubseteq$, która częściowo porządkująca uniwersum.

## «Trzy teorie w jednym»

1. Przyjmując jako pierwotną relację $\sqsubset$, która ostro częściowo porządkuje uniwersum. Operujemy w klasie $_{\mathbf{s}}\mathbf{POS}$.

2. W rozważanych dalej warunkach, a w tym w definicjach nowych pomocniczych pojęć, występować będzie $\sqsubseteq$, a nie $\sqsubset$. Z tego powodu w literaturze przedmiotu często przyjmuje się, że pierwotna jest relacja $\sqsubseteq$, która częściowo porządkująca uniwersum. Operujemy w klasie $\mathbf{POS}$. Przyjmujemy jedną z definicji

$$\begin{aligned} x \sqsubset y \quad &:\Longleftrightarrow \quad x \sqsubseteq y \wedge x \neq y, \\ &:\Longleftrightarrow \quad x \sqsubseteq y \wedge x \not\sqsupseteq y. \end{aligned}$$

## «Trzy teorie w jednym»

1. Przyjmując jako pierwotną relację $\sqsubset$, która ostro częściowo porządkuje uniwersum. Operujemy w klasie ${}_{\mathbf{s}}\mathbf{POS}$.

2. W rozważanych dalej warunkach, a w tym w definicjach nowych pomocniczych pojęć, występować będzie $\sqsubseteq$, a nie $\sqsubset$. Z tego powodu w literaturze przedmiotu często przyjmuje się, że pierwotna jest relacja $\sqsubseteq$, która częściowo porządkująca uniwersum. Operujemy w klasie **POS**. Przyjmujemy jedną z definicji

$$\begin{aligned} x \sqsubset y \ &:\Longleftrightarrow\ x \sqsubseteq y \wedge x \neq y\,, \\ &:\Longleftrightarrow\ x \sqsubseteq y \wedge x \not\sqsupseteq y\,. \end{aligned}$$

W obu przypadkach $\sqsubset$ ostro częściowo porządkuje uniwersum.

## «Trzy teorie w jednym»

1. Przyjmując jako pierwotną relację $\sqsubset$, która ostro częściowo porządkuje uniwersum. Operujemy w klasie ${}_{\mathbf{s}}\mathbf{POS}$.

2. W rozważanych dalej warunkach, a w tym w definicjach nowych pomocniczych pojęć, występować będzie $\sqsubseteq$, a nie $\sqsubset$. Z tego powodu w literaturze przedmiotu często przyjmuje się, że pierwotna jest relacja $\sqsubseteq$, która częściowo porządkująca uniwersum. Operujemy w klasie **POS**. Przyjmujemy jedną z definicji

$$\begin{aligned} x \sqsubset y \quad &:\Longleftrightarrow \quad x \sqsubseteq y \wedge x \neq y\,, \\ &:\Longleftrightarrow \quad x \sqsubseteq y \wedge x \not\sqsupseteq y\,. \end{aligned}$$

W obu przypadkach $\sqsubset$ ostro częściowo porządkuje uniwersum.

3. Może interesować nas też to, jakie uzyskamy własności relacji $\sqsubseteq$ bez założenia jej antysymetrii, czyli w klasie **QOS** zbiorów quasi-uporządkowanych.

## «Trzy teorie w jednym»

1. Przyjmując jako pierwotną relację $\sqsubset$, która ostro częściowo porządkuje uniwersum. Operujemy w klasie $_{\mathbf{s}}\mathbf{POS}$.

2. W rozważanych dalej warunkach, a w tym w definicjach nowych pomocniczych pojęć, występować będzie $\sqsubseteq$, a nie $\sqsubset$. Z tego powodu w literaturze przedmiotu często przyjmuje się, że pierwotna jest relacja $\sqsubseteq$, która częściowo porządkująca uniwersum. Operujemy w klasie **POS**. Przyjmujemy jedną z definicji

$$\begin{aligned} x \sqsubset y \quad &:\Longleftrightarrow \quad x \sqsubseteq y \wedge x \neq y\,, \\ &:\Longleftrightarrow \quad x \sqsubseteq y \wedge x \not\sqsupseteq y\,. \end{aligned}$$

W obu przypadkach $\sqsubset$ ostro częściowo porządkuje uniwersum.

3. Może interesować nas też to, jakie uzyskamy własności relacji $\sqsubseteq$ bez założenia jej antysymetrii, czyli w klasie **QOS** zbiorów quasi-uporządkowanych. Wtedy przyjmujemy drugą z definicji $\sqsubset$ [zob. Pietruszczak, 2020].

## Brak «pustego obiektu» (zera)

Gdy zakładamy, że uniwersum rozważań składa się odpowiednio z obiektów przestrzennych, regionów przestrzennych czy zdarzeń czasoprzestrzennych, wtedy z naszych rozważań wykluczmy odpowiednio istnienie «pustego obiektu», «pustego regionu», czy też «pustego zdarzenia», które miałoby być częścią każdego innego obiektu (odp. regionu; zdarzenia).

## Brak «pustego obiektu» (zera)

Gdy zakładamy, że uniwersum rozważań składa się odpowiednio z obiektów przestrzennych, regionów przestrzennych czy zdarzeń czasoprzestrzennych, wtedy z naszych rozważań wykluczmy odpowiednio istnienie «pustego obiektu», «pustego regionu», czy też «pustego zdarzenia», które miałoby być częścią każdego innego obiektu (odp. regionu; zdarzenia).

Nie mamy zatem analogii do teorii mnogości — teorii zbiorów (klas) dystrybutywnych — w której zakładamy istnienie zbioru pustego $\varnothing$, będącego podzbiorem każdego innego zbioru dystrybutywnego (klasy dystrybutywnej).

## Brak «pustego obiektu» (zera)

W sensie algebraicznym taki «pusty obiekt» odpowiadałby zeru, czyli najmniejszemu elementowi uniwersum rozważań względem relacji $\sqsubseteq$.

## Brak «pustego obiektu» (zera)

W sensie algebraicznym taki «pusty obiekt» odpowiadałby zeru, czyli najmniejszemu elementowi uniwersum rozważań względem relacji $\sqsubseteq$.

$$\forall_{x \in U}\big(x \text{ jest zerem } :\Longleftrightarrow \forall_{u \in U}\, x \sqsubseteq u\big). \qquad \text{(df zero)}$$

## Brak «pustego obiektu» (zera)

W sensie algebraicznym taki «pusty obiekt» odpowiadałby zeru, czyli najmniejszemu elementowi uniwersum rozważań względem relacji $\sqsubseteq$.

$$\forall_{x \in U}\big(x \text{ jest zerem } :\Longleftrightarrow \forall_{u \in U}\, x \sqsubseteq u\big). \tag{df zero}$$

Istnienie najmniejszego elementu (zera) dopuszczać będziemy wtedy i tylko wtedy, gdy uniwersum ma dokładnie jeden element, który jest wtedy równocześnie elementem najmniejszym i największym.

## Brak «pustego obiektu» (zera)

W sensie algebraicznym taki «pusty obiekt» odpowiadałby zeru, czyli najmniejszemu elementowi uniwersum rozważań względem relacji $\sqsubseteq$.

$$\forall_{x \in U}\big(x \text{ jest zerem } :\Longleftrightarrow\ \forall_{u \in U}\ x \sqsubseteq u\big). \qquad \text{(df zero)}$$

Istnienie najmniejszego elementu (zera) dopuszczać będziemy wtedy i tylko wtedy, gdy uniwersum ma dokładnie jeden element, który jest wtedy równocześnie elementem najmniejszym i największym. Wówczas możemy równie dobrze twierdzić, że ten jedyny element jest jednością struktury:

$$\forall_{x \in U}\big(x \text{ jest jednością } :\Longleftrightarrow\ \forall_{u \in U}\ u \sqsubseteq x\big). \qquad \text{(df jedność)}$$

## Brak «pustego obiektu» (zera)

W sensie algebraicznym taki «pusty obiekt» odpowiadałby zeru, czyli najmniejszemu elementowi uniwersum rozważań względem relacji $\sqsubseteq$.

$$\forall_{x \in U}\big(x \text{ jest zerem } :\Longleftrightarrow\ \forall_{u \in U}\ x \sqsubseteq u\big). \tag{df zero}$$

Istnienie najmniejszego elementu (zera) dopuszczać będziemy wtedy i tylko wtedy, gdy uniwersum ma dokładnie jeden element, który jest wtedy równocześnie elementem najmniejszym i największym. Wówczas możemy równie dobrze twierdzić, że ten jedyny element jest jednością struktury:

$$\forall_{x \in U}\big(x \text{ jest jednością } :\Longleftrightarrow\ \forall_{u \in U}\ u \sqsubseteq x\big). \tag{df jedność}$$

W strukturach zdegenerowanych (nieciekawy przypadek) nie musimy uważać, że ich jedyny element jest pusty.

## Brak «pustego obiektu» (zera)

Będzie obowiązywać następująca zasada:

$$\exists_{x,y \in U}\, x \neq y \implies \neg\exists_{x \in U}\, x \text{ jest zerem.} \tag{$\nexists$o}$$

## Istnienie «pustego obiektu» (zera)

Gdy rozpatrujemy uniwersa składające się z takich obiektów abstrakcyjnych, jak informacje czy sytuacje, możemy przyjąć istnienie «pustego obiektu» (pustej informacji; pustej sytuacji).

## Istnienie «pustego obiektu» (zera)

Gdy rozpatrujemy uniwersa składające się z takich obiektów abstrakcyjnych, jak informacje czy sytuacje, możemy przyjąć istnienie «pustego obiektu» (pustej informacji; pustej sytuacji). Taki obiekt odpowiadałby zdaniom tautologicznym, takim jak 'Pada lub nie pada'.

## Istnienie «pustego obiektu» (zera)

Gdy rozpatrujemy uniwersa składające się z takich obiektów abstrakcyjnych, jak informacje czy sytuacje, możemy przyjąć istnienie «pustego obiektu» (pustej informacji; pustej sytuacji). Taki obiekt odpowiadałby zdaniom tautologicznym, takim jak 'Pada lub nie pada'.

Także w teoriach dotyczących obiektów przestrzennych przyjmuje się istnienie «pustego elementu». Robi się tak ze względu na wygodę, gdy chcemy np. mieć zawsze wykonalną operację iloczynu dwóch obiektów.

## Istnienie «pustego obiektu» (zera)

Gdy rozpatrujemy uniwersa składające się z takich obiektów abstrakcyjnych, jak informacje czy sytuacje, możemy przyjąć istnienie «pustego obiektu» (pustej informacji; pustej sytuacji). Taki obiekt odpowiadałby zdaniom tautologicznym, takim jak 'Pada lub nie pada'.

Także w teoriach dotyczących obiektów przestrzennych przyjmuje się istnienie «pustego elementu». Robi się tak ze względu na wygodę, gdy chcemy np. mieć zawsze wykonalną operację iloczynu dwóch obiektów. Przykładowo, gdy obiekty nie mają żadnej «niepustej» części wspólnej, przyjmuje się, że ich iloczynem jest właśnie ten «pusty obiekt».

## Istnienie «pustego obiektu» (zera)

Jeśli mamy teorię spełniającą ($\nexists$o), a chcemy mieć nową teorię z zerem, to wystarczy rozszerzyć uniwersum $U$ złożone z «niepustych obiektów» o jedyny obiekt pusty o, który nie należy do $U$. Kładziemy $U^{\mathrm{o}} := U \cup \{\mathrm{o}\}$. Będzie to nowe uniwersum rozważań, w którym definiujemy «sztuczną relację» kładąc dla dowolnych $x, y \in U^{\mathrm{o}}$:

$$x \prec y \;:\Longleftrightarrow\; (x = \mathrm{o} \wedge y \neq \mathrm{o}) \vee x \sqsubset y \,.$$

## Istnienie «pustego obiektu» (zera)

Jeśli mamy teorię spełniającą ($\nexists$o), a chcemy mieć nową teorię z zerem, to wystarczy rozszerzyć uniwersum $U$ złożone z «niepustych obiektów» o jedyny obiekt pusty o, który nie należy do $U$. Kładziemy $U^{\mathrm{o}} := U \cup \{\mathrm{o}\}$. Będzie to nowe uniwersum rozważań, w którym definiujemy «sztuczną relację» kładąc dla dowolnych $x, y \in U^{\mathrm{o}}$:

$$x \prec y \;\; :\Longleftrightarrow \;\; (x = \mathrm{o} \wedge y \neq \mathrm{o}) \vee x \sqsubset y\,.$$

Ta relacja jest przeciwzwrotna, asymetryczna i przechodnia w $U^{\mathrm{o}}$ (jeśli $\sqsubset$ jest przechodnia w $U$).

## Istnienie «pustego obiektu» (zera)

Jeśli mamy teorię spełniającą ($\nexists$o), a chcemy mieć nową teorię z zerem, to wystarczy rozszerzyć uniwersum $U$ złożone z «niepustych obiektów» o jedyny obiekt pusty o, który nie należy do $U$. Kładziemy $U^{\mathrm{o}} := U \cup \{\mathrm{o}\}$. Będzie to nowe uniwersum rozważań, w którym definiujemy «sztuczną relację» kładąc dla dowolnych $x, y \in U^{\mathrm{o}}$:

$$x \prec y \;:\Longleftrightarrow\; (x = \mathrm{o} \wedge y \neq \mathrm{o}) \vee x \sqsubset y\,.$$

Ta relacja jest przeciwzwrotna, asymetryczna i przechodnia w $U^{\mathrm{o}}$ (jeśli $\sqsubset$ jest przechodnia w $U$). A przy tym:

$$\forall_{u \in U}\ \mathrm{o} \prec u\,,$$

$$\forall_{u,v \in U}(u \prec v \iff u \sqsubset v).$$

## Istnienie «pustego obiektu» (zera)

W zbiorze $U^{\mathrm{o}}$ kładziemy $\preceq := \prec \cup \mathrm{id}_{U^{\mathrm{o}}}$, czyli dla $x, y \in U^{\mathrm{o}}$

$$x \preceq y \iff x \prec y \vee x = y.$$

## Istnienie «pustego obiektu» (zera)

W zbiorze $U^{\mathrm{o}}$ kładziemy $\preceq := \prec \cup \mathrm{id}_{U^{\mathrm{o}}}$, czyli dla $x, y \in U^{\mathrm{o}}$

$$x \preceq y \iff x \prec y \vee x = y.$$

Relacja ta spełnia warunek:

$$\forall_{x,y \in U^{\mathrm{o}}}(x \preceq y \iff x = \mathrm{o} \vee x \sqsubseteq y).$$

## Istnienie «pustego obiektu» (zera)

W zbiorze $U^{\mathrm{o}}$ kładziemy $\preceq \,:=\, \prec \cup \, \mathrm{id}_{U^{\mathrm{o}}}$, czyli dla $x, y \in U^{\mathrm{o}}$

$$x \preceq y \iff x \prec y \vee x = y.$$

Relacja ta spełnia warunek:

$$\forall_{x,y \in U^{\mathrm{o}}}(x \preceq y \iff x = \mathrm{o} \vee x \sqsubseteq y).$$

Gdy mamy do czynienia ze strukturą zdegenerowaną, tj. gdy $U = \{u\}$, to dodając pusty obiekt o, otrzymamy dwuelementową kratę boolowską $\langle U^{\mathrm{o}}, \preceq \rangle$, w której o jest zerem.

## Istnienie «pustego obiektu» (zera)

Gdy z powodów technicznych przyjmujemy istnienie pustego obiektu, to z reguły rozważamy zbiór częściowo uporządkowany $\langle U, \leq, \mathrm{o}\rangle$ z zerem $\mathrm{o}$.

## Istnienie «pustego obiektu» (zera)

Gdy z powodów technicznych przyjmujemy istnienie pustego obiektu, to z reguły rozważamy zbiór częściowo uporządkowany $\langle U, \leq, \mathrm{o} \rangle$ z zerem o.
Wówczas kładziemy $U_+ := U \setminus \{\mathrm{o}\}$ i bierzemy $\leq_+$ jako obcięcie relacji $\leq$ do zbioru $U_+$:

$$x \leq_+ y \;:\Longleftrightarrow\; x \leq y \wedge x \neq \mathrm{o}.$$

## Istnienie «pustego obiektu» (zera)

Gdy z powodów technicznych przyjmujemy istnienie pustego obiektu, to z reguły rozważamy zbiór częściowo uporządkowany $\langle U, \leq, \mathrm{o}\rangle$ z zerem $\mathrm{o}$.
Wówczas kładziemy $U_+ := U \setminus \{\mathrm{o}\}$ i bierzemy $\leq_+$ jako obcięcie relacji $\leq$ do zbioru $U_+$:

$$x \leq_+ y \;:\Longleftrightarrow\; x \leq y \wedge x \neq \mathrm{o}.$$

Wtedy relacja $\leq_+$ odpowiada relacji $\sqsubseteq$.

## Relacja *bycia zewnętrznym względem*

Drugą pomocniczą binarną relacją, mającą zachodzić pomiędzy elementami uniwersum, będzie relacja $\wr$ *bycia zewnętrznym względem*. Dla dowolnych $x, y \in U$ kładziemy:

$$x \wr y \;:\Longleftrightarrow\; \neg\exists_{z \in U}(z \sqsubseteq x \wedge z \sqsubseteq y). \tag{df $\wr$}$$

## Relacja *bycia zewnętrznym względem*

Drugą pomocniczą binarną relacją, mającą zachodzić pomiędzy elementami uniwersum, będzie relacja $\wr$ *bycia zewnętrznym względem*. Dla dowolnych $x, y \in U$ kładziemy:

$$x \wr y \;:\Longleftrightarrow\; \neg\exists_{z \in U}(z \sqsubseteq x \wedge z \sqsubseteq y). \tag{df $\wr$}$$

Obiekt $x$ jest zewnętrzny względem obiektu $y$ wtw $x$ i $y$ nie mają żadnego wspólnego ingrediensa.

## Relacja *bycia zewnętrznym względem*

Drugą pomocniczą binarną relacją, mającą zachodzić pomiędzy elementami uniwersum, będzie relacja $\wr$ *bycia zewnętrznym względem*. Dla dowolnych $x, y \in U$ kładziemy:

$$x \wr y \;:\Longleftrightarrow\; \neg\exists_{z \in U}(z \sqsubseteq x \wedge z \sqsubseteq y). \qquad (\mathrm{df} \wr)$$

Obiekt $x$ jest zewnętrzny względem obiektu $y$ wtw $x$ i $y$ nie mają żadnego wspólnego ingrediensa.

Dzięki zasadzie ($\nexists$o) jasne stają się intuicje związane z definicją tej relacji.

## Relacja *bycia zewnętrznym względem*

Drugą pomocniczą binarną relacją, mającą zachodzić pomiędzy elementami uniwersum, będzie relacja $\wr$ *bycia zewnętrznym względem*. Dla dowolnych $x, y \in U$ kładziemy:

$$x \wr y \;:\Longleftrightarrow\; \neg\exists_{z\in U}(z \sqsubseteq x \wedge z \sqsubseteq y). \qquad (\mathrm{df}\wr)$$

Obiekt $x$ jest zewnętrzny względem obiektu $y$ wtw $x$ i $y$ nie mają żadnego wspólnego ingrediensa.

Dzięki zasadzie ($\nexists$o) jasne stają się intuicje związane z definicją tej relacji.
Jeśli przyjmujemy istnienie zera, to definicję należy zmodyfikować:

$$x \wr y \;:\Longleftrightarrow\; \neg\exists_{z\in U_+}(z \sqsubseteq x \wedge z \sqsubseteq y).$$

## Relacja *bycia zewnętrznym względem*

Nazwa i definicja relacji $\wr$ pochodzą od Leśniewskiego. Intuicje związane ze znaczeniem użytego zwrotu 'jest zewnętrzne względem' bierzemy z przypadku, gdy $\sqsubset$ jest «prawdziwą» relacją *bycia częścią*, a $\sqsubseteq$ jest «prawdziwą» relacją *bycia ingrediensem*, oraz pamiętając, że żaden element w uniwersum nie ma być «elementem pustym».

## Relacja *bycia zewnętrznym względem*

Nazwa i definicja relacji $\wr$ pochodzą od Leśniewskiego. Intuicje związane ze znaczeniem użytego zwrotu ‘jest zewnętrzne względem’ bierzemy z przypadku, gdy $\sqsubset$ jest «prawdziwą» relacją *bycia częścią*, a $\sqsubseteq$ jest «prawdziwą» relacją *bycia ingrediensem*, oraz pamiętając, że żaden element w uniwersum nie ma być «elementem pustym».

Relacja $\wr$ jest identycznie rozumiana w artykule Leonarda i Goodmana z roku 1940, gdzie użyto dla niej oznaczenia ‘$\rceil\!\lfloor$’.

## Istnienie elementów zewnętrznych względem siebie

Dzięki zasadzie ($\nexists$o) w niezdegenerowanych strukturach relacja $\wr$ nie staje się automatycznie pusta. Chociaż i tak w takich strukturach nie jest to zagwarantowane. Aby tak było, musimy rozważać struktury, które spełniają mocniejszą od ($\nexists$o) zasadę:

$$\exists_{x,y\in U}\, x \neq y \implies \exists_{x,y\in U}\, x \wr y\,. \tag{$\exists\wr$}$$

## Istnienie elementów zewnętrznych względem siebie

Dzięki zasadzie ($\nexists$o) w niezdegenerowanych strukturach relacja $\wr$ nie staje się automatycznie pusta. Chociaż i tak w takich strukturach nie jest to zagwarantowane. Aby tak było, musimy rozważać struktury, które spełniają mocniejszą od ($\nexists$o) zasadę:

$$\exists_{x,y\in U}\, x \neq y \implies \exists_{x,y\in U}\, x \wr y\,. \tag{$\exists\wr$}$$

W strukturach bez zera, z zasady ($\exists\wr$) wynika ($\nexists$o).

## Istnienie elementów zewnętrznych względem siebie

Dzięki zasadzie ($\nexists$o) w niezdegenerowanych strukturach relacja $\wr$ nie staje się automatycznie pusta. Chociaż i tak w takich strukturach nie jest to zagwarantowane. Aby tak było, musimy rozważać struktury, które spełniają mocniejszą od ($\nexists$o) zasadę:

$$\exists_{x,y \in U}\, x \neq y \implies \exists_{x,y \in U}\, x \wr y\,. \tag{$\exists\wr$}$$

W strukturach bez zera, z zasady ($\exists\wr$) wynika ($\nexists$o).

Zasada ($\exists\wr$) powinna zawsze obowiązywać (także gdy dopuszczamy istnienie zera i modyfikujemy definicję relacji $\wr$).

## Istnienie elementów zewnętrznych względem siebie

Dzięki zasadzie ($\nexists$o) w niezdegenerowanych strukturach relacja $\wr$ nie staje się automatycznie pusta. Chociaż i tak w takich strukturach nie jest to zagwarantowane. Aby tak było, musimy rozważać struktury, które spełniają mocniejszą od ($\nexists$o) zasadę:

$$\exists_{x,y \in U}\, x \neq y \implies \exists_{x,y \in U}\, x \wr y\,. \tag{$\exists\wr$}$$

W strukturach bez zera, z zasady ($\exists\wr$) wynika ($\nexists$o).

Zasada ($\exists\wr$) powinna zawsze obowiązywać (także gdy dopuszczamy istnienie zera i modyfikujemy definicję relacji $\wr$).

Zasada ($\exists\wr$) będzie wynikać z innych przyjmowanych dalej zasad.

## Relacja *zachodzenia na* (albo *nakładania się*)

Trzecią pomocniczą binarną relacją w uniwersum, będzie relacja $\circ$ *zachodzenia na* (albo *nakładania się*).

## Relacja *zachodzenia na* (albo *nakładania się*)

Trzecią pomocniczą binarną relacją w uniwersum, będzie relacja $\bigcirc$ *zachodzenia na* (albo *nakładania się*). Jej oznaczenie i polska nazwa pochodzi od angielskich słów 'overlapping' i 'overlap', które użyli Leonard i Goodman w artykule z 1940 roku.

## Relacja *zachodzenia na* (albo *nakładania się*)

Trzecią pomocniczą binarną relacją w uniwersum, będzie relacja $\bigcirc$ *zachodzenia na* (albo *nakładania się*). Jej oznaczenie i polska nazwa pochodzi od angielskich słów 'overlapping' i 'overlap', które użyli Leonard i Goodman w artykule z 1940 roku.

Dzięki zasadom ($\nexists$o) i ($\exists\wr$) jasne stają się intuicje związane z definicją tej relacji. Dla dowolnych $x, y \in U$ kładziemy:

$$x \bigcirc y \;:\Longleftrightarrow\; \exists_{z \in U}(z \sqsubseteq x \wedge z \sqsubseteq y). \qquad (\mathrm{df} \bigcirc)$$

## Relacja *zachodzenia na* (albo *nakładania się*)

Trzecią pomocniczą binarną relacją w uniwersum, będzie relacja $\bigcirc$ *zachodzenia na* (albo *nakładania się*). Jej oznaczenie i polska nazwa pochodzi od angielskich słów 'overlapping' i 'overlap', które użyli Leonard i Goodman w artykule z 1940 roku.

Dzięki zasadom ($\nexists$o) i ($\exists\wr$) jasne stają się intuicje związane z definicją tej relacji. Dla dowolnych $x, y \in U$ kładziemy:

$$x \bigcirc y \;\; :\Longleftrightarrow \;\; \exists_{z \in U}(z \sqsubseteq x \wedge z \sqsubseteq y). \tag{df $\bigcirc$}$$

Jeśli przyjmujemy istnienie zera, to definicję należy zmodyfikować:

$$x \bigcirc y \;\; :\Longleftrightarrow \;\; \exists_{z \in U_+}(z \sqsubseteq x \wedge z \sqsubseteq y).$$

## Relacja *zachodzenia na* (albo *nakładania się*)

Trzecią pomocniczą binarną relacją w uniwersum, będzie relacja $\bigcirc$ *zachodzenia na* (albo *nakładania się*). Jej oznaczenie i polska nazwa pochodzi od angielskich słów 'overlapping' i 'overlap', które użyli Leonard i Goodman w artykule z 1940 roku.

Dzięki zasadom ($\nexists$o) i ($\exists\wr$) jasne stają się intuicje związane z definicją tej relacji. Dla dowolnych $x, y \in U$ kładziemy:

$$x \bigcirc y \;:\Longleftrightarrow\; \exists_{z \in U}(z \sqsubseteq x \wedge z \sqsubseteq y). \tag{df $\bigcirc$}$$

Jeśli przyjmujemy istnienie zera, to definicję należy zmodyfikować:

$$x \bigcirc y \;:\Longleftrightarrow\; \exists_{z \in U_+}(z \sqsubseteq x \wedge z \sqsubseteq y).$$

Relacje $\wr$ i $\bigcirc$ dopełniają się wzajemnie.

## Sumy mereologiczne (klasy kolektywne Leśniewskiego)

*Suma mereologiczna* elementów danego dystrybutywnego zbioru jest odpowiednikami stosowanej przez Leśniewskiego *klasy kolektywnej* tych elementów. Takie podejście pochodzi z pracy Tarskiego z 199 e.

## Sumy mereologiczne (klasy kolektywne Leśniewskiego)

*Suma mereologiczna* elementów danego dystrybutywnego zbioru jest odpowiednikami stosowanej przez Leśniewskiego *klasy kolektywnej* tych elementów. Takie podejście pochodzi z pracy Tarskiego z 199 e.

Dla dowolnego elementu $x$ z uniwersum i dowolnego podzbioru $Z$ uniwersum przyjmujemy, że

## Sumy mereologiczne (klasy kolektywne Leśniewskiego)

*Suma mereologiczna* elementów danego dystrybutywnego zbioru jest odpowiednikami stosowanej przez Leśniewskiego *klasy kolektywnej* tych elementów. Takie podejście pochodzi z pracy Tarskiego z 199 e.

Dla dowolnego elementu $x$ z uniwersum i dowolnego podzbioru $Z$ uniwersum przyjmujemy, że

$x$ jest *sumą mereologiczną* wszystkich elementów zbioru $Z$ wtw spełnione są dwa warunki:

## Sumy mereologiczne (klasy kolektywne Leśniewskiego)

*Suma mereologiczna* elementów danego dystrybutywnego zbioru jest odpowiednikami stosowanej przez Leśniewskiego *klasy kolektywnej* tych elementów. Takie podejście pochodzi z pracy Tarskiego z 199 e.

Dla dowolnego elementu $x$ z uniwersum i dowolnego podzbioru $Z$ uniwersum przyjmujemy, że

$x$ jest *sumą mereologiczną* wszystkich elementów zbioru $Z$ wtw spełnione są dwa warunki:

- każdy element zbioru $Z$ jest ingrediensem $x$-a,

## Sumy mereologiczne (klasy kolektywne Leśniewskiego)

*Suma mereologiczna* elementów danego dystrybutywnego zbioru jest odpowiednikami stosowanej przez Leśniewskiego *klasy kolektywnej* tych elementów. Takie podejście pochodzi z pracy Tarskiego z 199 e.

Dla dowolnego elementu $x$ z uniwersum i dowolnego podzbioru $Z$ uniwersum przyjmujemy, że

$x$ jest *sumą mereologiczną* wszystkich elementów zbioru $Z$ wtw spełnione są dwa warunki:

- każdy element zbioru $Z$ jest ingrediensem $x$–a,
- każdy ingrediens $x$–a zachodzi na jakiś element zbioru $Z$.

## Sumy mereologiczne (klasy kolektywne Leśniewskiego)

*Suma mereologiczna* elementów danego dystrybutywnego zbioru jest odpowiednikami stosowanej przez Leśniewskiego *klasy kolektywnej* tych elementów. Takie podejście pochodzi z pracy Tarskiego z 199 e.

Dla dowolnego elementu $x$ z uniwersum i dowolnego podzbioru $Z$ uniwersum przyjmujemy, że

$x$ jest *sumą mereologiczną* wszystkich elementów zbioru $Z$ wtw spełnione są dwa warunki:

- każdy element zbioru $Z$ jest ingrediensem $x$–a,
- każdy ingrediens $x$–a zachodzi na jakiś element zbioru $Z$.

Zamiast

$x$ jest sumą mereologiczną wszystkich elementów zbioru $Z$

można pisać:

$$x \text{ sum } Z\,.$$

## Sumy mereologiczne (klasy kolektywne Leśniewskiego)

Możemy zatem rozpatrywać binarną relację sum zawartą w $U \times 2^U$. Dla dowolnych $x$ z $U$ i $Z$ z $2^U$ kładziemy

$$x \text{ sum } Z \;:\Longleftrightarrow\; \forall_{z \in Z}\, z \sqsubseteq x \wedge \forall_{y \in U}\big(y \sqsubseteq x \;\Rightarrow\; \exists_{z \in Z}\, z \bigcirc y\big).$$

## Sumy mereologiczne (klasy kolektywne Leśniewskiego)

Możemy zatem rozpatrywać binarną relację sum zawartą w $U \times 2^U$. Dla dowolnych $x$ z $U$ i $Z$ z $2^U$ kładziemy

$$x \operatorname{sum} Z \ :\Longleftrightarrow\ \forall_{z \in Z}\, z \sqsubseteq x \wedge \forall_{y \in U} \big( y \sqsubseteq x \ \Rightarrow\ \exists_{z \in Z}\, z \bigcirc y \big).$$

Jako konsekwencje zwrotności relacji $\sqsubseteq$ otrzymujemy dla dowolnego elementu $x$ i podzbioru $Z$:

## Sumy mereologiczne (klasy kolektywne Leśniewskiego)

Możemy zatem rozpatrywać binarną relację sum zawartą w $U \times 2^U$. Dla dowolnych $x$ z $U$ i $Z$ z $2^U$ kładziemy

$$x \,\mathsf{sum}\, Z \;:\Longleftrightarrow\; \forall_{z \in Z}\, z \sqsubseteq x \wedge \forall_{y \in U}\big(y \sqsubseteq x \;\Rightarrow\; \exists_{z \in Z}\, z \bigcirc y\big).$$

Jako konsekwencje zwrotności relacji $\sqsubseteq$ otrzymujemy dla dowolnego elementu $x$ i podzbioru $Z$:

$$x \,\mathsf{sum}\, Z \implies Z \neq \varnothing, \quad \text{a stąd} \quad \neg\exists_{x \in U}\, x \,\mathsf{sum}\, \varnothing,$$

## Sumy mereologiczne (klasy kolektywne Leśniewskiego)

Możemy zatem rozpatrywać binarną relację sum zawartą w $U \times 2^U$. Dla dowolnych $x$ z $U$ i $Z$ z $2^U$ kładziemy

$$x \text{ sum } Z \ :\Longleftrightarrow\ \forall_{z \in Z}\, z \sqsubseteq x \wedge \forall_{y \in U} \big( y \sqsubseteq x \ \Rightarrow\ \exists_{z \in Z}\, z \bigcirc y \big).$$

Jako konsekwencje zwrotności relacji $\sqsubseteq$ otrzymujemy dla dowolnego elementu $x$ i podzbioru $Z$:

$$x \text{ sum } Z \implies Z \neq \varnothing, \quad \text{a stąd} \quad \neg\exists_{x \in U}\, x \text{ sum } \varnothing,$$

$$x \in Z \subseteq \{u : u \sqsubseteq x\} \implies x \text{ sum } Z.$$

## Sumy mereologiczne (klasy kolektywne Leśniewskiego)

Możemy zatem rozpatrywać binarną relację sum zawartą w $U \times 2^U$. Dla dowolnych $x$ z $U$ i $Z$ z $2^U$ kładziemy

$$x \text{ sum } Z \ :\Longleftrightarrow\ \forall_{z \in Z}\, z \sqsubseteq x \wedge \forall_{y \in U}\big(y \sqsubseteq x \ \Rightarrow\ \exists_{z \in Z}\, z \bigcirc y\big).$$

Jako konsekwencje zwrotności relacji $\sqsubseteq$ otrzymujemy dla dowolnego elementu $x$ i podzbioru $Z$:

$$x \text{ sum } Z \implies Z \neq \varnothing, \quad \text{a stąd} \quad \neg\exists_{x \in U}\, x \text{ sum } \varnothing,$$

$$x \in Z \subseteq \{u : u \sqsubseteq x\} \implies x \text{ sum } Z.$$

$$\text{a stąd} \qquad x \text{ sum } \{x\} \quad \text{oraz} \quad x \text{ sum } \{u : u \sqsubseteq x\},$$

## Sumy mereologiczne (klasy kolektywne Leśniewskiego)

Możemy zatem rozpatrywać binarną relację sum zawartą w $U \times 2^U$. Dla dowolnych $x$ z $U$ i $Z$ z $2^U$ kładziemy

$$x \text{ sum } Z \;:\Longleftrightarrow\; \forall_{z \in Z}\, z \sqsubseteq x \wedge \forall_{y \in U}\big(y \sqsubseteq x \;\Rightarrow\; \exists_{z \in Z}\, z \bigcirc y\big).$$

Jako konsekwencje zwrotności relacji $\sqsubseteq$ otrzymujemy dla dowolnego elementu $x$ i podzbioru $Z$:

$$x \text{ sum } Z \implies Z \neq \varnothing, \quad \text{a stąd} \quad \neg\exists_{x \in U}\, x \text{ sum } \varnothing,$$

$$x \in Z \subseteq \{u : u \sqsubseteq x\} \implies x \text{ sum } Z.$$

$$\text{a stąd} \qquad x \text{ sum } \{x\} \quad \text{oraz} \quad x \text{ sum } \{u : u \sqsubseteq x\},$$

$$\exists_{y \in U}\, y \sqsubset x \iff x \text{ sum } \{u : u \sqsubset x\},$$

## Sumy mereologiczne (klasy kolektywne Leśniewskiego)

Możemy zatem rozpatrywać binarną relację sum zawartą w $U \times 2^U$. Dla dowolnych $x$ z $U$ i $Z$ z $2^U$ kładziemy

$$x \text{ sum } Z \;:\Longleftrightarrow\; \forall_{z \in Z}\, z \sqsubseteq x \wedge \forall_{y \in U}\big(y \sqsubseteq x \;\Rightarrow\; \exists_{z \in Z}\, z \bigcirc y\big).$$

Jako konsekwencje zwrotności relacji $\sqsubseteq$ otrzymujemy dla dowolnego elementu $x$ i podzbioru $Z$:

$$x \text{ sum } Z \implies Z \neq \varnothing, \quad \text{a stąd} \quad \neg\exists_{x \in U}\, x \text{ sum } \varnothing,$$

$$x \in Z \subseteq \{u : u \sqsubseteq x\} \implies x \text{ sum } Z.$$

$$\text{a stąd} \quad x \text{ sum } \{x\} \quad \text{oraz} \quad x \text{ sum } \{u : u \sqsubseteq x\},$$

$$\exists_{y \in U}\, y \sqsubset x \iff x \text{ sum } \{u : u \sqsubset x\},$$

$$x \text{ sum } U \iff x \text{ jest jednością.}$$

## Funkcyjność relacji sum

Zgodnie ze znaczeniem słowa ‘klasa’ pojęcie *klasy kolektywnej S-ów* może mieć co najwyżej jeden desygnat. Leśniewski przyjmował taki aksjomat.

## Funkcyjność relacji sum

Zgodnie ze znaczeniem słowa ‘klasa’ pojęcie *klasy kolektywnej* $S$*-ów* może mieć co najwyżej jeden desygnat. Leśniewski przyjmował taki aksjomat.
W naszej terminologii odpowiednik tego aksjomatu mówi o funkcyjności relacji sum, czyli dla dowolnych elementów $x$, $y$ oraz podzbioru $Z$:

$$x \operatorname{sum} Z \wedge y \operatorname{sum} Z \implies x = y. \tag{$\mathsf{f}_{\mathsf{sum}}$}$$

## Funkcyjność relacji sum

Zgodnie ze znaczeniem słowa 'klasa' pojęcie *klasy kolektywnej* $S$*-ów* może mieć co najwyżej jeden desygnat. Leśniewski przyjmował taki aksjomat.
W naszej terminologii odpowiednik tego aksjomatu mówi o funkcyjności relacji sum, czyli dla dowolnych elementów $x$, $y$ oraz podzbioru $Z$:

$$x \,\mathsf{sum}\, Z \wedge y \,\mathsf{sum}\, Z \implies x = y. \qquad (\mathsf{f}_{\mathsf{sum}})$$

Funkcyjności relacji sum nie otrzymamy ani w $_{\mathbf{s}}\mathbf{POS}$, ani w $\mathbf{POS}$.

## Odpowiednik mereologii Leśniewskiego

Odpowiednik mereologii Leśniewskiego otrzymujemy przyjmując, że $\sqsubset$ jest ostrym częściowym porządkiem (dwa aksjomaty), funkcyjność relacji $\mathsf{sum}$ plus maksymalnie mocne założenie postulujące istnienie sumy mereologicznej (tj. klasy kolektywnej) dla dowolnego niepustego podzbioru uniwersum:

## Odpowiednik mereologii Leśniewskiego

Odpowiednik mereologii Leśniewskiego otrzymujemy przyjmując, że $\sqsubset$ jest ostrym częściowym porządkiem (dwa aksjomaty), funkcyjność relacji sum plus maksymalnie mocne założenie postulujące istnienie sumy mereologicznej (tj. klasy kolektywnej) dla dowolnego niepustego podzbioru uniwersum:

$$Z \neq \varnothing \implies \exists_{x \in U}\, x \,\mathsf{sum}\, Z. \tag{$\exists$sum}$$

## Odpowiednik mereologii Leśniewskiego

Odpowiednik mereologii Leśniewskiego otrzymujemy przyjmując, że $\sqsubset$ jest ostrym częściowym porządkiem (dwa aksjomaty), funkcyjność relacji sum plus maksymalnie mocne założenie postulujące istnienie sumy mereologicznej (tj. klasy kolektywnej) dla dowolnego niepustego podzbioru uniwersum:

$$Z \neq \varnothing \implies \exists_{x \in U}\, x \mathrel{\mathsf{sum}} Z. \tag{$\exists\mathsf{sum}$}$$

Jest to właśnie wspomniany już czwarty aksjomat Leśniewskiego. Jest to założenie, które możemy przyjąć jedynie dla bardzo szczególnego typu uniwersów rozważań.

## Odpowiednik mereologii Leśniewskiego

Odpowiednik mereologii Leśniewskiego otrzymujemy przyjmując, że $\sqsubset$ jest ostrym częściowym porządkiem (dwa aksjomaty), funkcyjność relacji $\mathsf{sum}$ plus maksymalnie mocne założenie postulujące istnienie sumy mereologicznej (tj. klasy kolektywnej) dla dowolnego niepustego podzbioru uniwersum:

$$Z \neq \varnothing \implies \exists_{x \in U}\, x \,\mathsf{sum}\, Z. \qquad (\exists\mathsf{sum})$$

Jest to właśnie wspomniany już czwarty aksjomat Leśniewskiego. Jest to założenie, które możemy przyjąć jedynie dla bardzo szczególnego typu uniwersów rozważań.

Z określenia relacji $\mathsf{sum}$ i ze zwrotności relacji $\sqsubseteq$ otrzymujemy implikację odwrotną w $(\exists\mathsf{sum})$, tj. mamy:

$$Z \neq \varnothing \iff \exists_{x \in U}\, x \,\mathsf{sum}\, Z.$$

## Teorie egzystencjalnie neutralne

Jak już wspomnieliśmy we wstępie, teorie «egzystencjalnie neutralne» nie mają żadnych aksjomatów postulujących istnienie mereologicznych sum, których istnienie nie wynika z definicji i podstawowych własności relacji *bycia częścią*.

## Teorie egzystencjalnie neutralne

Jak już wspomnieliśmy we wstępie, teorie «egzystencjalnie neutralne» nie mają żadnych aksjomatów postulujących istnienie mereologicznych sum, których istnienie nie wynika z definicji i podstawowych własności relacji *bycia częścią*. Dodajmy, że taki «egzystencjalny aksjomat» nie musi jednak *explicite* postulować istnienia sumy mereologicznej [zob. Pietruszczak, 2020].

## Teorie egzystencjalnie neutralne

Jak już wspomnieliśmy we wstępie, teorie «egzystencjalnie neutralne» nie mają żadnych aksjomatów postulujących istnienie mereologicznych sum, których istnienie nie wynika z definicji i podstawowych własności relacji *bycia częścią*. Dodajmy, że taki «egzystencjalny aksjomat» nie musi jednak *explicite* postulować istnienia sumy mereologicznej [zob. Pietruszczak, 2020].

Aksjomaty teorii «egzystencjalnie neutralnych» mogą postulować istnienie tylko takich obiektów, których istnienie wydaje się «całkowicie naturalne» (czyli zaliczamy to do podstawowych własności relacji *bycia częścią*).

## Teorie egzystencjalnie neutralne

Jak już wspomnieliśmy we wstępie, teorie «egzystencjalnie neutralne» nie mają żadnych aksjomatów postulujących istnienie mereologicznych sum, których istnienie nie wynika z definicji i podstawowych własności relacji *bycia częścią*. Dodajmy, że taki «egzystencjalny aksjomat» nie musi jednak *explicite* postulować istnienia sumy mereologicznej [zob. Pietruszczak, 2020].

Aksjomaty teorii «egzystencjalnie neutralnych» mogą postulować istnienie tylko takich obiektów, których istnienie wydaje się «całkowicie naturalne» (czyli zaliczamy to do podstawowych własności relacji *bycia częścią*).

Takimi właśnie «neutralnymi aksjomatami» są pochodzące od Simonsa [1987] dwie zasady uzupełniania: słaba i mocna.

## Słaba zasada uzupełniania

„Słaba zasada uzupełniania" (*Weak Supplementation Principle*) ma następującą postać dla dowolnych elementów uniwersum $x$ i $y$:

$$y \sqsubset x \implies \exists_{z \in U}(z \sqsubset x \wedge z \wr y). \qquad \text{(WSP)}$$

## Słaba zasada uzupełniania

„Słaba zasada uzupełniania” (*Weak Supplementation Principle*) ma następującą postać dla dowolnych elementów uniwersum $x$ i $y$:

$$y \sqsubset x \implies \exists_{z \in U}(z \sqsubset x \wedge z \wr y). \qquad \text{(WSP)}$$

(WSP) pociąga przeciwzwrotność relacji $\sqsubset$.

## Słaba zasada uzupełniania

„Słaba zasada uzupełniania” (*Weak Supplementation Principle*) ma następującą postać dla dowolnych elementów uniwersum $x$ i $y$:

$$y \sqsubset x \implies \exists_{z \in U}(z \sqsubset x \wedge z \wr y). \qquad \text{(WSP)}$$

(WSP) pociąga przeciwzwrotność relacji $\sqsubset$. Dla $_{\mathbf{s}}\mathbf{POS}$+(WSP) nie trzeba zakładać ani przeciwzwrotności, ani asymetrii relacji $\sqsubset$.

## Słaba zasada uzupełniania

„Słaba zasada uzupełniania” (*Weak Supplementation Principle*) ma następującą postać dla dowolnych elementów uniwersum $x$ i $y$:

$$y \sqsubset x \implies \exists_{z \in U}(z \sqsubset x \wedge z \wr y). \tag{WSP}$$

(WSP) pociąga przeciwzwrotność relacji $\sqsubset$. Dla ${}_{\mathbf{s}}\mathbf{POS}$+(WSP) nie trzeba zakładać ani przeciwzwrotności, ani asymetrii relacji $\sqsubset$.

Ponadto, ze zwrotności i przechodniości relacji $\sqsubseteq$ plus (WSP) wynika antysymetryczność $\sqsubseteq$.

## Słaba zasada uzupełniania

„Słaba zasada uzupełniania” (*Weak Supplementation Principle*) ma następującą postać dla dowolnych elementów uniwersum $x$ i $y$:

$$y \sqsubset x \implies \exists_{z \in U}(z \sqsubset x \wedge z \wr y). \tag{WSP}$$

(WSP) pociąga przeciwzwrotność relacji $\sqsubset$. Dla $_{\mathbf{s}}\mathbf{POS}$+(WSP) nie trzeba zakładać ani przeciwzwrotności, ani asymetrii relacji $\sqsubset$.

Ponadto, ze zwrotności i przechodniości relacji $\sqsubseteq$ plus (WSP) wnika antysymetryczność $\sqsubseteq$. Dla **POS**+(WSP) nie trzeba zakładać tej własności relacji $\sqsubseteq$.

## Słaba zasada uzupełniania

„Słaba zasada uzupełniania” (*Weak Supplementation Principle*) ma następującą postać dla dowolnych elementów uniwersum $x$ i $y$:

$$y \sqsubset x \implies \exists_{z \in U}(z \sqsubset x \wedge z \wr y). \tag{WSP}$$

(WSP) pociąga przeciwzwrotność relacji $\sqsubset$. Dla $_{\mathbf{s}}$**POS**+(WSP) nie trzeba zakładać ani przeciwzwrotności, ani asymetrii relacji $\sqsubset$.

Ponadto, ze zwrotności i przechodniości relacji $\sqsubseteq$ plus (WSP) wnika antysymetryczność $\sqsubseteq$. Dla **POS**+(WSP) nie trzeba zakładać tej własności relacji $\sqsubseteq$.

Mając (WSP) żaden obiekt nie ma tylko jednej części:

$$y \sqsubset x \implies \exists_{z \in U}(z \sqsubset x \wedge z \neq y).$$

## Słaba zasada uzupełniania

„Słaba zasada uzupełniania" (*Weak Supplementation Principle*) ma następującą postać dla dowolnych elementów uniwersum $x$ i $y$:

$$y \sqsubset x \implies \exists_{z \in U}(z \sqsubset x \wedge z \wr y). \qquad \text{(WSP)}$$

(WSP) pociąga przeciwzwrotność relacji $\sqsubset$. Dla ${}_{\mathbf{s}}\mathbf{POS}$+(WSP) nie trzeba zakładać ani przeciwzwrotności, ani asymetrii relacji $\sqsubset$.

Ponadto, ze zwrotności i przechodniości relacji $\sqsubseteq$ plus (WSP) wnika antysymetryczność $\sqsubseteq$. Dla **POS**+(WSP) nie trzeba zakładać tej własności relacji $\sqsubseteq$.

Mając (WSP) żaden obiekt nie ma tylko jednej części:

$$y \sqsubset x \implies \exists_{z \in U}(z \sqsubset x \wedge z \neq y).$$

Z (WSP) również wynikają obie zasady ($\exists\wr$) i ($\nexists$o).

## Słaba zasada uzupełniania

„Słaba zasada uzupełniania” (*Weak Supplementation Principle*) ma następującą postać dla dowolnych elementów uniwersum $x$ i $y$:

$$y \sqsubset x \implies \exists_{z \in U}(z \sqsubset x \wedge z \wr y). \qquad \text{(WSP)}$$

(WSP) pociąga przeciwzwrotność relacji $\sqsubset$. Dla $_{\mathbf{s}}\mathbf{POS}$+(WSP) nie trzeba zakładać ani przeciwzwrotności, ani asymetrii relacji $\sqsubset$.

Ponadto, ze zwrotności i przechodniości relacji $\sqsubseteq$ plus (WSP) wnika antysymetryczność $\sqsubseteq$. Dla **POS**+(WSP) nie trzeba zakładać tej własności relacji $\sqsubseteq$.

Mając (WSP) żaden obiekt nie ma tylko jednej części:

$$y \sqsubset x \implies \exists_{z \in U}(z \sqsubset x \wedge z \neq y).$$

Z (WSP) również wynikają obie zasady ($\exists\wr$) i ($\nexists$o).

Funkcyjność relacji sum wymusza zasadę (WSP).

## Mocna zasada uzupełniania

„Mocna zasada uzupełniania" (*Strong Supplementation Principle*) ma następującą postać dla dowolnych elementów uniwersum $x$ i $y$:

$$x \not\sqsubseteq y \implies \exists_{z \in U}(z \sqsubseteq x \wedge z \wr y). \tag{SSP}$$

## Mocna zasada uzupełniania

„Mocna zasada uzupełniania" (*Strong Supplementation Principle*) ma następującą postać dla dowolnych elementów uniwersum $x$ i $y$:

$$x \not\sqsubseteq y \implies \exists_{z \in U}(z \sqsubseteq x \wedge z \wr y). \qquad \text{(SSP)}$$

(SSP) pociąga zwrotność relacji $\sqsubseteq$.

## Mocna zasada uzupełniania

„Mocna zasada uzupełniania" (*Strong Supplementation Principle*) ma następującą postać dla dowolnych elementów uniwersum $x$ i $y$:

$$x \not\sqsubseteq y \implies \exists_{z \in U}(z \sqsubseteq x \wedge z \wr y). \tag{SSP}$$

(SSP) pociąga zwrotność relacji $\sqsubseteq$. Dla **POS**+(SSP) nie trzeba zakładać tej własności relacji $\sqsubseteq$.

## Mocna zasada uzupełniania

„Mocna zasada uzupełniania" (*Strong Supplementation Principle*) ma następującą postać dla dowolnych elementów uniwersum $x$ i $y$:

$$x \not\sqsubseteq y \implies \exists_{z \in U}(z \sqsubseteq x \wedge z \wr y). \tag{SSP}$$

(SSP) pociąga zwrotność relacji $\sqsubseteq$. Dla **POS**+(SSP) nie trzeba zakładać tej własności relacji $\sqsubseteq$.

Mając asymetrię relacji $\sqsubset$ i zwrotność relacji $\sqsubseteq$ z (SSP) otrzymamy (WSP).

## Zasady monotoniczności dla sum

Dla dowolnych elementów $x$ i $y$ oraz podzbiorów $Z_1$ i $Z_2$:

$$Z_1 \subseteq Z_2 \wedge x \ \mathsf{sum}\ Z_1 \wedge y \ \mathsf{sum}\ Z_2 \implies x \sqsubseteq y. \tag{m$_{\mathsf{sum}}$}$$

## Zasady monotoniczności dla sum

Dla dowolnych elementów $x$ i $y$ oraz podzbiorów $Z_1$ i $Z_2$:

$$Z_1 \subseteq Z_2 \wedge x \ \mathsf{sum}\ Z_1 \wedge y \ \mathsf{sum}\ Z_2 \implies x \sqsubseteq y. \qquad (\mathrm{m_{sum}})$$

Z tej zasady i antysymetrii relacji $\sqsubseteq$ wynika $(\mathrm{f_{sum}})$, czyli funkcyjność relacji $\mathsf{sum}$.

## Zasady monotoniczności dla sum

Dla dowolnych elementów $x$ i $y$ oraz podzbiorów $Z_1$ i $Z_2$:

$$Z_1 \subseteq Z_2 \wedge x \text{ sum } Z_1 \wedge y \text{ sum } Z_2 \implies x \sqsubseteq y. \qquad (\mathrm{m_{sum}})$$

Z tej zasady i antysymetrii relacji $\sqsubseteq$ wynika ($\mathrm{f_{sum}}$), czyli funkcyjność relacji sum.

Udowodniłem, że równoważna są zasady: (SSP), ($\mathrm{m_{sum}}$) oraz:

$$\forall_{u \in U}(u \sqsubseteq x \Rightarrow \exists_{z \in Z}\, z \bigcirc u) \wedge \forall_{z \in Z}\, z \sqsubseteq y \implies x \sqsubseteq y.$$

## Zasady monotoniczności dla sum

Dla dowolnych elementów $x$ i $y$ oraz podzbiorów $Z_1$ i $Z_2$:

$$Z_1 \subseteq Z_2 \wedge x \text{ sum } Z_1 \wedge y \text{ sum } Z_2 \implies x \sqsubseteq y. \qquad (\mathrm{m_{sum}})$$

Z tej zasady i antysymetrii relacji $\sqsubseteq$ wynika ($\mathrm{f_{sum}}$), czyli funkcyjność relacji sum.

Udowodniłem, że równoważna są zasady: (SSP), ($\mathrm{m_{sum}}$) oraz:

$$\forall_{u \in U}(u \sqsubseteq x \Rightarrow \exists_{z \in Z}\, z \bigcirc u) \wedge \forall_{z \in Z}\, z \sqsubseteq y \implies x \sqsubseteq y.$$

Zatem również z (SSP) wynika funkcyjność relacji sum, a ta zaś wymusza (WSP).

## Zasada ekstensjonalności względem $\bigcirc$

Mereologicznym odpowiednikiem występującej w teorii mnogości zasady ekstensjonalności może być następujący warunek dla dowolnych $x$ i $y$:

$$\forall_{z \in U}(z \bigcirc x \Leftrightarrow z \bigcirc y) \implies x = y. \tag{ext$_\bigcirc$}$$

Implikacja odwrotna to prawo logiki.

## Zasada ekstensjonalności względem $\bigcirc$

Mereologicznym odpowiednikiem występującej w teorii mnogości zasady ekstensjonalności może być następujący warunek dla dowolnych $x$ i $y$:

$$\forall_{z \in U}(z \bigcirc x \Leftrightarrow z \bigcirc y) \implies x = y. \tag{ext$_\bigcirc$}$$

Implikacja odwrotna to prawo logiki.

Udowodniłem, że zasada ekstensjonalności (ext$_\bigcirc$) jest równoważna z (f$_{\mathrm{sum}}$), czyli z funkcyjnością relacji sum. Zatem wynika z (SSP) oraz pociąga (WSP).

## Zasada ekstensjonalności względem $\bigcirc$

Mereologicznym odpowiednikiem występującej w teorii mnogości zasady ekstensjonalności może być następujący warunek dla dowolnych $x$ i $y$:

$$\forall_{z \in U}(z \bigcirc x \;\Leftrightarrow\; z \bigcirc y) \implies x = y. \tag{ext$_\circ$}$$

Implikacja odwrotna to prawo logiki.

Udowodniłem, że zasada ekstensjonalności (ext$_\circ$) jest równoważna z (f$_{\mathsf{sum}}$), czyli z funkcyjnością relacji sum. Zatem wynika z (SSP) oraz pociąga (WSP).

Równoważne z (ext$_\circ$) jest:

$$\forall_{z \in U}(z \wr x \;\Leftrightarrow\; z \wr y) \implies x = y.$$

## Zasady ekstensjonalności względem $\sqsubset$

Druga zasada ekstensjonalności mówi, że dla dowolnych $x$ i $y$:

$$\exists_{u \in U}\, u \sqsubset x \wedge \forall_{z \in U}(z \sqsubset x \iff z \sqsubset y) \implies x = y. \tag{$\mathrm{ext}_{\sqsubset}$}$$

## Zasady ekstensjonalności względem $\sqsubset$

Druga zasada ekstensjonalności mówi, że dla dowolnych $x$ i $y$:

$$\exists_{u \in U}\, u \sqsubset x \wedge \forall_{z \in U}(z \sqsubset x \;\Leftrightarrow\; z \sqsubset y) \implies x = y. \qquad (\mathrm{ext}_{\sqsubset})$$

Dodatkowy warunek w poprzedniku implikacji jest konieczny, gdyż $x$ i $y$ mogą być atomami. Implikacja w $(\mathrm{ext}_{\sqsubset})$ nie jest odwracalna.

## Zasady ekstensjonalności względem $\sqsubset$

Druga zasada ekstensjonalności mówi, że dla dowolnych $x$ i $y$:

$$\exists_{u \in U}\, u \sqsubset x \wedge \forall_{z \in U}(z \sqsubset x \;\Leftrightarrow\; z \sqsubset y) \implies x = y. \qquad (\mathrm{ext}_{\sqsubset})$$

Dodatkowy warunek w poprzedniku implikacji jest konieczny, gdyż $x$ i $y$ mogą być atomami. Implikacja w ($\mathrm{ext}_{\sqsubset}$) nie jest odwracalna.

Ze zwrotności i antysymetryczności relacji $\sqsubseteq$ wynika:

$$\forall_{z \in U}(z \sqsubseteq x \;\Leftrightarrow\; z \sqsubseteq y) \implies x = y.$$

# „Zasada części właściwych"

Tak Simons [1987] nazwał (*Proper Parts Principle*) następujący warunek mający zachodzić dla dowolnych $x$ i $y$:

$$\exists_{u \in U}\, u \sqsubset x \wedge \forall_{z \in U}(z \sqsubset x \;\Rightarrow\; z \sqsubset y) \;\Longrightarrow\; x \sqsubseteq y. \qquad \text{(PPP)}$$

## „Zasada części właściwych"

Tak Simons [1987] nazwał (*Proper Parts Principle*) następujący warunek mający zachodzić dla dowolnych $x$ i $y$:

$$\exists_{u \in U}\, u \sqsubset x \wedge \forall_{z \in U}(z \sqsubset x \;\Rightarrow\; z \sqsubset y) \implies x \sqsubseteq y\,. \tag{PPP}$$

Mając antysymetryczność relacji $\sqsubseteq$ oraz (PPP) otrzymujemy zasadę ekstensjonalności ($\mathrm{ext}_{\sqsubset}$).

## „Zasada części właściwych”

Tak Simons [1987] nazwał (*Proper Parts Principle*) następujący warunek mający zachodzić dla dowolnych $x$ i $y$:

$$\exists_{u\in U}\, u \sqsubset x \wedge \forall_{z\in U}(z \sqsubset x \;\Rightarrow\; z \sqsubset y) \implies x \sqsubseteq y. \tag{PPP}$$

Mając antysymetryczność relacji $\sqsubseteq$ oraz (PPP) otrzymujemy zasadę ekstensjonalności ($\mathrm{ext}_{\sqsubset}$).

(SSP) pociąga (PPP).

## Zasady ekstensjonalności «plus» względem $\bigcirc$

Dla dowolnych elementów uniwersum $x$ i $y$:

$$\forall_{x,y\in U}\big(\forall_{z\in U}(z \bigcirc x \;\Rightarrow\; z \bigcirc y) \implies x \sqsubseteq y\big). \qquad (\mathrm{ext}_{\circ}+)$$

## Zasady ekstensjonalności «plus» względem $\bigcirc$

Dla dowolnych elementów uniwersum $x$ i $y$:

$$\forall_{x,y \in U}\Big(\forall_{z \in U}(z \bigcirc x \;\Rightarrow\; z \bigcirc y) \implies x \sqsubseteq y\Big). \qquad (\mathrm{ext}_{\circ}+)$$

Mając antysymetryczność relacji $\sqsubseteq$ oraz $(\mathrm{ext}_{\circ}+)$ otrzymujemy zasadę ekstensjonalności $(\mathrm{ext}_{\circ})$.

## Zasady ekstensjonalności «plus» względem $\bigcirc$

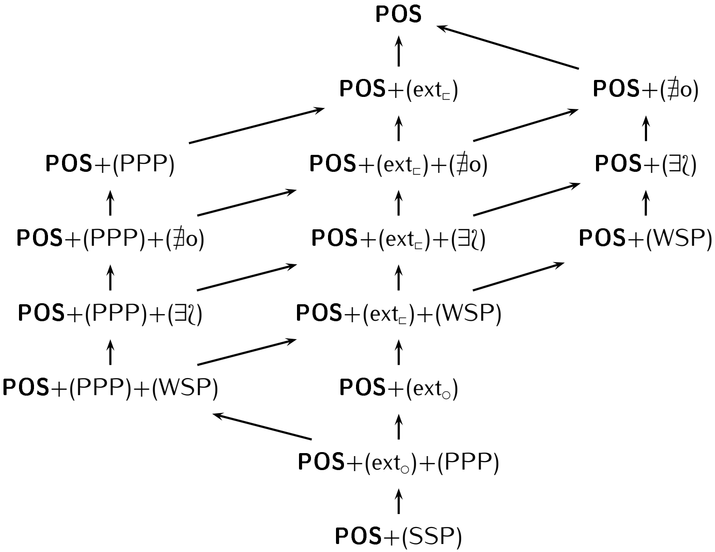
Dla dowolnych elementów uniwersum $x$ i $y$:

$$\forall_{x,y\in U}\big(\forall_{z\in U}(z \bigcirc x \;\Rightarrow\; z \bigcirc y) \implies x \sqsubseteq y\big). \tag{ext$_\bigcirc$+}$$

Mając antysymetryczność relacji $\sqsubseteq$ oraz (ext$_\bigcirc$+) otrzymujemy zasadę ekstensjonalności (ext$_\bigcirc$).

Zasady (SSP) i (ext$_\bigcirc$+) są równoważne [zob. Pietruszczak, 2000, 2018, 2020].

# Krata «egzystencjalnie neutralnych» teorii



## Spolaryzowane zbiory częściowo uporządkowane

Na miano „teorii części” zasługują tylko te teorie, w których relacja sum jest funkcyjna. Na diagramie teorii egzystencjalnie neutralnych mamy jedynie trzy takie teorie: **POS**+($f_{sum}$) (= **POS**+($ext_{\circ}$)), **POS**+($f_{sum}$)+(PPP) oraz **POS**+(SSP).

## Spolaryzowane zbiory częściowo uporządkowane

Na miano „teorii części” zasługują tylko te teorie, w których relacja sum jest funkcyjna. Na diagramie teorii egzystencjalnie neutralnych mamy jedynie trzy takie teorie: **POS**+($\mathrm{f}_{\mathbf{sum}}$) (= **POS**+($\mathrm{ext}_{\circ}$)), **POS**+($\mathrm{f}_{\mathbf{sum}}$)+(PPP) oraz **POS**+(SSP).

Tę ostatnią nazwiemy teorią *spolaryzowanych zbiorów częściowo uporządkowanych* i oznaczymy przez **PPOS** := **POS**+(SSP) = **POS**+($\mathrm{ext}_{\circ}$+).

## Suma mereologiczna a kres górny

W klasie **POS** relację sup *bycia kresem górnym* określamy dla dowolnego elementu $x$ i dowolnego podzbioru $Z$ uniwersum:

$$x \sup Z \;:\Longleftrightarrow\; \forall_{z \in Z}\, z \sqsubseteq x \wedge \forall_{y \in U}(\forall_{z \in Z}\, z \sqsubseteq y \;\Rightarrow\; x \sqsubseteq y).$$

## Suma mereologiczna a kres górny

W klasie **POS** relację sup *bycia kresem górnym* określamy dla dowolnego elementu $x$ i dowolnego podzbioru $Z$ uniwersum:

$$x \operatorname{sup} Z \;:\Longleftrightarrow\; \forall_{z \in Z}\, z \sqsubseteq x \wedge \forall_{y \in U}(\forall_{z \in Z}\, z \sqsubseteq y \;\Rightarrow\; x \sqsubseteq y).$$

Jeśli nie zachodzi (WSP), nie ma żadnych ciekawych związków pomiędzy sum i sup.

## Suma mereologiczna a kres górny

W klasie **POS** relację sup *bycia kresem górnym* określamy dla dowolnego elementu $x$ i dowolnego podzbioru $Z$ uniwersum:

$$x \operatorname{sup} Z \;:\Longleftrightarrow\; \forall_{z \in Z}\, z \sqsubseteq x \wedge \forall_{y \in U}(\forall_{z \in Z}\, z \sqsubseteq y \;\Rightarrow\; x \sqsubseteq y).$$

Jeśli nie zachodzi (WSP), nie ma żadnych ciekawych związków pomiędzy sum i sup. Okazuje się jednak, że obie zasady uzupełniania są równoważne z pewnymi takimi związkami.

## Suma mereologiczna a kres górny

W klasie **POS** relację sup *bycia kresem górnym* określamy dla dowolnego elementu $x$ i dowolnego podzbioru $Z$ uniwersum:

$$x \,\mathrm{sup}\, Z \;:\Longleftrightarrow\; \forall_{z \in Z}\, z \sqsubseteq x \wedge \forall_{y \in U}(\forall_{z \in Z}\, z \sqsubseteq y \;\Rightarrow\; x \sqsubseteq y).$$

Jeśli nie zachodzi (WSP), nie ma żadnych ciekawych związków pomiędzy sum i sup. Okazuje się jednak, że obie zasady uzupełniania są równoważne z pewnymi takimi związkami.

Słaba zasada uzupełniania (WSP) jest równoważna z tym, że jeśli istnieją suma mereologiczna i kres górny danego zbioru, to są sobie równe, tj. dla dowolnych elementów $x$ i $y$ oraz podzbioru $Z$:

$$x \,\mathrm{sup}\, Z \wedge y \,\mathrm{sum}\, Z \implies x = y.$$

## Suma mereologiczna a kres górny

W klasie **POS** relację sup *bycia kresem górnym* określamy dla dowolnego elementu $x$ i dowolnego podzbioru $Z$ uniwersum:

$$x \text{ sup } Z \;:\Longleftrightarrow\; \forall_{z \in Z}\, z \sqsubseteq x \wedge \forall_{y \in U}(\forall_{z \in Z}\, z \sqsubseteq y \;\Rightarrow\; x \sqsubseteq y).$$

Jeśli nie zachodzi (WSP), nie ma żadnych ciekawych związków pomiędzy sum i sup. Okazuje się jednak, że obie zasady uzupełniania są równoważne z pewnymi takimi związkami.

Słaba zasada uzupełniania (WSP) jest równoważna z tym, że jeśli istnieją suma mereologiczna i kres górny danego zbioru, to są sobie równe, tj. dla dowolnych elementów $x$ i $y$ oraz podzbioru $Z$:

$$x \text{ sup } Z \wedge y \text{ sum } Z \;\Longrightarrow\; x = y.$$

Mocna zasada uzupełniania (SSP) jest równoważna z inkluzją sum $\subseteq$ sup. Mamy: **PPOS** = **POS**+(sum$\subseteq$sup).

## Suma mereologiczna a kres górny

W **PPOS** nie otrzymamy inkluzji odwrotnej $\mathsf{sup} \subseteq \mathsf{sum}$.

## Suma mereologiczna a kres górny

W **PPOS** nie otrzymamy inkluzji odwrotnej $\mathsf{sup} \subseteq \mathsf{sum}$.

W strukturach zdegenerowanych mamy $\mathsf{sup} \nsubseteq \mathsf{sum}$.

## Suma mereologiczna a kres górny

W **PPOS** nie otrzymamy inkluzji odwrotnej $\mathsf{sup} \subseteq \mathsf{sum}$.

W strukturach zdegenerowanych mamy $\mathsf{sup} \nsubseteq \mathsf{sum}$. Istotnie, dla $U = \{u\}$ mamy $u \,\mathsf{sup}\, \varnothing$, lecz $\varnothing$ nie ma sumy mereologicznej.

## Suma mereologiczna a kres górny

W **PPOS** nie otrzymamy inkluzji odwrotnej $\mathsf{sup} \subseteq \mathsf{sum}$.

W strukturach zdegenerowanych mamy $\mathsf{sup} \not\subseteq \mathsf{sum}$. Istotnie, dla $U = \{u\}$ mamy $u \,\mathsf{sup}\, \varnothing$, lecz $\varnothing$ nie ma sumy mereologicznej.

Jeśli dopuszczamy struktury zdegenerowane to interesuje nas inkluzja ograniczona do zbiorów niepustych, czyli warunek zachodzący dla dowolnych elementów $x$ i $y$ i podzbioru $Z$:

$$Z \neq \varnothing \wedge x \,\mathsf{sup}\, Z \implies x \,\mathsf{sum}\, Z. \qquad (\mathsf{sup}{\subseteq_{\varnothing}}\mathsf{sum})$$

## Suma mereologiczna a kres górny

W **PPOS** nie otrzymamy inkluzji odwrotnej $\mathsf{sup} \subseteq \mathsf{sum}$.

W strukturach zdegenerowanych mamy $\mathsf{sup} \not\subseteq \mathsf{sum}$. Istotnie, dla $U = \{u\}$ mamy $u \,\mathsf{sup}\, \varnothing$, lecz $\varnothing$ nie ma sumy mereologicznej.

Jeśli dopuszczamy struktury zdegenerowane to interesuje nas inkluzja ograniczona do zbiorów niepustych, czyli warunek zachodzący dla dowolnych elementów $x$ i $y$ i podzbioru $Z$:

$$Z \neq \varnothing \wedge x \,\mathsf{sup}\, Z \implies x \,\mathsf{sum}\, Z. \tag{sup$\subseteq_\varnothing$sum}$$

Skoro w niezdegenerowanych strukturach z **PPOS** nie mamy zera, więc zbiór $\varnothing$ nie ma w nich kresu górnego. Zatem w takich strukturach równoważne są warunki (sup$\subseteq$sum) i (sup$\subseteq_\varnothing$sum).

## Suma mereologiczna a kres górny

W **PPOS** nie otrzymamy inkluzji odwrotnej $\mathrm{sup} \subseteq \mathrm{sum}$.

W strukturach zdegenerowanych mamy $\mathrm{sup} \not\subseteq \mathrm{sum}$. Istotnie, dla $U = \{u\}$ mamy $u \,\mathrm{sup}\, \varnothing$, lecz $\varnothing$ nie ma sumy mereologicznej.

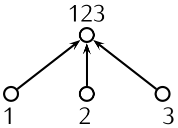
Jeśli dopuszczamy struktury zdegenerowane to interesuje nas inkluzja ograniczona do zbiorów niepustych, czyli warunek zachodzący dla dowolnych elementów $x$ i $y$ i podzbioru $Z$:

$$Z \neq \varnothing \wedge x \,\mathrm{sup}\, Z \implies x \,\mathrm{sum}\, Z. \qquad (\mathrm{sup}\subseteq_{\varnothing}\mathrm{sum})$$

Skoro w niezdegenerowanych strukturach z **PPOS** nie mamy zera, więc zbiór $\varnothing$ nie ma w nich kresu górnego. Zatem w takich strukturach równoważne są warunki ($\mathrm{sup}\subseteq\mathrm{sum}$) i ($\mathrm{sup}\subseteq_{\varnothing}\mathrm{sum}$). Warunki te są o tyle ciekawe, gdyż się «egzystencjalnie zaangażowane». Okazuje się, że *implicite* postulują istnienie sum mereologicznych.

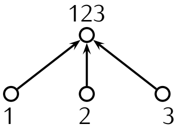
## Suma mereologiczna a kres górny

Do klasy **PPOS** (= **POS**+(sum⊆sup)) należy struktura:



## Suma mereologiczna a kres górny

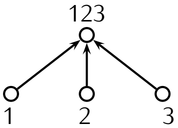
Do klasy **PPOS** (= **POS**+(sum⊆sup)) należy struktura:




Tu mamy sup $\nsubseteq$ sum.

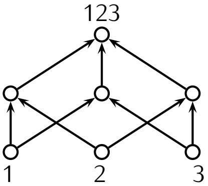
## Suma mereologiczna a kres górny

Do klasy **PPOS** (= **POS**+(sum⊆sup)) należy struktura:




Tu mamy sup $\not\subseteq$ sum.

Skoro 123 jest kresem górnym zbiorów $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ i $\{2,3\}$. Zatem obecność w teorii warunku (sup⊆sum) lub (sup$\subseteq_{\varnothing}$sum) wymuszałoby istnienie sum mereologicznych dla tych zbiorów. Zatem zbogacającą teorię o te warunki, wymuszamy «domknięcie» struktury o te sumy:



## Mereologiczne zbiory częściowo uporządkowane

**PPOS**+(sup$\subseteq_{\varnothing}$sum) jest pierwszą interesującą teorią «egzystencjalnie zaangażowaną».

## Mereologiczne zbiory częściowo uporządkowane

**PPOS**+(sup$\subseteq_{\varnothing}$sum) jest pierwszą interesującą teorią «egzystencjalnie zaangażowaną». Jest ona ona równoważna teorii **POS**+(sum$=_{\varnothing}$sup), gdzie

$$x \text{ sum } Z \iff Z \neq \varnothing \wedge x \text{ sup } Z. \tag{sum$=_{\varnothing}$sup}$$

## Mereologiczne zbiory częściowo uporządkowane

**PPOS**+(sup$\subseteq_{\varnothing}$sum) jest pierwszą interesującą teorią «egzystencjalnie zaangażowaną». Jest ona ona równoważna teorii **POS**+(sum$=_{\varnothing}$sup), gdzie

$$x \text{ sum } Z \iff Z \neq \varnothing \wedge x \text{ sup } Z. \qquad (\text{sum}=_{\varnothing}\text{sup})$$

Zasługuje ona na miano teorii *mereologicznych zbiorów częściowo uporządkowanych*; oznaczmy ją przez **MPOS**.

# Minimalna ekstensjonalna mereologia Simonsa

Tak Simons nazwał (*Minimal Extensional Mereology*) teorię **MEM** będącą rozszerzeniem $_{\mathbf{s}}$**POS**+(WSP) za pomocą warunku dla dowolnych $x$ i $y$:

$$x \bigcirc y \implies \exists_{v \in U} \forall_{z \in U} (z \sqsubseteq v \Leftrightarrow z \sqsubseteq x \wedge z \sqsubseteq y). \qquad (\mathrm{c}\exists\sqcap)$$

Stwierdza to warunkowe istnienie obiektu, który jest „produktem” dwóch zachodzących na siebie obiektów.

## Minimalna ekstensjonalna mereologia Simonsa

Tak Simons nazwał (*Minimal Extensional Mereology*) teorię **MEM** będącą rozszerzeniem $_{\mathbf{s}}$**POS**+(WSP) za pomocą warunku dla dowolnych $x$ i $y$:

$$x \bigcirc y \implies \exists_{v \in U} \forall_{z \in U} (z \sqsubseteq v \;\Leftrightarrow\; z \sqsubseteq x \wedge z \sqsubseteq y). \qquad (\mathrm{c}\exists\sqcap)$$

Stwierdza to warunkowe istnienie obiektu, który jest „produktem” dwóch zachodzących na siebie obiektów.

**MEM** := **POS**+(WSP)+(c∃⊓)

## Minimalna ekstensjonalna mereologia Simonsa

Tak Simons nazwał (*Minimal Extensional Mereology*) teorię **MEM** będącą rozszerzeniem $_{\mathbf{s}}$**POS**+(WSP) za pomocą warunku dla dowolnych $x$ i $y$:

$$x \circ y \implies \exists_{v\in U}\forall_{z\in U}(z \sqsubseteq v \Leftrightarrow z \sqsubseteq x \wedge z \sqsubseteq y). \tag{c$\exists\sqcap$}$$

Stwierdza to warunkowe istnienie obiektu, który jest „produktem” dwóch zachodzących na siebie obiektów.

**MEM** := **POS**+(WSP)+(c∃⊓)

W **MEM** zachodzi (SSP). Zatem **MEM** = **PPOS**+(c∃⊓).

## Minimalna ekstensjonalna mereologia Simonsa

Tak Simons nazwał (*Minimal Extensional Mereology*) teorię **MEM** będącą rozszerzeniem $_{\mathbf{s}}$**POS**+(WSP) za pomocą warunku dla dowolnych $x$ i $y$:

$$x \bigcirc y \implies \exists_{v \in U} \forall_{z \in U} (z \sqsubseteq v \Leftrightarrow z \sqsubseteq x \wedge z \sqsubseteq y). \qquad (\mathrm{c}\exists\sqcap)$$

Stwierdza to warunkowe istnienie obiektu, który jest „produktem” dwóch zachodzących na siebie obiektów.

**MEM** := **POS**+(WSP)+(c∃⊓)

W **MEM** zachodzi (SSP). Zatem **MEM** = **PPOS**+(c∃⊓).
Stąd mamy też **MEM** = **POS**+($\mathrm{f}_{\mathbf{sum}}$)+(c∃⊓).

## Minimalna ekstensjonalna mereologia Simonsa

Tak Simons nazwał (*Minimal Extensional Mereology*) teorię **MEM** będącą rozszerzeniem $_{\mathbf{s}}$**POS**+(WSP) za pomocą warunku dla dowolnych $x$ i $y$:

$$x \bigcirc y \implies \exists_{v \in U} \forall_{z \in U} (z \sqsubseteq v \Leftrightarrow z \sqsubseteq x \wedge z \sqsubseteq y). \qquad (\mathrm{c}\exists\sqcap)$$

Stwierdza to warunkowe istnienie obiektu, który jest „produktem” dwóch zachodzących na siebie obiektów.

**MEM** := **POS**+(WSP)+(c∃⊓)

W **MEM** zachodzi (SSP). Zatem **MEM** = **PPOS**+(c∃⊓).
Stąd mamy też **MEM** = **POS**+($\mathrm{f}_{\mathbf{sum}}$)+(c∃⊓).

**MEM** $\subsetneq$ **PPOS** oraz klasy **MEM** i **MPOS** krzyżują się.

## Minimalna ekstensjonalna mereologia Simonsa

Tak Simons nazwał (*Minimal Extensional Mereology*) teorię **MEM** będącą rozszerzeniem $_{\mathbf{s}}$**POS**+(WSP) za pomocą warunku dla dowolnych $x$ i $y$:

$$x \bigcirc y \implies \exists_{v \in U} \forall_{z \in U} (z \sqsubseteq v \iff z \sqsubseteq x \wedge z \sqsubseteq y). \qquad (\mathrm{c}\exists\sqcap)$$

Stwierdza to warunkowe istnienie obiektu, który jest „produktem” dwóch zachodzących na siebie obiektów.

**MEM** := **POS**+(WSP)+(c∃⊓)

W **MEM** zachodzi (SSP). Zatem **MEM** = **PPOS**+(c∃⊓). Stąd mamy też **MEM** = **POS**+($\mathrm{f}_{\mathbf{sum}}$)+(c∃⊓).

**MEM** $\subsetneq$ **PPOS** oraz klasy **MEM** i **MPOS** krzyżują się. **MEM**+(sup$\subseteq_{\varnothing}$sum) = **MEM** ∩ **MPOS**.

## Minimalna domknięta mereologia

Tak nazywa się (*Minimal Closure Mereology*) teorię **CMM** powstałą z **MEM** przez dodanie aksjomatu [zob. Simons, 1987]:

$$x \,\mathrm{Un}\, y \implies \exists_{v \in U} \forall_{z \in U} (z \bigcirc v \;\Leftrightarrow\; z \bigcirc x \vee z \bigcirc y), \qquad (\mathrm{c}\exists_{\mathrm{par}}\sqcup)$$

gdzie $x \,\mathrm{Un}\, y$ mówi, że $x$ i $y$ mają wspólne ograniczenie górne.

## Minimalna domknięta mereologia

Tak nazywa się (*Minimal Closure Mereology*) teorię **CMM** powstałą z **MEM** przez dodanie aksjomatu [zob. Simons, 1987]:

$$x \mathrm{\ Un\ } y \implies \exists_{v \in U} \forall_{z \in U} (z \bigcirc v \;\Leftrightarrow\; z \bigcirc x \vee z \bigcirc y), \qquad (\mathrm{c}\exists_{\mathrm{par}} \sqcup)$$

gdzie $x$ Un $y$ mówi, że $x$ i $y$ mają wspólne ograniczenie górne.

W **PPOS** warunek ($\mathrm{c}\exists_{\mathrm{par}}\mathrm{sum}$) mówi to samo, co:

$$x \mathrm{\ Un\ } y \implies \exists_{v \in U}\, v \mathrm{\ sum\ } \{x, y\}, \qquad (\mathrm{c}\exists_{\mathrm{par}}\mathrm{sum})$$

czyli istnieje suma mereologiczna dwóch obiektów pod warunkiem, że mają wspólne ograniczenie górne.

## Minimalna domknięta mereologia

Tak nazywa się (*Minimal Closure Mereology*) teorię **CMM** powstałą z **MEM** przez dodanie aksjomatu [zob. Simons, 1987]:

$$x \operatorname{Un} y \implies \exists_{v \in U} \forall_{z \in U} (z \bigcirc v \Leftrightarrow z \bigcirc x \vee z \bigcirc y), \qquad (\mathrm{c}\exists_{\mathrm{par}}\sqcup)$$

gdzie $x \operatorname{Un} y$ mówi, że $x$ i $y$ mają wspólne ograniczenie górne.

W **PPOS** warunek (c$\exists_{\mathrm{par}}$sum) mówi to samo, co:

$$x \operatorname{Un} y \implies \exists_{v \in U}\, v \operatorname{sum} \{x, y\}, \qquad (\mathrm{c}\exists_{\mathrm{par}}\mathrm{sum})$$

czyli istnieje suma mereologiczna dwóch obiektów pod warunkiem, że mają wspólne ograniczenie górne.

Widać, że **CMM** jest równa **CEM** (*Extensional Closure Mereology*), gdzie **CEM** := **PPOS**+(c$\exists\sqcap$)+(c$\exists_{\mathrm{par}}\sqcup$), gdyż **MEM** = **PPOS**+(c$\exists\sqcap$).

## Warunkowe kraty mereologiczne

Są wzorowane na strukturach z **CMM** z tą różnicą, że zamiast warunkowego istnienia sum par obiektów, (c$\exists_{\mathrm{par}}$sum), postuluje się warunkowe istnienie ich kresów górnych:

$$x \ \mathrm{Un} \ y \implies \exists_{v \in U} \ v \ \mathrm{sup} \ \{x, y\}. \qquad (\mathrm{c}\exists_{\mathrm{par}}\mathrm{sup})$$

## Warunkowe kraty mereologiczne

Są wzorowane na strukturach z **CMM** z tą różnicą, że zamiast warunkowego istnienia sum par obiektów, (c$\exists_{\mathrm{par}}$sum), postuluje się warunkowe istnienie ich kresów górnych:

$$x \,\mathsf{Un}\, y \implies \exists_{v \in U}\, v \,\mathsf{sup}\, \{x, y\}. \qquad (\mathsf{c}\exists_{\mathrm{par}}\mathsf{sup})$$

Chodzi zatem o klasę **MEM**+(c$\exists_{\mathrm{par}}$sup).

## Warunkowe kraty mereologiczne

Są wzorowane na strukturach z **CMM** z tą różnicą, że zamiast warunkowego istnienia sum par obiektów, (c$\exists_{\text{par}}$sum), postuluje się warunkowe istnienie ich kresów górnych:

$$x \;\mathsf{Un}\; y \implies \exists_{v \in U}\, v \;\mathsf{sup}\; \{x, y\}. \qquad (\mathrm{c}\exists_{\text{par}}\mathrm{sup})$$

Chodzi zatem o klasę **MEM**+(c$\exists_{\text{par}}$sup).

Chociaż warunek (c$\exists_{\text{par}}$sup) nie postuluje istnienia sumy mereologiczne, nie zaliczamy go jednak do «egzystencjalnie neutralnych», gdyż postulowany obiekt w niektórych przypadkach może być wzięty *ad hoc*.

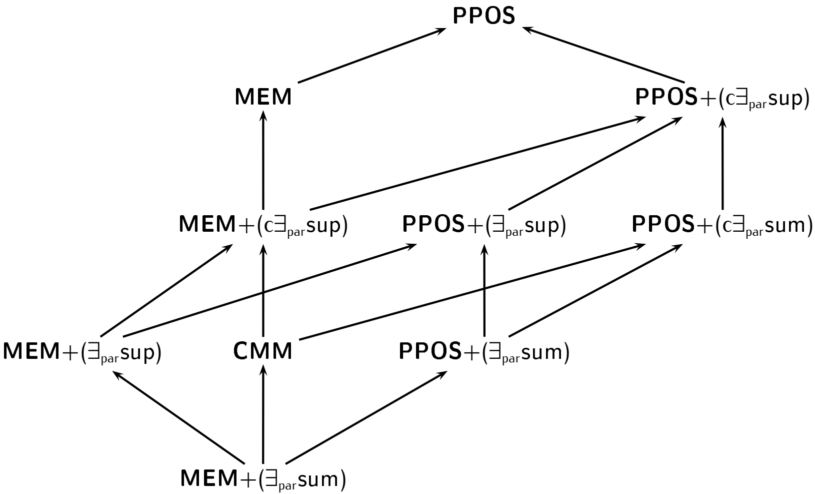
## Bezwarunkowe istnienie sum i kresów górnych par

Można podać bezwarunkową postać postulatów istnienia kresu górnego i sumy mereologicznej dla dowolnej pary obiektów $x$ i $y$:

$$\exists_{v \in U}\ v \ \mathsf{sup}\ \{x, y\}, \qquad (\exists_{\mathrm{par}}\mathsf{sup})$$

$$\exists_{v \in U}\ v \ \mathsf{sum}\ \{x, y\}. \qquad (\exists_{\mathrm{par}}\mathsf{sum})$$

# Krata 1


PPOS
MEM
PPOS+(c∃par sup)
MEM+(c∃par sup)
PPOS+(∃par sup)
PPOS+(c∃par sum)
MEM+(∃par sup)
CMM
PPOS+(∃par sum)
MEM+(∃par sum)

# Krata 2

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathbf{PPOS} \\
 & & \mathbf{PPOS}+\ulcorner(\mathrm{c}\exists\sqcap) \vee (\mathrm{sup}\subseteq_{\varnothing}\mathrm{sum})\urcorner \arrow[u] \\
 & \mathbf{MEM} \arrow[ur] & \mathbf{MPOS} \arrow[u] \\
 & \mathbf{MEM}+(\mathrm{c}\exists_{\mathrm{par}}\mathrm{sup}) \arrow[u] & \mathbf{MEM}+(\mathrm{sup}\subseteq_{\varnothing}\mathrm{sum}) \arrow[u] \arrow[ul] \\
\mathbf{MEM}+(\exists_{\mathrm{par}}\mathrm{sup}) \arrow[ur] & \mathbf{CMM} \arrow[u] & \\
 & \mathbf{MEM}+(\exists_{\mathrm{par}}\mathrm{sum}) \arrow[ul] \arrow[u] & \mathbf{CMM}+(\mathrm{sup}\subseteq_{\varnothing}\mathrm{sum}) \arrow[ul] \arrow[uu] \\
 & & \mathbf{MEM}+(\exists_{\mathrm{par}}\mathrm{sum})+(\mathrm{sup}\subseteq_{\varnothing}\mathrm{sum}) \arrow[ul] \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

## Zasady «superuzupełniania»

Interesujące jest wzmocnienie zasad uzupełniania, słabej i mocnej, do następujących zasad «superuzupełniania», albo inaczej «zasad uzupełniania plus».

## Zasady «superuzupełniania»

Interesujące jest wzmocnienie zasad uzupełniania, słabej i mocnej, do następujących zasad «superuzupełniania», albo inaczej «zasad uzupełniania plus».
Słaba [zob. Pietruszczak, 2020]:

$$y \sqsubset x \implies \exists_{z \in U}\big(z \sqsubset x \wedge z \wr y \wedge \forall_{u \in U}(u \sqsubset x \wedge u \wr y \;\Rightarrow\; u \sqsubseteq z)\big). \quad \text{(WSP+)}$$

## Zasady «superuzupełniania»

Interesujące jest wzmocnienie zasad uzupełniania, słabej i mocnej, do następujących zasad «superuzupełniania», albo inaczej «zasad uzupełniania plus».
Słaba [zob. Pietruszczak, 2020]:

$$y \sqsubset x \implies \exists_{z \in U}\big(z \sqsubset x \wedge z \wr y \wedge \forall_{u \in U}(u \sqsubset x \wedge u \wr y \Rightarrow u \sqsubseteq z)\big). \quad \text{(WSP+)}$$

Zasada (WSP+) głosi, że jeśli $y$ jest częścią $x$-a, to możemy znaleźć taką część $z$ obiektu $x$, która nie tylko jest zewnętrzna względem $y$-a, lecz również jest największa wśród części $x$-a zewnętrznych z $y$.

## Zasady «superuzupełniania»

Mocna [zob. Pietruszczak, 2000, 2018, 2020]:

$$x \not\sqsubseteq y \implies \exists_{z \in U}\big(z \sqsubseteq x \wedge z \wr y \wedge \forall_{u \in U}(u \sqsubseteq x \wedge u \wr y \Rightarrow u \sqsubseteq z)\big). \quad \text{(SSP+)}$$

## Zasady «superuzupełniania»

Mocna [zob. Pietruszczak, 2000, 2018, 2020]:

$$x \not\sqsubseteq y \implies \exists_{z \in U}\Big(z \sqsubseteq x \wedge z \wr y \wedge \forall_{u \in U}(u \sqsubseteq x \wedge u \wr y \;\Rightarrow\; u \sqsubseteq z)\Big). \quad \text{(SSP+)}$$

Zasada (SSP+) nieformalnie głosi, że jeśli $x$ nie jest ingrediensem $y$-a, to możemy znaleźć taki ingrediens $z$ obiektu $x$, który nie tylko jest zewnętrzny względem $y$-a, lecz również jest największy wśród ingrediensów $x$-a zewnętrznych z $y$.

## Zasady «superuzupełniania»

Mocna [zob. Pietruszczak, 2000, 2018, 2020]:

$$x \not\sqsubseteq y \implies \exists_{z \in U}\Big(z \sqsubseteq x \wedge z \wr y \wedge \forall_{u \in U}(u \sqsubseteq x \wedge u \wr y \;\Rightarrow\; u \sqsubseteq z)\Big). \quad \text{(SSP+)}$$

Zasada (SSP+) nieformalnie głosi, że jeśli $x$ nie jest ingrediensem $y$-a, to możemy znaleźć taki ingrediens $z$ obiektu $x$, który nie tylko jest zewnętrzny względem $y$-a, lecz również jest największy wśród ingrediensów $x$-a zewnętrznych z $y$.

W obu przypadkach to $z$ można uznać za różnicę $x$-a i $y$-a, czyli $z = x - y$.

## Zasady «superuzupełniania»

Mocna [zob. Pietruszczak, 2000, 2018, 2020]:

$$x \not\sqsubseteq y \implies \exists_{z \in U}\Big(z \sqsubseteq x \wedge z \wr y \wedge \forall_{u \in U}(u \sqsubseteq x \wedge u \wr y \Rightarrow u \sqsubseteq z)\Big). \quad \text{(SSP+)}$$

Zasada (SSP+) nieformalnie głosi, że jeśli $x$ nie jest ingrediensem $y$-a, to możemy znaleźć taki ingrediens $z$ obiektu $x$, który nie tylko jest zewnętrzny względem $y$-a, lecz również jest największy wśród ingrediensów $x$-a zewnętrznych z $y$.

W obu przypadkach to $z$ można uznać za różnicę $x$-a i $y$-a, czyli $z = x - y$.

Z wersji «super» wynikają odpowiednio te «zwykłe».

## Zasady «superuzupełniania»

Mocna [zob. Pietruszczak, 2000, 2018, 2020]:

$$x \not\sqsubseteq y \implies \exists_{z\in U}\big(z \sqsubseteq x \wedge z \wr y \wedge \forall_{u\in U}(u \sqsubseteq x \wedge u \wr y \Rightarrow u \sqsubseteq z)\big). \quad \text{(SSP+)}$$

Zasada (SSP+) nieformalnie głosi, że jeśli $x$ nie jest ingrediensem $y$-a, to możemy znaleźć taki ingrediens $z$ obiektu $x$, który nie tylko jest zewnętrzny względem $y$-a, lecz również jest największy wśród ingrediensów $x$-a zewnętrznych z $y$.

W obu przypadkach to $z$ można uznać za różnicę $x$-a i $y$-a, czyli $z = x - y$.

Z wersji «super» wynikają odpowiednio te «zwykłe».

Z (SSP+) wynika (WSP+).

## Spolaryzowane częściowe porządki «PPOS plus»

**PPOSp** powstaje z **PPOS** przez zamianę aksjomatu (WSP) na (WSP+):

$$\mathbf{PPOSp} := \mathbf{POS}+(\mathrm{SSP}+).$$

## Spolaryzowane częściowe porządki «PPOS plus»

**PPOSp** powstaje z **PPOS** przez zamianę aksjomatu (WSP) na (WSP+):

$$\mathbf{PPOSp} := \mathbf{POS}{+}(\mathrm{SSP}{+}).$$

Udowodniono [Pietruszczak, 2020], że w **PPOSp** zachodzą (sup$\subseteq_{\varnothing}$sum) i (sum$=_{\varnothing}$sup).

## Spolaryzowane częściowe porządki «PPOS plus»

**PPOSp** powstaje z **PPOS** przez zamianę aksjomatu (WSP) na (WSP+):

$$\mathbf{PPOSp} := \mathbf{POS}{+}(\mathrm{SSP}{+}).$$

Udowodniono [Pietruszczak, 2020], że w **PPOSp** zachodzą (sup$\subseteq_{\varnothing}$sum) i (sum$=_{\varnothing}$sup).

**PPOSp** $=$ **MPOSp** (mereologiczne częściowo uporządkowane zbiory «plus»).

## Teoria «MEM plus»

**MEMp** powstaje z **MEM** przez zamianę aksjomatu (WSP) na (WSP+):

$$\textbf{MEMp} := \textbf{POS}+(\mathrm{WSP}+)+(\mathrm{c}\exists\sqcap)$$

## Teoria «MEM plus»

**MEMp** powstaje z **MEM** przez zamianę aksjomatu (WSP) na (WSP+):

$$\mathbf{MEMp} := \mathbf{POS}+(\mathrm{WSP}+)+(\mathrm{c}\exists\sqcap)$$

Udowodniono [Pietruszczak, 2020], że **MEMp** = **PPOSp**, a w **MEMp** zachodzą ($\mathrm{sup}\subseteq_{\varnothing}\mathrm{sum}$) i ($\mathrm{sum}=_{\varnothing}\mathrm{sup}$).

## Krata 3

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{PPOS} & \\
 & \mathbf{PPOS}+\ulcorner(\mathrm{c}\exists\sqcap) \vee (\mathrm{sup}\subseteq_{\varnothing}\mathrm{sum})\urcorner \arrow[u] & \\
\mathbf{MEM} \arrow[ur] & \mathbf{MPOS} \arrow[u] & \\
\mathbf{MEM}+(\mathrm{c}\exists_{\mathrm{par}}\mathrm{sup}) \arrow[u] & \mathbf{MEM}+(\mathrm{sup}\subseteq_{\varnothing}\mathrm{sum}) \arrow[u] \arrow[ul] & \\
\mathbf{CMM} \arrow[u] & & \\
\mathbf{MEM}+(\exists_{\mathrm{par}}\mathrm{sum}) \arrow[u] & \mathbf{CMM}+(\mathrm{sup}\subseteq_{\varnothing}\mathrm{sum}) \arrow[uu] \arrow[ul] & \mathbf{PPOSp} \arrow[uul] \\
 & \mathbf{MEM}+(\exists_{\mathrm{par}}\mathrm{sum})+(\mathrm{sup}\subseteq_{\varnothing}\mathrm{sum}) \arrow[u] \arrow[ul] & \mathbf{PPOSp}+(\mathrm{c}\exists_{\mathrm{par}}\mathrm{sum}) \arrow[u] \arrow[ul] \\
 & & \mathbf{PPOSp}+(\exists_{\mathrm{par}}\mathrm{sum}) \arrow[u] \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

## Mereologiczne struktury Grzegorczyka

Najkrócej można opisać teorię mereologicznych struktur Grzegorczyka z [1955] jako teorię dotyczącą relacji $\sqsubseteq$ opartej na sześciu aksjomatach M1–M6.

## Mereologiczne struktury Grzegorczyka

Najkrócej można opisać teorię mereologicznych struktur Grzegorczyka z [1955] jako teorię dotyczącą relacji $\sqsubseteq$ opartej na sześciu aksjomatach M1–M6. Pierwsze trzy z nich mówią, że struktury te należą do $\mathbf{POS}$.

## Mereologiczne struktury Grzegorczyka

Najkrócej można opisać teorię mereologicznych struktur Grzegorczyka z [1955] jako teorię dotyczącą relacji $\sqsubseteq$ opartej na sześciu aksjomatach M1–M6. Pierwsze trzy z nich mówią, że struktury te należą do **POS**.

M4 odpowiada warunkowi (SSP+). Zatem jeśli $x \not\sqsubseteq$, to ma istnieć różnica $x - y$.

# Mereologiczne struktury Grzegorczyka

Najkrócej można opisać teorię mereologicznych struktur Grzegorczyka z [1955] jako teorię dotyczącą relacji $\sqsubseteq$ opartej na sześciu aksjomatach M1–M6. Pierwsze trzy z nich mówią, że struktury te należą do **POS**.

M4 odpowiada warunkowi (SSP+). Zatem jeśli $x \not\sqsubseteq$, to ma istnieć różnica $x - y$.

M5 odpowiada warunkowi ($\exists_{\mathrm{par}}$sum). Zatem ma istnieć mereologiczna suma pary $\{x, y\}$, czyli $x \sqcup y$.

## Mereologiczne struktury Grzegorczyka

Najkrócej można opisać teorię mereologicznych struktur Grzegorczyka z [1955] jako teorię dotyczącą relacji $\sqsubseteq$ opartej na sześciu aksjomatach M1–M6. Pierwsze trzy z nich mówią, że struktury te należą do **POS**.

M4 odpowiada warunkowi (SSP+). Zatem jeśli $x \not\sqsubseteq$, to ma istnieć różnica $x - y$.

M5 odpowiada warunkowi ($\exists_{\text{par}}$sum). Zatem ma istnieć mereologiczna suma pary $\{x, y\}$, czyli $x \sqcup y$.

M6 odpowiada warunkowi (c$\exists\sqcap$). Zatem jeśli $x \bigcirc y$, to ma istnieć ich produkt, czyli $x \sqcap y$.

## Mereologiczne struktury Grzegorczyka

Najkrócej można opisać teorię mereologicznych struktur Grzegorczyka z [1955] jako teorię dotyczącą relacji $\sqsubseteq$ opartej na sześciu aksjomatach M1–M6. Pierwsze trzy z nich mówią, że struktury te należą do **POS**.

M4 odpowiada warunkowi (SSP+). Zatem jeśli $x \not\sqsubseteq$, to ma istnieć różnica $x - y$.

M5 odpowiada warunkowi ($\exists_{\mathrm{par}}$sum). Zatem ma istnieć mereologiczna suma pary $\{x, y\}$, czyli $x \sqcup y$.

M6 odpowiada warunkowi (c$\exists\sqcap$). Zatem jeśli $x \bigcirc y$, to ma istnieć ich produkt, czyli $x \sqcap y$.

Udowodniono, że z M1–M4 wynika M6 [zob. Pietruszczak, 2018, 2020].

## Mereologiczne struktury Grzegorczyka

Najkrócej można opisać teorię mereologicznych struktur Grzegorczyka z [1955] jako teorię dotyczącą relacji $\sqsubseteq$ opartej na sześciu aksjomatach M1–M6. Pierwsze trzy z nich mówią, że struktury te należą do **POS**.

M4 odpowiada warunkowi (SSP+). Zatem jeśli $x \not\sqsubseteq$, to ma istnieć różnica $x - y$.

M5 odpowiada warunkowi ($\exists_{\mathrm{par}}$sum). Zatem ma istnieć mereologiczna suma pary $\{x, y\}$, czyli $x \sqcup y$.

M6 odpowiada warunkowi (c$\exists\sqcap$). Zatem jeśli $x \bigcirc y$, to ma istnieć ich produkt, czyli $x \sqcap y$.

Udowodniono, że z M1–M4 wynika M6 [zob. Pietruszczak, 2018, 2020]. Istotnie, jeśli $x \bigcirc y$, to jeśli dodatkowo $x \sqsubseteq y$, to $x \sqcap y = x$; a jeśli $x \not\sqsubseteq y$, to $x \sqcap y = x - (x - y)$.

## Mereologiczne struktury Grzegorczyka

Najkrócej można opisać teorię mereologicznych struktur Grzegorczyka z [1955] jako teorię dotyczącą relacji $\sqsubseteq$ opartej na sześciu aksjomatach M1–M6. Pierwsze trzy z nich mówią, że struktury te należą do **POS**.

M4 odpowiada warunkowi (SSP+). Zatem jeśli $x \not\sqsubseteq$, to ma istnieć różnica $x - y$.

M5 odpowiada warunkowi ($\exists_{\mathrm{par}}$sum). Zatem ma istnieć mereologiczna suma pary $\{x, y\}$, czyli $x \sqcup y$.

M6 odpowiada warunkowi (c$\exists\sqcap$). Zatem jeśli $x \bigcirc y$, to ma istnieć ich produkt, czyli $x \sqcap y$.

Udowodniono, że z M1–M4 wynika M6 [zob. Pietruszczak, 2018, 2020]. Istotnie, jeśli $x \bigcirc y$, to jeśli dodatkowo $x \sqsubseteq y$, to $x \sqcap y = x$; a jeśli $x \not\sqsubseteq y$, to $x \sqcap y = x - (x - y)$.

**GMS** := **POS**+M4+M5 = **PPOSp**+($\exists_{\mathrm{par}}$sum).

## Struktura Grzegorczyka bez jedności

Niech uniwersum składa się z niepustych skończonych podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$ liczb naturalnych, a $\sqsubseteq$ będzie relacją inkluzji.

## Struktura Grzegorczyka bez jedności

Niech uniwersum składa się z niepustych skończonych podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$ liczb naturalnych, a $\sqsubseteq$ będzie relacją inkluzji. Ta struktura należy do **GMS**.

## Struktura Grzegorczyka bez jedności

Niech uniwersum składa się z niepustych skończonych podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$ liczb naturalnych, a $\sqsubseteq$ będzie relacją inkluzji. Ta struktura należy do **GMS**. Nie ma ona jedności.

## Struktura Grzegorczyka bez jedności

Niech uniwersum składa się z niepustych skończonych podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$ liczb naturalnych, a $\sqsubseteq$ będzie relacją inkluzji. Ta struktura należy do **GMS**. Nie ma ona jedności.

Nie można do tej struktury tak po prostu dodać jedności. Istotnie, mogłaby być ona jedynie zbiorem $\mathbb{N}$. Jednakże, nie byłby wówczas prawdziwy warunek M4. Mianowicie, gdy $x$ jest podzbiorem skończonym, to $\mathbb{N} - x$ jest podzbiorem nieskończonym, więc nie należy do wyjściowego uniwersum rozważań.

## Mereologiczne struktury Grzegorczyka z jednością

$\mathbf{GMS}_1 := \mathbf{GMS}+$istnienie jedności.

## Mereologiczne struktury Grzegorczyka z jednością

$\mathbf{GMS}_1 := \mathbf{GMS}$+istnienie jedności.

Widać wielką różnicę zachodzącą pomiędzy strukturami z klasy $\mathbf{GMS}_1$, a tymi z **GMS** bez jedności.

## Mereologiczne struktury Grzegorczyka z jednością

$\mathbf{GMS_1} := \mathbf{GMS}$+istnienie jedności.

Widać wielką różnicę zachodzącą pomiędzy strukturami z klasy $\mathbf{GMS_1}$, a tymi z $\mathbf{GMS}$ bez jedności.

Strukturą z $\mathbf{GMS_1}$ jest każda ta i tylko ta struktura relacyjna, która powstaje z jakiejś niezdegenerowanej kraty boolowskiej (algebry Boole'a) po wyrzuceniu z niej zera [Pietruszczak, 2020].

## Mereologiczne struktury Grzegorczyka z jednością

**GMS₁** := **GMS**+istnienie jedności.

Widać wielką różnicę zachodzącą pomiędzy strukturami z klasy **GMS**$_1$, a tymi z **GMS** bez jedności.

Strukturą z **GMS**$_1$ jest każda ta i tylko ta struktura relacyjna, która powstaje z jakiejś niezdegenerowanej kraty boolowskiej (algebry Boole'a) po wyrzuceniu z niej zera [Pietruszczak, 2020].

Strukturą z **GMS**$_1$ jest każda ta i tylko ta struktura relacyjna, która po dodaniu zera da kratę boolowską [Pietruszczak, 2020].

## Mereologiczne struktury Grzegorczyka z jednością

$\mathbf{GMS_1} := \mathbf{GMS}$+istnienie jedności.

Widać wielką różnicę zachodzącą pomiędzy strukturami z klasy $\mathbf{GMS_1}$, a tymi z $\mathbf{GMS}$ bez jedności.

Strukturą z $\mathbf{GMS_1}$ jest każda ta i tylko ta struktura relacyjna, która powstaje z jakiejś niezdegenerowanej kraty boolowskiej (algebry Boole'a) po wyrzuceniu z niej zera [Pietruszczak, 2020].

Strukturą z $\mathbf{GMS_1}$ jest każda ta i tylko ta struktura relacyjna, która po dodaniu zera da kratę boolowską [Pietruszczak, 2020].

Struktury Grzegorczyka, zarówno te z jednością, jak i tez bez, znalazły zastosowanie w topologii bezpunktowej [zob. np. Gruszczynski i Pietruszczak, 2018, 2019].

## Klasyczne struktury mereologiczne (Leśniewskiego-Tarskiego)

Najkrócej można opisać klasyczne struktury mereologiczne (Leśniewskiego-Tarskiego) jako należące te struktury z **POS**, które spełniają warunki ($\mathrm{f_{sum}}$) i ($\exists$sum).

## Klasyczne struktury mereologiczne (Leśniewskiego-Tarskiego)

Najkrócej można opisać klasyczne struktury mereologiczne (Leśniewskiego-Tarskiego) jako należące te struktury z **POS**, które spełniają warunki ($\mathrm{f_{sum}}$) i ($\exists$sum).

**MS** := **POS**+($\mathrm{f_{sum}}$)+($\exists$sum).

## Klasyczne struktury mereologiczne (Leśniewskiego-Tarskiego)

Najkrócej można opisać klasyczne struktury mereologiczne (Leśniewskiego-Tarskiego) jako należące te struktury z **POS**, które spełniają warunki ($\mathsf{f_{sum}}$) i ($\exists\mathsf{sum}$).
**MS** := **POS**+($\mathsf{f_{sum}}$)+($\exists\mathsf{sum}$).
A zatem mamy funkcyjność relacji sum oraz każdy niepusty podzbiór uniwersum ma sumę mereologiczną.

## Klasyczne struktury mereologiczne (Leśniewskiego-Tarskiego)

Najkrócej można opisać klasyczne struktury mereologiczne (Leśniewskiego-Tarskiego) jako należące te struktury z **POS**, które spełniają warunki ($\mathsf{f}_{\mathsf{sum}}$) i ($\exists\mathsf{sum}$).
**MS** := **POS**+($\mathsf{f}_{\mathsf{sum}}$)+($\exists\mathsf{sum}$).
A zatem mamy funkcyjność relacji sum oraz każdy niepusty podzbiór uniwersum ma sumę mereologiczną.

Są to struktury z jednością, którą jest suma uniwersum; $1 \mathsf{ sum } U$.

## Klasyczne struktury mereologiczne

Strukturą z **MS** jest każda ta i tylko ta struktura relacyjna, która powstaje z jakiejś niezdegenerowanej ZUPEŁNEJ kraty boolowskiej (ZUPEŁNEJ algebry Boole'a) po wyrzuceniu z niej zera [zob. np. Pietruszczak, 2000, 2018, 2020]

## Klasyczne struktury mereologiczne

Strukturą z **MS** jest każda ta i tylko ta struktura relacyjna, która powstaje z jakiejś niezdegenerowanej ZUPEŁNEJ kraty boolowskiej (ZUPEŁNEJ algebry Boole'a) po wyrzuceniu z niej zera [zop. np. Pietruszczak, 2000, 2018, 2020]

Strukturą z **MS** jest każda ta i tylko ta struktura relacyjna, która po dodaniu zera da ZUPEŁNĄ kratę boolowską [zop. np. Pietruszczak, 2000, 2018, 2020].

## Klasyczne struktury mereologiczne

Strukturą z **MS** jest każda ta i tylko ta struktura relacyjna, która powstaje z jakiejś niezdegenerowanej ZUPEŁNEJ kraty boolowskiej (ZUPEŁNEJ algebry Boole'a) po wyrzuceniu z niej zera [zop. np. Pietruszczak, 2000, 2018, 2020]

Strukturą z **MS** jest każda ta i tylko ta struktura relacyjna, która po dodaniu zera da ZUPEŁNĄ kratę boolowską [zop. np. Pietruszczak, 2000, 2018, 2020].

Uzupełniając ostatnią kratę relacji mamy:

$$\mathbf{MS} \subsetneq \mathbf{GMS}_1 \subsetneq \mathbf{GMS} = \mathbf{PPOSp}{+}(\exists_{\mathrm{par}}\mathrm{sum}).$$

## Klasyczne struktury mereologiczne

Strukturą z **MS** jest każda ta i tylko ta struktura relacyjna, która powstaje z jakiejś niezdegenerowanej ZUPEŁNEJ kraty boolowskiej (ZUPEŁNEJ algebry Boole'a) po wyrzuceniu z niej zera [zop. np. Pietruszczak, 2000, 2018, 2020]

Strukturą z **MS** jest każda ta i tylko ta struktura relacyjna, która po dodaniu zera da ZUPEŁNĄ kratę boolowską [zop. np. Pietruszczak, 2000, 2018, 2020].

Uzupełniając ostatnią kratę relacji mamy:

$$\mathbf{MS} \subsetneq \mathbf{GMS_1} \subsetneq \mathbf{GMS} = \mathbf{PPOSp}{+}(\exists_{\mathrm{par}}\mathrm{sum}).$$

Struktury mereologiczne mają zastosowanie w bezpunktowej geometrii [Gruszczyński i Pietruszczak, 2009] i bezpunktowej topologii [Gruszczynski i Pietruszczak, 2018, 2019].

# Przypadek struktur skończonych

W przypadku rozpatrywania jedynie struktur skończonych niektóre z klas (teorii) pokrywają się. W tym przypadku dostajemy następującą kratę struktur (teorii) [zob. Pietruszczak, 2020].

## Przypadek struktur skończonych

W przypadku rozpatrywania jedynie struktur skończonych niektóre z klas (teorii) pokrywają się. W tym przypadku dostajemy następującą kratę struktur (teorii) [zob. Pietruszczak, 2020].

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbf{PPOS}_{\mathrm{fin}} \\
 & & \mathbf{PPOS}_{\mathrm{fin}} + \ulcorner(\mathrm{c}\exists\sqcap) \vee (\mathrm{sup}\subseteq_{\varnothing}\mathrm{sum})\urcorner \arrow[u] \\
 & \mathbf{MEM}_{\mathrm{fin}} \arrow[ur] & \mathbf{MPOS}_{\mathrm{fin}} \arrow[u] \\
\mathbf{MEM}+(\exists_{\mathrm{par}}\mathrm{sup})_{\mathrm{fin}} \arrow[ur] & & \mathbf{PPOSp}_{\mathrm{fin}} \arrow[ul] \arrow[u] \\
 & & \mathbf{MS}_{\mathrm{fin}} \arrow[ull] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

## Bibliografia

A. Grzegorczyk, 1955. The system of Leśniewski in relation to contemporary logical reserch. *Studia Logica* 3: 77–95.

R. Gruszczyński, A. Pietruszczak, 2009. Space, points and mereology. *Logic and Logical Philosophy* 18: 145–188.

R. Gruszczynski, A. Pietruszczak, 2018. A study in Grzegorczyk point-free topology I: Separation and Grzegorczyk Structures. *Studia Logica* 106: 1197–238.

R. Gruszczynski, A. Pietruszczak, 2019. A study in Grzegorczyk point-free topology II: Spaces of Points. *Studia Logica* 107: 809–843.

S. Leśniewski, 1927–1931. O podstawach matematyki. *Przegląd Filozoficzny* XXX–XXXIV: 164–206, 261–291, 60–101, 77–105, 142–170.

J. Lyons, 1977. *Semantics*. Cambridge University Press.

A. Pietruszczak, 2000. *Metamereologia*. Wydawnictwo UMK: Toruń.

A. Pietruszczak, 2014. A general concept of being a part of a whole. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 55, 3: 359–381.

A. Pietruszczak, 2018. *Metamereology*. NCU Scientific Publishing House, Toruń.

A. Pietruszczak, 2020. *Foundations of the Theory of Parthood. A Study of Mereology*. Vol. 54 of Trends in Logic. Springer International Publishing.

N. Rescher, 1995. Axioms for the part relation. *Philosophical Studies* 6: 8–11.

P. Simons, 1987. *Parts. A Study in Ontology*. Oxford University Press: Oxford.