

Ontologia bezpunktowa na przykładzie Russella teorii zdarzeń i chwil

Andrzej Pietruszczak

Katedra Logiki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika

Trzeci Światowy Dzień Logiki
Toruń, 14 stycznia 2021

Streszczenie

Obie teorie Russella zdarzeń [1914; 1936] zaliczamy do bezpunktowej ontology. Pierwszą z nich Russell przedstawił w nieformalny sposób w „The world of physics and the world of sense”, wykład IV w *Our Knowledge of the External World*. Opierając się na tej teorii, Russell naszkicował sposoby konstruowania chwil jako zbiorów zdarzeń.

Streszczenie

Obie teorie Russella zdarzeń [1914; 1936] zaliczamy do bezpunktowej ontology. Pierwszą z nich Russell przedstawił w nieformalny sposób w „The world of physics and the world of sense”, wykład IV w *Our Knowledge of the External World*. Opierając się na tej teorii, Russell naszkicował sposoby konstruowania chwil jako zbiorów zdarzeń.

Chcę sformalizować pierwszą teorię Russella zdarzeń i zrekonstruować metodę konstrukcji chwil zarysowaną w [1914].

Streszczenie

Obie teorie Russella zdarzeń [1914; 1936] zaliczamy do bezpunktowej ontology. Pierwszą z nich Russell przedstawił w nieformalny sposób w „The world of physics and the world of sense”, wykład IV w *Our Knowledge of the External World*. Opierając się na tej teorii, Russell naszkicował sposoby konstruowania chwil jako zbiorów zdarzeń.

Chcę sformalizować pierwszą teorię Russella zdarzeń i zrekonstruować metodę konstrukcji chwil zarysowaną w [1914].

Pokażę ponadto, że w tak zrekonstruowanej teorii jest definicyjnie równoważna z drugą teorią Russella z [1936] oraz z teorią Thomasona przedstawioną w [1989].

Spis

- 1 Ontologia bezpunktowa
- 2 Rekonstrukcja pierwszej teorii zdarzeń
- 3 Chwile
- 4 Druga teoria zdarzeń i chwil Russella
- 5 Teoria zdarzeń Thomasona

Ontologia bezpunktowa

Mówiąc w ontologii o przestrzeni i czasie często przyjmuje się założenie, że są one zbudowane z czegoś niepodzielnego, inaczej mówiąc „atomowego” lub „punktowego”. Tym czyś w przypadku przestrzeni miałyby być geometryczne punkty, a w przypadku czasu momenty, lub inaczej mówiąc chwile. Łącząc zaś czas i przestrzeń, rozważa się czasoprzestrzeń, którą często traktuje się jako złożoną z punktowych zdarzeń.

Ontologia bezpunktowa

Mówiąc w ontologii o przestrzeni i czasie często przyjmuje się założenie, że są one zbudowane z czegoś niepodzielnego, inaczej mówiąc „atomowego” lub „punktowego”. Tym czyś w przypadku przestrzeni miałyby być geometryczne punkty, a w przypadku czasu momenty, lub inaczej mówiąc chwile. Łącząc zaś czas i przestrzeń, rozważa się czasoprzestrzeń, którą często traktuje się jako złożoną z punktowych zdarzeń.

Z punktu widzenia filozofii przyrody, takie założenie nie jest intuicyjne, gdyż punktowe obiekty nie są składnikami realnego świata (tj. odpowiednio: przestrzeni, czasu, czasoprzestrzeni). Jest ono jednak bardzo wygodne w rozważaniach formalnych.

Ontologia bezpunktowa

W „punktowej ontologii” czasowi — traktowanemu jako dystrybutywny zbiorów złożony z momentów — nadaje się strukturę zbioru liczb rzeczywistych, tj. \mathbb{R} . Przestrzeni zaś nadaje się strukturę zbioru uporządkowanych trójek liczb rzeczywistych, tj. \mathbb{R}^3 , a czasoprzestrzeni — strukturę zbioru uporządkowanych czwórek liczb rzeczywistych, tj. \mathbb{R}^4 .

Ontologia bezpunktowa

W „punktowej ontologii” czasowi — traktowanemu jako dystrybutywny zbiorów złożony z momentów — nadaje się strukturę zbioru liczb rzeczywistych, tj. \mathbb{R} . Przestrzeni zaś nadaje się strukturę zbioru uporządkowanych trójek liczb rzeczywistych, tj. \mathbb{R}^3 , a czasoprzestrzeni — strukturę zbioru uporządkowanych czwórek liczb rzeczywistych, tj. \mathbb{R}^4 .

Można jednak uprawiać ontologię bez przyjmowania istnienia w realnym świecie bytów punktowych. Takie podejście nazywa się *bezpunktową ontologią*. Zapoczątkowali je Russell [1914, 1936], Whitehead [1919, 1920] oraz de Laguna [1922a,b]. Nie znaczy to, że w bezpunktowej ontologii w ogóle nie rozważa się żadnych obiektów o „punktowym charakterze”. Te ostatnie mają być jednak abstraktami konstruowanymi ze składników realnego świata. Te abstrakcyjne obiekty są niezbędne do uzyskania odpowiednio bogatej teorii czasu, przestrzeni, czy też czasoprzestrzeni.

Ontologia bezpunktowa

Bezpunktowa ontologia ma dotyczyć realnego świata [Russell, 1914; Whitehead, 1919, 1920; de Laguna, 1922a,b]. Ze składników świata wykluczamy w niej nie tylko punktowe obiekty, lecz również takie, które mają charakter linii, powierzchni oraz ich kawałków. Zatem wykluczamy wszystko to, co według *Elementów* Euklidesa albo nie ma długości, albo nie ma szerokości, albo nie ma wysokości. Wykluczamy także wszelkie „mieszaininy” tego rodzaju obiektów.

Ontologia bezpunktowa

Bezpunktowa ontologia ma dotyczyć realnego świata [Russell, 1914; Whitehead, 1919, 1920; de Laguna, 1922a,b]. Ze składników świata wykluczamy w niej nie tylko punktowe obiekty, lecz również takie, które mają charakter linii, powierzchni oraz ich kawałków. Zatem wykluczamy wszystko to, co według *Elementów* Euklidesa albo nie ma długości, albo nie ma szerokości, albo nie ma wysokości. Wykluczamy także wszelkie „mieszaniny” tego rodzaju obiektów.

W sensie bezpunktowej ontologii przestrzeń nie jest ani dystrybutywnym zbiorem bezwymiarowych punktów, ani ich mereologiczną sumą. Przestrzeń jest mereologiczną sumą jej kawałków zwanych *regionami* [zob. np. Gruszczyński i Pietruszczak, 2008, 2009].

Ontologia bezpunktowa

Dla Russella i Whiteheada punkty są tworam abstrakcyjnymi, uzyskanymi jako teoriomnogościowe konstrukcje utworzone z przestrzennych regionów.

Ontologia bezpunktowa

Dla Russella i Whiteheada punkty są tworam abstrakcyjnymi, uzyskanymi jako teoriomnogościowe konstrukcje utworzone z przestrzennych regionów.

dany obiekt przestrzenny może być całkowicie zawarty w innym i całkowicie przez niego otoczony. Ta relacja zawierania, z pomocą pewnych bardzo naturalnych założeń, pozwala zdefiniować „punkt” jako pewną klasę obiektów przestrzennych, mianowicie wszystkich tych (jak to się w końcu okazuje), o których naturalnie powiedziałoby się, że zawierają ten punkt.

[Russell, 1914]

Ontologia bezpunktowa

Dla Russella i Whiteheada punkty są tworam abstrakcyjnymi, uzyskanymi jako teoriomnogościowe konstrukcje utworzone z przestrzennych regionów.

dany obiekt przestrzenny może być całkowicie zawarty w innym i całkowicie przez niego otoczony. Ta relacja zawierania, z pomocą pewnych bardzo naturalnych założeń, pozwala zdefiniować „punkt” jako pewną klasę obiektów przestrzennych, mianowicie wszystkich tych (jak to się w końcu okazuje), o których naturalnie powiedziatoby się, że zawierają ten punkt.

[Russell, 1914]

Takie podejście do przestrzeni rozważał także Tarski w [1929], co dokładnie omawiają Gruszczyński i Pietruszczak w [2008; 2009].

Ontologia bezpunktowa

Dla Russella i Whiteheada punkty są tworam abstrakcyjnymi, uzyskanymi jako teoriomnogościowe konstrukcje utworzone z przestrzennych regionów.

dany obiekt przestrzenny może być całkowicie zawarty w innym i całkowicie przez niego otoczony. Ta relacja zawierania, z pomocą pewnych bardzo naturalnych założeń, pozwala zdefiniować „punkt” jako pewną klasę obiektów przestrzennych, mianowicie wszystkich tych (jak to się w końcu okazuje), o których naturalnie powiedziatoby się, że zawierają ten punkt. [Russell, 1914]

Takie podejście do przestrzeni rozważał także Tarski w [1929], co dokładnie omawiają Gruszczyński i Pietruszczak w [2008; 2009]. Jest ono oparte na ogólnej teorii części lub na mereologii [zob. np. Pietruszczak, 2000, 2018, 2020; Gruszczyński i Pietruszczak, 2010].

Ontologia bezpunktowa

Dla Russella i Whiteheada punkty są tworam abstrakcyjnymi, uzyskanymi jako teoriomnogościowe konstrukcje utworzone z przestrzennych regionów.

dany obiekt przestrzenny może być całkowicie zawarty w innym i całkowicie przez niego otoczony. Ta relacja zawierania, z pomocą pewnych bardzo naturalnych założeń, pozwala zdefiniować „punkt” jako pewną klasę obiektów przestrzennych, mianowicie wszystkich tych (jak to się w końcu okazuje), o których naturalnie powiedziatoby się, że zawierają ten punkt. [Russell, 1914]

Takie podejście do przestrzeni rozważał także Tarski w [1929], co dokładnie omawiają Gruszczyński i Pietruszczak w [2008; 2009]. Jest ono oparte na ogólnej teorii części lub na mereologii [zob. np. Pietruszczak, 2000, 2018, 2020; Gruszczyński i Pietruszczak, 2010]. Mają one również zastosowanie w bezpunktowej topologii, w której także stosuje się zarysowane tu podejście do przestrzeni [zob. np. Grzegorzcyk, 1955; Gruszczyński i Pietruszczak, 2018, 2019].

Ontologia bezpunktowa

Podobnie, w sensie bezpunktowej ontologii, czas związany jest z ROZCIĄGŁYMI w nim procesami, zwanymi *zdarzeniami*. Russell [1914] traktował zdarzenia jako „składniki świata rzeczywistego”, a nie jako abstrakty.

Ontologia bezpunktowa

Podobnie, w sensie bezpunktowej ontologii, czas związany jest z ROZCIĄGŁYMI w nim procesami, zwanymi *zdarzeniami*. Russell [1914] traktował zdarzenia jako „składniki świata rzeczywistego”, a nie jako abstrakty.

Zdarzenia nie mają charakteru punktowego, lecz są „rozciągnięte” oraz „skończone”. Punktowe chwile Russell definiował zaś jako twory abstrakcyjne na bazie zdarzeń [Russell, 1914, 1936].

Ontologia bezpunktowa

Można powiedzieć, że głównym zadaniem bezpunktowej ontologii jest formalna konstrukcja abstrakcyjnych obiektów takich jak chwile [zob. Russell, 1914, 1936] i geometryczne punkty [zob. Grzegorzczak, 1955; Gruszczyński i Pietruszczak, 2008, 2009, 2018, 2019].

Ontologia bezpunktowa

Można powiedzieć, że głównym zadaniem bezpunktowej ontologii jest formalna konstrukcja abstrakcyjnych obiektów takich jak chwile [zob. Russell, 1914, 1936] i geometryczne punkty [zob. Grzegorzczak, 1955; Gruszczyński i Pietruszczak, 2008, 2009, 2018, 2019].

Po ich podaniu, nadal można z powodzeniem stosować metody fizyki matematycznej i punktowej geometrii. Bez takich metod trudno mówić o rozwoju badań dotyczących natury czasu i przestrzeni. Musimy jednak odnaleźć właściwą rolę obiektów punktowych w ontologii.

Pierwsza teoria zdarzeń

Jak już wspomniałem, w [1914] Russell przedstawił teorię zdarzeń i chwil w całkowicie nieformalny sposób. Ma ona trzy pojęcia pierwotne:

- jedno nierelacyjne, *jest zdarzeniem* (*being an event*),
- oraz dwa relacyjne: *jest wcześniejsze niż* (*is earlier than*) oraz *jest (co najmniej częściowo) jednoczesne z* (*at least partially simultaneous with*).

Pierwsza teoria zdarzeń

Jak już wspomniałem, w [1914] Russell przedstawił teorię zdarzeń i chwil w całkowicie nieformalny sposób. Ma ona trzy pojęcia pierwotne:

- jedno nierelacyjne, *jest zdarzeniem* (*being an event*),
- oraz dwa relacyjne: *jest wcześniejsze niż* (*is earlier than*) oraz *jest (co najmniej częściowo) jednoczesne z* (*at least partially simultaneous with*).

Zatem rekonstruując tę teorię będziemy badać struktury relacyjne postaci $\langle U, E, S \rangle$, w których poszczególne składniki odpowiadają trzem pojęciom pierwotnym teorii Russella:

- U jest niepustym uniwersum złożonym ze zdarzeń;
- E i S są binarnymi relacjami w U .

Pierwsza teoria zdarzeń

Przykładowo będziemy używać następujących formuł:

- ' $x \in \mathcal{U}$ ' wyraża : x jest zdarzeniem;
- ' $x E y$ ' wyraża x jest wcześniejsze niż y (*x is earlier than y*); co ma mówić to samo, co ' x trwa wcześniej niż y ', albo ' x trwa przed y ' (*x lasts before y*);
- ' $x S y$ ' wyraża x jest (co najmniej częściowo) jednoczesne z y (*x is (at least partially) simultaneous with y*).

Raczej jasny jest sens zwrotu 'jest wcześniejsze niż' (*is earlier than*).
Traktujemy go jako skrót wyrażenia 'trwa przed' (*lasts before*).

Pierwsza teoria zdarzeń

Przykładowo będziemy używać następujących formuł:

- ' $x \in U$ ' wyraża : x jest zdarzeniem;
- ' $x E y$ ' wyraża x jest wcześniejsze niż y (*x is earlier than y*); co ma mówić to samo, co ' x trwa wcześniej niż y ', albo ' x trwa przed y ' (*x lasts before y*);
- ' $x S y$ ' wyraża x jest (co najmniej częściowo) jednoczesne z y (*x is (at least partially) simultaneous with y*).

Raczej jasny jest sens zwrotu 'jest wcześniejsze niż' (*is earlier than*).

Traktujemy go jako skrót wyrażenia 'trwa przed' (*lasts before*).

Możemy mieć jednak trudności z właściwą interpretacją zwrotu 'jest (co najmniej częściowo) jednoczesne z' (*is (at least partially) simultaneous with*).

Pierwsza teoria zdarzeń

Zauważmy, że sam zwrot 'jest jednocześnie z' (*is simultaneous with*) jest dwuznaczny.

Pierwsza teoria zdarzeń

Zauważmy, że sam zwrot 'jest jednocześnie z' (*is simultaneous with*) jest dwuznaczny.

Po pierwsze, w odniesieniu do zdarzeń, zwrot ten wolno rozumieć jako: zdarzenia występujące w dokładnie tych samych chwilach. W tym przypadku, Russell mówi o pełnej jednoczesności (*complete simultaneity*), która jest relacją zwrotną, symetryczną, przechodnią.

Pierwsza teoria zdarzeń

Zauważmy, że sam zwrot 'jest jednocześnie z' (*is simultaneous with*) jest dwuznaczny.

Po pierwsze, w odniesieniu do zdarzeń, zwrot ten wolno rozumieć jako: zdarzenia występujące w dokładnie tych samych chwilach. W tym przypadku, Russell mówi o pełnej jednoczesności (*complete simultaneity*), która jest relacją zwrotną, symetryczną, przechodnią.

Po drugie, dodane przez Russella w nawiasie 'co najmniej częściowo' sugeruje, że zwrot ten wolno rozumieć w tym sensie, że częściowo zachodzą na siebie czasy trwania zdarzeń. W tym drugim znaczeniu zwrot ten wyznacza relację zwrotną i symetryczną, lecz nieprzechodnią.

Pierwsza teoria zdarzeń

Zauważmy, że sam zwrot 'jest jednocześnie z' (*is simultaneous with*) jest dwuznaczny.

Po pierwsze, w odniesieniu do zdarzeń, zwrot ten wolno rozumieć jako: zdarzenia występujące w dokładnie tych samych chwilach. W tym przypadku, Russell mówi o pełnej jednoczesności (*complete simultaneity*), która jest relacją zwrotną, symetryczną, przechodnią.

Po drugie, dodane przez Russella w nawiasie 'co najmniej częściowo' sugeruje, że zwrot ten wolno rozumieć w tym sensie, że częściowo zachodzą na siebie czasy trwania zdarzeń. W tym drugim znaczeniu zwrot ten wyznacza relację zwrotną i symetryczną, lecz nieprzechodnią.

Pierwsze znaczenie zwrotu 'jest równoczesne z' jest szersze od drugiego. Zatem relacja wyznaczona przy pierwszym znaczeniu tego zwrotu jest zawarta w relacji wyznaczonej przy jego drugim znaczeniu, tj. w S.

Pierwsza teoria zdarzeń

Zauważmy, że sam zwrot 'jest jednocześnie z' (*is simultaneous with*) jest dwuznaczny.

Po pierwsze, w odniesieniu do zdarzeń, zwrot ten wolno rozumieć jako: zdarzenia występujące w dokładnie tych samych chwilach. W tym przypadku, Russell mówi o pełnej jednoczesności (*complete simultaneity*), która jest relacją zwrotną, symetryczną, przechodnią.

Po drugie, dodane przez Russella w nawiasie 'co najmniej częściowo' sugeruje, że zwrot ten wolno rozumieć w tym sensie, że częściowo zachodzą na siebie czasy trwania zdarzeń. W tym drugim znaczeniu zwrot ten wyznacza relację zwrotną i symetryczną, lecz nieprzechodnią.

Pierwsze znaczenie zwrotu 'jest równoczesne z' jest szersze od drugiego. Zatem relacja wyznaczona przy pierwszym znaczeniu tego zwrotu jest zawarta w relacji wyznaczonej przy jego drugim znaczeniu, tj. w S .

Ponieważ relacja S jest symetryczna, Russell wyrażał ją także używając fraz: „nakładają się (w czasie)”, 'są współczesne', 'są równoczesne' i 'są (przynajmniej częściowo) równoczesne'.

Podstawowe aksjomaty

Nie ulega wątpliwości, że fraza 'jest wcześniejsze niż' jest przeciwzrotna, asymetryczna i przechodnia, oraz że są to jej analityczne własności:

- $$\begin{array}{lll} & \forall_{x \in U} \neg x E x, & (\text{irr}_E) \\ \text{a1} & \forall_{x, y \in U} (x E y \implies \neg y E x), & (\text{as}_E) \\ \text{a2} & \forall_{x, y, z \in U} (x E y \wedge y E z \implies x E z). & (\text{t}_E) \end{array}$$

Zatem E jest ostrym częściowym porządkiem. Oczywiście, (irr_E) wynika z (as_E) .

Podstawowe aksjomaty

Nie ulega wątpliwości, że fraza 'jest wcześniejsze niż' jest przeciwzrotna, asymetryczna i przechodnia, oraz że są to jej analityczne własności:

$$\begin{array}{ll}
 & \forall_{x \in U} \neg x E x, & (\text{irr}_E) \\
 \text{a1} & \forall_{x, y \in U} (x E y \implies \neg y E x), & (\text{as}_E) \\
 \text{a2} & \forall_{x, y, z \in U} (x E y \wedge y E z \implies x E z). & (\text{t}_E)
 \end{array}$$

Zatem E jest ostrym częściowym porządkiem. Oczywiście, (irr_E) wynika z (as_E) .

Analitycznymi własnościami relacji S są zwrotność i symetryczność:

$$\begin{array}{ll}
 & \forall_{x \in U} x S x, & (\text{r}_S) \\
 \text{a3} & \forall_{x, y \in U} (x S y \implies y S x). & (\text{s}_S)
 \end{array}$$

Formuła (r_S) wynika z dalej przyjętych aksjomatów.

Pomocnicze relacje

Obok dwóch relacji pierwotnych, Russell używa kilku pomocniczych relacji. W tym punkcji wprowadzimy dwie takie relacje.

Pomocnicze relacje

Obok dwóch relacji pierwotnych, Russell używa kilku pomocniczych relacji. W tym punkcji wprowadzimy dwie takie relacje.

Pierwszą z nich jest relacja L wyrażona przez zwrot 'jest późniejsze niż' (*is later than*), który jest konwersem zwrotu 'jest wcześniejsze niż' (*is earlier than*). Dlatego L jest definiowalne przez $L := \check{E}$, tj. dla dowolnych $x, y \in U$ kładziemy:

$$x L y \iff y E x. \quad (\text{df } L)$$

Pomocnicze relacje

Obok dwóch relacji pierwotnych, Russell używa kilku pomocniczych relacji. W tym punkcji wprowadzimy dwie takie relacje.

Pierwszą z nich jest relacja L wyrażona przez zwrot 'jest późniejsze niż' (*is later than*), który jest konwersem zwrotu 'jest wcześniejsze niż' (*is earlier than*). Dlatego L jest definiowalne przez $L := \check{E}$, tj. dla dowolnych $x, y \in U$ kładziemy:

$$x L y \iff y E x. \quad (\text{df } L)$$

Z (irr_E), (as_E), (t_E) i ($\text{df } L$) mamy, że L jest przeciwzrotna, asymetryczna i przechodnia:

$$\forall_{x \in U} \neg x L x, \quad (\text{irr}_L)$$

$$\forall_{x, y \in U} (x L y \implies \neg y L x), \quad (\text{as}_L)$$

$$\forall_{x, y, z \in U} (x L y \wedge y L z \implies x L z), \quad (\text{t}_L)$$

Pomocnicze relacje

Russell zdefiniował pomocniczą relację *P całkowitego poprzedzania* (*wholly precedence*): „Kiedy jedno zdarzenie jest wcześniejsze niż inne, ale nie jest z nim równoczesne, powiemy, że „całkowicie poprzedza” inne”.

Pomocnicze relacje

Russell zdefiniował pomocniczą relację P *całkowitego poprzedzania* (*wholly precedence*): „Kiedy jedno zdarzenie jest wcześniejsze niż inne, ale nie jest z nim równoczesne, powiemy, że „całkowicie poprzedza” inne”.

Zatem relacja P w \mathcal{U} jest zdefiniowana przez $P := E \setminus S = E \cap \bar{S}$, tj. dla dowolnych $x, y \in \mathcal{U}$ kładziemy:

$$x P y \iff x E y \wedge \neg x S y. \quad (\text{df } P)$$

Pomocnicze relacje

Russell zdefiniował pomocniczą relację P *całkowitego poprzedzania* (*wholly precedence*): „Kiedy jedno zdarzenie jest wcześniejsze niż inne, ale nie jest z nim równoczesne, powiemy, że „całkowicie poprzedza” inne”.

Zatem relacja P w \mathcal{U} jest zdefiniowana przez $P := E \setminus S = E \cap \bar{S}$, tj. dla dowolnych $x, y \in \mathcal{U}$ kładziemy:

$$x P y \iff x E y \wedge \neg x S y. \quad (\text{df } P)$$

Z ([as_E](#)) i ([df P](#)) otrzymujemy asymetryczność relacji P ; jak również jej przeciwzwrotność:

$$\forall x, y \in \mathcal{U} (x P y \implies \neg y P x), \quad (\text{as}_P)$$

$$\forall x \in \mathcal{U} \neg x P x. \quad (\text{irr}_P)$$

Kolejny aksjomat

Kolejny aksjomat stwierdza, że relacja S wiąże zdarzenia odnośnie relacji S („*the connexity*”):

$$\text{a4} \quad \forall_{x,y \in U} (\neg x S y \implies x E y \vee y E x). \quad (\text{c}_{E}^S)$$

Kolejny aksjomat

Kolejny aksjomat stwierdza, że relacja S wiąże zdarzenia odnośnie relacji S („*the connexity*”):

$$a4 \quad \forall_{x,y \in U} (\neg x S y \implies x E y \vee y E x). \quad (c_E^S)$$

Jest oczywiste, że z (irr_E) i (c_P^S) otrzymamy zwrotność relacji S .

Kolejny aksjomat

Kolejny aksjomat stwierdza, że relacja S wiąże zdarzenia odnośnie relacji S („*the connexity*”):

$$a4 \quad \forall_{x,y \in U} (\neg x S y \implies x E y \vee y E x). \quad (c_E^S)$$

Jest oczywiste, że z (irr_E) i (c_P^S) otrzymamy zwrotność relacji S .

Stosując ($df P$) i (s_S) otrzymujemy, że (c_E^S) jest równoważne z tym, że relacja P wiąże zdarzenia odnośnie relacji S :

$$\forall_{x,y \in U} (\neg x S y \implies x P y \vee y P x). \quad (c_P^S)$$

Kolejny aksjomat

Z (df P) i (s_S) wynika implikacja odwrotna do (c_P^S). Zatem (c_P^S) — w przeciwieństwie do (c_E^S) — daje się wzmocnić do równoważności:

$$\forall x, y \in U (\neg x S y \iff x P y \vee y P x).$$

Kolejny aksjomat

Z (df P) i (s_S) wynika implikacja odwrotna do (c_P^S). Zatem (c_P^S) — w przeciwieństwie do (c_E^S) — daje się wzmocnić do równoważności:

$$\forall_{x,y \in U} (\neg x S y \iff x P y \vee y P x).$$

Mamy więc:

$$\forall_{x,y \in U} (x S y \iff \neg x P y \wedge \neg y P x). \quad (\text{df}_P S)$$

Pierwszy aksjomat «egzystencjalnie zaangażowany»

Analizując rodzinę chwil, Russell [1914] przyjmuje trzy «egzystencjalnie zaangażowane» założenia. W tym miejscu przeanalizujemy pierwszy z nich.

Pierwszy aksjomat «egzystencjalnie zaangażowany»

Analizując rodzinę chwil, Russell [1914] przyjmuje trzy «egzystencjalnie zaangażowane» założenia. W tym miejscu przeanalizujemy pierwszy z nich.

Można zauważyć, że Russell zakłada równość $E = S \circ P$, tj.:

$$a5 \quad \forall_{x,y \in U} (x E y \iff \exists_{z \in U} (x S z \wedge z P y)). \quad (\star_E)$$

Pierwszy aksjomat «egzystencjalnie zaangażowany»

Analizując rodzinę chwil, Russell [1914] przyjmuje trzy «egzystencjalnie zaangażowane» założenia. W tym miejscu przeanalizujemy pierwszy z nich.

Można zauważyć, że Russell zakłada równość $E = S \circ P$, tj.:

$$a5 \quad \forall_{x,y \in U} (x E y \iff \exists_{z \in U} (x S z \wedge z P y)). \quad (\star_E)$$

Remark 2.1

Część „ \Leftarrow ” formuły (\star_E) (w skrócie: (\star_E^{\Leftarrow})) jest «egzystencjalnie neutralna». Tylko jej część „ \Rightarrow ” (w skrócie: (\star_E^{\Rightarrow})) jest «egzystencjalnie zaangażowana».

Wnioski

Jest oczywiste, że (\star_E^{\leftarrow}) jest definicyjnie równoważne z:

$$\forall_{x,y,z \in U} (x S z \wedge z E y \implies x E y \vee z S y). \quad (1)$$

Ponadto, z (as_E) i (\star_E^{\leftarrow}) mamy $P \circ E \subseteq \bar{S}$, tj.:

$$\forall_{x,y,z \in U} (x P z \wedge z E y \implies \neg x S y).$$

Można pokazać, że mając (t_E) , (s_S) , $(df P)$, (c_P^S) i (\star_E) udowodnimy, że dopełnienie \bar{E} relacji E jest przechodnie; więc E jest ko-przechodnia:

$$\forall_{x,y,z \in U} (x E y \implies x E z \vee z E y). \quad (ct_E)$$

Wnioski

Jest oczywiste, że (\star_E^{\leftarrow}) jest definicyjnie równoważne z:

$$\forall_{x,y,z \in U} (x S z \wedge z E y \implies x E y \vee z S y). \quad (1)$$

Ponadto, z (as_E) i (\star_E^{\leftarrow}) mamy $P \circ E \subseteq \bar{S}$, tj.:

$$\forall_{x,y,z \in U} (x P z \wedge z E y \implies \neg x S y).$$

Można pokazać, że mając (t_E) , (s_S) , $(df P)$, (c_P^S) i (\star_E) udowodnimy, że dopełnienie \bar{E} relacji E jest przechodnie; więc E jest ko-przechodnia:

$$\forall_{x,y,z \in U} (x E y \implies x E z \vee z E y). \quad (ct_E)$$

O tym fakcie Russell w ogóle nie wspomina w [1914]. Jest on jednak niezbędny dla otrzymania przechodniości relacji P , którą to Russell po prostu zakłada. Ponadto uzyskamy również inne fakty, których nie można uzyskać zakładając jedynie przechodniość relacji P i które są potrzebne do zrekonstruowania rodziny chwil.

Wnioski

Dla dowolnej binarnej relacji R w \mathcal{U} i dowolnego $x \in \mathcal{U}$ kładziemy:

$$\vec{R}'x := \{u \in \mathcal{U} : u R x\} \quad \text{i} \quad \overleftarrow{R}'x := \{u \in \mathcal{U} : x R u\}.$$

Wnioski

Dla dowolnej binarnej relacji R w \mathcal{U} i dowolnego $x \in \mathcal{U}$ kładziemy:

$$\vec{R}'x := \{u \in \mathcal{U} : u R x\} \quad \text{i} \quad \overleftarrow{R}'x := \{u \in \mathcal{U} : x R u\}.$$

Z (ct_E) i (irr_E) dla dowolnych $x, y \in \mathcal{U}$ otrzymujemy:

$$\neg x E y \iff \vec{E}'y \subseteq \vec{E}'x \iff \overleftarrow{E}'x \subseteq \overleftarrow{E}'y. \quad (2)$$

Wnioski

Teraz pokażemy, że $(df P)$, (s_S) , (as_E) , (ct_E) i (\star_E^{\leftarrow}) dostajemy przechodność relacji P.

Wnioski

Teraz pokażemy, że $(df P)$, (s_S) , (as_E) , (ct_E) i (\star_E^{\leftarrow}) dostajemy przechodniość relacji P .

Po pierwsze, z (\star_E^{\leftarrow}) i (s_S) mamy:

$$\forall_{x,y,z \in U} (x P y \wedge \neg z E y \implies \neg x S z).$$

Wnioski

Teraz pokażemy, że $(df P)$, (s_S) , (as_E) , (ct_E) i (\star_E^{\leftarrow}) dostajemy przechodniość relacji P .

Po pierwsze, z (\star_E^{\leftarrow}) i (s_S) mamy:

$$\forall_{x,y,z \in U} (x P y \wedge \neg z E y \implies \neg x S z).$$

Po drugie, ponieważ $P \subseteq E$, w świetle (ct_E) otrzymujemy:

$$\forall_{x,y,z \in U} (x P y \wedge \neg z E y \implies x E z).$$

Zatem z obu powyższych warunków i $(df P)$ otrzymujemy:

$$\forall_{x,y,z \in U} (x P y \wedge \neg z E y \implies x P z). \quad (t_P^E)$$

Wnioski

Teraz pokażemy, że $(df P)$, (s_S) , (as_E) , (ct_E) i (\star_E^{\Leftarrow}) dostajemy przechodność relacji P .

Po pierwsze, z (\star_E^{\Leftarrow}) i (s_S) mamy:

$$\forall x, y, z \in U (x P y \wedge \neg z E y \implies \neg x S z).$$

Po drugie, ponieważ $P \subseteq E$, w świetle (ct_E) otrzymujemy:

$$\forall x, y, z \in U (x P y \wedge \neg z E y \implies x E z).$$

Zatem z obu powyższych warunków i $(df P)$ otrzymujemy:

$$\forall x, y, z \in U (x P y \wedge \neg z E y \implies x P z). \quad (t_P^E)$$

Po trzecie, z (t_P^E) i (as_E) otrzymujemy:

$$\forall x, y, z \in U (x P y \wedge y E z \implies x P z). \quad (t_P^E)$$

Wnioski

Po czwarte, skoro $P \subseteq E$, z (t_P^E) otrzymujemy przechodniość relacji P :

$$\forall_{x,y,z \in U} (x P y \wedge y P z \implies x P z). \quad (t_P)$$

Wnioski

Po czwarte, skoro $P \subseteq E$, z (t_P^E) otrzymujemy przechodniość relacji P :

$$\forall_{x,y,z \in U} (x P y \wedge y P z \implies x P z). \quad (t_P)$$

Mając (t_P) i (c_P^S) możemy udowodnić użyteczne:

$$\forall_{x,y,z \in U} (x P y \wedge y S z \wedge \neg z S x \implies x P z). \quad (3)$$

Wnioski

Po czwarte, skoro $P \subseteq E$, z (t_P^E) otrzymujemy przechodność relacji P :

$$\forall_{x,y,z \in U} (x P y \wedge y P z \implies x P z). \quad (t_P)$$

Mając (t_P) i (c_P^S) możemy udowodnić użyteczne:

$$\forall_{x,y,z \in U} (x P y \wedge y S z \wedge \neg z S x \implies x P z). \quad (3)$$

Używając (\star_E^{\leftarrow}) i (t_P^E) otrzymamy warunek, który używamy wiele razy:

$$\forall_{x,y,z,u \in U} (x P y \wedge y S z \wedge z P u \implies x P u). \quad (t_{+P})$$

Oczywiście, z (t_{+P}) i (r_S) mamy (t_P) .

Wnioski

Po czwarte, skoro $P \subseteq E$, z (\mathbf{t}_P^E) otrzymujemy przechodniość relacji P :

$$\forall_{x,y,z \in U} (x P y \wedge y P z \implies x P z). \quad (\mathbf{t}_P)$$

Mając (\mathbf{t}_P) i (\mathbf{c}_P^S) możemy udowodnić użyteczne:

$$\forall_{x,y,z \in U} (x P y \wedge y S z \wedge \neg z S x \implies x P z). \quad (3)$$

Używając (\star_E^{\leftarrow}) i (\mathbf{t}_P^E) otrzymamy warunek, który używamy wiele razy:

$$\forall_{x,y,z,u \in U} (x P y \wedge y S z \wedge z P u \implies x P u). \quad (\mathbf{t}_{+P})$$

Oczywiście, z (\mathbf{t}_{+P}) i (\mathbf{r}_S) mamy (\mathbf{t}_P) .

Z $(\mathbf{df} P)$, (\mathbf{t}_P^E) , (\mathbf{t}_P) , (\mathbf{s}_S) i (\mathbf{t}_{+P}) możemy udowodnić:

$$\forall_{x,y,z,u \in U} (x P y \wedge z P u \implies x P u \vee z P y). \quad (\mathbf{Th}_P)$$

Jest to jeden z dwóch aksjomatów teorii Thomasona z [1989].

Wnioski

Po czwarte, skoro $P \subseteq E$, z (\mathbf{t}_P^E) otrzymujemy przechodniość relacji P:

$$\forall_{x,y,z \in U} (x P y \wedge y P z \implies x P z). \quad (\mathbf{t}_P)$$

Mając (\mathbf{t}_P) i (\mathbf{c}_P^S) możemy udowodnić użyteczne:

$$\forall_{x,y,z \in U} (x P y \wedge y S z \wedge \neg z S x \implies x P z). \quad (3)$$

Używając (\star_E^{\leftarrow}) i (\mathbf{t}_P^E) otrzymamy warunek, który używamy wiele razy:

$$\forall_{x,y,z,u \in U} (x P y \wedge y S z \wedge z P u \implies x P u). \quad (\mathbf{t}_{+P})$$

Oczywiście, z (\mathbf{t}_{+P}) i (\mathbf{r}_S) mamy (\mathbf{t}_P) .

Z $(\mathbf{df} P)$, (\mathbf{t}_P^E) , (\mathbf{t}_P) , (\mathbf{s}_S) i (\mathbf{t}_{+P}) możemy udowodnić:

$$\forall_{x,y,z,u \in U} (x P y \wedge z P u \implies x P u \vee z P y). \quad (\mathbf{Th}_P)$$

Jest to jeden z dwóch aksjomatów teorii Thomasona z [1989].

Mamy również równość $S \circ P = (\check{P})^- \circ P$, tj.:

$$\forall_{x,y \in U} (x E y \iff \exists_{z \in U} (z P y \wedge \neg z P x)). \quad (\mathbf{df}_P E)$$

Wnioski

Remark 2.2

Otrzymujemy pewną „egzystencjalnie neutralną” teorię zdarzeń z aksjomatów a1–a4, (\star_E^{\leftarrow}) i (ct_E) , które przyjmujemy zamiast (\star_E^{\rightarrow}) . W tej «okrojonej teorii» otrzymamy wszystkie tezy, dla których nie używamy (\star_E^{\rightarrow}) . Wśród nich będą (t_P^{\leftarrow}) , (t_P^E) , (t_P) , (t_{+P}) , (Th_P) .

Inne pomocnicze relacje

Teraz zdefiniujemy kilka pomocniczych relacji binarnych. Na początku nie wprowadzamy żadnych nowych aksjomatów dla tych nowych koncepcji. Chcemy tylko pokazać, jakie nowe interesujące fakty można uzyskać, używając tylko poprzednio podanych aksjomatów.

Inne pomocnicze relacje

Teraz zdefiniujemy kilka pomocniczych relacji binarnych. Na początku nie wprowadzamy żadnych nowych aksjomatów dla tych nowych koncepcji. Chcemy tylko pokazać, jakie nowe interesujące fakty można uzyskać, używając tylko poprzednio podanych aksjomatów.

Dodajmy, że niektóre z tych relacji zostały wspomniane, ale nie zostały zdefiniowane przez Russella w [1914].

Inne pomocnicze relacje

Teraz zdefiniujemy kilka pomocniczych relacji binarnych. Na początku nie wprowadzamy żadnych nowych aksjomatów dla tych nowych koncepcji. Chcemy tylko pokazać, jakie nowe interesujące fakty można uzyskać, używając tylko poprzednio podanych aksjomatów.

Dodajmy, że niektóre z tych relacji zostały wspomniane, ale nie zostały zdefiniowane przez Russella w [1914].

Potem wprowadzimy drugi aksjomat „zaangażowany egzystencjalnie”.

Relacja *trwa po*

Russell użył relacji *trwa po* (*lasts after*), której jednak nie zdefiniował. Mówimy, że jedno zdarzenie *trwa po* (w skrócie: *jest po*) innym, jeśli jest równoczesne z jakimś zdarzeniem, które następuje całkowicie po drugim. Oznaczmy tę relację przez 'A'. Więc $A := S \circ P$, czyli dla dowolnych $x, y \in U$ kładziemy:

$$x A y \iff \exists z \in U (x S z \wedge y P z). \quad (\text{df } A)$$

Remark 2.3

Chociaż (df A) ma egzystencjalny kwantyfikator, jego użycie zachowa «egzystencjalną neutralność» «okrojonej teorii» opartej na aksjomatach a1–a4, (\star_E^{\leftarrow}) i (ct_E) . Byłoby inaczej, gdybyśmy zastosowali relację A w jakimś nowym, odpowiednio skonstruowanym aksjomacie.

Relacja trwa po

Z (df A) i (r_s) mamy $P \subseteq \check{A}$, tj.:

$$\forall_{x,y} (y P x \implies x A y). \quad (P \subseteq \check{A})$$

Relacja *trwa po*

Z (df \mathbf{A}) i (\mathbf{r}_s) mamy $P \subseteq \check{\mathbf{A}}$, tj.:

$$\forall_{x,y} (y P x \implies x \mathbf{A} y). \quad (P \subseteq \check{\mathbf{A}})$$

Ponadto możemy otrzymać $\mathbf{A} = \bar{P} \circ \check{P}$, tj.:

$$\forall_{x,y} (x \mathbf{A} y \iff \exists_{z \in U} (y P z \wedge \neg x P z)). \quad (\text{df}_P \mathbf{A})$$

Relacja trwa po

Z (df A) i (r_s) mamy $P \subseteq \check{A}$, tj.:

$$\forall_{x,y} (y P x \implies x A y). \quad (P \subseteq \check{A})$$

Ponadto możemy otrzymać $A = \bar{P} \circ \check{P}$, tj.:

$$\forall_{x,y} (x A y \iff \exists_{z \in U} (y P z \wedge \neg x P z)). \quad (\text{df}_P A)$$

Z (df A) i (df P) mamy przeciwzwrotność relacji A:

$$\forall_{x \in U} \neg x A x. \quad (\text{irr}_A)$$

Relacja trwa po

Z (df A) i (r_S) mamy $P \subseteq \check{A}$, tj.:

$$\forall_{x,y} (y P x \implies x A y). \quad (P \subseteq \check{A})$$

Ponadto możemy otrzymać $A = \bar{P} \circ \check{P}$, tj.:

$$\forall_{x,y} (x A y \iff \exists_{z \in U} (y P z \wedge \neg x P z)). \quad (\text{df}_P A)$$

Z (df A) i (df P) mamy przeciwzrotność relacji A:

$$\forall_{x \in U} \neg x A x. \quad (\text{irr}_A)$$

Używając (df A), (t_{+P}) i (s_S) możemy udowodnić, że A jest asymetryczna:

$$\forall_{x,y \in U} (x A y \implies \neg y A x). \quad (\text{as}_A)$$

Relacja trwa po

Z (df A) i (r_S) mamy $P \subseteq \check{A}$, tj.:

$$\forall_{x,y} (y P x \implies x A y). \quad (P \subseteq \check{A})$$

Ponadto możemy otrzymać $A = \bar{P} \circ \check{P}$, tj.:

$$\forall_{x,y} (x A y \iff \exists_{z \in U} (y P z \wedge \neg x P z)). \quad (\text{df}_P A)$$

Z (df A) i (df P) mamy przeciwzrotność relacji A:

$$\forall_{x \in U} \neg x A x. \quad (\text{irr}_A)$$

Używając (df A), (t₊_P) i (s_S) możemy udowodnić, że A jest asymetryczna:

$$\forall_{x,y \in U} (x A y \implies \neg y A x). \quad (\text{as}_A)$$

Z (df A), (t_P^E) ai (r_S) możemy udowodnić, że A jest ko-przechodnia:

$$\forall_{x,y,z \in U} (x A y \implies x A z \vee z A y). \quad (\text{ct}_A)$$

Relacja trwa po

Z (df A) i (r_S) mamy $P \subseteq \check{A}$, tj.:

$$\forall_{x,y} (y P x \implies x A y). \quad (P \subseteq \check{A})$$

Ponadto możemy otrzymać $A = \bar{P} \circ \check{P}$, tj.:

$$\forall_{x,y} (x A y \iff \exists_{z \in U} (y P z \wedge \neg x P z)). \quad (\text{df}_P A)$$

Z (df A) i (df P) mamy przeciwzwrotność relacji A:

$$\forall_{x \in U} \neg x A x. \quad (\text{irr}_A)$$

Używając (df A), (t_{+P}) i (s_S) możemy udowodnić, że A jest asymetryczna:

$$\forall_{x,y \in U} (x A y \implies \neg y A x). \quad (\text{as}_A)$$

Z (df A), (t_P^E) ai (r_S) możemy udowodnić, że A jest ko-przechodnia:

$$\forall_{x,y,z \in U} (x A y \implies x A z \vee z A y). \quad (\text{ct}_A)$$

Z (as_A) i (ct_A) mamy przechodniość relacji A:

$$\forall_{x,y,z \in U} (x A y \wedge y A z \implies x A z). \quad (\text{t}_A)$$

Relacja *trwa po*

Z (ct_A) i (irr_A) dla dowolnych $x, y \in U$ otrzymamy:

$$\neg x A y \iff \vec{A}'y \subseteq \vec{A}'x \iff \overleftarrow{A}'x \subseteq \overleftarrow{A}'y. \quad (4)$$

Relacja *trwa po*

Z (ct_A) i (irr_A) dla dowolnych $x, y \in U$ otrzymamy:

$$\neg x A y \iff \vec{A}'y \subseteq \vec{A}'x \iff \overleftarrow{A}'x \subseteq \overleftarrow{A}'y. \quad (4)$$

Na koniec, otrzymamy kilka użytecznych warunków:

Relacja trwa po

Z (ct_A) i (irr_A) dla dowolnych $x, y \in U$ otrzymamy:

$$\neg x A y \iff \vec{A}'y \subseteq \vec{A}'x \iff \overleftarrow{A}'x \subseteq \overleftarrow{A}'y. \quad (4)$$

Na koniec, otrzymamy kilka użytecznych warunków:

Po pierwsze, z $(df A)$ i $(df P)$ mamy:

$$\forall_{x,y} (x A y \implies \exists_{z \in U} (z S x \wedge \neg z S y)). \quad (5)$$

Relacja trwa po

Z (ct_A) i (irr_A) dla dowolnych $x, y \in U$ otrzymamy:

$$\neg x A y \iff \vec{A}'y \subseteq \vec{A}'x \iff \overleftarrow{A}'x \subseteq \overleftarrow{A}'y. \quad (4)$$

Na koniec, otrzymamy kilka użytecznych warunków:

Po pierwsze, z $(df A)$ i $(df P)$ mamy:

$$\forall_{x,y} (x A y \implies \exists_{z \in U} (z S x \wedge \neg z S y)). \quad (5)$$

Po drugie, z $(df A)$, (s_S) i (3) mamy:

$$\forall_{x,y \in U} (x A y \wedge \neg x S y \implies y P x). \quad (6)$$

Relacja trwa po

Z (ct_A) i (irr_A) dla dowolnych $x, y \in U$ otrzymamy:

$$\neg x A y \iff \vec{A}'y \subseteq \vec{A}'x \iff \overleftarrow{A}'x \subseteq \overleftarrow{A}'y. \quad (4)$$

Na koniec, otrzymamy kilka użytecznych warunków:

Po pierwsze, z $(df A)$ i $(df P)$ mamy:

$$\forall_{x,y} (x A y \implies \exists_{z \in U} (z S x \wedge \neg z S y)). \quad (5)$$

Po drugie, z $(df A)$, (s_S) i (3) mamy:

$$\forall_{x,y \in U} (x A y \wedge \neg x S y \implies y P x). \quad (6)$$

Po trzecie, z $(df A)$, $(P \subseteq \check{A})$, (c_P^S) i (t_P) , możemy udowodnić:

$$\forall_{x,y,z \in U} (\neg z \check{A} x \wedge x P y \implies z P y). \quad (t_P^{\check{A}})$$

Relacja trwa po

Z (ct_A) i (irr_A) dla dowolnych $x, y \in U$ otrzymamy:

$$\neg x A y \iff \vec{A}'y \subseteq \vec{A}'x \iff \overleftarrow{A}'x \subseteq \overleftarrow{A}'y. \quad (4)$$

Na koniec, otrzymamy kilka użytecznych warunków:

Po pierwsze, z ($df A$) i ($df P$) mamy:

$$\forall_{x,y} (x A y \implies \exists_{z \in U} (z S x \wedge \neg z S y)). \quad (5)$$

Po drugie, z ($df A$), (s_S) i (3) mamy:

$$\forall_{x,y \in U} (x A y \wedge \neg x S y \implies y P x). \quad (6)$$

Po trzecie, z ($df A$), ($P \subseteq \check{A}$), (c_P^S) i (t_P), możemy udowodnić:

$$\forall_{x,y,z \in U} (\neg z \check{A} x \wedge x P y \implies z P y). \quad (t_P^{\check{A}})$$

Po czwarte, z (s_S), (c_P^S), (\star_E^{\leftarrow}) i ($df A$) możemy udowodnić:

$$\forall_{x,y,z \in U} (z S x \wedge \neg z S y \implies x E y \vee x A y). \quad (7)$$

Relacja trwa po

Z (ct_A) i (irr_A) dla dowolnych $x, y \in U$ otrzymamy:

$$\neg x A y \iff \vec{A}'y \subseteq \vec{A}'x \iff \overleftarrow{A}'x \subseteq \overleftarrow{A}'y. \quad (4)$$

Na koniec, otrzymamy kilka użytecznych warunków:

Po pierwsze, z $(df A)$ i $(df P)$ mamy:

$$\forall_{x,y} (x A y \implies \exists_{z \in U} (z S x \wedge \neg z S y)). \quad (5)$$

Po drugie, z $(df A)$, (s_S) i (3) mamy:

$$\forall_{x,y \in U} (x A y \wedge \neg x S y \implies y P x). \quad (6)$$

Po trzecie, z $(df A)$, $(P \subseteq \check{A})$, (c_P^S) i (t_P) , możemy udowodnić:

$$\forall_{x,y,z \in U} (\neg z \check{A} x \wedge x P y \implies z P y). \quad (t_P^{\check{A}})$$

Po czwarte, z (s_S) , (c_P^S) , (\star_E^{\leftarrow}) i $(df A)$ możemy udowodnić:

$$\forall_{x,y,z \in U} (z S x \wedge \neg z S y \implies x E y \vee x A y). \quad (7)$$

Stąd mamy:

$$\forall_{x,y \in U} (\neg x E y \wedge \neg x A y \implies x S y). \quad (8)$$

Relacja zawierania czasowego

Russell [1914] definiuje relację *zawierania czasowego* (*temporal enclosure*) w następujący sposób:

Jeden obiekt jest czasowo zawarty w drugim, gdy będzie jednoczesny z drugim, ale nie przed nim ani po nim.

Relacja zawierania czasowego

Russell [1914] definiuje relację *zawierania czasowego* (*temporal enclosure*) w następujący sposób:

Jeden obiekt jest czasowo zawarty w drugim, gdy będzie jednoczesny z drugim, ale nie przed nim ani po nim.

Widzimy, że oprócz relacji S Russell użył relacji *jest przed* i *jest po*. Możemy uznać relację E (*jest wcześniejsza niż*) jako tę pierwszą, a relację A (*trwa po*) jako tę drugą.

Relacja zawierania czasowego

Russell [1914] definiuje relację *zawierania czasowego* (*temporal enclosure*) w następujący sposób:

Jeden obiekt jest czasowo zawarty w drugim, gdy będzie jednoczesny z drugim, ale nie przed nim ani po nim.

Widzimy, że oprócz relacji S Russell użył relacji *jest przed* i *jest po*. Możemy uznać relację E (*jest wcześniejsza niż*) jako tę pierwszą, a relację A (*trwa po*) jako tę drugą.

Oznaczmy relację *zawierania czasowego* przez ' \sqsubseteq_t '. Jego definicję podaną przez Russella można formalnie zapisać w następujący sposób: $\sqsubseteq_t := S \cap \bar{E} \cap \bar{A}$. Więc dla dowolnych $x, y \in U$ kładziemy:

$$x \sqsubseteq_t y \iff x S y \wedge \neg x E y \wedge \neg x A y. \quad (\text{df } \sqsubseteq_t)$$

Relacja zawierania czasowego

Russell [1914] definiuje relację *zawierania czasowego* (*temporal enclosure*) w następujący sposób:

Jeden obiekt jest czasowo zawarty w drugim, gdy będzie jednoczesny z drugim, ale nie przed nim ani po nim.

Widzimy, że oprócz relacji S Russell użył relacji *jest przed* i *jest po*. Możemy uznać relację E (*jest wcześniejsza niż*) jako tę pierwszą, a relację A (*trwa po*) jako tę drugą.

Oznaczmy relację *zawierania czasowego* przez ' \sqsubseteq_t '. Jego definicję podaną przez Russella można formalnie zapisać w następujący sposób: $\sqsubseteq_t := S \cap \bar{E} \cap \bar{A}$. Więc dla dowolnych $x, y \in U$ kładziemy:

$$x \sqsubseteq_t y \iff x S y \wedge \neg x E y \wedge \neg x A y. \quad (\text{df } \sqsubseteq_t)$$

Warunek (8) pokazuje, że powyższą definicję można uprościć:

$$\forall_{x,y \in U} (x \sqsubseteq_t y \iff \neg x E y \wedge \neg x A y). \quad (\text{df}' \sqsubseteq_t)$$

Relacja czasowego zawierania

Stąd oraz z (irr_E) i (irr_A) otrzymujemy zwrotność relacji \sqsubseteq_t :

$$\forall x \in U \ x \sqsubseteq_t x, \quad (\mathbf{r}_{\sqsubseteq_t})$$

Relacja czasowego zawierania

Stąd oraz z (irr_E) i (irr_A) otrzymujemy zwrotność relacji \sqsubseteq_t :

$$\forall x \in U \quad x \sqsubseteq_t x, \quad (\text{r}_{\sqsubseteq_t})$$

Z (ct_E) i (ct_A) , dopełnienia E i A są przechodnie. Stąd i z $(\text{df}' \sqsubseteq_t)$ mamy przechodniość relacji \sqsubseteq_t :

$$\forall x, y, z \in U (x \sqsubseteq_t y \wedge y \sqsubseteq_t z \implies x \sqsubseteq_t z). \quad (\text{t}_{\sqsubseteq_t})$$

Relacja *czasowego zawierania*

Stąd oraz z (irr_E) i (irr_A) otrzymujemy zwrotność relacji \sqsubseteq_t :

$$\forall_{x \in U} x \sqsubseteq_t x, \quad (\text{r}_{\sqsubseteq_t})$$

Z (ct_E) i (ct_A), dopełnienia E i A są przechodnie. Stąd i z ($\text{df}' \sqsubseteq_t$) mamy przechodniość relacji \sqsubseteq_t :

$$\forall_{x,y,z \in U} (x \sqsubseteq_t y \wedge y \sqsubseteq_t z \implies x \sqsubseteq_t z). \quad (\text{t}_{\sqsubseteq_t})$$

Możemy również udowodnić, że z (7), ($\text{df}' \sqsubseteq_t$), (5), (s_S), (df P) i (\star_E^{\rightarrow}) dla wszystkich $x, y \in U$ dostajemy:

$$x \sqsubseteq_t y \iff \overrightarrow{S}x \subseteq \overrightarrow{S}y \iff \overleftarrow{S}x \subseteq \overleftarrow{S}y. \quad (\text{df}_S \sqsubseteq_t)$$

Relacja *czasowego zawierania*

Stąd oraz z (irr_E) i (irr_A) otrzymujemy zwrotność relacji \sqsubseteq_t :

$$\forall x \in U \quad x \sqsubseteq_t x, \quad (\text{r}_{\sqsubseteq_t})$$

Z (ct_E) i (ct_A), dopełnienia E i A są przechodnie. Stąd i z ($\text{df}' \sqsubseteq_t$) mamy przechodność relacji \sqsubseteq_t :

$$\forall x, y, z \in U (x \sqsubseteq_t y \wedge y \sqsubseteq_t z \implies x \sqsubseteq_t z). \quad (\text{t}_{\sqsubseteq_t})$$

Możemy również udowodnić, że z (7), ($\text{df}' \sqsubseteq_t$), (5), (s_S), (df P) i (\star_E^{\rightarrow}) dla wszystkich $x, y \in U$ dostajemy:

$$x \sqsubseteq_t y \iff \overrightarrow{S}x \subseteq \overrightarrow{S}y \iff \overleftarrow{S}x \subseteq \overleftarrow{S}y. \quad (\text{df}_S \sqsubseteq_t)$$

Pokażemy dalej, że jedno zdarzenie jest czasowo zawarte w drugim wtedy i tylko wtedy, gdy drugie istnieje w dowolnej chwili, w której istnieje pierwsze.

Relacje *wspólnego rozpoczęcia*, *wspólnego zakończenia* i *pełnej jednoczesności*

Chociaż Russell [1914] wspomina o relacji *pełnej jednoczesności* (*complete simultaneity*), nie używa jej ani jej nie definiuje. Dopiero gdy Russell omawia przykłady relacji przechodnich, pisze:

Relacje *wspólnego rozpoczęcia*, *wspólnego zakończenia* i *pełnej jednoczesności*

Chociaż Russell [1914] wspomina o relacji *pełnej jednoczesności* (*complete simultaneity*), nie używa jej ani jej nie definiuje. Dopiero gdy Russell omawia przykłady relacji przechodnich, pisze:

Wspomniane przed chwilą relacje symetryczne są również przechodnie [...], pod warunkiem, że w przypadku jednoczesności mamy na myśli pełną jednoczesność, czyli ich wspólny początek i koniec.

Jednakże, Russell nigdzie nie pisze, co ma na myśli, mówiąc o „wspólnym początku i końcu”. Użyjemy relacji binarnych $BT := \bar{E} \setminus \check{E}$ (*beginning together*), $ET := \bar{A} \setminus \check{A}$ (*ending together*) i $CS := BT \cap ET$ (*complete simultaneity*) jako interpretacji zwrotów ‘zaczyna się razem z’, ‘kończy się razem z’ i ‘jest w pełni jednoczesne z’. Zatem dla dowolnych $x, y \in U$ kładziemy:

$$x BT y \iff \neg x E y \wedge \neg y E x, \quad (\text{df } BT)$$

$$x ET y \iff \neg x A y \wedge \neg y A x. \quad (\text{df } ET)$$

$$x CS y \iff x BT y \wedge x ET y. \quad (\text{df } CS)$$

Relacje *wspólnego rozpoczęcia*, *wspólnego zakończenia* i *pełnej jednoczesności*

Mamy:

$$\begin{aligned}x \text{ BT } y &\iff \vec{E}'x = \vec{E}'y \iff \overleftarrow{E}'x = \overleftarrow{E}'y \iff \vec{P}'x = \vec{P}'y, \\x \text{ ET } y &\iff \vec{A}'x = \vec{A}'y \iff \overleftarrow{A}'x = \overleftarrow{A}'y \iff \overleftarrow{P}'x = \overleftarrow{P}'y.\end{aligned}$$

Relacje *wspólnego rozpoczęcia*, *wspólnego zakończenia* i *pełnej jednoczesności*

Mamy:

$$\begin{aligned}x \text{ BT } y &\iff \vec{E}'x = \vec{E}'y \iff \overleftarrow{E}'x = \overleftarrow{E}'y \iff \vec{P}'x = \vec{P}'y, \\x \text{ ET } y &\iff \vec{A}'x = \vec{A}'y \iff \overleftarrow{A}'x = \overleftarrow{A}'y \iff \overleftarrow{P}'x = \overleftarrow{P}'y.\end{aligned}$$

To daje zwrotność, symetryczność i przechodniość relacji BT i ET.

Relacje *wspólnego rozpoczęcia*, *wspólnego zakończenia* i *pełnej jednoczesności*

Mamy:

$$\begin{aligned}
 x \text{ BT } y &\iff \vec{E}'x = \vec{E}'y \iff \overleftarrow{E}'x = \overleftarrow{E}'y \iff \vec{P}'x = \vec{P}'y, \\
 x \text{ ET } y &\iff \vec{A}'x = \vec{A}'y \iff \overleftarrow{A}'x = \overleftarrow{A}'y \iff \overleftarrow{P}'x = \overleftarrow{P}'y.
 \end{aligned}$$

To daje zwrotność, symetryczność i przechodniość relacji BT i ET.
 Oba warunki (c_E^S) i (c_P^S) są definicyjnie równoważne z :

$$\forall_{x,y \in U} (x \text{ BT } y \implies x \text{ S } y). \quad (\text{BT} \subseteq \text{S})$$

Relacje *wspólnego rozpoczęcia*, *wspólnego zakończenia* i *pełnej jednoczesności*

Mamy:

$$\begin{aligned}
 x \text{ BT } y &\iff \vec{E}'x = \vec{E}'y \iff \overleftarrow{E}'x = \overleftarrow{E}'y \iff \vec{P}'x = \vec{P}'y, \\
 x \text{ ET } y &\iff \vec{A}'x = \vec{A}'y \iff \overleftarrow{A}'x = \overleftarrow{A}'y \iff \vec{P}'x = \vec{P}'y.
 \end{aligned}$$

To daje zwrotność, symetryczność i przechodniość relacji BT i ET.
 Oba warunki (c_E^S) i (c_P^S) są definicyjnie równoważne z :

$$\forall_{x,y \in U} (x \text{ BT } y \implies x \text{ S } y). \quad (\text{BT} \subseteq \text{S})$$

Z (df A), (c_P^S) i ($P \subseteq \check{A}$) mamy:

$$\forall_{x,y \in U} (x \text{ ET } y \implies x \text{ S } y). \quad (\text{ET} \subseteq \text{S})$$

Relacje *wspólnego rozpoczęcia*, *wspólnego zakończenia* i *pełnej jednoczesności*

Mamy:

$$\begin{aligned} x \text{ BT } y &\iff \vec{E}'x = \vec{E}'y \iff \overleftarrow{E}'x = \overleftarrow{E}'y \iff \vec{P}'x = \vec{P}'y, \\ x \text{ ET } y &\iff \vec{A}'x = \vec{A}'y \iff \overleftarrow{A}'x = \overleftarrow{A}'y \iff \vec{P}'x = \vec{P}'y. \end{aligned}$$

To daje zwrotność, symetryczność i przechodniość relacji BT i ET.
Oba warunki (c_E^S) i (c_P^S) są definicyjnie równoważne z :

$$\forall_{x,y \in U} (x \text{ BT } y \implies x \text{ S } y). \quad (\text{BT} \subseteq \text{S})$$

Z (df A), (c_P^S) i ($P \subseteq \check{A}$) mamy:

$$\forall_{x,y \in U} (x \text{ ET } y \implies x \text{ S } y). \quad (\text{ET} \subseteq \text{S})$$

Lecz to jest definicyjnie równoważne z:

$$\forall_{x,y \in U} (\neg x \text{ S } y \implies x \text{ A } y \vee y \text{ A } x). \quad (c_A^S)$$

Relacje *wspólnego rozpoczęcia*, *wspólnego zakończenia* i *pełnej jednoczesności*

Mamy:

$$\begin{aligned} x \text{ BT } y &\iff \vec{E}'x = \vec{E}'y \iff \overleftarrow{E}'x = \overleftarrow{E}'y \iff \vec{P}'x = \vec{P}'y, \\ x \text{ ET } y &\iff \vec{A}'x = \vec{A}'y \iff \overleftarrow{A}'x = \overleftarrow{A}'y \iff \vec{P}'x = \vec{P}'y. \end{aligned}$$

To daje zwrotność, symetryczność i przechodniość relacji BT i ET.
 Oba warunki (c_E^S) i (c_P^S) są definicyjnie równoważne z :

$$\forall_{x,y \in U} (x \text{ BT } y \implies x \text{ S } y). \quad (\text{BT} \subseteq \text{S})$$

Z (df A), (c_P^S) i ($P \subseteq \check{A}$) mamy:

$$\forall_{x,y \in U} (x \text{ ET } y \implies x \text{ S } y). \quad (\text{ET} \subseteq \text{S})$$

Lecz to jest definicyjnie równoważne z:

$$\forall_{x,y \in U} (\neg x \text{ S } y \implies x \text{ A } y \vee y \text{ A } x). \quad (c_A^S)$$

Mamy też:

$$x \text{ BT } y \implies \forall_{z \in U} (z \text{ E } x \wedge z \text{ S } x \iff z \text{ E } y \wedge z \text{ S } y).$$

Relacje *wspólnego rozpoczęcia*, *wspólnego zakończenia* i *pełnej jednoczesności*

Z (7), (as_{ϵ}) , $(df' \sqsubseteq_t)$ i $(df_s \sqsubseteq_t)$ możemy udowodnić, że dla dowolnych $x, y \in \mathcal{U}$:

$$x \text{ ET } y \implies \forall_{z \in \mathcal{U}} (z \text{ A } x \wedge z \text{ S } x \Leftrightarrow z \text{ A } y \wedge z \text{ S } y). \quad (9)$$

Relacje *wspólnego rozpoczęcia*, *wspólnego zakończenia* i *pełnej jednoczesności*

Z (7), (as_E) , $(df'_t \sqsubseteq_t)$ i $(df_s \sqsubseteq_t)$ możemy udowodnić, że dla dowolnych $x, y \in \mathcal{U}$:

$$x ET y \implies \forall z \in \mathcal{U} (z A x \wedge z S x \Leftrightarrow z A y \wedge z S y). \quad (9)$$

Z $(df BT)$, (ct_E) , (c_E^S) , (1), (s_S) , (irr_E) i (r_S) możemy udowodnić:

$$\forall x, y \in \mathcal{U} (x BT y \iff \forall z \in \mathcal{U} (\neg x E z \wedge x S z \Leftrightarrow \neg y E z \wedge y S z)). \quad (10)$$

Relacje *wspólnego rozpoczęcia*, *wspólnego zakończenia* i *pełnej jednoczesności*

Z (7), (\mathbf{as}_E), ($\mathbf{df}' \sqsubseteq_t$) i ($\mathbf{df}_S \sqsubseteq_t$) możemy udowodnić, że dla dowolnych $x, y \in \mathcal{U}$:

$$x \text{ ET } y \implies \forall z \in \mathcal{U} (z \text{ A } x \wedge z \text{ S } x \Leftrightarrow z \text{ A } y \wedge z \text{ S } y). \quad (9)$$

Z ($\mathbf{df} \text{ BT}$), (\mathbf{ct}_E), (\mathbf{c}_E^S), (1), (\mathbf{s}_S), (\mathbf{irr}_E) i (\mathbf{r}_S) możemy udowodnić:

$$\forall x, y \in \mathcal{U} (x \text{ BT } y \iff \forall z \in \mathcal{U} (\neg x \text{ E } z \wedge x \text{ S } z \Leftrightarrow \neg y \text{ E } z \wedge y \text{ S } z)). \quad (10)$$

Z ($\mathbf{df} \text{ ET}$), (\mathbf{ct}_A), (\mathbf{c}_A^S), (6), ($\mathbf{df} \text{ A}$), (\mathbf{irr}_A) i (\mathbf{r}_S) możemy udowodnić:

$$\forall x, y \in \mathcal{U} (x \text{ ET } y \iff \forall z \in \mathcal{U} (\neg x \text{ A } z \wedge x \text{ S } z \Leftrightarrow \neg y \text{ A } z \wedge y \text{ S } z)). \quad (11)$$

Relacje *wspólnego rozpoczęcia*, *wspólnego zakończenia* i *pełnej jednoczesności*

Z (7), (\mathbf{as}_E), ($\mathbf{df}' \sqsubseteq_t$) i ($\mathbf{df}_S \sqsubseteq_t$) możemy udowodnić, że dla dowolnych $x, y \in \mathcal{U}$:

$$x \text{ ET } y \implies \forall z \in \mathcal{U} (z \text{ A } x \wedge z \text{ S } x \Leftrightarrow z \text{ A } y \wedge z \text{ S } y). \quad (9)$$

Z ($\mathbf{df} \text{ BT}$), (\mathbf{ct}_E), (\mathbf{c}_E^S), (1), (\mathbf{s}_S), (\mathbf{irr}_E) i (\mathbf{r}_S) możemy udowodnić:

$$\forall x, y \in \mathcal{U} (x \text{ BT } y \iff \forall z \in \mathcal{U} (\neg x \text{ E } z \wedge x \text{ S } z \Leftrightarrow \neg y \text{ E } z \wedge y \text{ S } z)). \quad (10)$$

Z ($\mathbf{df} \text{ ET}$), (\mathbf{ct}_A), (\mathbf{c}_A^S), (6), ($\mathbf{df} \text{ A}$), (\mathbf{irr}_A) i (\mathbf{r}_S) możemy udowodnić:

$$\forall x, y \in \mathcal{U} (x \text{ ET } y \iff \forall z \in \mathcal{U} (\neg x \text{ A } z \wedge x \text{ S } z \Leftrightarrow \neg y \text{ A } z \wedge y \text{ S } z)). \quad (11)$$

Ponieważ $\text{CS} \subseteq \text{BT} \subseteq \text{S}$, więc:

$$\forall x, y \in \mathcal{U} (x \text{ CS } y \implies x \text{ S } y). \quad (\text{CS} \subseteq \text{S})$$

Relacja pełnej jednoczesności

Ponadto, dla dowolnych $x, y \in \mathcal{U}$:

$$x \text{ CS } y \iff x \sqsubseteq_t y \wedge y \sqsubseteq_t x, \quad (\text{df}_{\sqsubseteq_t} \text{CS})$$

$$\iff \vec{S}'x = \vec{S}'y \iff \overleftarrow{S}'x = \overleftarrow{S}'y, \quad (\text{df}_S \text{CS})$$

$$\iff \vec{P}'x = \vec{P}'y \wedge \overleftarrow{P}'x = \overleftarrow{P}'y. \quad (\text{df}_P \text{CS})$$

Relacja pełnej jednoczesności

Ponadto, dla dowolnych $x, y \in \mathcal{U}$:

$$x \text{ CS } y \iff x \sqsubseteq_t y \wedge y \sqsubseteq_t x, \quad (\text{df}_{\sqsubseteq_t} \text{CS})$$

$$\iff \vec{S}'x = \vec{S}'y \iff \overleftarrow{S}'x = \overleftarrow{S}'y, \quad (\text{df}_S \text{CS})$$

$$\iff \vec{P}'x = \vec{P}'y \wedge \overleftarrow{P}'x = \overleftarrow{P}'y. \quad (\text{df}_P \text{CS})$$

Z powyższego otrzymujemy, że CS jest zwrotna, symetryczna, przechodnia, a ponadto jest kongruencją względem relacji S, E i P. Pokażemy dalej, że dwa zdarzenia są w pełni równoczesne wtw istnieją dokładnie w tych samych chwilach.

Relacja *bycia współczesnym z początkiem*

Russell [1914] pisze:

wszystkie zdarzenia, które są równoczesne z danym wydarzeniem i nie zaczynają się później [...] nazwiemy [...] „współczesnymi z początkiem” danego zdarzenia.

Pojęcie wskazane w cudzysłowie określa relację binarną

$IC := S \setminus L = S \setminus \check{E}$ (*is an initial contemporary of*). Zatem dla dowolnych $x, y \in U$ kładziemy:

$$x IC y :\iff x S y \wedge \neg x L y \iff x S y \wedge \neg y E x. \quad (\text{df IC})$$

Relacja *bycia współczesnym z początkiem*

Russell [1914] pisze:

wszystkie zdarzenia, które są równoczesne z danym wydarzeniem i nie zaczynają się później [...] nazwiemy [...] „współczesnymi z początkiem” danego zdarzenia.

Pojęcie wskazane w cudzysłowie określa relację binarną

$IC := S \setminus L = S \setminus \check{E}$ (*is an initial contemporary of*). Zatem dla dowolnych $x, y \in U$ kładziemy:

$$x IC y :\iff x S y \wedge \neg x L y \iff x S y \wedge \neg y E x. \quad (\text{df IC})$$

Ze zwrotności S i z przeciwzwrotności L otrzymujemy, że IC jest zwrotna.

Relacja *bycia współczesnym z początkiem*

Russell [1914] pisze:

wszystkie zdarzenia, które są równoczesne z danym wydarzeniem i nie zaczynają się później [...] nazwiemy [...] „współczesnymi z początkiem” danego zdarzenia.

Pojęcie wskazane w cudzysłowie określa relację binarną

$IC := S \setminus L = S \setminus \check{E}$ (*is an initial contemporary of*). Zatem dla dowolnych $x, y \in U$ kładziemy:

$$x IC y :\iff x S y \wedge \neg x L y \iff x S y \wedge \neg y E x. \quad (\text{df IC})$$

Ze zwrotności S i z przeciwzwrotności L otrzymujemy, że IC jest zwrotna. Ponadto, z (df BT), (df IC), (BT \subseteq S) i (s_s) mamy:

$$\forall_{x,y \in U} (x BT y \iff x IC y \wedge y IC x). \quad (12)$$

Drugi «egzystencjalnie zaangażowany» aksjomat

Analizując rodzinę chwil Russell [1914] przyjmuje dodatkowo dwa „egzystencjalnie zaangażowane” założenia. W tym miejscu omówimy pierwszy z nich. Założenie to przedstawiono między innymi w przypisie 1, w punkcie (e):

Zdarzenie występujące całkowicie po jakimś jednoczesnym zdarzeniu jest występuje całkowicie po jakimś zdarzeniu współczesnym z jego początkiem.

Przyjmujemy zatem, co następuje aksjomat:

$$a6 \quad \forall_{x,y \in U} (\exists_{z \in U} (z P y \wedge z S x) \implies \exists_{z \in U} (z P y \wedge z IC x)). \quad (e)$$

Drugi «egzystencjalnie zaangażowany» aksjomat

Analizując rodzinę chwil Russell [1914] przyjmuje dodatkowo dwa „egzystencjalnie zaangażowane” założenia. W tym miejscu omówimy pierwszy z nich. Założenie to przedstawiono między innymi w przypisie 1, w punkcie (e):

Zdarzenie występujące całkowicie po jakimś jednoczesnym zdarzeniu jest występuje całkowicie po jakimś zdarzeniu współczesnym z jego początkiem.

Przyjmujemy zatem, co następuje aksjomat:

$$a6 \quad \forall_{x,y \in U} (\exists_{z \in U} (z P y \wedge z S x) \implies \exists_{z \in U} (z P y \wedge z IC x)). \quad (e)$$

Z (e), (s_s) i (\star_E^{\rightarrow}) mamy:

$$\forall_{x,y \in U} (x E y \implies \exists_{z \in U} (z P y \wedge z IC x)). \quad (e')$$

Drugi «egzystencjalnie zaangażowany» aksjomat

Analizując rodzinę chwil Russell [1914] przyjmuje dodatkowo dwa „egzystencjalnie zaangażowane” założenia. W tym miejscu omówimy pierwszy z nich. Założenie to przedstawiono między innymi w przypisie 1, w punkcie (e):

Zdarzenie występujące całkowicie po jakimś jednoczesnym zdarzeniu jest występuje całkowicie po jakimś zdarzeniu współczesnym z jego początkiem.

Przyjmujemy zatem, co następuje aksjomat:

$$a6 \quad \forall_{x,y \in U} (\exists_{z \in U} (z P y \wedge z S x) \implies \exists_{z \in U} (z P y \wedge z IC x)). \quad (e)$$

Z (e), (s_s) i (\star_E^{\rightarrow}) mamy:

$$\forall_{x,y \in U} (x E y \implies \exists_{z \in U} (z P y \wedge z IC x)). \quad (e')$$

Ostatni warunek jest niezbędny do pokazania, że skonstruowane dalej chwile w ogóle istnieją; a dokładniej, że każde zdarzenie ma chwilę początkową.

Drugi «egzystencjalnie zaangażowany» aksjomat

Zauważmy, że

- 1 (e) wynika z (s_S) , (\star_E^{\leftarrow}) i (e') .
- 2 (\star_E^{\rightarrow}) wynika z (df IC), (e') i (s_S) .
- 3 Trójka $\{(e), (\star_E), (s_S)\}$ aksjomatów jest definicyjnie równoważna z $\{(e'), (\star_E^{\leftarrow}), (s_S)\}$.

Drugi «egzystencjalnie zaangażowany» aksjomat

Zauważmy, że

- 1 (e) wynika z (s_S) , (\star_E^{\leftarrow}) i (e') .
- 2 (\star_E^{\rightarrow}) wynika z (df IC), (e') i (s_S) .
- 3 Trójka $\{(e), (\star_E), (s_S)\}$ aksjomatów jest deficycyjnie równoważna z $\{(e'), (\star_E^{\leftarrow}), (s_S)\}$.

Warunki (e) i (e') nie wynikają z aksjomatów a1–a5 i przyjętych definicji.

Chwile

Ze zdarzeń jako „składników świata rzeczywistego” Russell [1914, 1936] skonstruował abstrakcyjne obiekty zwane *chwilami* (*instants*), jako pewne dystrybucyjne zbiory zdarzeń. Dana chwila ma być zbiorem wszystkich jednoczesnych zdarzeń, czyli mówiąc obrazowo — takich, które mają przynajmniej jeden wspólny moment trwania. Parafrazując cytaty dotyczące punktów stworzonych przez Whiteheada, możemy powiedzieć: daną chwilę definiujemy jako zbiór wszystkich zdarzeń, o których naturalnie powiemy, że wszystkie one w niej występują. Russell [1914] opisuje tworzenie natychmiastowej wiadomości nieformalnie następującymi słowami:

Chwile

Ze zdarzeń jako „składników świata rzeczywistego” Russell [1914, 1936] skonstruował abstrakcyjne obiekty zwane *chwilami* (*instants*), jako pewne dystrybucyjne zbiory zdarzeń. Dana chwila ma być zbiorem wszystkich jednoczesnych zdarzeń, czyli mówiąc obrazowo — takich, które mają przynajmniej jeden wspólny moment trwania. Parafrazując cytat dotyczący punktów stworzonych przez Whiteheada, możemy powiedzieć: daną chwilę definiujemy jako zbiór wszystkich zdarzeń, o których naturalnie powiemy, że wszystkie one w niej występują. Russell [1914] opisuje tworzenie natychmiastowej wiadomości nieformalnie następującymi słowami:

Weźmy grupę zdarzeń, z których dowolne dwa nakładają się na siebie, tak aby był jakiś czas, choćby krótki, kiedy wszystkie zaistnieją. Jeśli jest jakieś inne zdarzenie, które jest jednoczesne z nimi wszystkimi, dodajmy je do grupy; idźmy dalej, aż skonstruujemy taką grupę, że żadne zdarzenie z poza grupy nie jest równoczesne z nimi wszystkimi, ale wszystkie zdarzenia wewnątrz grupy są ze sobą jednoczesne. Zdefiniujmy całą tę grupę jako chwilę czasu.

Chwile

Bardziej formalnie opisał to Russell na początku artykułu [1936]:

*Ogólnie przyjmuje się, że chwile są matematycznymi konstrukcjami, a nie fizycznymi przedmiotami. Jeśli zatem chwile są, to muszą one być klasami zdarzeń o określonych właściwościach. Z powodów wyjaśnionych w *Our Knowledge of the External World*, strony 116–120, chwila jest najbardziej naturalnie definiowana jako grupa zdarzeń mająca następujące dwie właściwości:*

- 1 *Dowolne dwa elementy tej grupy czasowo zachodzą na siebie [...].*
- 2 *Nie istnieje zdarzenie z poza tej grupy, które czasowo zachodzi na wszystkie zdarzenie z tej grupy.*

Chwile

Bardziej formalnie opisał to Russell na początku artykułu [1936]:

*Ogólnie przyjmuje się, że chwile są matematycznymi konstrukcjami, a nie fizycznymi przedmiotami. Jeśli zatem chwile są, to muszą one być klasami zdarzeń o określonych właściwościach. Z powodów wyjaśnionych w *Our Knowledge of the External World*, strony 116–120, chwila jest najbardziej naturalnie definiowana jako grupa zdarzeń mająca następujące dwie właściwości:*

- ❶ *Dowolne dwa elementy tej grupy czasowo zachodzą na siebie [...].*
- ❷ *Nie istnieje zdarzenie z poza tej grupy, które czasowo zachodzi na wszystkie zdarzenie z tej grupy.*

Zatem dla Russella zbiór α zdarzeń jest chwilą (*instant*) wtw α spełnia następujące dwa warunki:

$$(c1) \quad \neg \exists u \in U (u \notin \alpha \wedge \forall x \in \alpha \ u S x).$$

$$(c2) \quad \forall x, y \in \alpha \ x S y,$$

Chwile

Para podanych warunków jest logicznie równoważna następującym:

$$\forall u \in U (u \in \alpha \Leftrightarrow \forall x \in \alpha u S x), \quad \text{i.e., } \alpha = \{u \in U : \forall x \in \alpha u S x\}. \quad (\text{In})$$

Chwile

Para podanych warunków jest logicznie równoważna następującym:

$$\forall u \in U (u \in \alpha \Leftrightarrow \forall x \in \alpha u S x), \quad \text{i.e., } \alpha = \{u \in U : \forall x \in \alpha u S x\}. \quad (\text{In})$$

Niech **In** będzie rodziną wszystkich chwili.

Chwile

Para podanych warunków jest logicznie równoważna następującym:

$$\forall u \in \mathbb{U} (u \in \alpha \Leftrightarrow \forall x \in \alpha \ u S x), \quad \text{i.e., } \alpha = \{u \in \mathbb{U} : \forall x \in \alpha \ u S x\}. \quad (\text{In})$$

Niech **In** będzie rodziną wszystkich chwil.

Ponieważ $\{u \in \mathbb{U} : \forall x \in \alpha : u S x\} = \bigcap \{\vec{S}'x : x \in \alpha\}$, dowolna chwila α będzie spełniać następującą równość:

$$\alpha = \bigcap \{\vec{S}'x : x \in \alpha\}. \quad (\text{In}')$$

Chwile

Para podanych warunków jest logicznie równoważna następującym:

$$\forall u \in \mathbb{U} (u \in \alpha \Leftrightarrow \forall x \in \alpha \ u S x), \quad \text{i.e., } \alpha = \{u \in \mathbb{U} : \forall x \in \alpha \ u S x\}. \quad (\text{In})$$

Niech **In** będzie rodziną wszystkich chwil.

Ponieważ $\{u \in \mathbb{U} : \forall x \in \alpha : u S x\} = \bigcap \{\vec{S}'x : x \in \alpha\}$, dowolna chwila α będzie spełniać następującą równość:

$$\alpha = \bigcap \{\vec{S}'x : x \in \alpha\}. \quad (\text{In}')$$

Powyższe odpowiada definicji zastosowanej przez Russella w [1936].

Chwile

Para podanych warunków jest logicznie równoważna następującym:

$$\forall u \in \mathbb{U} (u \in \alpha \Leftrightarrow \forall x \in \alpha \ u S x), \quad \text{i.e., } \alpha = \{u \in \mathbb{U} : \forall x \in \alpha \ u S x\}. \quad (\text{In})$$

Niech **In** będzie rodziną wszystkich chwil.

Ponieważ $\{u \in \mathbb{U} : \forall x \in \alpha : u S x\} = \bigcap \{\vec{S}'x : x \in \alpha\}$, dowolna chwila α będzie spełniać następującą równość:

$$\alpha = \bigcap \{\vec{S}'x : x \in \alpha\}. \quad (\text{In}')$$

Powyższe odpowiada definicji zastosowanej przez Russella w [1936].

Używając warunków (c1) i (c2) otrzymujemy następujące kryterium tożsamości momentów:

$$\forall \alpha, \beta \in \text{In} (\alpha = \beta \iff \forall x \in \alpha \forall y \in \beta \ x S y). \quad (13)$$

Chwile

Co więcej, ostatni cytat pokazuje, że intencją Russella było, aby chwile były maksymalnymi zbiorami zdarzeń (względem relacji zawierania). Rzeczywiście, używając (13), możemy udowodnić:

Chwile

Co więcej, ostatni cytat pokazuje, że intencją Russella było, aby chwile były maksymalnymi zbiorami zdarzeń (względem relacji zawierania). Rzeczywiście, używając (13), możemy udowodnić:

Fact 1

Zbiór I_n jest identyczny z rodziną wszystkich maksymalnych zbiorów zdarzeń spełniających warunek (c2).

Chwile

Co więcej, ostatni cytat pokazuje, że intencją Russella było, aby chwile były maksymalnymi zbiorami zdarzeń (względem relacji zawierania). Rzeczywiście, używając (13), możemy udowodnić:

Fact 1

Zbiór \mathbf{In} jest identyczny z rodziną wszystkich maksymalnych zbiorów zdarzeń spełniających warunek (c2).

Bardziej precyzyjnie::

- 1 *Wszystkie zbiory z \mathbf{In} are maksymalne, tj. dla wszystkich $\alpha, \beta \in \mathbf{In}$, jeśli $\alpha \subseteq \beta$, to $\alpha = \beta$.*
- 2 *Wszystkie maksymalne zbiory spełniające (c2) należą do \mathbf{In} .*

Chwile

Co więcej, ostatni cytat pokazuje, że intencją Russella było, aby chwile były maksymalnymi zbiorami zdarzeń (względem relacji zawierania). Rzeczywiście, używając (13), możemy udowodnić:

Fact 1

Zbiór \mathbf{In} jest identyczny z rodziną wszystkich maksymalnych zbiorów zdarzeń spełniających warunek (c2).

Bardziej precyzyjnie::

- 1 *Wszystkie zbiory z \mathbf{In} are maksymalne, tj. dla wszystkich $\alpha, \beta \in \mathbf{In}$, jeśli $\alpha \subseteq \beta$, to $\alpha = \beta$.*
- 2 *Wszystkie maksymalne zbiory spełniające (c2) należą do \mathbf{In} .*

Ponieważ istnieje co najmniej jedno zdarzenie, dzięki (c1) otrzymujemy, że żadna chwila nie jest zbiorem pustym.

Każde zdarzenie jest „w” co najmniej jednej chwili

Możemy również uzyskać, że rodzina \mathbf{In} nie jest pusta, tj. istnieje co najmniej jedna chwila. Co więcej, można to udowodnić

że każde zdarzenie jest „w” co najmniej jednej chwili, tj. że przy jakimkolwiek zdarzeniu istnieje co najmniej jedna klasa, której używaliśmy przy definiowaniu chwil, której jest składnikiem. W tym celu [...] zostanie pokazane, że [klasa zdarzeń współistniejących z początkiem danego zdarzenia] jest pierwszą chwilą, w której dane zdarzenie istnieje.

[Russell, 1914]

Każde zdarzenie jest „w” co najmniej jednej chwili

Możemy również uzyskać, że rodzina \mathbf{In} nie jest pusta, tj. istnieje co najmniej jedna chwila. Co więcej, można to udowodnić

że każde zdarzenie jest „w” co najmniej jednej chwili, tj. że przy jakimkolwiek zdarzeniu istnieje co najmniej jedna klasa, której używaliśmy przy definiowaniu chwil, której jest składnikiem. W tym celu [...] zostanie pokazane, że [klasa zdarzeń współistniejących z początkiem danego zdarzenia] jest pierwszą chwilą, w której dane zdarzenie istnieje.

[Russell, 1914]

Zatem dla dowolnego zdarzenia x Russell wybiera następujący zbiór (jako chwilę):

$$\phi_x := \{u \in \mathbf{U} : u \text{ IC } x\} \quad (\text{df } \phi_x)$$

Każde zdarzenie jest „w” co najmniej jednej chwili

Możemy również uzyskać, że rodzina \mathbf{In} nie jest pusta, tj. istnieje co najmniej jedna chwila. Co więcej, można to udowodnić

że każde zdarzenie jest „w” co najmniej jednej chwili, tj. że przy jakimkolwiek zdarzeniu istnieje co najmniej jedna klasa, której używaliśmy przy definiowaniu chwil, której jest składnikiem. W tym celu [...] zostanie pokazane, że [klasa zdarzeń współistniejących z początkiem danego zdarzenia] jest pierwszą chwilą, w której dane zdarzenie istnieje.

[Russell, 1914]

Zatem dla dowolnego zdarzenia x Russell wybiera następujący zbiór (jako chwilę):

$$\phi_x := \{u \in \mathbf{U} : u \text{ IC } x\} \quad (\text{df } \phi_x)$$

Ale żeby powiedzieć, że ϕ_x „jest pierwszą chwilą, w której $[x]$ istnieje” musimy mieć jakiś porządek w zbiorze \mathbf{In} (który dalej przedstawimy).

Teraz zauważmy, że w świetle (df IC), zwrotności IC, (s_s) , (\star_E^{\leftarrow}) , (c_p^S) i (e') , możemy udowodnić że:

Fact 2

Dla każdego zdarzenia x zbiór ϕ_x jest taką chwilą, że $x \in \phi_x$.

Teraz zauważmy, że w świetle (df IC), zwrotności IC, (s_s) , (\star_E^{\leftarrow}) , (c_p^S) i (e') , możemy udowodnić że:

Fact 2

Dla każdego zdarzenia x zbiór ϕ_x jest taką chwilą, że $x \in \phi_x$.

To $\mathbf{In} \neq \emptyset$ zostało udowodnione konstruktywnie. Tak więc, bez użycia aksjomatu wyboru uzyskujemy istnienie maksymalnych niepustych podzbiorów \mathbf{U} spełniających warunek (c2).

Teraz zauważmy, że w świetle (df IC), zwrotności IC, (s_s) , (\star_E^{\leftarrow}) , (c_p^S) i (e') , możemy udowodnić że:

Fact 2

Dla każdego zdarzenia x zbiór ϕ_x jest taką chwilą, że $x \in \phi_x$.

To $\mathbf{In} \neq \emptyset$ zostało udowodnione konstruktywnie. Tak więc, bez użycia aksjomatu wyboru uzyskujemy istnienie maksymalnych niepustych podzbiorów \mathcal{U} spełniających warunek (c2).

Dla dowolnego zdarzenia x kładziemy:

$$\mathbb{I}_x := \{\alpha \in \mathbf{In} : x \in \alpha\},$$

tj. \mathbb{I}_x jest rodziną chwil, w których x istnieje.

Teraz zauważmy, że w świetle (df IC), zwrotności IC, (s_s) , (\star_E^{\leftarrow}) , (c_p^S) i (e') , możemy udowodnić że:

Fact 2

Dla każdego zdarzenia x zbiór ϕ_x jest taką chwilą, że $x \in \phi_x$.

To $\mathbf{In} \neq \emptyset$ zostało udowodnione konstruktywnie. Tak więc, bez użycia aksjomatu wyboru uzyskujemy istnienie maksymalnych niepustych podzbiorów \mathbf{U} spełniających warunek (c2).

Dla dowolnego zdarzenia x kładziemy:

$$\mathbb{I}_x := \{\alpha \in \mathbf{In} : x \in \alpha\},$$

tj. \mathbb{I}_x jest rodziną chwil, w których x istnieje.

Z Faktu 2 mamy, że $\phi_x \in \mathbb{I}_x \neq \emptyset$.

Relacja *jest przed* w rodzinie chwil

Russell [1914] przyjął, że:

jedna chwila jest przed drugą, jeśli grupa, która jest jedną chwilą, zawiera zdarzenie, które jest wcześniejsze niż, ale nie jednocześnie z jakimś zdarzeniem w grupie, która jest drugą chwilą.

Relacja *jest przed* w rodzinie chwil

Russell [1914] przyjął, że:

jedna chwila jest przed drugą, jeśli grupa, która jest jedną chwilą, zawiera zdarzenie, które jest wcześniejsze niż, ale nie jednocześnie z jakimś zdarzeniem w grupie, która jest drugą chwilą.

Formalnie wprowadzamy binarną relację \prec , *jest przed*(*is before*) w rodzinie **In**:

$$\alpha \prec \beta \iff \exists x \in \alpha \exists y \in \beta x P y. \quad (\text{df } \prec)$$

Relacja *jest przed* w rodzinie chwil

Russell [1914] przyjął, że:

jedna chwila jest przed drugą, jeśli grupa, która jest jedną chwilą, zawiera zdarzenie, które jest wcześniejsze niż, ale nie jednocześnie z jakimś zdarzeniem w grupie, która jest drugą chwilą.

Formalnie wprowadzamy binarną relację \prec , *jest przed*(*is before*) w rodzinie **In**:

$$\alpha \prec \beta \iff \exists x \in \alpha \exists y \in \beta x P y. \quad (\text{df } \prec)$$

Russell kończy poprzednio cytowany fragment następującymi słowami:

Pozostaje pokazać, że [dana chwila jako grupa zdarzeń] ma właściwości, których oczekujemy od chwili." Russell stawia trzy wymogi.

Pierwszy wymóg

Pierwszy wymóg mówi, że relacja \prec ma ostro totalnie porządkować rodzinę \mathbf{In} .

Pierwszy wymóg

Pierwszy wymóg mówi, że relacja \prec ma ostro totalnie porządkować rodzinę \mathbf{In} .

Można to udowodnić stosując przyjęte definicje, (t_{+p}) , (13) i (c_p^S) .

Pierwszy wymóg

Pierwszy wymóg mówi, że relacja $<$ ma ostro totalnie porządkować rodzinę \mathbf{In} .

Można to udowodnić stosując przyjęte definicje, (\mathbf{t}_{+p}) , (13) i (\mathbf{c}_p^S) .

Relacja $<$ jest przeciwzwrotna, przechodnia i liniowa (connex):

$$\forall \alpha \in \mathbf{In} \alpha \not< \alpha, \quad (\mathbf{irr}_{<})$$

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{In} (\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma \implies \alpha < \gamma), \quad (\mathbf{t}_{<})$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{In} (\alpha \neq \beta \implies \alpha < \beta \vee \beta < \alpha), \quad (\mathbf{c}_{<})$$

Pierwszy wymóg

Pierwszy wymóg mówi, że relacja $<$ ma ostro totalnie porządkować rodzinę \mathbf{In} .

Można to udowodnić stosując przyjęte definicje, $(\mathbf{t}+_{\mathbf{p}})$, (13) i $(\mathbf{c}_{\mathbf{p}}^S)$.

Relacja $<$ jest przeciwzwrotna, przechodnia i liniowa (connex):

$$\forall \alpha \in \mathbf{In} \alpha \not< \alpha, \quad (\mathbf{irr}_{<})$$

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{In} (\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma \implies \alpha < \gamma), \quad (\mathbf{t}_{<})$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{In} (\alpha \neq \beta \implies \alpha < \beta \vee \beta < \alpha), \quad (\mathbf{c}_{<})$$

Zatem $<$ jest również asymetryczna i ko-przechodnia:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{In} (\alpha < \beta \implies \beta \not< \alpha), \quad (\mathbf{as}_{<})$$

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{In} (\alpha < \beta \implies \alpha < \gamma \vee \gamma < \beta). \quad (\mathbf{ct}_{<})$$

Pierwszy wymóg

Pierwszy wymóg mówi, że relacja $<$ ma ostro totalnie porządkować rodzinę \mathbf{In} .

Można to udowodnić stosując przyjęte definicje, (\mathbf{t}_p) , (13) i (\mathbf{c}_p^S) .

Relacja $<$ jest przeciwzwrotna, przechodnia i liniowa (connex):

$$\forall \alpha \in \mathbf{In} \alpha \not< \alpha, \quad (\mathbf{irr}_{<})$$

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{In} (\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma \implies \alpha < \gamma), \quad (\mathbf{t}_{<})$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{In} (\alpha \neq \beta \implies \alpha < \beta \vee \beta < \alpha), \quad (\mathbf{c}_{<})$$

Zatem $<$ jest również asymetryczna i ko-przechodnia:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{In} (\alpha < \beta \implies \beta \not< \alpha), \quad (\mathbf{as}_{<})$$

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{In} (\alpha < \beta \implies \alpha < \gamma \vee \gamma < \beta). \quad (\mathbf{ct}_{<})$$

Standardowo dla wszystkich $\alpha, \beta \in \mathbf{In}$ kładziemy:

$$\alpha \preceq \beta :\iff \alpha < \beta \vee \alpha = \beta. \quad (\mathbf{df} \preceq)$$

Pierwszy wymóg

Pierwszy wymóg mówi, że relacja \prec ma ostro totalnie porządkować rodzinę \mathbf{In} .

Można to udowodnić stosując przyjęte definicje, (\mathbf{t}_p) , (13) i (\mathbf{c}_p^S) .

Relacja \prec jest przeciwzwrotna, przechodnia i liniowa (connex):

$$\forall \alpha \in \mathbf{In} \alpha \not\prec \alpha, \quad (\mathbf{irr}_{\prec})$$

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{In} (\alpha \prec \beta \wedge \beta \prec \gamma \implies \alpha \prec \gamma), \quad (\mathbf{t}_{\prec})$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{In} (\alpha \neq \beta \implies \alpha \prec \beta \vee \beta \prec \alpha), \quad (\mathbf{c}_{\prec})$$

Zatem \prec jest również asymetryczna i ko-przechodnia:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{In} (\alpha \prec \beta \implies \beta \not\prec \alpha), \quad (\mathbf{as}_{\prec})$$

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{In} (\alpha \prec \beta \implies \alpha \prec \gamma \vee \gamma \prec \beta). \quad (\mathbf{ct}_{\prec})$$

Standardowo dla wszystkich $\alpha, \beta \in \mathbf{In}$ kładziemy:

$$\alpha \preceq \beta :\iff \alpha \prec \beta \vee \alpha = \beta. \quad (\mathbf{df} \preceq)$$

Relacja \preceq jest totalnym porządkiem w \mathbf{In} .

Własności relacji <

Dzięki (c2) i $(\star_{\mathbb{E}}^{\leftarrow})$, możemy udowodnić:

$$\forall \alpha \in \text{In} \forall x, y \in \alpha \forall u \in \text{U} (x P u \implies y E u). \quad (14)$$

Własności relacji $<$

Dzięki (c2) i $(\star_{\mathbb{E}}^{\leftarrow})$, możemy udowodnić:

$$\forall \alpha \in \text{In} \forall x, y \in \alpha \forall u \in \mathbb{U} (x P u \implies y E u). \quad (14)$$

Z (14) potrafimy uzyskać:

$$\forall \alpha \in \text{In} \forall x \in \alpha \quad \alpha \not\prec \phi_x \quad \forall x \in \mathbb{U} \neg \exists \alpha \in \mathbb{I}_x \quad \alpha < \phi_x. \quad (15)$$

Zatem ϕ_x jest minimalnym elementem w \mathbb{I}_x , gdyż $\phi_x \in \mathbb{I}_x$.

Własności relacji \prec

Dzięki (c2) i $(\star_{\mathbb{E}}^{\leftarrow})$, możemy udowodnić:

$$\forall \alpha \in \text{In} \forall x, y \in \alpha \forall u \in \text{U} (x P u \implies y E u). \quad (14)$$

Z (14) potrafimy uzyskać:

$$\forall \alpha \in \text{In} \forall x \in \alpha \alpha \not\prec \phi_x \quad \forall x \in \text{U} \neg \exists \alpha \in \mathbb{I}_x \alpha \prec \phi_x. \quad (15)$$

Zatem ϕ_x jest minimalnym elementem w \mathbb{I}_x , gdyż $\phi_x \in \mathbb{I}_x$.

Z (c $_{\prec}$) i (15), ponieważ $x \in \phi_x$, otrzymujemy, że ϕ_x jest pierwszą chwilą, w której x istnieje. Formalnie:

$$\forall x \in \text{U} \forall \alpha \in \mathbb{I}_x \phi_x \preceq \alpha. \quad (16)$$

Własności relacji $<$

Dzięki (c2) i (\star_E^{\leftarrow}) , możemy udowodnić:

$$\forall \alpha \in \text{In} \forall x, y \in \alpha \forall u \in \text{U} (x P u \implies y E u). \quad (14)$$

Z (14) potrafimy uzyskać:

$$\forall \alpha \in \text{In} \forall x \in \alpha \alpha \not\prec \phi_x \quad \forall x \in \text{U} \neg \exists \alpha \in \mathbb{I}_x \alpha < \phi_x. \quad (15)$$

Zatem ϕ_x jest minimalnym elementem w \mathbb{I}_x , gdyż $\phi_x \in \mathbb{I}_x$.

Z (c $<$) i (15), ponieważ $x \in \phi_x$, otrzymujemy, że ϕ_x jest pierwszą chwilą, w której x istnieje. Formalnie:

$$\forall x \in \text{U} \forall \alpha \in \mathbb{I}_x \phi_x \preceq \alpha. \quad (16)$$

Z Faktu 2, (as $_E$), (15), (c $<$), (t $_P^E$) i (ct $_E$) możemy dostać:

$$\forall x, y \in \text{U} (x E y \iff \phi_x < \phi_y). \quad (17)$$

Własności relacji $<$

Dzięki (c2) i (\star_E^{\leftarrow}) , możemy udowodnić:

$$\forall \alpha \in \text{In} \forall x, y \in \alpha \forall u \in \text{U} (x P u \implies y E u). \quad (14)$$

Z (14) potrafimy uzyskać:

$$\forall \alpha \in \text{In} \forall x \in \alpha \alpha \not\prec \phi_x \quad \forall x \in \text{U} \neg \exists \alpha \in \mathbb{I}_x \alpha < \phi_x. \quad (15)$$

Zatem ϕ_x jest minimalnym elementem w \mathbb{I}_x , gdyż $\phi_x \in \mathbb{I}_x$.

Z (c $_{<}$) i (15), ponieważ $x \in \phi_x$, otrzymujemy, że ϕ_x jest pierwszą chwilą, w której x istnieje. Formalnie:

$$\forall x \in \text{U} \forall \alpha \in \mathbb{I}_x \phi_x \preceq \alpha. \quad (16)$$

Z Faktu 2, (as $_E$), (15), (c $_{<}$), (t $_P^E$) i (ct $_E$) możemy dostać:

$$\forall x, y \in \text{U} (x E y \iff \phi_x < \phi_y). \quad (17)$$

Stąd i z (c $_{<}$) mamy:

$$\forall x, y \in \text{U} (\neg x E y \iff \phi_y \preceq \phi_x). \quad (18)$$

Drugi wymóg

Drugi wymóg Russella dotyczące **In** i \prec składa się z trzech części:

[...] każde zdarzenie musi mieć określoną liczbę chwil; dwa zdarzenia są jednoczesne, jeśli są w tej samej chwili, a jedno jest przed drugim, jeśli jest chwila, w której jest to jedno, które jest wcześniejsze niż moment, w którym drugie jest.

Drugi wymóg

Drugi wymóg Russella dotyczące \mathbf{In} i \prec składa się z trzech części:

[...] każde zdarzenie musi mieć określoną liczbę chwil; dwa zdarzenia są jednoczesne, jeśli są w tej samej chwili, a jedno jest przed drugim, jeśli jest chwila, w której jest to jedno, które jest wcześniejsze niż moment, w którym drugie jest.

Jak dotąd pokazaliśmy tylko, że ϕ_x jest pierwszą chwilą, w której dane zdarzenie x istnieje. Nie znaleźliśmy jednak „określonej liczby momentów”, w których zdarzenie ma miejsce.

Drugi wymóg

Drugi wymóg Russella dotyczące \mathbf{In} i \prec składa się z trzech części:

[...] każde zdarzenie musi mieć określoną liczbę chwil; dwa zdarzenia są jednoczesne, jeśli są w tej samej chwili, a jedno jest przed drugim, jeśli jest chwila, w której jest to jedno, które jest wcześniejsze niż moment, w którym drugie jest.

Jak dotąd pokazaliśmy tylko, że ϕ_x jest pierwszą chwilą, w której dane zdarzenie x istnieje. Nie znaleźliśmy jednak „określonej liczby momentów”, w których zdarzenie ma miejsce.

Z Faktu 2 i (\mathbf{as}_E), (c2), możemy jedynie otrzymać, że „dwa zdarzenia są jednoczesne jeśli są w tej samej chwili”. Mamy równoważność:

$$\forall_{x,y \in U} (x \text{ S } y \iff \exists_{\alpha \in \mathfrak{S}} x, y \in \alpha \iff \mathbb{I}_x \cap \mathbb{I}_y \neq \emptyset). \quad (19)$$

Drugi wymóg

Drugi wymóg Russella dotyczące \mathbf{In} i \prec składa się z trzech części:

[...] każde zdarzenie musi mieć określoną liczbę chwil; dwa zdarzenia są jednoczesne, jeśli są w tej samej chwili, a jedno jest przed drugim, jeśli jest chwila, w której jest to jedno, które jest wcześniejsze niż moment, w którym drugie jest.

Jak dotąd pokazaliśmy tylko, że ϕ_x jest pierwszą chwilą, w której dane zdarzenie x istnieje. Nie znaleźliśmy jednak „określonej liczby momentów”, w których zdarzenie ma miejsce.

Z Faktu 2 i (\mathbf{as}_E), (c2), możemy jedynie otrzymać, że „dwa zdarzenia są jednoczesne jeśli są w tej samej chwili”. Mamy równoważność:

$$\forall_{x,y \in U} (x \mathbf{S} y \iff \exists_{\alpha \in \mathfrak{S}} x, y \in \alpha \iff \mathbb{I}_x \cap \mathbb{I}_y \neq \emptyset). \quad (19)$$

Zatem z (c1), (c2) i ($\mathbf{df}_S \sqsubseteq_t$) mamy:

$$\forall_{x,y \in U} (x \sqsubseteq_t y \iff \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I}_y). \quad (20)$$

Drugi wymóg

Drugi wymóg Russella dotyczące **In** i \prec składa się z trzech części:

[...] każde zdarzenie musi mieć określoną liczbę chwil; dwa zdarzenia są jednoczesne, jeśli są w tej samej chwili, a jedno jest przed drugim, jeśli jest chwila, w której jest to jedno, które jest wcześniejsze niż moment, w którym drugie jest.

Jak dotąd pokazaliśmy tylko, że ϕ_x jest pierwszą chwilą, w której dane zdarzenie x istnieje. Nie znaleźliśmy jednak „określonej liczby momentów”, w których zdarzenie ma miejsce.

Z Faktu 2 i (**as_E**), (c2), możemy jedynie otrzymać, że „dwa zdarzenia są jednoczesne jeśli są w tej samej chwili”. Mamy równoważność:

$$\forall_{x,y \in U} (x \text{ S } y \iff \exists_{\alpha \in \mathfrak{S}} x, y \in \alpha \iff \mathbb{I}_x \cap \mathbb{I}_y \neq \emptyset). \quad (19)$$

Zatem z (c1), (c2) i (**df_S⊆_t**) mamy:

$$\forall_{x,y \in U} (x \text{ ⊆_t } y \iff \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I}_y). \quad (20)$$

Stąd stosując (**df_{⊆_t}CS**), mamy:

$$\forall_{x,y \in U} (x \text{ CS } y \iff \mathbb{I}_x = \mathbb{I}_y). \quad (21)$$

Trzeci wymóg

Trzeci wymóg mówi, że relacja \prec jest gęsta w \mathbf{In} , tj.:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{In} (\alpha \prec \beta \implies \exists \gamma \in \mathbf{In} (\alpha \prec \gamma \wedge \gamma \prec \beta)). \quad (\mathbf{d}_{\prec})$$

Trzeci wymóg

Trzeci wymóg mówi, że relacja $<$ jest gęsta w \mathbf{In} , tj.:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{In} (\alpha < \beta \implies \exists \gamma \in \mathbf{In} (\alpha < \gamma \wedge \gamma < \beta)). \quad (\mathbf{d}_{<})$$

Aby to osiągnąć, Russell [1914] przyjął pewien warunek, który powtórzył w punkcie III przypisu 1 jako: „(f) Jeśli jedno zdarzenie całkowicie poprzedza drugie, to istnieje zdarzenie całkowicie po pierwszym i jednocześnie z jakimś, której całkowicie występuje przed drugim.”

Formalnie:

$$\mathbf{a7} \quad \forall x, y \in \mathbf{U} (x P y \implies \exists z \in \mathbf{U} (x P z \wedge \exists u \in \mathbf{U} (z S u \wedge u P y))). \quad (\mathbf{f})$$

Trzeci wymóg

Trzeci wymóg mówi, że relacja $<$ jest gęsta w \mathbf{In} , tj.:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{In} (\alpha < \beta \implies \exists \gamma \in \mathbf{In} (\alpha < \gamma \wedge \gamma < \beta)). \quad (\mathbf{d}_{<})$$

Aby to osiągnąć, Russell [1914] przyjął pewien warunek, który powtórzył w punkcie III przypisu 1 jako: „(f) Jeśli jedno zdarzenie całkowicie poprzedza drugie, to istnieje zdarzenie całkowicie po pierwszym i jednocześnie z jakimś, której całkowicie występuje przed drugim.”

Formalnie:

$$\text{a7} \quad \forall x, y \in \mathbf{U} (x P y \implies \exists z \in \mathbf{U} (x P z \wedge \exists u \in \mathbf{U} (z S u \wedge u P y))). \quad (\mathbf{f})$$

Dzięki $(\star_{\mathbf{E}}^{\leftarrow})$ mamy:

$$\forall x, y \in \mathbf{U} (x P y \implies \exists z \in \mathbf{U} (x P z \wedge z E y)). \quad (\mathbf{f}')$$

Trzeci wymóg

Trzeci wymóg mówi, że relacja $<$ jest gęsta w \mathbf{In} , tj.:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{In} (\alpha < \beta \implies \exists \gamma \in \mathbf{In} (\alpha < \gamma \wedge \gamma < \beta)). \quad (\mathbf{d}_{<})$$

Aby to osiągnąć, Russell [1914] przyjął pewien warunek, który powtórzył w punkcie III przypisu 1 jako: „(f) Jeśli jedno zdarzenie całkowicie poprzedza drugie, to istnieje zdarzenie całkowicie po pierwszym i jednocześnie z jakimś, której całkowicie występuje przed drugim.”

Formalnie:

$$\mathbf{a7} \quad \forall x, y \in \mathbf{U} (x P y \implies \exists z \in \mathbf{U} (x P z \wedge \exists u \in \mathbf{U} (z S u \wedge u P y))). \quad (\mathbf{f})$$

Dzięki $(\star_{\mathbf{E}}^{\leftarrow})$ mamy:

$$\forall x, y \in \mathbf{U} (x P y \implies \exists z \in \mathbf{U} (x P z \wedge z E y)). \quad (\mathbf{f}')$$

Można udowodnić, że $(\mathbf{d}_{<})$ wynika z Faktu 2 oraz warunków (\mathbf{f}') , (16), (17), $(\mathbf{t}_{<})$.

Druga teoria zdarzeń i chwil Russella

Druga teoria zdarzeń i chwil Russell [1936] to teoria struktur o postaci $\langle \mathcal{U}, P \rangle$, gdzie \mathcal{U} to niepuste uniwersum złożone ze zdarzeń, a P to relacja binarna w \mathcal{U} .

Druga teoria zdarzeń i chwil Russella

Druga teoria zdarzeń i chwil Russell [1936] to teoria struktur o postaci $\langle \mathcal{U}, P \rangle$, gdzie \mathcal{U} to niepuste uniwersum złożone ze zdarzeń, a P to relacja binarna w \mathcal{U} .

W takich strukturach Russell definiuje relację $S := \bar{P} \setminus \check{P}$, tj. w notacji elementarnej używa warunku ($df_P S$).

Druga teoria zdarzeń i chwil Russella

Druga teoria zdarzeń i chwil Russell [1936] to teoria struktur o postaci $\langle \mathcal{U}, P \rangle$, gdzie \mathcal{U} to niepuste uniwersum złożone ze zdarzeń, a P to relacja binarna w \mathcal{U} .

W takich strukturach Russell definiuje relację $S := \bar{P} \setminus \check{P}$, tj. w notacji elementarnej używa warunku ($df_P S$).

Pierwsze trzy aksjomaty drugiej teorii Russella wyrażają przeciwzwrotność relacji P oraz przechodniość dwóch relacji P i $S \circ P$. Tak więc w notacji elementarnej Russell użył warunków:

$$\forall x, y, z \in \mathcal{U} \left(\exists u \in \mathcal{U} (x S u \wedge u P y) \wedge \exists u \in \mathcal{U} (y S u \wedge u P z) \implies \exists u \in \mathcal{U} (y S u \wedge u P z) \right). \quad (t_{S \circ P})$$

Druga teoria zdarzeń i chwil Russella

Druga teoria zdarzeń i chwil Russell [1936] to teoria struktur o postaci $\langle \mathcal{U}, P \rangle$, gdzie \mathcal{U} to niepuste uniwersum złożone ze zdarzeń, a P to relacja binarna w \mathcal{U} .

W takich strukturach Russell definiuje relację $S := \bar{P} \setminus \check{P}$, tj. w notacji elementarnej używa warunku (df_PS).

Pierwsze trzy aksjomaty drugiej teorii Russella wyrażają przeciwzwrotność relacji P oraz przechodniość dwóch relacji P i $S \circ P$. Tak więc w notacji elementarnej Russell użył warunków:

$$\forall x, y, z \in \mathcal{U} \left(\exists u \in \mathcal{U} (x S u \wedge u P y) \wedge \exists u \in \mathcal{U} (y S u \wedge u P z) \implies \exists u \in \mathcal{U} (y S u \wedge u P z) \right). \quad (\tau_{S \circ P})$$

W [1936] Russell użył także relacje: *zaczyna się przed* $:= S \circ P$, *zaczyna się po* $:= \check{P} \circ S$, *kończy się po* $:= S \circ \check{P}$ i *kończy się przed* $:= P \circ \check{S}$.

Druga teoria zdarzeń i chwil Russella

Druga teoria zdarzeń i chwil Russell [1936] to teoria struktur o postaci $\langle U, P \rangle$, gdzie U to niepuste uniwersum złożone ze zdarzeń, a P to relacja binarna w U .

W takich strukturach Russell definiuje relację $S := \bar{P} \setminus \check{P}$, tj. w notacji elementarnej używa warunku (df_PS).

Pierwsze trzy aksjomaty drugiej teorii Russella wyrażają przeciwzwrotność relacji P oraz przechodniość dwóch relacji P i $S \circ P$. Tak więc w notacji elementarnej Russell użył warunków:

$$\forall x, y, z \in U \left(\exists u \in U (x S u \wedge u P y) \wedge \exists u \in U (y S u \wedge u P z) \implies \exists u \in U (y S u \wedge u P z) \right). \quad (\tau_{S \circ P})$$

W [1936] Russell użył także relacje: *zaczyna się przed* $:= S \circ P$, *zaczyna się po* $:= \check{P} \circ S$, *kończy się po* $:= \check{S} \circ \check{P}$ i *kończy się przed* $:= P \circ \check{S}$. Ponieważ S jest symetryczne, tj. $\check{S} = S$, *zaczyna się po* i *kończy się przed* są odwrotne do *zaczyna się przed* i *kończy się po*.

Porównanie obu teorii Russella

Aby porównać teorię z [1936] z teorią z [1914] musimy zdefiniować relację E w tej pierwszej. W tym celu założmy, że $E := S \circ P =:$ *zaczyna się przed*.

Porównanie obu teorii Russella

Aby porównać teorię z [1936] z teorią z [1914] musimy zdefiniować relację E w tej pierwszej. W tym celu założmy, że $E := S \circ P =:$ *zaczyna się przed*.

Możemy udowodnić, że fragment drugiej teorii Russella oparty na trzech pierwszych aksjomatach jest definitywnie równoważny fragmentowi jego pierwszej teorii opartej na aksjomatach $a1$ – $a5$, czyli możemy udowodnić, że:

Theorem 3

Teoria oparta na (irr_P) , (t_P) , $(\text{t}_{S \circ P})$, $(\text{df}_P S)$ i (\star_E) jest równoważna z teorią opartą na $a1$ – $a5$ i $(\text{df } P)$.

Porównanie obu teorii Russella

Aby porównać teorię z [1936] z teorią z [1914] musimy zdefiniować relację E w tej pierwszej. W tym celu założmy, że $E := S \circ P =:$ *zaczyna się przed*.

Możemy udowodnić, że fragment drugiej teorii Russella oparty na trzech pierwszych aksjomatach jest definitywnie równoważny fragmentowi jego pierwszej teorii opartej na aksjomatach $a1$ – $a5$, czyli możemy udowodnić, że:

Theorem 3

Teoria oparta na (irr_P) , (t_P) , $(\text{t}_{S \circ P})$, $(\text{df}_P S)$ i (\star_E) jest równoważna z teorią opartą na $a1$ – $a5$ i $(\text{df } P)$.

Dodajmy, że w drugiej teorii Russell także przyjmuje aksjomat $a6$ (potrzebny dla otrzymania, że ϕ_x jest chwilą).

Porównanie obu teorii Russella

Aby porównać teorię z [1936] z teorią z [1914] musimy zdefiniować relację E w tej pierwszej. W tym celu założmy, że $E := S \circ P =:$ *zaczyna się przed*.

Możemy udowodnić, że fragment drugiej teorii Russella oparty na trzech pierwszych aksjomatach jest definitywnie równoważny fragmentowi jego pierwszej teorii opartej na aksjomatach $a1$ – $a5$, czyli możemy udowodnić, że:

Theorem 3

Teoria oparta na (irr_P) , (t_P) , $(\text{t}_{S \circ P})$, $(\text{df}_P S)$ i (\star_E) jest równoważna z teorią opartą na $a1$ – $a5$ i $(\text{df } P)$.

Dodajmy, że w drugiej teorii Russell także przyjmuje aksjomat $a6$ (potrzebny dla otrzymania, że ϕ_x jest chwilą).

W [1936] Russell definiuje rodzinę \mathbf{In} tak samo jak w [1914].

Teoria zdarzeń Thomasona

Teoria Thomasona z [1989], tak jak druga teoria Russella z [1936], jako pierwotne pojęcie ma relację P , którą charakteryzują dwa aksjomaty (irr_P) i (Th_P). Zatem w teorii Russella z [1936] otrzymamy oba aksjomaty teorii Thomasona.

Teoria zdarzeń Thomasona

Teoria Thomasona z [1989], tak jak druga teoria Russella z [1936], jako pierwotne pojęcie ma relację P , którą charakteryzują dwa aksjomaty (irr_P) i (Th_P). Zatem w teorii Russella z [1936] otrzymamy oba aksjomaty teorii Thomasona.

Ponadto, Thomason [1989] definiuje relacje *rozpoczyna się przed* i *kończy się przed* odpowiednio jako $\text{bb} := (\check{P})^- \circ P$ i $\text{eb} := P \circ (\check{P})^-$. A zatem, dzięki ($\text{df}_P E$), relacja bb odpowiada relacji E .

Teoria zdarzeń Thomasona

Teoria Thomasona z [1989], tak jak druga teoria Russella z [1936], jako pierwotne pojęcie ma relację P , którą charakteryzują dwa aksjomaty (irr_P) i (Th_P). Zatem w teorii Russella z [1936] otrzymamy oba aksjomaty teorii Thomasona.

Ponadto, Thomason [1989] definiuje relację *rozpoczyna się przed* i *kończy się przed* odpowiednio jako $\text{bb} := (\check{P})^- \circ P$ i $\text{eb} := P \circ (\check{P})^-$. A zatem, dzięki ($\text{df}_P \text{E}$), relacja bb odpowiada relacji E .

Dzięki uzyskanemu w teorii z [1914] warunkowi:

$$\forall x, y \in U (\exists z \in U (x P z \wedge z S y) \iff \exists z \in U (x P z \wedge \neg y P z))$$

mamy $\text{eb} = P \circ S$. A zatem relacja eb koresponduje z relacją $\check{\check{A}}$, gdyż $\check{\check{A}} = (S \circ \check{P})^- = P \circ \check{S} = P \circ S$.

Teoria zdarzeń Thomasona

Teoria Thomasona z [1989], tak jak druga teoria Russella z [1936], jako pierwotne pojęcie ma relację P , którą charakteryzują dwa aksjomaty (irr_P) i (Th_P). Zatem w teorii Russella z [1936] otrzymamy oba aksjomaty teorii Thomasona.

Ponadto, Thomason [1989] definiuje relację *rozpoczyna się przed* i *kończy się przed* odpowiednio jako $\text{bb} := (\check{P})^- \circ P$ i $\text{eb} := P \circ (\check{P})^-$. A zatem, dzięki ($\text{df}_P \text{E}$), relacja bb odpowiada relacji E .

Dzięki uzyskanemu w teorii z [1914] warunkowi:

$$\forall x, y \in U (\exists z \in U (x P z \wedge z S y) \iff \exists z \in U (x P z \wedge \neg y P z))$$

mamy $\text{eb} = P \circ S$. A zatem relacja eb koresponduje z relacją $\check{\check{A}}$, gdyż $\check{\check{A}} = (S \circ \check{P})^- = P \circ \check{S} = P \circ S$.

Z (Th_P) otrzymujemy ' $x P y \wedge y P x \Rightarrow x P x \vee y P y$ ' i ' $x P y \wedge y P u \Rightarrow x P u \vee y P y$ '. Stąd i z (irr_P) mamy odpowiednio (as_P) i (t_P).

Porównanie obu teorii Russella z teorią Thomasona

Aby porównać teorię Russella z teorią z [Thomason, 1989], musimy zdefiniować relacje E i S w tej ostatniej. W tym celu założymy, że $E := (\check{P})^- \circ P =: \text{bb}$, czyli w notacji elementarnej używamy ($\text{df}_P E$); oraz $S := \bar{P} \cap (\check{P})^-$, czyli w notacji elementarnej używamy ($\text{df}_P S$).

Porównanie obu teorii Russella z teorią Thomasona

Aby porównać teorię Russella z teorią z [Thomason, 1989], musimy zdefiniować relacje E i S w tej ostatniej. W tym celu założymy, że $E := (\check{P})^- \circ P =: \text{bb}$, czyli w notacji elementarnej używamy $(\text{df}_P E)$; oraz $S := \check{P} \cap (\check{P})^-$, czyli w notacji elementarnej używamy $(\text{df}_P S)$.

Możemy udowodnić, że zarówno fragment pierwszej teorii Russella z aksjomatami a1–a5, jak i fragment drugiej teorii Russella opartej na pierwszych trzech jej aksjomatach są definitywnie równoważne z teorią Thomasona opartą na (irr_P) i (Th_P) , tj. możemy to udowodnić (por. Twierdzenie 3):

Theorem 4

Następujące teorie są równoważne:

- 1 teoria oparta na (irr_P) , (\mathbf{t}_P) , $(\mathbf{t}_{S \circ P})$, $(\text{df}_P S)$ i (\star_E) ;
- 2 teoria oparta na a1–a5 i $(\text{df } P)$;
- 3 teoria oparta na (irr_P) , (Th_P) , $(\text{df}_P E)$ i $(\text{df}_P S)$.

Literatura

- T. de Laguna, 1922a. The nature of space. *Journal of Philosophy* 19: 393–407 i 421–440.
- T. de Laguna, 1922b. Point, line and surface as sets of solids. *Journal of Philosophy* 19: 449–461.
- A. Grzegorzcyk, 1955. The system of Leśniewski in relation to contemporary logical reserch. *Studia Logica* 3: 77–95.
- R. Gruszczyński, A. Pietruszczak, 2008. Full development of Tarski's geometry of solids. *The Bulletin of Symbolic Logic* 14 (4): 481–540.
- R. Gruszczyński, A. Pietruszczak, 2009. Space, points and mereology: On foundations of point-free Euclidean geometry. *Logic and Logical Philosophy* 18: 145–188.
- R. Gruszczyński, A. Pietruszczak, 2010. How to define a mereological (collective) set. *Logic and Logical Philosophy* 19: 309–328
- R. Gruszczyński, A. Pietruszczak, 2018. A study in Grzegorzcyk point-free topology, part I: Separation and Grzegorzcyk Structures. *Studia Logica* 106: 1197–238.
- R. Gruszczyński, A. Pietruszczak, 2019. A study in Grzegorzcyk point-free topology, part II: Spaces of Points. *Studia Logica* 107: 809–843.
- A. Pietruszczak, 2000. *Metamereologia*. Wydawnictwo UMK: Toruń.

Literatura (cont.)

- A. Pietruszczak, 2018. *Metamereology*. The Nicolaus Copernicus University Scientific Publishing House, Toruń.
- A. Pietruszczak, 2020. *Foundations of the Theory of Parthood. A Study of Mereology*. Vol. 54 of Trends in Logic. Springer International Publishing.
- A. Tarski, 1929. Les fondements de la géométrie des corps. *Księga Pamiątkowa Pierwszego Zjazdu Matematycznego*, Kraków, 1929: 29–30. Wersja angielska: Foundations of the geometry of solids. *Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938*, Oxford: Oxford University, 24–29.
- B. Russell, 1914, „The world of physics and the world of sense”, Lecture IV in *Our Knowledge of the External World: As a Field for Scientific Method in Philosophy*, Chicago, London: The Open Court Publishing Company.
- B. Russell, 1936. On order in time. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 32.
- S. K. Thomason, 1989. Free construction of time from events, *Journal of Philosophical Logic* 18.
- A. N. Whitehead, 1919. *An Enquiry Concerning the Principles of Natural Knowledge*, Cambridge: Cambridge University Press.
- A. N. Whitehead, 1920, *The Concept of Nature*, Cambridge: Cambridge University Press.