Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Adam Skowyrski

Homologiczne problemy dla kategorii modułów ze skończonymi cyklami

Rozprawa doktorska napisana w
Katedrze Algebry i Geometrii
Wydziału Matematyki i Informatyki
pod kierunkiem
prof. dr. hab. Andrzeja Skowrońskiego

Toruń 2017

Spis treści

· Wstęp · **i**

1 · Podstawowe pojęcia i techniki teorii reprezentacji algebr · **1**

1.1 Algebry i kategorie modułów 1
1.2 Funktorialne równoważności pomiędzy kategoriami modułów 5
1.3 Elementarne pojęcia algebry homologicznej 11
1.4 Teoria Auslandera-Reiten 17
1.5 Elementy teorii stopnia odwzorowań nieprzywiedlnych 32
1.6 Elementy teorii odwracania 37
1.7 Rodziny półregularnych tub w kołczanach Auslandera-Reiten 40

2 · Od algebr o małych wymiarach homologicznych do uogólnionych algebr podwójnie odwróconych · **47**

2.1 Algebry dziedziczne 47
2.2 Algebry odwrócone 50
2.3 Wzmianka o algebrach kanonicznych 55
2.4 Utajone algebry kanoniczne oraz algebry tubularne 56
2.5 Algebry quazi-odwrócone 59
2.6 Algebry podwójnie odwrócone 63
2.7 Uogólnione algebry podwójnie odwrócone 65

3 · Drogi, cykle i krótkie łańcuchy w kategoriach modułów · **71**

3.1 Rola pojęcia cyklu w opisie kategorii modułów 71
3.2 Krótkie łańcuchy 72
3.3 Drogi o injektywnym początku i projektywnym końcu 77
3.4 Nieskończone drogi w składowych postprojektywnych i preinjektywnych 78

4 · Kategorie modułów ze skończonymi cyklami · **90**

4.1 Moduły cyklowo skończone 90
4.2 Algebry cyklowo skończone 92
4.3 Algebry cyklowo skończone typu półregularnego 93

5 · Dowody głównych twierdzeń rozprawy · **100**

5.1 Wyniki pomocnicze 100
5.2 Dowód Twierdzenia A 106
5.3 Dowód Twierdzenia B 110
5.4 Dowody wniosków 112

5.5 Kierunek dalszych badań 112

A · Listy grafów oraz tabele · 114

A.1 Lista wartościowanych grafów typów Dynkina 114
A.2 Lista wartościowanych grafów typu Euklidesa i ich kanoniczne orientacje 115
A.3 Kołczany kanoniczne typu Euklidesowego 117
A.4 Kołczany kanoniczne typu tubularnego 118
A.5 Tabela nośników modułów regularnych 120
A.6 Tabela nośników preinjektywnych 122

· Wstęp ·

Fundamentalne pojęcia współczesnej teorii reprezentacji algebr wywodzą się właściwie z powstałej około połowy XIX wieku teorii grup i algebr Liego, której głębokie wyniki istotnie wiązały się z opisem reprezentacji grup, a w tym konkretnym przypadku, reprezentacji zwartych grup Liego. Dalszy rozwój tych idei zaowocował między innymi wyabstrahowaniem koncepcji reprezentacji dla grup skończonych, co bezpośrednio przyczyniło się do zdefiniowania pojęcia reprezentacji skończenie wymiarowej algebry nad ciałem, przypisywanego F. G. Frobeniusowi. Na początku XX wieku znacząco rozwinięto wiedzę o reprezentacjach algebr, czego uwieńczeniem było wprowadzenie przez E. Noether około 1939 roku pojęcia modułu, które zrewolucjonizowało ówczesne podejście do badań.

Główną uwagę skupiono odtąd na badaniu różnych własności kategorii $\operatorname{mod} A$ skończenie generowanych prawych A-modułów nad algebrami artinowskimi A nad przemiennymi pierścieniami artinowskimi K, gdzie przez algebrę artinowską rozumiemy K-algebrę, która jest skończenie generowana jako K-moduł. Szczególne osiągnięcia w tym kierunku zawdzięczamy rozwiniętej w latach 70′ ubiegłego wieku przez M. Auslandera oraz I. Reiten teorii ciągów prawie rozszczepialnych, której przełomowe wyniki dały istotny wgląd w homologiczną strukturę kategorii $\operatorname{mod} A$ oraz jej pełnej podkategorii $\operatorname{ind} A$ składającej się z modułów nierozkładalnych. W szczególności, autorzy ci zdefiniowali bardzo ważny kombinatoryczny i homologiczny niezmiennik algebry artinowskiej A nazywany *kołczanem Auslander-Reiten algebry A*, oznaczanym przez Γ_A. Struktura tego kołczanu odzwierciedla istotne własności kategorii ilorazowej $\operatorname{mod} A/\operatorname{rad}_A^{\infty}$, gdzie $\operatorname{rad}_A^{\infty}$ jest nieskończonym radykałem Jacobsona kategorii $\operatorname{mod} A$, to znaczy, przekrojem wszystkich potęg rad_A^n, $n \geqslant 1$, radykału Jacobsona rad_A kategorii $\operatorname{mod} A$. Ponadto lokalne własności kołczanu Γ_A są ściśle związane z pojęciem ciągu prawie rozszczepialnego. Wspominamy jeden z wyników teorii Auslandera-Reiten, na mocy którego, dla każdego modułu nieprojektywnego X w $\operatorname{ind} A$ istnieje nierozszczepialny ciąg dokładny w $\operatorname{mod} A$ postaci

$$0 \to \tau_A X \to E \to X \to 0,$$

złożony z pewnych szczególnych odwzorowań, które spełniają ściśle określone uniwersalne własności faktoryzacji, zaś $\tau_A X = D \operatorname{Tr} X$ jest tak zwaną translacją Auslandera-Reiten modułu X, przy czym Tr jest operacją brania transpose oraz $D = \operatorname{Hom}_K(-, E)$ funktorem dualności standardowej na $\operatorname{mod} A$, gdzie E jest pewnym minimalnym injektywnym kogeneratorem w $\operatorname{mod} K$. Przypominamy również za A. Skowrońskim [39], że spójna składowa $\mathcal{C}$ kołczanu Γ_A nazywana jest *uogólnioną standardową składową*, o ile $\operatorname{rad}_A^{\infty}(X, Y) = 0$ dla dowolnych modułów X i Y w $\mathcal{C}$.

Bardzo ważnym zadaniem teorii reprezentacji algebr jest badanie własności różnych dróg pomiędzy modułami nierozkładalnymi w kategoriach $\operatorname{mod} A$ algebr artinowskich A. Przypomnijmy za C. M. Ringelem [34], że *drogą* w $\operatorname{ind} A$ nazywamy każdy ciąg homomorfizmów w $\operatorname{mod} A$ postaci

$$X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} X_n ,$$

gdzie $X_0, X_1, \ldots, X_n$ są modułami w $\operatorname{ind} A$, zaś wszystkie homomorfizmy $f_1, \ldots, f_n$ są niezerowe i należą do rad_A, lub równoważnie, są niezerowymi nieizomorfizmami w $\operatorname{ind} A$. Powiemy w tym przypadku również, że moduł X_n *jest następnikiem modułu* X_0 *w* $\operatorname{ind} A$, oraz analogicznie, że X_0 *jest poprzednikiem modułu* X_n *w* $\operatorname{ind} A$. Niezwykle istotną rolę w opisie kategorii $\operatorname{ind} A$ pełnią szczególnego typu drogi, które nazywane są cyklami. Odnotujmy, że *cyklem* w $\operatorname{ind} A$ nazywana jest każda droga w $\operatorname{ind} A$ powyższej postaci, dla której moduły X_n i X_0 są izomorficzne w $\operatorname{ind} A$. Bezpośrednio związane z pojęciem cyklu jest również pojęcie modułu kierującego. Przypomnijmy za C. M. Ringelem [34], że *kierującym* nazywany jest każdy moduł w $\operatorname{ind} A$, który nie leży na żadnym cyklu w $\operatorname{ind} A$. Wspominamy także znany wynik uzyskany niezależnie przez L. Peng i J. Xiao [30] oraz A. Skowrońskiego [40], na mocy którego kołczan Auslandera-Reiten dowolnej algebry artinowskiej A zawiera co najwyżej skończenie wiele τ_A-orbit zawierających moduły kierujące. Ponadto jeden z wyników C. M. Ringela w [34] mówi, że algebra nośnikowa dowolnego modułu kierującego jest algebrą odwróconą algebry dziedzicznej. Co więcej, w pracy I. Assema oraz A. Skowrońskiego [1] wprowadzono również pewną bardzo istotną klasę algebr nazywanych algebrami cyklowo skończonymi. Odnotujmy tylko, że algebra A jest *cyklowo skończona*, o ile wszystkie cykle w $\operatorname{ind} A$ są *skończone*, to znaczy, składają się wyłącznie z homomorfizmów w $\operatorname{ind} A$ nie należących do $\operatorname{rad}_A^\infty$. Jest to bardzo szeroka i niezbędna dla naszych rozważań klasa algebr, zawierająca między innymi, wszystkie algebry skończonego reprezentacyjnego typu, oswojone algebry odwrócone, czy oswojone uogólnione algebry podwójnie odwrócone, o których wspominamy dalej.

Niniejsza rozprawa ma ogólnie na celu badanie pewnych homologicznych problemów dla klasy algebr cyklowo skończonych, których sformułowania zostały zakomunikowane przez A. Skowrońskiego jako hipotezy dla algebr artinowskich. Rozstrzygnięcie tych hipotez w ogólności stanowi dalece niebanalny problem otwarty, którego rozwiązaniu, w pewnym szczególnym, aczkolwiek dość interesującym i wymagającym przypadku, poświęcone są rozważania tej pracy.

Wraz z początkiem lat 80′ ubiegłego wieku pojawiła się w teorii reprezentacji algebr bardzo ważna klasa *algebr odwróconych*, której wprowadzenie zawdzięczamy D. Happelowi i C. M. Ringelowi [17]. Przypominamy, że algebry odwrócone są z definicji algebrami endomorfizmów postaci $\operatorname{End}_H(T)$, gdzie T jest modułem odwracającym T w $\operatorname{mod} H$, dla pewnej algebry dziedzicznej H. Warto również wspomnieć znane kryterium Liu-Skowrońskiego, które orzeka, że algebra A jest algebrą odwróconą wtedy i tylko wtedy, gdy kołczan Γ_A zawiera dokładną uogólnioną standardową składową $\mathcal{C}$ posiadającą tak zwaną sekcję, to znaczy, spójny acykliczny i wypukły podkołczan w $\mathcal{C}$ zawierający dokładnie jeden moduł z każdej τ_A-orbity w $\mathcal{C}$. Klasa algebr odwróconych była intensywnie badana przez następne lata, co doprowadziło do rozwoju wielu ciekawych koncepcji i uogólnień. Można tu przywołać między innymi, wprowadzone przez D. Happela, I. Reiten oraz S. O. Smalø [16] tak zwane *algebry quazi-odwrócone*, które tworzą istotnie szerszą klasę niż algebry odwrócone. Odnotujmy tylko za autorami, że algebra nazywana jest *quazi-odwróconą*, o ile jest izomorficzna z algebrą endomorfizmów pewnego obiektu odwracającego w K-kategorii dziedzicznej. Co więcej, wśród głównych wyników [16] znalazła również miejsce istotna homologiczna charakteryzacja tej klasy algebr, na mocy której algebra artinowska A jest algebrą quazi-odwróconą wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{gl.dim} A \leqslant 2$ oraz dla każdego modułu X w $\operatorname{ind} A$ zachodzi $\operatorname{pd}_A X \leqslant 1$ lub $\operatorname{id}_A X \leqslant 1$. Wyniki te stały się naturalną motywacją do badania szerszej klasy algebr nazywanych algebrami *o małych wymiarach homologicznych*, które są algebrami A takimi, że dowolny moduł X w $\operatorname{ind} A$ spełnia $\operatorname{pd}_A X \leqslant 1$ lub $\operatorname{id}_A X \leqslant 1$. Skądinąd wiadomo, że każda taka algebra spełnia ograniczenie $\operatorname{gl.dim} A \leqslant 3$. Tak więc na mocy [16] dowolna algebra A jest algebrą quazi-odwróconą wtedy i tylko wtedy, gdy A jest algebrą o małych wymiarach homologicznych z $\operatorname{gl.dim} A \leqslant 2$. Zauważono również, że zarówno klasę algebr quazi-odwróconych, jak i algebr o małych wymiarach homologicznych można w ciekawy sposób scharakteryzować w terminach pewnych pełnych podkategorii w $\operatorname{ind} A$ oznaczanych symbolami $\mathscr{L}_A$ oraz $\mathscr{R}_A$, zdefiniowanych w pracy [16] w następujący sposób:

- $\mathscr{L}_A$ jest pełną podkategorią w $\operatorname{ind} A$ składającą się ze wszystkich A-modułów X, dla których $\operatorname{pd}_A X \leqslant 1$ oraz każdy poprzednik Y modułu X w $\operatorname{ind} A$ ma również $\operatorname{pd}_A Y \leqslant 1$;

- $\mathscr{R}_A$ jest pełną podkategorią w $\operatorname{ind} A$ składającą się ze wszystkich A-modułów X, dla których $\operatorname{id}_A X \leqslant 1$ oraz każdy następnik Z modułu X w $\operatorname{ind} A$ ma również $\operatorname{id}_A Z \leqslant 1$.

Algebry o małych wymiarach homologicznych stanowiły przez długi czas ważny obiekt badań, jako interesujące uogólnienie algebr quazi-odwróconych. Odnotujmy również, że klasa ta posiada istotną charakteryzację ustanowioną przez F. U. Coelho oraz M. Lanzilottę w pracy [7]. Zostało tam bowiem udowodnione, że algebra artinowska A jest algebrą o małych wymiarach homologicznych wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathscr{L}_A \cup \mathscr{R}_A = \operatorname{ind} A$. Ponadto znana była już wcześniej charakteryzacja klasy algebr quazi-odwróconych (patrz [16]), która orzeka, że algebra artinowska A jest quazi-odwrócona wtedy i tylko wtedy, gdy klasa $\mathscr{L}_A$ zawiera wszystkie moduły projektywne w $\operatorname{ind} A$, lub równoważnie, klasa $\mathscr{R}_A$ zawiera wszystkie moduły injektywne w $\operatorname{ind} A$. Ze względu na dość dobrą znajomość kategorii modułów algebr quazi-odwróconych, szczególną uwagę zwrócono na badanie pozostałych algebr o małych wymiarach homologicznych, to znaczy, algebr A o małych wymiarach homologicznych z $\operatorname{gl.dim} A = 3$, które nazywane są również algebrami *o ściśle małych wymiarach homologicznych*. Pełen opis struktury kategorii modułów algebr o ściśle małych wymiarach homologicznych zawdzięczamy I. Reiten i A. Skowrońskiemu [31], którzy odkryli, że kołczan Auslandera-Reiten tego typu algebr ma pewne zbliżone strukturalne własności do kołczanów Auslandera-Reiten algebr odwróconych, w szczególności dowodząc również, że posiada zawsze wyróżnioną składową zawierającą tak zwaną *podwójną sekcję*, to znaczy, podkołczan spełniający kilka warunków uogólniających definicję sekcji w składowej. Wspominani autorzy wykazali też, że w przypadku klasy algebr o ściśle małych wymiarach homologicznych zachodzi analogiczne, do obowiązującego dla algebr odwróconych kryterium Liu-Skowrońskiego, kryterium charakteryzujące tę klasę algebr poprzez istnienie uogólnionej standardowej składowej w kołczanie Auslandera-Reiten zawierającej dokładną podwójną sekcję. Wprowadzono w tym celu oraz zbadano różne własności klasy tak zwanych *algebr podwójnie odwróconych*, które równoważnie można zdefiniować jako algebry A takie, że kołczan Γ_A ma dokładną i uogólnioną standardową składową zawierającą pewną podwójną sekcję. Otrzymane wyniki dopełniły tym samym klasyfikację wszystkich algebr o małych wymiarach homologicznych, czemu została poświęcona przekrojowa praca [31], której wyniki pokazują, że klasa ta dzieli się na dwie rozłączne podklasy składające się z algebr quazi-odwróconych oraz algebr ściśle podwójnie odwróconych (to znaczy algebr podwójnie odwróconych, które nie są odwrócone), lub inaczej, że dowolna algebra jest algebrą o małych wymiarach homologicznych wtedy i tylko wtedy, gdy jest algebrą quazi-odwróconą lub algebrą podwójnie odwróconą.

Z drugiej strony, zaobserwowane strukturalne własności kołczanów Auslandera-Reiten algebr podwójnie odwróconych rzuciły również nowe światło na możliwe kierunki dalszych uogólnień definicji algebry odwróconej. Wskutek tego odkryto klasę tak zwanych *uogólnionych algebr podwójnie odwróconych*, co było także bezpośrednio związane z koniecznością zbadania pojęcia *wielosekcji*, które jest istotnym ogólnieniem pojęcia podwójnej sekcji w składowej. Odnotujmy tutaj, że klasa uogólnionych algebr podwójnie odwróconych bardzo istotnie rozszerza klasy algebr odwróconych oraz podwójnie odwróconych, które są dość wąskimi jej podklasami, oraz w szczególności, zawiera wszystkie algebry o ściśle małych wymiarach homologicznych. W konsekwencji, klasa algebr quazi-odwróconych lub uogólnionych podwójnie odwróconych zawiera klasę algebr o małych wymiarach homologicznych, stanowiąc przy tym jej interesujące i dość daleko idące uogólnienie. Pierwszy z trzech głównych problemów niniejszej pracy sięga 2003 roku, kiedy po raz pierwszy został zakomunikowany przez A. Skowrońskiego w pracy [46], w której ustanowiono pewne ciekawe wspólne homologiczne kryterium dla wspominanych klas algebr quazi-odwróconych oraz uogólnionych podwójnie odwróconych. Przypominamy mianowicie, że na mocy głównego twierdzenia [46] następujące warunki są równoważne.

(i) *$\mathscr{L}_A \cup \mathscr{R}_A$ jest koskończona w $\operatorname{ind} A$, to jest, zawiera prawie wszystkie klasy izomorfizmu w $\operatorname{ind} A$.*

(ii) *Istnieje co najwyżej skończenie wiele klas izomorfizmu modułów w $\operatorname{ind} A$ leżących na drogach w $\operatorname{ind} A$ o injektywnym początku i projektywnym końcu.*

(iii) *A jest algebrą quazi-odwróconą lub uogólnioną algebrą podwójnie odwróconą.*

Powyższe równoważne warunki opisują szeroką klasę algebr zawierającą wszystkie algebry o małych wymiarach homologicznych, czyli takie algebry A, że $\operatorname{pd}_A X \leqslant 1$ lub $\operatorname{id}_A X \leqslant 1$, dla każdego modułu X w $\operatorname{ind} A$, które jak wiadomo są równoważnie scharakteryzowane poprzez własność $\mathscr{L}_A \cup \mathscr{R}_A = \operatorname{ind} A$. W związku z tym postawiono również naturalne pytanie, czy koskończoność podkategorii $\mathscr{L}_A \cup \mathscr{L}_A$ w $\operatorname{ind} A$ może być równoważnie zastąpiona słabszym warunkiem, w którym żądamy jedynie, aby prawie wszystkie klasy izomorfizmu modułów X w $\operatorname{ind} A$ spełniały $\operatorname{pd}_A X \leqslant 1$ lub $\operatorname{id}_A X \leqslant 1$? Odpowiedź na to pytanie nie jest oczywista, co stało się motywacją do sformułowania przez A. Skowrońskiego następującego problemu, który jest piewszym głównym problemem rozważanym w rozprawie.

Problem 1. *Niech A będzie algebrą artinowską, dla której prawie wszystkie klasy izomorfizmu modułów X w $\operatorname{ind} A$ spełniają $\operatorname{pd}_A X \leqslant 1$ lub $\operatorname{id}_A X \leqslant 1$. Czy wówczas klasa $\mathcal{L}_A \cup \mathcal{R}_A$ jest koskończona w $\operatorname{ind} A$?*

Pojęcia *krótkiej drogi*, czy krótkiego cyklu, pełnią również bardzo istotną rolę w teorii reprezentacji algebr, gdzie znalazły wiele zastosowań w różnego rodzaju charakteryzacjach algebr. Przypominamy, że *krótką* nazywana jest każda droga długości $n = 2$, to znaczy, droga postaci $X_0 \to X_1 \to X_2$. Drugi z problemów niniejszej pracy został postawiony przez A. Skowrońskiego około 2013 roku i wywodzi się także ze wspomnianej charakteryzacji algebr quazi-odwróconych oraz uogólnionych algebr podwójnie odwróconych, którą tym razem uzupełniamy o równoważny warunek sformułowany w języku krótkich dróg. Pytamy mianowicie, czy warunek (ii) jest równoważny swojej nieco słabszej wersji, w której zakładamy tylko istnienie co najwyżej skończenie wielu klas izomorfizmu modułów leżących na krótkich drogach w $\operatorname{ind} A$ o injektywnym początku i projektywnym końcu, lub równoważnie, modułów X w $\operatorname{ind} A$ spełniających $\operatorname{Hom}_A(D(A), X) \neq 0$ oraz $\operatorname{Hom}_A(X, A) \neq 0$?

Problem 2. *Załóżmy, że A jest algebrą artinowską, dla której prawie wszystkie klasy izomorfizmu modułów X w $\operatorname{ind} A$ spełniają $\operatorname{Hom}_A(D(A), X) = 0$ lub $\operatorname{Hom}_A(X, A) = 0$. Czy wtedy istnieje tylko skończenie wiele klas izomorfizmu modułów nierozkładalnych leżących na drogach w $\operatorname{ind} A$ z modułów injektywnych do projektywnych?*

Równie istotne okazało się badanie krótkich cykli w kategoriach modułów, które w subtelny sposób wiążą się z tak zwanymi *krótkimi łańcuchami*. Odnotujmy, że krótkim łańcuchem w $\operatorname{mod} A$ jest każdy ciąg niezerowych homomorfizmów w $\operatorname{mod} A$ postaci $X \to M \to \tau_A X$, gdzie X jest modułem w $\operatorname{ind} A$. Wówczas powiemy, że moduł M w $\operatorname{mod} A$ jest środkiem tego krótkiego łańcucha. Wspominamy tylko, że na mocy wyników publikacji [15] oraz [33] moduł nierozkładalny X w $\operatorname{mod} A$ nie leży na środku żadnego krótkiego cyklu w $\operatorname{ind} A$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest środkiem żadnego krótkiego łańcucha w $\operatorname{mod} A$. Ponadto dla każdej algebry odwróconej A istnieje pewien wierny moduł w $\operatorname{mod} A$ nie leżący na środku żadnego krótkiego łańcucha, co jest również interesującym warunkiem koniecznym bycia algebrą odwróconą. Odpowiedź na pytanie, czy jest to także warunek wystarczający, została sformułowana przez autorów [33] w postaci hipotezy otwartej, której pozytywne rozstrzygnięcie nastąpiło dopiero po około 20 latach, co zawdzięczamy pracy A. Jaworskiej, P. Malickiego i A. Skowrońskiego [19].

Ostatni z rozważanych problemów, zakomunikowany również w 2013 roku przez A. Skowrońskiego, ma nieco inne źródła niż poprzednie dwa, choć także dotyczy pewnej homologicznej charakteryzacji algebr uogólnionych podwójnie odwróconych. Impulsem do jego sformułowania stała się wspominana wyżej charakteryzacja algebr odwróconych z [19], którą próbowano rozszerzyć do odpowiedniego kryterium dla klasy uogólnionych algebr podwójnie odwróconych. Przypominamy tylko, że jeżeli A jest dowolną uogólnioną algebrą podwójnie odwróconą, to istnieje pewien moduł dokładny w $\operatorname{mod} A$, który jest środkiem co najwyżej skończenie wielu krótkich łańcuchów. Skłania to przypuszczać, że prawdziwa jest również implikacja przeciwna, co stanowi treść trzeciego problemu sformułowanego poniżej.

Problem 3. *Niech A będzie algebrą artinowską. Załóżmy, że istnieje dokładny moduł w $\operatorname{mod} A$, który jest środkiem co najwyżej skończenie wielu krótkich łańcuchów. Czy wówczas A jest uogólnioną algebrą podwójnie odwróconą?*

Głównym celem rozprawy jest rozwiązanie sformułowanych powyżej Problemów 1-3 dla klasy algebr cyklowo skończonych, lub inaczej, dla kategorii modułów ze skończonymi cyklami. Wyniki badań prezentowane w pracy zostały opublikowane w trzech artykułach autora [51, 52, 53], w oparciu o które powstała niniejsza rozprawa. Wspominamy tylko, że w publikacjach dowody zostały przeprowadzone w ogólności, to znaczy dla dowolnych algebr artinowskich, jednak dla utrzymania gładkości rozważań oraz uniknięcia niezręcznych cytowań zakładamy w całej rozprawie, że wszystkie rozważane algebry są skończenie wymiarowymi K-algebrami nad dowolnym ciałem K. Pozytywne rozstrzygnięcie pierwszych dwóch problemów jest konsekwencją sformułowanego poniżej Twierdzenia A, stanowiącego pierwszy z dwóch głównych wyników pracy.

Twierdzenie A. *Niech A będzie algebrą cyklowo skończoną. Wówczas następujące warunki są równoważne.*

(i) A jest uogólnioną algebrą podwójnie odwróconą lub algebrą quazi-odwróconą.

(ii) Dla prawie wszystkich klas izomorfizmu modułów X w $\operatorname{ind} A$ zachodzi $\operatorname{pd}_A X \leqslant 1$ lub $\operatorname{id}_A X \leqslant 1$.

(iii) Istnieje co najwyżej skończenie wiele klas izomorfizmu modułów X w $\operatorname{ind} A$ będących środkami krótkich dróg w $\operatorname{ind} A$ o injektywnym początku i projektywnym końcu.

Drugie główne twierdzenie, które sformułowane zostało poniżej, zamyka ostatecznie kwestię rozwiązania Problemu 3 w kategoriach modułów ze skończonymi cyklami.

Twierdzenie B. *Dla każdej algebry cyklowo skończonej A, poniższe warunki są równoważne.*

(i) A jest uogólnioną algebrą podwójnie odwróconą.

(ii) Istnieje moduł dokładny M w $\operatorname{mod} A$, który jest środkiem co najwyżej skończenie wielu krótkich łańcuchów.

Powyższe dwa twierdzenia stanowią główne wyniki rozprawy i ich pełne dowody zostaną zaprezentawane w zamykającym rozdziale 5, gdzie podajemy również dowody dwóch wyprowadzonych z Twierdzenia B wniosków, które formułujemy poniżej.

Wniosek 1. *Niech B będzie (spójną) cyklowo skończoną uogólnioną algebrą podwójnie odwróconą. Wówczas dowolny moduł dokładny M w $\operatorname{mod} A$, który jest środkiem co najwyżej skończenie wielu krótkich łańcuchów w $\operatorname{mod} A$, należy do kategorii addytywnej $\operatorname{add} \mathcal{C}$ pewnej składowej łączącej $\mathcal{C}$ kołczanu Γ_A.*

Wniosek 2. *Załóżmy, że A jest algebrą cyklowo skończoną, M zaś dowolnym modułem w $\operatorname{mod} A$, który jest środkiem co najwyżej skończenie wielu krótkich łańcuchów w $\operatorname{mod} A$. Wówczas algebra ilorazowa $B = A(M) := A/\operatorname{Ann}_A(M)$ algebry A jest produktem $B = B_1 \times \cdots \times B_m$, $m \geqslant 1$, algebr $B_1, \ldots, B_m$, gdzie:*

(a) dla każdego $i \in \{1, \ldots, m\}$, algebra B_i jest cyklowo skończoną uogólnioną algebrą podwójnie odwróconą;

(b) jeśli $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_m$ jest stowarzyszonym rozkładem modułu M w $\operatorname{mod} B$ na sumę prostą modułów M_i w $\operatorname{mod} B_i$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, to dla wszystkich $i \in \{1, \ldots, m\}$, moduł M_i jest dokładnym modułem w $\operatorname{mod} B_i$ należącym do kategorii addytywnej $\operatorname{add}(\mathcal{C}_i)$ pewnej składowej łączącej $\mathcal{C}_i$ kołczanu Γ_{B_i} algebry B_i.

Pierwsze dwa rozdziały stanowią dość obszerne wprowadzenie do dalszej części pracy. Rozdział 1 poświęcamy na zdefiniowanie najważniejszych pojęć oraz technik stosowanych w teorii reprezentacji algebr do opisu kategorii modułów. W szczególności, przedstawiamy tam podstawowe własności kategorii modułów algebr artinowskich 1.1-1.2 oraz często wykorzystywane niezmienniki, takie jak globalny wymiar algebry 1.3, czy kołczan Auslandera-Reitena wprowadzony w sekcji 1.4, w której podajemy również główne wyniki teorii Auslandera-Reiten. Ponadto, zestawiamy dalej również najważniejsze potrzebne fakty pochodzące z teorii stopnia Liu 1.5 oraz znane twierdzenia dotyczące modułów odwracających nad dowolnymi algebrami 1.6. Następnie w rozdziale 2 zestawiamy różne potrzebne nam fakty związane z bardzo ważnymi klasami algebr, które wyłoniły się na drodze uogólnień kluczowej koncepcji *algebry odwróconej* 2.2. Zdefiniujemy tu między innymi wszystkie klasy algebr występujące w sformułowaniach głównych twierdzeń, konsekwentnie omawiając w 2.1-2.6 kolejne uogólnienia prowadzące do pełnej klasyfikacji algebr o małych wymiarach homologicznych, z algebrami quazi-odwróconymi 2.5 oraz podwójnie odwróconymi 2.6 włącznie. Rozdział 2 zamykamy sekcją 2.7 poświęconą wprowadzeniu klasy uogólnionych algebr podwójnie odwróconych, która w odróżnieniu od omawianych wcześniej klas zawiera algebry nie będące algebrami o małych wymiarach homologicznych.

Kolejne dwa rozdziały 3-4 należy traktować jako dalsze, bardziej szczegółowe przygotowanie do przeprowadzonych w rozdziale 5 dowodów. W rozdziale 3 zestawiamy różne fakty związane z pojęciem drogi w kategorii modułów, w szczególności, z pojęciem (krótkiego) cyklu i krótkiego łańcucha w kategoriach modułów 3.1-3.2, uzasadniając przy tym między innymi kilka technicznych lematów, które istotnie wykorzystamy w dowodzie Twierdzenia B. Naturalnie jest również umieścić w tym kontekście pojawiające się w wielu miejscach drogi o injektywnym początku i projektywnym końcu, których szczególną rolę w charakteryzacjach różnych klas algebr postaramy się zilustrować na kilku przykładach w krótkiej sekcji 3.3. Ostatecznie w zamykającej ten rozdział sekcji 3.4 zestawiamy pewne wyniki autora dotyczące nieskończonych dróg w składowych preinjektywnych (postprojektywnych) w kołczanach Auslandera-Reiten algebr odwróconych typu Euklidesa, które będą odgrywały dość istotną rolę w dowodach obu głównych twierdzeń. Rozdział 4 poświęcony jest wprowadzeniu kluczowych dla nas kategorii modułów ze skończonymi cyklami. Omawiamy tu na początek różne własności modułów cyklowo skończonych 4.1, po czym w sekcji 4.2 przedstawiamy najważniejsze potrzebne twierdzenia opisujące ogólną strukturę kategorii modułów algebr cyklowo skończonych. W ostatnim podrozdziale 4.3 prezentujemy natomiast wybrane wyniki dotyczące pewnej szczególnej klasy algebr cyklowo skończonych składającej się z algebr, których kołczan Auslandera-Reiten zawiera wyłącznie składowe półregularne, które z tego względu nazywane są algebrami cyklowo skończonymi półregularnego typu. W szczególności, wprowadzamy tam pojęcie zgodnego ciągu oswojonych algebr quazi-odwróconych kanonicznego typu oraz opisujemy pewną konstrukcję, która każdemu takiemu ciągowi przyporządkowuje pewną cyklowo skończoną algebrę typu półregularnego. Ponadto, pokazujemy w sformułowanej w 4.3 charakteryzacji, że algebry stowarzyszone z takimi ciągami wyczerpują wszystkie algebry cyklowo skończone półregularnego typu z dokładnością do izomorfizmu algebr (stanowiącej główny wynik wspólnej pracy [5] autora z J. Białkowskim, A. Skowrońskim i P. Wiśniewskim).

Zamykamy rozprawę rozdziałem 5, w którym prezentujemy pełne dowody obu głównych twierdzeń pracy oraz dwóch sformułowanych wcześniej wniosków. Wspominamy tam po krótce o jednym z możliwych kierunków dalszych badań nad rozwiązaniem rozważanych w rozprawie otwartych problemów homologicznych przy nieco innym założeniu.

Znaczna część wyników cytowanych rozdziałach 1-2 jest pozostawiona bez dowodów, po które czasami odsyłamy do znanych pozycji bibliograficznych dotyczących podstaw teorii reprezentacji algebr takich jak [2, 34, 36, 37, 49, 50]. W pozostałych przypadkach prezentowane wyniki pochodzą najczęściej ze stosunkowo zaawansowanych artykułów opublikowanych od około początku lat 90', oraz ze względu na rozmiary niniejszej rozprawy, będziemy wówczas również odsyłać do źródłowych prac pomijając większość dowodów. W szczególności dotyczy to omawianych w 2.6-2.7 klas algebr podwójnie odwróconych i uogólnionych podwójnie odwróconych wprowadzonych w głębokich pracach [31] i [32], za którymi cytujemy większość wyników. Podobnie traktujemy twierdzenia prezentowane w 3.3 oraz większość wyników w 3.1-3.2 związanych z krótkimi cyklami i krótkimi łańcuchami, które cytujemy z [33] lub z dużo późniejszej pracy [19]. Reszta twierdzeń przedstawionych w rozdziale 3 oraz praktycznie w całym rozdziale 4 (za wyjątkiem części sekcji 4.2 i 4.3) pochodzą z kilku różnych artykułów dotyczących algebr cyklowo skończonych, w tym prac autora oraz nowej pracy J. Białkowskiego i A. Skowrońskiego [4]. Dowody w rozdziale 5 są także w pełni szczegółowe, jednakże tutaj dość mocno różnią się od oryginalnych rozumowań pod wzlęgem organizacji, głównie ponieważ powstały na drodze syntezy argumentów z kilku dowodów. Właściwe dowody poprzedzamy tutaj również wstępnym podrozdziałem 5.1 o charakterze pomocniczym, w którym wyprowadzamy najpierw pewne ogólne techniczne fakty wykorzystane później w dowodach obu twierdzeń, dzięki czemu są one nieco krótsze niż oryginalne rozumowania przedstawione w publikacjach.

Odnotujmy również, że autorskie wyniki badań nie zostały zaprezentowane jedynie w rozdziale 5, w którym ograniczamy się tylko do przeprowadzenia formalnych dowodów dwóch głównych twierdzeń rozprawy. Między innymi, rozdział 4 zawiera wybrane twierdzenia pochodzące z pracy [5] opublikowanej wraz ze współautorami, które pełnią istotną rolę w dowodzie Twierdzenia A. Co więcej, rozdział 3 jest w większości poświęcony przedstawieniu kilku wyników autora, które zaczerpnięto z prac [51, 52, 53] i które będą często stosowane w dowodach obu głównych twierdzeń. Ponadto, pewne elementarne lematy techniczne potrzebne w 4.3 zostały udowodnione w 2.5, ponieważ są ściśle związane z omawianą tam klasą oswojonych algebr quazi-odwróconych kanonicznego typu. Ostatecznie, również rozdział 1 zawiera różne przydatne w wielu miejscach rozprawy lematy oraz pewne wyniki autora, stanowiące integralną część dowodów przeprowadzonych w 5, które postanowiliśmy zamieścić już w rozdziale 1 ze względu na dość elementarny przebieg ich dowodów.

Warto jeszcze wspomnieć, że na potrzeby ważnych dla rozprawy dowodów przeprowadzonych w sekcji 3.4 konieczna jest znajomość nośników modułów regularnych leżących na ustach stabilnych tub w kołczanach Auslandera-Reiten algebr dziedzicznych typu Euklidesa, po którą sięgamy do pracy V. Dlaba i C. M. Ringela [13]. Z uwagi na fakt, iż dowody te praktycznie w całości opierają się o wyniki [13] oraz korzystamy przy tym również nieustannie z stosowanych tam oznaczeń wierzchołków dla kanonicznie zorientowanych kołczanów typu Euklidesa, postanowiliśmy zestawić niezbędne nam wiadomości pochodzące z tej pracy w uzupełniającym rozprawę dodatku A. W szczególności, zaczerpnięto stamtąd potrzebne informacje o nośnikach zawarte w tabelach A.5 i A.6 oraz, dla zachowania pełnego charakteru rozprawy, zamieściliśmy w A.2 również kompletną listę wszystkich grafów typu Euklidesa wraz z kanonicznymi orientacjami. Pozostałe trzy listy grafów przedstawione w A.1, A.3 oraz A.4 są równie ważne w teorii reprezentacji algebr, lecz nie zostaną istotnie wykorzystane w żadnym z dowodów, a odwołania do nich w zasadniczej części tekstu są bardzo sporadyczne i traktujemy je czysto informacyjnie.

Autor chciałby w tym miejscu bardzo gorąco i serdecznie podziękować Panu prof. dr. hab. Andrzejowi Skowrońskiemu za cierpliwe kierowanie jego badaniami naukowymi oraz liczne inspirujące dyskusje i kluczowe wskazówki prowadzące do rozwiązania problemów, o których traktuje niniejsza rozprawa. Ponadto autor pragnie również wyrazić wielką wdzięczność za nieoceniony wkład w postęp umiejętności oraz kilka lat znakomitej opieki naukowej, pod którą pozostając miał stworzone idealne warunki do zdobywania nowej wiedzy i rozwijania swoich zainteresowań, w szczególności, do poszerzania swoich matematycznych horyzontów na zaawansowanym i bardzo profesjonalnym poziomie, między innymi, wygłaszając referaty dotyczące swoich badań na kilku międzynarodowych konferencjach, gdzie miał przy tym okazję kształtować się w gronie światowej klasy specjalistów w zakresie teorii reprezentacji algebr. Miało to bardzo istotny wpływ na kreatywność autora i przyczyniło się w dużym stopniu do powstania niniejszej pracy zestawiającej wyniki jego badań, które zostały również częściowo sfinansowane ze źródeł zespołowego grantu badawczego Maestro Narodowego Centrum Nauki numer 2011/02/ST1/00216, kierowanego przez prof. dr. hab. Andrzeja Skowrońskiego.

Rozdział 1

· Podstawy teorii reprezentacji algebr ·

Rozdział ten stanowi wprowadzenie do dalszej części pracy, gdzie przedstawione tutaj koncepcje i wyniki będą intensywnie wykorzystywane. Omawiamy tu zasadnicze pojęcia teorii reprezentacji algebr, w tym między innymi, niezbędne pojęcia takie jak kategoria modułów algebry, algebra bazowa 1.1, czy pojęcie globalnego wymiaru algebry 1.3, i później, pewne bardziej zaawansowane techniki pochodzące z teorii Auslandera-Reitena 1.4 i 1.7, teorii stopnia Liu 1.5 oraz teorii odwracania 1.6.

1.1 Algebry i kategorie modułów ·

W niniejszym wstępnym podrozdziale omawiamy pojęcie algebry i modułu oraz zestawiamy dobrze znane wyniki opisujące ogólne strukturalne własności kategorii modułów.

W rozważaniach niniejszej rozprawy będziemy zawsze zakładać, że K jest ustalonym ciałem dowolnej charakterystyki. Przypominamy, że *algebrą nad ciałem K*, lub krótko *K-algebrą*, nazywamy dowolny pierścień A (z jedynką), który ma jednocześnie określoną strukturę przestrzeni liniowej nad ciałem K taką, że dla dowolnych $a, b \in A$ oraz $\lambda \in K$ zachodzi $(ab)\lambda = a(b\lambda) = (a\lambda)b$. Powiemy, że K-algebra A jest *skończenie wymiarowa*, gdy wymiar $\dim_K A$ algebry A nad K jest skończony. Nazywając odtąd pierścień A algebrą przyjmujemy milcząco, że A jest skończenie wymiarową K-algebrą nad ustalonym ciałem K. Odnotujmy, że *centrum* K-algebry A nazywamy podpierścień $Z(A)$ pierścienia A, składający się z elementów $a \in A$, które komutują ze wszystkimi innymi elementami z A. Łatwo sprawdzić, że centrum $Z(A)$ dowolnej K-algebry A zawsze zawiera podpierścień $K1_A = 1_A K$ izomorficzny z ciałem K.

Radykałem Jacobsona algebry A, lub po prostu *radykałem A* nazywać będziemy (dwustronny) ideał $\operatorname{rad} A$ w A zdefiniowany jako przekrój wszystkich maksymalnych ideałów prawostronnych (równoważnie lewostronnych) algebry A. Istnieje kilka ciekawych charakteryzacji tego ważnego ideału, po które odsyłamy na przykład, do [49, Lemma 3.1]. Przypominamy tutaj, że algebrę nazywamy *półprostą* wtedy i tylko wtedy gdy $\operatorname{rad} A = 0$. Odnotujmy również, że *algebrą z dzieleniem* nazwiemy każdą algebrę, dla której wszystkie niezerowe elementy są odwracalne, to znaczy $U(A) = A \setminus \{0_A\}$, gdzie przez $U(A)$ oznaczamy zbiór elementów odwracalnych K-algebry A. Każda algebra z dzieleniem stanowi przykład algebry półprostej. Ponadto na mocy klasycznego twierdzenia J. H. M. Weddeburna opublikowanego oryginalnie w pracy [54] z 1908 roku (po dowód odsyłamy do [49, Theorem I.6.3]) algebra A jest półprosta wtedy i tylko wtedy, gdy jest izomorficzna z produktem algebr postaci $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$, gdzie $\mathbb{F}$ jest pewną algebrą z dzieleniem.

Definicje modułu oraz reprezentacji można znaleźć w podstawowej literaturze [49]. Moduły nad skończenie wymiarowymi K-algebrami A stanowią równoważną interpretację pojęcia reprezentacji algebry w tym sensie, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieje bijekcja pomiędzy zbiorem klas izomorfizmu lewych A-modułów M wymiaru $\dim_K M = n$, a zbiorem wszystkich klas równoważności reprezentacji algebry A stopnia n (patrz [49, Proposition I.2.4]). Innymi słowy, problem opisu wszystkich klas równoważności reprezentacji algebry A ustalonego stopnia n jest równoważny problemowi opisu wszystkich n-wymiarowych lewych A-modułów z dokładnością do izomorfizmu.

Tego typu przeformułowanie problemu przyniosło niezmiernie istotne korzyści umożliwiając badanie reprezentacji algebr w nowym uniwersalnym języku, którego dostarczała teoria kategorii. W szczególności, możemy dzięki temu stosować takie pojęcia jak homomorfizm modułów czy funktor między kategoriami modułów, co w przypadku reprezentacji algebr nie było w praktyce tak intuicyjne i łatwo dostępne. Warto tutaj wspomnieć, że problem opisu kategorii lewych A-modułów nad daną algebrą A jest tak samo złożony jak problem opisu reprezentacji algebry A, lub równoważnie, opisu wszystkich możliwych realizacji algebry A oraz jej algebr ilorazowych jako podalgebr algebr macierzy $\mathbb{M}_n(K)$. Nie będziemy się dalej odwoływać do pojęcia reprezentacji algebry, o którym wspominamy jedynie ze względu na jego historyczne znaczenie, gdyż stanowi właściwe źródło koncepcji modułu. Odtąd skupiamy naszą uwagę na własnościach kategorii $\operatorname{mod} A$ skończenie wymiarowych (prawych) A-modułów nad skończenie wymiarowymi K-algebrami A.

Uwaga · Dla każdej K-algebry możemy rozważać tak zwaną *algebrę przeciwną algebry A*, to znaczy algebrę A^{op}, gdzie $A^{\mathrm{op}} = A$ jako zbiory, działanie dodawania oraz struktura przestrzeni K-liniowej w A^{op} są identyczne jak w A, zaś mnożenie w A^{op}, określone jest wzorem $a * b = ba$, dla dowolnych $a, b \in A^{\mathrm{op}} = A$, przy czym naturalnie po prawej stronie mamy mnożenie w A. Łatwo sprawdzić, że istnieje bijektywna odpowiedniość pomiędzy zbiorem wszystkich n-wymiarowych prawych A^{op}-modułów oraz zbiorem wszystkich n-wymiarowych lewych A-modułów, która rozszerza się do funktorialnej równoważności pomiędzy kategorią $A-\operatorname{mod}$ wszystkich skończenie wymiarowych lewych A-modułów oraz kategorią $\operatorname{mod} A^{\mathrm{op}}$ wszystkich skończenie generowanych prawych A^{op}-modułów, z którą będziemy ją odtąd utożsamiać. W tym sensie badanie kategorii lewych modułów sprowadza się do badania kategorii prawych modułów. Odnotujmy również, że jeśli K-algebra A jest pierścieniem przemiennym, to $\operatorname{mod} A = \operatorname{mod} A^{\mathrm{op}}$. W przypadku, gdy algebra A jest ciałem $A = K$, pojęcie prawego (odpowiednio, lewego) A-modułu sprowadza się do pojęcia przestrzeni liniowej nad ciałem K ·

Dla dowolnej K-algebry A istnieje kategoria $\operatorname{Mod} A$, w której obiektami są wszystkie prawe A-moduły, zaś morfizmami w $\operatorname{Mod} A$ są homomorfizmy pomiędzy (prawymi) A-modułami wraz z naturalnym złożeniem, gdzie przez *homomorfizm* pomiędzy A-modułami M oraz N rozumiemy odwzorowanie K-liniowe $f : M \to N$ spełniające warunek $f(ma+m'a') = f(m)a+f(m')a'$, dla dowolnych $m, m' \in M$ i $a, a' \in A$. Struktura tej kategorii, a właściwie jej pełnej podkategorii $\operatorname{mod} A$ składającej się ze wszystkich modułów skończenie wymiarowych, będzie odtąd naszym głównym obiektem zainteresowania. Pozostałą część tego podrozdziału poświęcamy krótkiemu omówieniu podstawowych własności kategorii $\operatorname{mod} A$. Po więcej szczegółów odsyłamu do podstawowej literatury [2, 49, 50].

Przez $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ oznaczamy przestrzeń homomorfizmów między modułami M i N w $\operatorname{Mod} A$. Ponadto, dla modułu M w $\operatorname{mod} A$ przez $\operatorname{End}_A(M)$ oznaczamy przestrzeń liniową $\operatorname{Hom}_A(M, M)$ endomorfizmów modułu M, która jest skończenie wymiarową K-algebrą, gdzie mnożenie jest składaniem funkcji, zaś jedynką jest homomorfizm identycznościowy $\mathrm{Id}_M : M \to M$. Przypomnijmy również, że moduł M w $\operatorname{Mod} A$ jest skończenie generowany jako (prawy) A-moduł wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim_K M < \infty$, to jest, M jest modułem w $\operatorname{mod} A$. Odnotujmy, że homomorfizm $h : X \to Y$ w $\operatorname{mod} A$ nazywany jest *sekcją* (odpowiednio, *retrakcją*), o ile istnieje homomorfizm $t : Y \to X$ taki, że $th = 1_X$ (odpowiednio, $ht = 1_Y$). Powiemy także, że podmoduł N modułu M w $\operatorname{mod} A$ jest *składnikiem prostym* modułu M wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje podmoduł N' modułu M, dla którego zachodzi $N \oplus N' = M$, to znaczy M jest sumą prostą podmodułów N i N'. Będziemy wówczas pisać $N \Subset M$. Wspominamy tylko, że w tej sytuacji istnieje sekcja $N \to M$ oraz retrakcja $M \to N$. Co więcej, dla każdego podmodułu N modułu M ilorazowa przestrzeń K-liniowa M/N posiada naturalną strukturę prawego A-modułu. Przypomnijmy jeszcze, że w każdej kategorii modułów prawdziwe jest tak zwane pierwsze twierdzenie o izomorfizmie, to jest, dla każdego homomorfizmu $f : M \to N$ istnieje izomorfizm w $\operatorname{mod} A$ postaci $\operatorname{Im} f \simeq M/\operatorname{Ker} f$.

Przypominamy dalej, że moduł M w $\operatorname{mod} A$ jest *nierozkładalny*, o ile nie jest sumą prostą dwóch niezerowych podmodułów, lub równoważnie, nie jest izomorficzny z sumą prostą dwóch niezerowych modułów. Przez $\operatorname{ind} A$ oznaczamy pełną podkategorię w $\operatorname{mod} A$ składającą się ze wszystkich modułów nierozkładalnych w $\operatorname{mod} A$. Odnotujmy tu jedynie, że w kategoriach modułów $\operatorname{mod} A$ obowiązuje tak zwane twierdzenie Krulla-Schmidta, na mocy którego dowolny niezerowy moduł M w $\operatorname{mod} A$ posiada rozkład $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ na sumę prostą nierozkładalnych podmodułów $M_1, \ldots, M_n$, przy czym rozkład ten jest jednoznaczny z dokładnością do izomorfizmu i kolejności składników. Jeżeli M i N są modułami w $\operatorname{mod} A$ oraz $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_s$ i $N = N_1 \oplus \cdots \oplus N_t$, dla nierozkładalnych podmodułów $M_1, \ldots, M_s$ w M oraz $N_1, \ldots, N_t$ w N, to dowolny homomorfizm $f : M \to N$ w $\operatorname{mod} A$ identyfikować będziemy z odpowiadającą mu macierzą $t \times s$ homomorfizmów pomiędzy modułami nierozkładalnymi postaci

$$f = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1s} \\ f_{21} & f_{22} & \ldots & f_{2s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{t1} & f_{t2} & \ldots & f_{ts} \end{bmatrix},$$

gdzie $f_{ij} \in \operatorname{Hom}_A(M_j, N_i)$, dla wszystkich $i \in \{1, \ldots, t\}$ oraz $j \in \{1, \ldots, s\}$. Kategorie $\operatorname{mod} A$ skończenie wymiarowych prawych A-modułów nad K-algebrami A stanowią przykład tak zwanych *K-kategorii*, to jest kategorii, w których zbiór morfizmów między dowolnymi obiektami jest skończenie wymiarową przestrzenią K-liniową, określoną w taki sposób, że składanie morfizmów jest K-dwuliniowe. Ogólniej, dla każdej K-algebry A kategoria $\operatorname{mod} A$ jest również *kategorią abelową*, czego wyjaśnienie pozwólmy sobie pominąć [2, patrz Definition A.1.5].

Przypomnijmy teraz, że jeżeli X jest modułem w $\operatorname{ind} A$, to jego *anihilatorem* nazywamy ideał w A postaci $\operatorname{Ann}_A(X) = \{a \in A;\ Xa = 0\}$. Ogólniej, dla dowolnej rodziny modułów $\mathscr{X}$ w $\operatorname{ind} A$ definiuje się *anihilator rodziny* $\mathscr{X}$ jako dwustronny ideał

$$\operatorname{Ann}_A(\mathscr{X}) := \{a \in A;\ Xa = 0, \textit{dla każdego } X \in \mathscr{X}\} = \bigcap_{X \in \mathscr{X}} \operatorname{Ann}_A(X)$$

i nazywa się tę rodzinę *dokładną*, o ile $\operatorname{Ann}_A(\mathscr{X}) = 0$. Odnotujmy również, że dla modułu M w $\operatorname{mod} A$, przez $\operatorname{add} M$ oznaczamy pełną podkategorię $\operatorname{mod} A$ składającą się ze wszystkich modułów postaci $M_1 \oplus \cdots \oplus M_t$, gdzie $M_1, \ldots, M_t$ są nierozkładalnymi składnikami prostymi modułu M. Ponadto, przez $\operatorname{Gen} M$ (odpowiednio, $\operatorname{Cogen} M$) oznaczać będziemy pełną podkategorię $\operatorname{mod} A$ składającą się z takich modułów X, że istnieje w $\operatorname{mod} A$ epimorfizm postaci $M^r \to X$ (odpowiednio, monomorfizm postaci $X \to M^r$) dla pewnego $r \geqslant 1$. W szczególności $\operatorname{add} M$ jest podkategorią zarówno w $\operatorname{Gen} M$, jak i w $\operatorname{Cogen} M$.

Dzięki rozkładowi na sumy proste opis kategorii modułów ogranicza się do opisu wszystkich modułów nierozkładalnych nad daną algebrą, co sugeruje, że warto badać algebry pod kątem własności ich kategorii modułów nierozkładalnych. Wiąże się to również z subtelnym pojęciem *typu reprezentacyjnego algebry*, którego nie będziemy tu omawiać w szczegółach. Przypominamy jedynie, że jeżeli istnieje tylko skończenie wiele klas izomorfizmu modułów nierozkładalnych w $\operatorname{mod} A$ to mówimy, że algebra A jest algebrą *skończonego reprezentacyjnego typu*, lub krótko *skończonego typu*, lub, że *typ reprezentacyjny* algebry A jest *skończony*. W przeciwnym razie mówi się, że A jest algebrą *nieskończonego typu (reprezentacyjnego)*, lub algebrą *reprezentacyjnie-nieskończoną*. Bardzo ważną klasę algebr stanowią również tak zwane algebry *minimalnego nieskończonego reprezentacyjnego typu*, to znaczy reprezentacyjnie-nieskończone algebry A takie, że dla każdego niezerowego (dwustronnego) ideału $I \lhd A$, algebra ilorazowa A/I jest algebrą skończonego typu. Badanie różnych klas algebr nieskończonego typu doprowadziło do wniosku, że w tej klasie algebr zachodzi podział, na algebry tak zwanego *oswojonego* oraz *dzikiego typu reprezentacyjnego*, ze względu na stopień trudności problemu klasyfikacji modułów nierozkładalnych. Ogólna idea polegała na tym, aby oswojonego typu były te algebry A nad ciałem algebraicznie domkniętym K, dla których można sklasyfikować moduły nierozkładalne X w $\operatorname{ind} A$ wymiaru $\dim_K X = d$, dla każdego $d \geqslant 1$, z dokładnością do skończonej liczby obiektów, przy czym przez sklasyfikowanie rozumiemy tutaj wyznaczenie skończonej liczby 1-parametrycznych rodzin modułów nierozkładalnych. Pozwólmy sobie pominąć dość techniczną definicję algebr oswojonego typu reprezentacyjnego nad ciałami algebraicznie domkniętymi, po którą odsyłamy do [37]. Odnotujmy tylko, że istnieje odpowiednik tego pojęcia dla algebr nad dowolnym ciałem (a nawet dla dowolnych algebr artinowskich), które nazywa się wówczas generycznie oswojonymi (definicja ta została zaproponowana przez W. Crawley-Boeveyego [12]), lecz również nie będziemy istotnie korzystać z tego pojęcia. W dalszej części pracy intuicyjnie posługujemy się pojęciem oswojonego typu reprezentacyjnego, jednakże dla każdej klasy algebr, które będziemy określać tym terminem zawsze precyzyjnie definiujemy, co w tym przypadku to oznacza.

Wspominamy również ważną i wielokrotnie stosowaną koncepcję bimodułu. Pojęcie to pojawia się naturalnie na potrzeby formalnego opisu bardzo częstej sytuacji, w której prawy A-moduł $M = M_A$ ma dodatkową strukturę lewego B-modułu ${}_BM = M$ nad inną algebrą B, przy czym struktury te są ze sobą *kompatybilne*, to znaczy $b(ma) = (bm)a$, dla dowolnych $m \in M$ oraz $a \in A$ i $b \in B$. Powiemy wówczas, że M jest $(B\text{-}A)$-bimodułem, co często zaznaczamy pisząc $M = {}_BM_A$. Przez $\mathrm{bimod}(B, A)$ będziemy oznaczać kategorię wszystkich $(B\text{-}A)$-bimodułów skończenie wymiarowych. Odnotujmy wprost z definicji, że jeśli A jest K-algebrą oraz $M = M_A$ jest modułem w $\mathrm{mod}\, A$, to działanie ciała K zadaje na M strukturę lewego K-modułu ${}_KM$ kompatybilną ze strukturą prawego A-modułu M_A, i w ten sposób $M = {}_KM_A$ staje się bimodułem w $\mathrm{bimod}(K, A)$. W tym sensie możemy utożsamiać kategorię $\mathrm{mod}\, A$ prawych A-modułów z kategorią $\mathrm{bimod}(K, A)$ wszystkich $(K\text{-}A)$-bimodułów. Analogicznie, możemy utożsamiać lewe A-moduły w $\mathrm{mod}\, A^{\mathrm{op}}$ z $(A\text{-}K)$-bimodułami w $\mathrm{bimod}(A, K)$. Przypomnijmy jeszcze, że jeśli dane są moduły M i N w $\mathrm{Mod}\, A$, które mają dodatkowo struktury $(B\text{-}A)$- i $(C\text{-}A)$-bimodułu odpowiednio, to przestrzeń homomorfizmów $\mathrm{Hom}_A(M_A, N_A)$ ma również indukowaną z ${}_BM$ i ${}_CN$ strukturę $(C\text{-}B)$-bimodułu. Dualnie, jeśli M i N są odpowiednio, $(A\text{-}B)$- i $(A\text{-}C)$-bimodułem, to przestrzeń $\mathrm{Hom}_{A^{\mathrm{op}}}({}_AM, {}_AN)$ ma strukturę $(B\text{-}C)$-bimodułu. Więcej szczegółów można znaleźć w [49, patrz II.2].

Przypominamy, że moduł S w $\mathrm{mod}\, A$ jest *modułem prostym*, o ile S ma dokładnie dwa podmoduły. Wspominamy jedynie, że algebra endomorfizmów dowolnego modułu prostego w $\mathrm{mod}\, A$ jest K-algebrą z dzieleniem. Moduły które są sumami prostymi modułów prostych nazywane są w literaturze *modułami półprostymi*. Odnotujmy również, że dowolna K-algebra A jest algebrą półprostą wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie moduły w $\mathrm{mod}\, A$ są półproste [49, Theorem I.6.3]. Warto także wspomnieć, że pojęcie radykału algebry można uogólnić i zdefiniować radykał $\mathrm{rad}\, M$ dowolnego modułu M w $\mathrm{mod}\, A$ jako przekrój wszystkich maksymalnych podmodułów modułu M. Dowodzi się, że $\mathrm{rad}\, M = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy moduł M jest modułem półprostym w $\mathrm{mod}\, A$. Przyjmujemy tradycyjnie oznaczać przez $\mathrm{top}(M)$ moduł ilorazowy $M/\mathrm{rad}\, M$ modułu M, zaś przez $\mathrm{soc}(M)$ podmoduł w M zdefiniowany jako suma wszystkich podmodułów prostych modułu M.

Odnotujmy dalej, że *ciągiem kompozycyjnym* modułu $M \neq 0$ w $\mathrm{mod}\, A$ nazywamy każdy ciąg podmodułów M postaci $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$, dla którego wszystkie *kompozycyjne faktory* M_n/M_{n-1}, $\ldots$, M_2/M_1, M_1/M_0 są modułami prostymi w $\mathrm{mod}\, A$. Zachodzi ponadto znane Twierdzenie Jordana-Höldera (patrz [49, Theorem I.7.5]), na mocy którego każdy niezerowy moduł M w $\mathrm{mod}\, A$ posiada ciąg kompozycyjny, oraz ciąg taki jest jednoznacznie wyznaczony przez moduł M z dokładnością do permutacji izomorficznych kompozycyjnych faktorów. W szczególności wynika stąd, że wszystkie ciągi kompozycyjne $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_r = M$ modułu M mają jednakową długość r oznaczaną przez $l(M)$, która nie zależy od wyboru ciągu kompozycyjnego i nazywana jest *długością modułu* M. Co więcej, jeżeli $S_1, \ldots, S_n$ są wszystkimi parami nieizomorficznymi modułami prostymi w $\mathrm{mod}\, A$, to dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$ tak zwana *krotność* $c_i(M) = c_{S_i}(M) := |\{t \in \{1, \ldots, r\}; \quad M_t/M_{t-1} \simeq S_i\}|$ *modułu prostego* S_i w ciągu kompozycyjnym modułu M, jest wówczas również poprawnie zdefiniowana. Dla każdego niezerowego modułu M w $\mathrm{mod}\, A$ będziemy również oznaczać przez $c(M)$ tak zwany *wektor kompozycyjny*, to znaczy wektor $c(M) = [c_1(M), \ldots, c_n(M)] \in \mathbb{N}^n$, którego współrzędne są krotnościami występowania kolejnych modułów prostych $S_1, \ldots, S_n$ w ciągu kompozycyjnym danego modułu M.

Przypomnijmy również dla formalności definicję klasycznego pojęcia *grupy Grothendiecka* kategorii modułów. Jeśli A jest algebrą to definiuje się *grupę Grothendiecka kategorii* $\mathrm{mod}\, A$ oznaczaną symbolem $K_0(A)$ jako grupę ilorazową $K_0(A) := F/F'$, gdzie F jest wolną grupą abelową $F = \mathbb{Z}(\mathrm{mod}\, A_{\simeq})$ generowaną przez wszystkie klasy izomorfizmu $\{M\}$ modułów M w $\mathrm{mod}\, A$, zaś F' podgrupą generowaną przez elementy postaci $\{M\} - \{L\} - \{N\}$, dla wszystkich ciągów dokładnych $0 \to L \to M \to N \to 0$ w $\mathrm{mod}\, A$. Dla dowolnego modułu M w $\mathrm{mod}\, A$ przez $[M]$ oznacza się zwykle warstwę $\{M\} + F' \in K_0(A)$ klasy izomorfizmu $\{M\} = 1\{M\} \in F$ modułu M. Wspominamy tutaj tylko, że dzięki istnieniu filtracji modułami prostymi można pokazać, że grupa $K_0(A)$ jest skończonej rangi oraz posiada $\mathbb{Z}$-bazę składającą się z klas $[S_1], \ldots, [S_n]$ w $K_0(A)$ wszystkich parami nieizomorficznych modułów prostych w $\mathrm{mod}\, A$. Ponadto dowodzi się również [49, patrz Theorem I.11.1], że wówczas funkcja wektora kompozycyjnego indukuje izomorfizm grup $c : K_0(A) \to \mathbb{Z}^n$, gdzie $c([M]) = c(M)$.

Ostateczenie przypominamy ważne pojęcie nieskończonego radykału Jacobsona kategorii modułów, poprzedzając to wprowadzeniem pojęcia radykału Jacobsona kategorii modułów. Odnotujmy, że w ogólności *ideałem w kategorii modułów*, lub krótko *ideałem w* $\mathrm{mod}\, A$, nazywamy dowolną funkcję

$\mathcal{I} : \operatorname{mod} A \times \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} K$, która każdej parze (X, Y) modułów X, Y w $\operatorname{mod} A$ przyporządkowuje podprzestrzeń K-liniową $\mathcal{I}(X, Y) \subseteq \operatorname{Hom}_A(X, Y)$ i dla dowolnego morfizmu $f \in \mathcal{I}(X, Y)$, mamy również $gf \in \mathcal{I}(X, Z)$ oraz $fh \in \mathcal{I}(Z, Y)$, dla wszystkich $g \in \operatorname{Hom}_A(Y, Z)$ oraz $h \in \operatorname{Hom}_A(Z, X)$. Przypominamy tu jedynie, że *radykał Jacobsona kategorii modułów* $\operatorname{mod} A$ algebry A jest dwustronnym ideałem $\operatorname{rad}_A : \operatorname{mod} A \times \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} K$ w kategorii $\operatorname{mod} A$, określonym dla dowolnej pary modułów M, N w $\operatorname{mod} A$ jako następująca podprzestrzeń K-liniowa przestrzeni $\operatorname{Hom}_A(M, N)$

$$\operatorname{rad}_A(M, N) := \{f \in \operatorname{Hom}_A(M, N) | \quad \operatorname{Id}_N - fg \in U(\operatorname{End}_A(N)), \textit{ dla każdego } g \in \operatorname{Hom}_A(N, M)\}.$$

Można pokazać, że dowolny homomorfizm $f \in \operatorname{Hom}_A(M, N)$ należy do $\operatorname{rad}_A(M, N)$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $g \in \operatorname{Hom}_A(N, M)$ homomorfizm $\operatorname{Id}_M - gf$ jest odwracalny w $\operatorname{End}_A(M)$. Poniższe twierdzenie zestawia podstawowe własności radykału Jacobsona kategorii modułów [49, patrz Lemma III. 1.3, 1.4 i 1.5].

Twierdzenie 1.1.1. *Niech A będzie algebrą. Wówczas zachodzą następujące stwierdzenia.*

(1) Dla dowolnych modułów X i Y w $\operatorname{ind} A$, niezerowy homomorfizm $f \in \operatorname{Hom}_A(X, Y)$ należy do $\operatorname{rad}_A(X, Y)$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest izomorfizmem; w szczególności wynika stąd, że jeśli $X \not\cong Y$, to $\operatorname{rad}_A(X, Y) = \operatorname{Hom}_A(X, Y)$.

(2) Jeżeli M oraz N są modułami w $\operatorname{mod} A$ oraz $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_s$ i $N = N_1 \oplus \cdots \oplus N_t$, dla modułów nierozkładalnych M_i, N_j, $i \in \{1, \ldots, s\}$, $j \in \{1, \ldots, t\}$, to homomorfizm $f = [f_{ij}] \in \operatorname{Hom}_A(M, N)$, gdzie $f_{ji} \in \operatorname{Hom}_A(M_i, N_j)$, należy do radykału $\operatorname{rad}_A(M, N)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f_{ji} \in \operatorname{rad}_A(M_i, N_j)$, dla każdego $i \in \{1, \ldots, s\}$ oraz $j \in \{1, \ldots, t\}$.

(3) Jeśli N jest modułem nierozkładalnym w $\operatorname{mod} A$, to dla każdego modułu M w $\operatorname{mod} A$, homomorfizm $h : M \to N$ w $\operatorname{mod} A$ należy do $\operatorname{rad}_A(M, N)$ wtedy i tylko wtedy, gdy h nie jest retrakcją.

(4) Jeśli M jest modułem w $\operatorname{ind} A$, to dla każdego modułu N w $\operatorname{mod} A$, homomorfizm $h : M \to N$ w $\operatorname{mod} A$ należy do $\operatorname{rad}_A(M, N)$ wtedy i tylko wtedy, gdy h nie jest sekcją.

Bardzo wiele ważnych własności kategorii modułów odzwierciedla się w zachowaniu następującego nieskończonego ciągu ideałów $\cdots \subseteq \operatorname{rad}_A^n \subseteq \cdots \subseteq \operatorname{rad}_A^2 \subseteq \operatorname{rad}_A$ w kategorii $\operatorname{mod} A$ składającego się z kolejnych potęg rad_A^n, $n \geqslant 1$, radykału Jacobsona. Odnotujmy jedynie, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$, n-ta potęga radykału rad_A jest ideałem rad_A^n w kategorii modułów $\operatorname{mod} A$, określonym dla pary modułów (M, N) jako podprzestrzeń $\operatorname{rad}_A^n(M, N)$ przestrzeni $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ generowaną przez wszystkie możliwe złożenia n homomorfizmów z radykału rad_A. Wówczas *nieskończony radykał Jacobsona* $\operatorname{rad}_A^\infty$ kategorii modułów $\operatorname{mod} A$ zdefiniowany jest jako przekrój $\operatorname{rad}_A^\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{rad}_A^n$, wszystkich potęg rad_A^n, $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, radykału Jacobsona rad_A.

1.2 Funktorialne równoważności między kategoriami modułów ·

W tym podrozdziale omawiamy krótko różne przykłady występowania pojęcia równoważności między K-kategoriami, głównie w kontekście kategorii modułów. W szczególności, przypominamy tu pojęcie algebry bazowej ściśle związane z relacją Morita równoważności algebr oraz pobieżnie komentujemy pewną interpretację K-algebr jako K-kategorii o skończonych klasach obietków. Na koniec podajemy przykład wykorzystania równoważności kategoryjnej do opisu kategorii modułów pewnej istotnej dla naszych rozważań klasy algebr stowarzyszonych z bimodułami.

Jednymi z najczęściej pojawiających się w tej pracy funktorów są funktory typu Hom_A. Przypominamy, że dowolny $(B\text{-}A)$-bimoduł M indukuje naturalnie dwa funktory, odpowiednio kowariantny i kontrawariantny, postaci

$$\operatorname{Hom}_A(M, -) : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} B \qquad \text{oraz} \qquad \operatorname{Hom}_A(-, M) : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} B^{\mathrm{op}}.$$

Oczywiście, funktor $\mathrm{Hom}_A(M,-)$ modułowi N w $\mathrm{mod}\,A$ przyporządkowuje moduł $\mathrm{Hom}_A({}_BM,N)$ w $\mathrm{mod}\,B$, zaś dowolnemu homomorfizmowi $f : N \to N'$ w $\mathrm{mod}\,A$, homomorfizm w $\mathrm{mod}\,B$ postaci $\mathrm{Hom}_A(M,f) : \mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_A(M,N')$, gdzie $\mathrm{Hom}_A(M,f)(g) = fg$, dla wszystkich $g \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$. Funktor kontrawariantny $\mathrm{Hom}_A(-,M)$ określony jest analogicznie. Wspominamy tylko, że dla dowolnych bimodułów $M = {}_BM_A$ oraz $N = {}_AN_C$ określa się $(B\text{-}C)$-bimoduł $M \otimes_A N$ nazywany ich *produktem tensorowym* (po definicję odsyłamy do [49, II.3]). Operacja produktu tensorowego przez ustalony bimoduł M w $\mathrm{bimod}(B,A)$ indukuje również dwa kowariantne funktory postaci

$$M \otimes_A - : \mathrm{mod}\,A^{\mathrm{op}} \to \mathrm{mod}\,B^{\mathrm{op}} \quad \text{oraz} \quad - \otimes_B M : \mathrm{mod}\,B \to \mathrm{mod}\,A,$$

przyporządkowywujące dowolnemu modułowi N w $\mathrm{mod}\,A^{\mathrm{op}}$ (odpowiednio, modułowi N w $\mathrm{mod}\,B$) produkt tensorowy ${}_BM \otimes_A N$ w $\mathrm{mod}\,B^{\mathrm{op}}$ (odpowiednio, produkt $N \otimes_B M_A$ w $\mathrm{mod}\,A$). Ostatecznie odnotujmy, że dla dowolnej skończenie wymiarowej K-algebry A istnieje tak zwany *funktor dualności standardowej* na kategorii $\mathrm{mod}\,A$, to znaczy, funktor kontrawariantny postaci $D = \mathrm{Hom}_K(-,K) : \mathrm{mod}\,A \to \mathrm{mod}\,A^{\mathrm{op}}$.

Wspominamy jeszcze, że kowariantny funktor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ pomiędzy K-kategoriami $\mathscr{C}$ i $\mathscr{D}$ nazywamy *K-liniowym*, o ile dla dowolnych obiektów X i Y w $\mathscr{C}$ funkcja $F_{XY} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X),F(Y))$ jest homomorfizmem K-liniowym. Ponadto, funktor K-liniowy $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ nazwiemy *pełnym* (odpowiednio, *dokładnym*), gdy homomorfizmy F_{XY} są epimorfizmami (odpowiednio, monomorfizmami), dla dowolnych obiektów X, Y z $\mathscr{C}$. Powiemy natomiast, że funktor F jest *gęsty*, o ile dla dowolnego obiektu Y w $\mathscr{D}$, istnieje obiekt X w $\mathscr{C}$ taki, że $F(X) \simeq Y$ w $\mathscr{D}$. Przypominamy ostatecznie, że funktor kowariantny F między K-kategoriami $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$ nazywany jest *równoważnością kategorii* wtedy i tylko wtedy, gdy jest pełny, gęsty oraz dokładny. W szczególności, jeśli kategorie $\mathscr{C}$ oraz $\mathscr{D}$ są *abelowe*, to każda równoważność kategorii jest również funktorem zachowującym ciągi dokładne.

Niech A będzie algebrą, zaś $I \lhd A$ dwustronnym ideałem w A. Odnotujmy, że wówczas dowolny A/I-moduł M jest oczywiście również modułem $M = M_A$ w $\mathrm{mod}\,A$ z naturalnie indukowaną strukturą A-modułu zadaną wzorem $m.a = m.(a+I)$, dla wszystkich $m \in M$ i $a \in A$. W szczególności M jako A-moduł spełnia warunek $M.I = 0$. Innymi słowy, istnieje pełny i dokładny funktor

$$F : \mathrm{mod}\,A/I \to \mathrm{mod}\,A,$$

gdzie $F(M_{A/I}) = M_A$, dla dowolnego modułu $M_{A/I}$ w $\mathrm{mod}\,A/I$ oraz $F(f) = f$, dla wszystkich homomorfizmów f w $\mathrm{mod}\,A/I$. Wynika stąd również, że F indukuje równoważność pomiędzy kategorią $\mathrm{mod}\,A/I$ oraz pełną podkategorią $F(\mathrm{mod}\,A/I)$ kategorii $\mathrm{mod}\,A$ składającą się ze wszystkich modułów postaci $F(M)$, dla pewnego modułu M w $\mathrm{mod}\,A/I$. W tym sensie możemy identyfikować kategorię modułów $\mathrm{mod}\,A/I$ z pełną podkategorią w $\mathrm{mod}\,A$ składającą się ze wszystkich modułów M w $\mathrm{mod}\,A$, dla których zachodzi $M.I = 0$, to znaczy $I \subseteq \mathrm{Ann}_A(M)$.

Równoważności między kategoriami mają fundamentalne znaczenie dla teorii reprezentacji algebr, czego przykładem może być pojęcie Morita równoważności algebr. Przypomnijmy, że algebry A i B są *równoważne w sensie Mority*, lub *Morita równoważne*, gdy istnieje równoważność $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$ pomiędzy ich kategoriami modułów $\mathscr{C} = \mathrm{mod}\,A$ i $\mathscr{D} = \mathrm{mod}\,B$. Innymi słowy, relacja Morita równoważności nie rozróżnia algebr o równoważnych kategoriach modułów. Okazuje się, że każdej algebrze A można przyporządkować algebrę A^b, która jest w pewnym sensie minimalną algebrą Morita równoważną z algebrą A. Omówimy poniżej krótko konstrukcję algebry A^b oraz bezpośrednio z tym związane pojęcie *algebry bazowej*.

Przypomnijmy, że dla dowolnej algebry A, element $e \in A$ nazywany jest *idempotentem w A* wtedy i tylko wtedy, gdy $e^2 = e$. Odnotujmy również, że dwa idempotenty e i f nazywamy *ortogonalnymi*, o ile $\{e,f\} \subset A \setminus \{0,1\}$ oraz $ef = fe = 0$. Jeżeli e jest idempotentem w A, to e nazwiemy *idempotentem prymitywnym*, o ile nie można go przedstawić w postaci sumy $e = e_1 + e_2$ dwóch ortogonalnych idempotentów $e_1, e_2 \in A$. Następujące twierdzenie zestawia podstawowe własności idempotentów, ilustrując jednocześnie rolę jaką pełnią w opisie struktury algebry.

Twierdzenie 1.2.1. *Niech A będzie algebrą. Wówczas*

(1) *Jeśli M jest $(B$-$A)$-bimodułem oraz $e \in A$ pewnym idempotentem, to* $\mathrm{Hom}_A(eA, M) \simeq Me$ *w* $\mathrm{bimod}(B, eAe)$.

(2) *Idempotent $e \in A$ jest prymitywny wtedy i tylko wtedy, gdy moduł eA jest nierozkładalny w* $\mathrm{mod}\, A$.

(3) *Algebra A jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy jedynymi idempotentami należącymi do jej centrum $Z(A)$ są idempotenty trywialne 0_A i 1_A. Ponadto istnieje wtedy zbiór parami ortogonalnych idempotentów prymitywnych $e_1, \ldots, e_n \in A$ taki, że $1_A = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$. Każdy inny zbiór idempotentów $f_1, \ldots, f_m \in A$ o tych własnościach spełnia $n = m$ oraz istnieje permutacja σ zbioru $\{1, \ldots, m\}$ taka, że dla wszystkich $i \in \{1, \ldots, n\}$ zachodzi izomorfizm $f_i A \simeq e_{\sigma(i)} A$ w* $\mathrm{ind}\, A$.

dowód · Odsyłamy do podstawowej literatury. Dla dowodu (1) patrz [49, Lemma II.2.3], zaś dowody (2) i (3) można znaleźć w [49, Corollary I.5.8, 5.9, 5.10 oraz Proposition I.3.16]. □

Wynika stąd, że każdy zbiór $\{e_1, \ldots, e_n\}$ parami ortogonalnych idempotentów prymitywnych w A z $1_A = e_1 + \cdots + e_n$ wyznacza zbiór nierozkładalnych podmodułów $e_1A, \ldots, e_nA$ w A, dla których zachodzi rozkład $A_A = e_1A \oplus \cdots \oplus e_nA$ w $\mathrm{mod}\, A$. Niezależnie od wyboru wyjściowego zbioru idempotentów, otrzymany zbiór modułów nierozkładalnych jest wyznaczony jednoznacznie przez A z dokładnością do permutacji izomorficznych składników prostych $e_iA \Subset A$. Jeżeli moduły $e_1A, \ldots, e_nA$ są parami nieizomorficzne, to taką algebrę nazywamy *algebrą bazową*. Pojęcie bazowości jest więc poprawnie określone niezależnie od początkowego wyboru idempotentów $e_1, \ldots, e_n$.

Uwaga · Badanie kategorii modułów $\mathrm{mod}\, A$ nad daną algebrą A sprowadza się w istocie do badania stowarzyszonej (równoważnej) kategorii modułów $\mathrm{mod}\, A^b$ pewnej algebry bazowej A^b. W istocie, A^b jest z definicji, algebrą postaci $A^b = \mathrm{End}_A(e^b A)$, gdzie e^b jest dowolną sumą $e^b = e_{i_1} + \cdots + e_{i_{n_A}}$ idempotentów $e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n_A}}$, $n_A \leqslant n$, dla których odpowiadające moduły $e_{i_1}A, \ldots, e_{i_{n_A}}A$ w $\mathrm{ind}\, A$ są parami nieizomorficzne oraz wyczerpują z dokładnością do izomorfizmu wszystkie moduły postaci e_iA, dla $i \in \{1, \ldots, n\}$. Wtedy oczywiście A^b jest algebrą bazową. W tej notacji algebra A jest bazowa, wtedy i tylko wtedy, gdy $A = A^b$, to znaczy $n = n_A$. Odnotujmy tu jeszcze bez uzasadnienia, że algebry A i A^b są Morita równoważne (odpowiedni funktor ustalający równoważność nie będzie nam potrzebny; po więcej szczegółów odsyłamy do [49, Theorem II.6.7]). *Będziemy odtąd zakładać, że wszystkie rozważane algebry są bazowe* ·

Odnotujmy jeszcze, że istnieje ważny homologiczno-kombinatoryczny niezmiennik określony dla klasy skończenie wymiarowych K-algebr bazowych, nazywany *kołczanem zwyczajnym*, który jest wartościowanym kołczanem stowarzyszonym z algebrą A zawierającym pewne istotne informacje o przestrzeniach homomorfizmów pomiędzy modułami $e_1A, \ldots, e_{n_A}A$. Przypomnijmy tutaj, że *kołczanem* nazywamy każdy układ $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$, gdzie Q_0 i Q_1 są skończonymi zbiorami odpowiednio, *wierzchołków* i *strzałek* kołczanu Q, zaś $s, t : Q_1 \to Q_0$ są funkcjami, które przyporządkowują każdej strzałce $\alpha \in Q_1$ jej początek $s(\alpha) \in Q_0$ oraz koniec $t(\alpha) \in Q_0$, odpowiednio. Ponadto, jeśli dodatkowo określona jest funkcja $d : Q_1 \to \mathbb{N}^2$, która przyporządkowuje każdej strzałce α tak zwane *wartościowanie*, czyli parę (d_α, d'_α) liczb naturalnych $d_\alpha, d'_\alpha \geqslant 1$, to układ $(Q, d) = (Q_0, Q_1, s, t, d)$ nazywa się *kołczanem wartościowanym*, zaś funkcję d, *wartościowaniem kołczanu Q*.

Niech A będzie ustaloną K-algebry oraz załóżmy, że $e_1, \ldots, e_n$ są parami ortogonalnymi prymitywnymi idempotentami w A z $e_1 + \cdots + e_n = 1_A$, $n = n_A$. Wówczas dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$ moduł $S_i = \mathrm{top}(e_iA)$ jest modułem prostym w $\mathrm{mod}\, A$ oraz algebra $F_i = \mathrm{End}_A(S_i)$ jest skończenie wymiarową K-algebrą z dzieleniem [49, Proposition I.5.16 oraz Lemma I.5.1]. Ponadto, algebra F_i jest izomorficzna z K-algebrą $e_iAe_i/e_i(\mathrm{rad}\, A)e_i$ [49, patrz Lemma I.11.2], z którą będziemy ją dalej utożsamiać. Wspominamy, że przy tej identyfikacji dla dowolnych $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ przestrzeń K-liniowa $e_i(\mathrm{rad}\, A)e_j/e_i(\mathrm{rad}\, A)^2e_j$ ma naturalną strukturę $(F_i$-$F_j)$-bimodułu zadaną wzorami

$$\bar{a}\bar{x} = ax + e_i(\mathrm{rad}\, A)^2 e_j \qquad \text{oraz} \qquad \bar{x}\bar{b} = xb + e_i(\mathrm{rad}\, A)^2 e_j,$$

dla $\bar{x} = x + e_i(\mathrm{rad}\, A)^2e_j$, $\bar{a} = a + e_i(\mathrm{rad}\, A)e_i$ i $\bar{b} = b + e_j(\mathrm{rad}\, A)e_j$, gdzie $x \in e_i(\mathrm{rad}\, A)e_j$, $a \in e_i(\mathrm{rad}\, A)e_i$ oraz $b \in e_j(\mathrm{rad}\, A)e_j$. Ostatecznie przypomnijmy, że dla każdej K-algebry A jej *kołczanem zwyczajnym* nazywamy wartościowany kołczan $Q_A = (Q, d)$, przy czym:

- Q jest kołczanem postaci $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$, gdzie Q_0 jest zbiorem $Q_0 = \{1, \ldots, n\}$ indeksującym dowolnie wybrany układ parami ortogonalnych prymitywnych idempotentów $e_1, \ldots, e_n$ w A, dla których $e_1 + \cdots + e_n = 1_A$ ($n = n_A$), oraz dla każdej pary wierzchołków $i, j \in Q_0$ istnieje strzałka $i \to j$ w Q_1 wtedy i tylko wtedy, gdy $e_j(\operatorname{rad} A)e_i / e_j(\operatorname{rad}^2 A)e_i \neq 0$.

- wartościowanie $d : Q_1 \to \mathbb{N}^2$ określone jest dla każdej strzałki $\alpha : i \to j$ w Q_1 wzorem $d(\alpha) = (d_{ij}, d'_{ij})$, gdzie
$$d_{ij} = \dim_{F_j} \frac{e_i(\operatorname{rad} A)e_j}{e_i(\operatorname{rad} A)^2 e_j} \quad \text{oraz} \quad d'_{ij} = \dim_{F_i} \frac{e_i(\operatorname{rad} A)e_j}{e_i(\operatorname{rad} A)^2 e_j}.$$

Omawiamy teraz pewną interpretację K-algebr jako K-kategorii o skończonej liczbie obiektów, które odpowiadają idempotentom danej algebry. Mamy wówczas możliwość stosowania pojęć i metod teorii kategorii do badania struktury samej algebry, w nieco inny niż dotychczas sposób. W tej sytuacji bowiem rozważamy kategorie o skończonych klasach obiektów (co dla kategorii modułów ma miejsce jedynie w przypadku algebr skończonego reprezentacyjnego typu), zaś równoważności między takimi kategoriami odpowiadają przy tej identyfikacji K-algebrowym izomorfizmom. Stosując tę interpretację zdefiniujemy dalej również pewną operację na algebrach nazywaną *sumą włóknistą*, która będzie później pełnić istotną rolę w opisie struktury algebr *cyklowo skończonych półregularnego typu* (patrz 4.3).

Rozważmy dowolną spójną algebrę bazową A oraz niech $e_1, \ldots, e_n$ będzie ustalonym zbiorem parami ortogonalnych prymitywnych idempotentów w A takich, że $e_1 + \cdots + e_n = 1_A$. W dalszym ciągu rozprawy będziemy dość często identyfikować algebrę A z odpowiadającą K-kategorią A^*, w której klasą obiektów jest skończony zbiór $\{1, \ldots, n\}$ indeksujący ustalony zestaw bazowych idempotentów w A, zaś zbiór morfizmów między dowolnymi obiektami i oraz j w A^* określony jest jako $\operatorname{Hom}_{A^*}(i, j) = e_j A e_i$, gdzie operacja składania morfizmów w A^* jest naturalnie indukowana z mnożenia w A.

Przede wszystkim, bardzo przydatne okazuje się badanie pełnych podkategorii w A^*, które nazywać będziemy po prostu *pełnymi podkategoriami w A*. Na przykład, jeśli dana jest rodzina modułów $\mathscr{C}$ w $\operatorname{ind} A$, to istnieje naturalnie stowarzyszona z nią podkategoria $\operatorname{supp}_A(\mathscr{C})$ w A, która jest z definicji pełną podkategorią w A^* rozpiętą na zbiorze obiektów $i \in \{1, \ldots, n\}$ takich, że $Xe_i \neq 0$, dla pewnego modułu X z $\mathscr{C}$, lub równoważnie, takich, że $e_i \notin \operatorname{Ann}_A(\mathscr{C})$. Ponadto, dla każdego modułu M w $\operatorname{mod} A$ analogicznie definiujemy $\operatorname{supp}_A(M)$ jako pełną podkategorię w A^* składającą się z obiektów i w A^* takich, że $Me_i \neq 0$; w szczególności, jeśli $M = X_1 \oplus \cdots \oplus X_r$, dla modułów $X_1, \ldots, X_r$ w $\operatorname{ind} A$, to $\operatorname{supp}_A(M) = \operatorname{supp}_A(\{X_1, \ldots, X_r\})$. Podkategoria $\operatorname{supp}_A(\mathscr{C})$ (odpowiednio, $\operatorname{supp}_A(M)$) nazywana jest często *nośnikiem rodziny $\mathscr{C}$* (odpowiednio, *nośnikiem modułu M*). Moduł M w $\operatorname{mod} A$, bądź ogólniej, rodzinę modułów $\mathscr{C}$ w $\operatorname{ind} A$, nazwiemy *wiernym* (odpowiednio, *wierną*), o ile $\operatorname{supp}_A(M) = A^*$ (odpowiednio, $\operatorname{supp}_A(\mathscr{C}) = A^*$). Odnotujmy także, że każda rodzina $\mathscr{C}$ modułów w $\operatorname{ind} A$ wyznacza rozkład $A_A = P_{\mathscr{C}} \oplus Q_{\mathscr{C}}$ algebry A_A na sumę prostą modułów w $\operatorname{mod} A$, przy czym wszystkie nierozkładalne składniki proste $P_i \in P_{\mathscr{C}}$ są postaci $P_i = e_i A$, gdzie $i \in \operatorname{supp}_A(\mathscr{C})$, a $Q_{\mathscr{C}}$ takich składników prostych nie posiada. Przypomnijmy również, że podkategorie nośników modułów lub ogólniej, rodzin modułów, indukują naturalnie pewne algebry ilorazowe danej algebry A. Dla rodziny modułów $\mathscr{C}$ w $\operatorname{ind} A$, definiuje się bowiem tak zwaną *algebrę nośnikową* (rodziny) $\mathscr{C}$, która jest algebrą postaci $\operatorname{Supp}_A(\mathscr{C}) = A / t_A(\mathscr{C})$, gdzie $t_A(\mathscr{C})$ jest dwustronnym ideałem w A generowanym przez obrazy wszystkich homomorfizmów w $\operatorname{Hom}_A(Q_{\mathscr{C}}, A)$.

Szczególnie ważną rolę w niniejszej pracy (i nie tylko), odgrywa pojęcie *podkategorii wypukłej*. Wspominamy, że pełna podkategoria B algebry A nazywana jest *wypukłą podkategorią w A* wtedy i tylko wtedy, gdy dowolna droga w A^* postaci $i_0 \to i_1 \to \cdots \to i_t$, $t \geqslant 1$, dla której obiekty i_0 oraz i_t należą do B, spełnia również $i_s \in B$, dla wszystkich $s \in \{1, \ldots, t-1\}$, to znaczy jest to droga w B. Ustalmy wypukłą podkategorię B algebry A oraz niech B składa się z obiektów $b_1, \ldots, b_r$. Przyjmijmy ponadto oznaczać przez e_B stowarzyszony z B idempotent $e_B := e_{b_1} + \ldots e_{b_r}$ w A. Można pokazać, że wówczas odpowiedni ideał $t_A(e_B A)$ jest postaci $A f_B A$, gdzie $f_B = 1 - e_B$, oraz zachodzi K-algebrowy izomorfizm $\operatorname{Supp}_A(e_B A) \cong e_B A e_B$. Tak więc mamy również pełne i dokładne zanurzenie $\operatorname{mod} e_B A e_B \hookrightarrow \operatorname{mod} A$, gdzie w tym przypadku kategorię $\operatorname{mod} B_A$ algebry $B_A = e_B A e_B \cong \operatorname{End}_A(e_B A)$, utożsamiamy z pełną podkategorią $\operatorname{mod} A$ zawierającą wszystkie moduły M w $\operatorname{mod} A$ takie, że $M.f_B = 0$. Ponadto, łatwo także zauważyć, że $B_A^* \simeq B$ jako K-kategorie.

Przedstawiamy teraz wspominaną definicję tak zwanej *sumy włóknistej* algebr, która jest operacją na algebrach pozwalającą w pewnym sensie sklejać dwie algebry A i B identyfikując ich wspólną pełną podkategorię C. Wykorzystamy tę operację w charakteryzacji ważnej dla nas klasy algebr cyklowo skończonych półregularnego typu, która orzeka, że każdą taką algebrę można skonstruować za pomocą iterowanej sumy włóknistej skończonej liczby tak zwanych *oswojonych algebr quazi-odwróconych typu kanonicznego*.

Rozważmy więc dowolne dwie algebry A i B oraz przypuśćmy, że C jest algebrą taką, że C^* jest pełną podkategorią zarówno w A^* jak i w B^*. Możemy wówczas zdefiniować *sumę włóknistą* kategorii A^* i B^* nad C^* jako kategorię $D^* = A^* \sqcup_{C^*} B^*$, dla której zbiór obiektów określamy jako $D_0^* = A_0^* \cup B_0^* \supset C_0^*$, gdzie obiekty z C^* liczone są tylko raz, zaś dla pary obiektów x, y w D^*, przestrzeń morfizmów $\mathrm{Hom}_{D^*}(x, y)$ zdefiniowana jest następująco:

- $\mathrm{Hom}_{D^*}(x, y) = \mathrm{Hom}_{A^*}(x, y)$, jeśli $x, y \in A_0^*$.
- $\mathrm{Hom}_{D^*}(x, y) = \mathrm{Hom}_{B^*}(x, y)$, dla $x, y \in B_0^*$.
- $\mathrm{Hom}_{D^*}(x, y) = 0$ oraz $\mathrm{Hom}_{D^*}(y, x) = 0$, o ile $x \in A_0^* \setminus B_0^*$ oraz $y \in B_0^* \setminus A_0^*$.

W takiej sytuacji definiujemy tak zwaną *sumę włóknistą algebr A i B nad algebrą C*, jako algebrę

$$D = A \underset{C}{\sqcup} B$$

odpowiadającą kategorii D^*, to znaczy taką, że $(A \sqcup_C B)^* = A^* \sqcup_{C^*} B^*$. Ogólniej dla ciągu algebr $A_1, \ldots, A_n$ i ciągu algebr $C_1, \ldots, C_{n-1}$ takich, że C_i^* jest pełną podkategorią w A_i^* oraz w A_{i+1}^*, dla każdego $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, definiuje się iterowaną sumę włóknistą jako algebrę $A_1 \sqcup_{C_1} A_2 \sqcup_{C_2} \ldots A_{n-1} \sqcup_{C_{n-1}} A_n$, dla której stowarzyszona K-kategoria jest iterowaną sumą włóknistą

$$(A_1 \underset{C_1}{\sqcup} A_2 \underset{C_2}{\sqcup} \ldots A_{n-1} \underset{C_{n-1}}{\sqcup} A_n)^* = A_1^* \underset{C_1^*}{\sqcup} A_2^* \underset{C_2^*}{\sqcup} \ldots A_{n-1}^* \underset{C_{n-1}^*}{\sqcup} A_n^*,$$

ciągu odpowiadających kategorii $A_1^*, \ldots, A_n^*$ nad podkategoriami $C_1^*, \ldots, C_{n-1}^*$, zdefiniowaną indukcyjnie w naturalny sposób. Na zakończenie tej części udowodnimy jeszcze następujący elementarny lemat, który wykorzystamy w 4.3.

Lemat 1.2.2. *Niech A i B będą algebrami, zaś C taką algebrą, że C^* jest wypukłą podkategorią w A^* oraz w B^*. Wówczas dowolna wypukła podkategoria A' w A jest wypukłą podkategorią w $A \sqcup_C B$. Podobnie, jeśli B' jest wypukłą podkategorią w B, to jest także wypukłą podkategorią w $A \sqcup_C B$.*

Dowód · Zauważmy najpierw, że $A_0^* \cap B_0^* = C_0^*$ jest wypukłą podkategorią w $(A \sqcup_C B)^*$. W istocie, w przeciwnym razie istnieje co najmniej jedna droga w $(A \sqcup_C B)^*$ postaci $i = i_0 \to i_1 \to \cdots \to i_{s-1} \to i_s = j$, gdzie $i, j \in C_0^*$, $s \geqslant 2$ oraz wszystkie wierzchołki $i_1, \ldots, i_{s-1}$ nie należą do C_0^*. Oczywiście wtedy każdy z wierzchołków $i_1, \ldots, i_{s-1}$ należy albo do $A_0^* \setminus B_0^*$ albo do $B_0^* \setminus A_0^*$. Odnotujmy ostatecznie, że jeśli $i_1, \ldots, i_{s-1} \in A_0^*$ lub $i_1, \ldots, i_{s-1} \in B_0^*$, to droga ta jest drogą w A^* lub B^*, odpowiednio, co przeczy zakładanej wypukłości C^* w A^* oraz w B^*. Konsekwentnie otrzymujemy, że istnieją liczby $k, l \in \{1, \ldots, s-1\}$, dla których $i_k \in B_0^* \setminus A_0^*$ oraz $i_l \in A_0^* \setminus B_0^*$. Wówczas $k \neq l$ oraz możemy założyć, że $k < l$. W tej sytuacji wnioskujemy, że $i_t \in B_0^* \setminus A_0^*$ oraz $i_{t+1} \in A_0^* \setminus B_0^*$, dla pewnego $t \in \{k, \ldots, l-1\}$. Stąd na mocy definicji sumy włóknistej $\mathrm{Hom}_{(A \sqcup_C B)^*}(i_t, i_{t+1}) = 0$, co prowadzi do sprzeczności bowiem z założenia mamy pewien niezerowy morfizm $i_t \to i_{t+1}$.

Niech teraz A' będzie ustaloną wypukłą podkategorią w A. Wówczas A' musi być również pełną podkategorią w $A \sqcup_C B$. Dla dowodu przypuśćmy, że jest przeciwnie, to znaczy, że istnieje droga w $(A \sqcup_C B)^*$ postaci $i = i_0 \to i_1 \to \cdots \to i_{s-1} \to i_s = j$, gdzie $i, j \in A_0' \subset A_0^*$, $s \geqslant 2$ oraz wszystkie wierzchołki $i_1, \ldots, i_{s-1}$ nie należą do A'. W tej sytuacji, co najmniej jeden z tych wierzchołków należy do $B^* \setminus A^*$, bowiem gdyby wszystkie należały do A_0^*, to otrzymalibyśmy sprzeczność z założeniem o wypukłości A' w A. Tak więc $i_k \in B_0^* \setminus A_0^*$, dla pewnego $k \in \{1, \ldots, s-1\}$. Ponadto wtedy $i, j \in A_0^*$ oraz $i_k \notin C_0^*$. Zatem jeden z wierzchołków i lub j nie należy do B_0^*, bowiem w przeciwnym razie oba należałyby C_0^*, co przeczy wypukłości C_0^* dowiedzionej powyżej. Załóżmy najpierw, że $i = i_0 \in A_0^* \setminus B_0^*$. Jeśli wówczas wszystkie wierzchołki $i_1, \ldots, i_{k-1}$ nie należą do C_0^*, to jak poprzednio pokazujemy, że dla pewnego $t \in \{1, \ldots, k-1\}$ mamy $i_t \in A_0^* \setminus B_0^*$ oraz $i_{t+1} \in B_0^* \setminus A_0^*$, sprzeczność. Podobnie, jeżeli jeden z wierzchołków $i_1, \ldots, i_{k-1}$ należy do C_0^*, to z wypukłości C wnioskujemy, że żaden z modułów $i_{k+1}, \ldots, i_s$ nie może należeć do C_0^*, i wtedy istnieje $t \in \{k, \ldots, s-1\}$, dla którego $i_t \in B_0^* \setminus A_0^*$ oraz $i_{t+1} \in A_0^* \setminus B_0^*$. Łatwo pokazać, że założenie $j \in A_0^* \setminus B_0^*$ prowadzi do analogicznych sprzeczności. To ostatecznie dowodzi, że faktycznie A' jest wypukłą podkategorią w $A \sqcup_C B$. Stosując podobne argumenty nietrudno jest udowodnić wypukłość w $A \sqcup_C B$ dla dowolnej wypukłej podkategorii B' w B. □

Na zakończenie prezentujemy dobrze znaną konstrukcję K-algebr macierzy A stowarzyszonych z bimodułami M oraz omawiamy zapowiadaną na wstępie równoważność między kategorią $\operatorname{mod} A$ a pewną K-kategorią abelową, której obiekty nazywane są *reprezentacjami bimodułu M*. Niech R oraz S będą dowolnymi K-algebrami nad ustalonym ciałem K, oraz załóżmy, że $M = {}_S M_R$ jest pewnym bimodułem w $\operatorname{bimod}(S, R)$. Wówczas możemy rozważać dwie różne algebry macierzy stowarzyszone z bimodułem M. Pierwsza z nich jest zdefiniowana jako następująca K-algebra

$$R[{}_S M_R] := \begin{bmatrix} S & M \\ 0 & R \end{bmatrix}$$

macierzy górno-trójkątnych 2×2 postaci $\begin{bmatrix} s & m \\ 0 & r \end{bmatrix}$, gdzie $s \in S, r \in R$, oraz $m \in M$. Oczywiście, mnożenie w $R[{}_S M_R]$ jest naturalnie indukowane z mnożenia macierzy kwadratowych, z uwzględnieniem struktury (S-R)-bimodułu na M. Algebrę $R[{}_S M_R]$ nazywać będziemy czasami *rozszerzeniem algebry R o bimoduł ${}_S M_R$*. Odnotujmy tutaj, że wykorzystując standardową dualność $D : \operatorname{bimod}(S, R) \to \operatorname{bimod}(R, S)$ na kategoriach bimodułów możemy analogicznie przeprowadzić dualną konstrukcję, gdzie w tym przypadku bimodułowi ${}_S M_R$ odpowiada bimoduł dualny $D(M) = {}_R D(M)_S$ w $\operatorname{bimod}(R, S)$, skąd następujące rozszerzenie algebry S o bimoduł $D(M)$

$$[{}_S M_R]R := S[{}_R D(M)_S] = \begin{bmatrix} R & D(M) \\ 0 & S \end{bmatrix}$$

jest poprawnie określoną skończenie wymiarową K-algebrą, którą nazywać będziemy czasami także *korozszerzeniem algebry R o bimoduł ${}_S M_R$*. Rozszerzenia jak i korozszerzenia algebr o bimoduły będziemy również sporadycznie określać wspólnym mianem *algebr macierzowych bimodułów*.

Uwaga · Idempotenty prymitywne algebr $A = R[M]$ oraz $[M]R$ są w pełni zdeterminowane przez idempotenty w R oraz S. W istocie, jeśli $e_1, \ldots, e_r \in R$ oraz $f_1, \ldots, f_s \in S$ są pełnymi zbiorami parami ortogonalnych prymitywnych idempotentów w R i S, odpowiednio, gdzie $e_1 + \cdots + e_r = 1_R$ i $f_1 + \cdots + f_s = 1_S$, to idempotenty $e'_1, \ldots, e'_r, f'_1, \ldots, f'_s$, określone jako

$$e'_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_i \end{bmatrix} \text{ oraz } f'_j = \begin{bmatrix} f_j & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dla $i \in \{1, \ldots, r\}$ oraz $j \in \{1, \ldots, s\}$ tworzą zbiór parami ortogonalnych prymitywnych idempotentów w $A = R[M]$ sumujących się do 1_A. Nietrudno również pokazać, że algebry $R[M]$ i $[M]R$ są bazowe, jeśli tylko R oraz S są bazowe, zaś dla spójnych algebr R i S algebra $R[M]$ (odpowiednio, $[M]R$) jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy $M \neq 0$. Sumę idempotentów $e'_1 + \cdots + e'_r$ (odpowiednio, $f'_1 + \cdots + f'_s$) oznaczać będziemy czasami symbolem e_R (odpowiednio, e_S) ·

Algebry macierzowe bimodułów pojawiają się naturalnie w bardzo często spotykanej sytuacji, kiedy dana jest algebra A oraz mamy ustalony rozkład $1_A = e_1 + \cdots + e_n$, dla parami ortogonalnych prymitywnych idempotentów $e_1, \ldots, e_n$ w A, przy czym istnieje idempotent e w A, który jest sumą parami różnych idempotentów wybranych spośród $e_1, \ldots, e_n$ oraz indukowany rozkład algebry jako modułu $A = A_A$ w $\operatorname{mod} A$ na sumę prostą $A = P \oplus Q$, gdzie $P = eA$ i $Q = (1-e)A$, spełnia warunek $\operatorname{Hom}_A(Q, P) = 0$. Wówczas algebra A jest izomorficzna z algebrą postaci

$$A \cong \begin{bmatrix} S & M \\ 0 & R \end{bmatrix},$$

gdzie $S := \mathrm{End}_A(Q)$, $R := \mathrm{End}_A(P)$, zaś M jest (S-R)-bimodułem $M := \mathrm{Hom}_A(P, Q)$, ze strukturą bimodułową indukowaną z ${}_RP$ oraz ${}_SQ$. Odnotujmy jeszcze, że w sytuacji, gdy $A = R[M]$ jest rozszerzeniem R o bimoduł ${}_SM_R$, dla dowolnego modułu X w $\mathrm{mod}\, A$, moduł Xe_R jest prawym modułem nad algebrą $e_RAe_R = e_RA \cong R$, toteż jest to zawsze moduł w $\mathrm{mod}\, R$. Łatwo również sprawdzić, że dowolny homomorfizm $f : X \to Y$ w $\mathrm{mod}\, A$ indukuje homomorfizm w $\mathrm{mod}\, R$ postaci $f_R := f_{|Xe_R} : Xe_R \to Ye_R$. W ten sposób określony jest tak zwany *funktor obcięcia do R*, który jest funktorem kowariantnym

$$\mathrm{res}_R : \mathrm{mod}\, A \to \mathrm{mod}\, R,$$

gdzie $\mathrm{res}_R(X) = Xe_R$ oraz $\mathrm{res}_R(f) = f_R$, dla dowolnego modułu X oraz homomorfizmu f w $\mathrm{mod}\, A$.

W rozprawie *reprezentacją (S-R)-bimodułu M* nazywamy każdą trójkę $X = (X_0, X_1, \varphi)$, gdzie X_0 jest modułem w $\mathrm{mod}\, S$, X_1 jest modułem w $\mathrm{mod}\, R$, zaś φ jest homomorfizmem w $\mathrm{mod}\, S$ postaci $\varphi : X_0 \to \mathrm{Hom}_R(M, X_1)$; moduł $\mathrm{Hom}_R(M, X_1)$ ma oczywiście naturalną strukturę (prawego) S-modułu indukowaną przez funktor $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ ze struktury lewego S-modułu na M. Przez $\mathrm{rep}({}_SM_R)$ oznaczmy klasę wszystkich reprezentacji bimodułu ${}_SM_R$. Odnotujmy jedynie, że klasa $\mathrm{rep}({}_SM_R)$ ma naturalną strukturę K-kategorii abelowej, w której morfizmami $h : X \to Y$ pomiędzy danymi reprezentacjami $X = (X_0, X_1, \varphi_X)$ oraz $Y = (Y_0, Y_1, \varphi_Y)$ z $\mathrm{rep}({}_SM_R)$ są pary $h = (h_0, h_1)$ homomorfizmów $h_0 \in \mathrm{Hom}_S(X_0, Y_0)$ i $h_1 \in \mathrm{Hom}_R(X_1, Y_1)$ spełniające warunek $\varphi_Y h_0 = \mathrm{Hom}_R(M, h_1)\varphi_X$. Wspominamy tylko, że oryginalnie zdefiniowano reprezentacje bimodułów nieco inaczej, wykorzystując funktor produktu tensorowego $-\otimes_S M$, zamiast funktora $\mathrm{Hom}_R(M, -)$. Jednak na potrzeby rozprawy przyjmujemy powyższą definicję, ponieważ można udowodnić, że kategoria reprezentacji bimodułu w tradycyjnym sensie jest równoważna ze zdefiniowaną tutaj kategorią $\mathrm{rep}({}_SM_R)$ [50, patrz Lemma VII.10.2]. Poniższe twierdzenie opisuje wspominaną równoważność kategorii $\mathrm{rep}({}_SM_R)$ reprezentacji bimodułu ${}_SM_R$ z kategorią $\mathrm{mod}\, R[{}_SM_R]$ skończenie generowanych modułów nad algebrą macierzową $R[{}_SM_R]$.

Twierdzenie 1.2.3. *Niech R, S będą K-algebrami oraz załóżmy, że $M = {}_SM_R$ jest bimodułem w* $\mathrm{bimod}(S, R)$. *Ponadto oznaczmy przez A rozszerzenie $A := R[M]$ algebry R o bimoduł M. Wówczas funktor*

$$F : \mathrm{mod}\, A \to \mathrm{rep}({}_SM_R),$$

który dowolnemu modułowi X w $\mathrm{mod}\, A$ *przyporządkowuje reprezentację $F(X) = (X_0, X_1, \varphi_X)$, gdzie $X_1 = \mathrm{res}_R(X) = Xe_R$, $X_0 = \mathrm{Hom}_R(M, X_1)$ i $\varphi_X = \mathrm{Id}_{X_0}$, zaś homomorfizmom $f : X \to Y$ w* $\mathrm{mod}\, A$ *przyporządkowane są pary $F(f) = (\mathrm{Hom}_R(M, f_{|Xe_R}), f_{|Xe_R})$, jest równoważnością K-kategorii.*

dowód · Dowód można znaleźć na przykład w [50, patrz Lemma VII.10.1]. □

Przypomnijmy jeszcze tylko sformułowanie następującego lematu technicznego, który będzie przydatny w kilku miejscach rozprawy (po dowód odsyłamy do [37, Lemma XV.1.8]).

Lemat 1.2.4. *Niech R, S będą algebrami, zaś ${}_SM_R$ pewnym bimodułem oraz oznaczmy przez A algebrę $R[M]$. Załóżmy ponadto, że V jest modułem w* $\mathrm{ind}\, A$, *reprezentowanym przez trójkę $V = (V_0, V_1, \varphi_V)$, dla której $\varphi_V \neq 0$. Wówczas dla każdego nierozkładalnego składnika prostego N modułu V_1 zachodzi* $\mathrm{Hom}_R(M, N) \neq 0$.

1.3 Elementarne pojęcia algebry homologicznej ·

Ten podrozdział ma na celu wprowadzenie klasycznych pojęć pochodzących z algebry homologicznej, które odgrywają istotną rolę w teorii reprezentacji algebr. Rozpoczynamy od definicji modułów projektywnych (injektywnych), po czym pobieżnie komentujemy podstawowe własności rezolwent w kategoriach modułów. Prowadzi to wprost do dobrze znanych numerycznych niezmienników, to jest, *wymiaru projektywnego* i *wymiaru injektywnego* modułu, które definiujemy i krótko omawiamy, między innymi wprowadzając przy tym pojęcie *globalnego wymiaru algebry*. Większość wyników pozostawiamy bez dowodów, które można znaleźć w [49, I.8].

Niech A będzie dowolną algebrą. Przypominamy, że moduł P w $\mathrm{mod}\, A$ nazywany jest *modułem projektywnym* wtedy i tylko wtedy, gdy dowolny homomorfizm $P \to N$ w $\mathrm{mod}\, A$ faktoryzuje się przez dowolny epimorfizm $M \to N$, to znaczy, jeśli $f \in \mathrm{Hom}_A(P,N)$ oraz $h : M \to N$ jest epimorfizmem w $\mathrm{mod}\,A$, to istnieje homomorfizm $g : P \to M$ taki, że $f = hg$. Pojęcie modułu injektywnego zdefiniowane jest dualnie. Powiemy mianowicie, że I jest modułem *injektywnym*, gdy dla dowolnego $f \in \mathrm{Hom}_A(M,I)$ oraz dowolnego monomorfizmu $u : M \to N$ w $\mathrm{mod}\,A$, istnieje homomorfizm $v : N \to I$ taki, że $f = vu$.

Moduły projektywne oraz injektywne mają dość ograniczoną strukturę, którą można jednoznacznie odtworzyć ze struktury algebry. W istocie, niech $e_1, \dots, e_n$ będzie pełnym zestawem parami ortogonalnych prymitywnych idempotentów (bazowej) algebry A, gdzie $e_1 + \dots + e_n = 1_A$. Wówczas moduł P jest projektywny w $\mathrm{mod}\,A$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest on izomorficzny z sumą prostą modułów postaci e_iA, z $i \in \{1, \dots, n\}$. Można również pokazać, że P jest projektywny wtedy i tylko wtedy, gdy dowolny epimorfizm $X \to P$ w $\mathrm{mod}\,A$ jest retrakcją. Mamy także dualną charakteryzację modułów injektywnych, na mocy której I jest modułem injektywnym w $\mathrm{mod}\,A$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest on izomorficzny z sumą prostą modułów postaci $D(Ae_i)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, lub równoważnie, gdy dowolny monomorfizm $I \to Y$ w $\mathrm{mod}\,A$ jest sekcją.

Uwaga · W dalszej części rozprawy, dla każdej spójnej i bazowej algebry A przyjmujemy domyślnie, że ustalone są parami ortogonalne prymitywne idempotenty $e_1, \dots, e_n$ z $e_1 + \dots + e_n = 1_A$, i wówczas zawsze oznaczamy przez $P_1, \dots, P_n$ (odpowiednio, $I_1, \dots, I_n$) odpowiadające nierozkładalne moduły projektywne $e_1A, \dots, e_nA$ (odpowiednio, injektywne $D(Ae_1), \dots, D(Ae_n)$) w $\mathrm{mod}\,A$. Przyjmujemy wtedy również oznaczać przez S_i moduł prosty $\mathrm{top}(P_i) = \mathrm{soc}(I_i)$ w $\mathrm{mod}\,A$, dla każdego $i \in \{1, \dots, n\}$. W szczególności, tym przypadku klasy $\{P_1\}, \dots, \{P_n\}$, klasy $\{I_1\}, \dots, \{I_n\}$, oraz klasy $\{S_1\}, \dots, \{S_n\}$ wyczerpują wszystkie parami różne klasy izomorfizmu nierozkładalnych modułów projektywnych, injektywnych, oraz odpowiednio, modułów prostych w $\mathrm{mod}\,A$ ·

Moduły projektywne (injektywne) pełnią niezwykle ważną rolę w opisie kategorii modułów, ze względu na poniżej sformułowane uniwersalne własności nakrywania modułami projektywnymi oraz zanurzania w moduły injektywne, które umożliwiają aproksymowanie modułów kompleksami modułów projektywnych (lub injektywnych) nazywanymi *rezolwentami*.

Twierdzenie 1.3.1. *Niech A będzie algebrą, M zaś dowolnym niezerowym modułem w* $\mathrm{mod}\,A$. *Zachodzą następujące stwierdzenia.*

(1) Istnieje moduł projektywny $P = P(M)$ w $\mathrm{mod}\,A$ *oraz epimorfizm $\pi : P \to M$ taki, że dowolny homomorfizm $p : N \to P$ w* $\mathrm{mod}\,A$*, dla którego złożenie πp jest epimorfizmem w* $\mathrm{mod}\,A$*, jest również epimorfizmem; taki epimorfizm nazywany jest minimalnym.*

(2) Epimorfizm minimalny $\pi : P(M) \to M$, dla którego $P(M)$ jest projektywny, jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu, to znaczy, jeśli P' jest modułem projektywnym w $\mathrm{mod}\,A$ *oraz istnieje przy tym pewien epimorfizm minimalny w* $\mathrm{mod}\,A$ *postaci $\pi' : P' \to M$, to istnieje wtedy izomorfizm $\varphi : P \to P'$ w* $\mathrm{mod}\,A$ *taki, że $\pi'\varphi = \pi$; w szczególności również moduł projektywny $P = P(M)$ jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu modułów.*

Dualnie mamy następujące twierdzenie dla modułów injektywnych.

Twierdzenie 1.3.2. *Niech A będzie algebrą, M zaś dowolnym niezerowym modułem w* $\mathrm{mod}\,A$. *Zachodzą następujące stwierdzenia.*

(1) Istnieje moduł injektywny $I = I(M)$ w $\mathrm{mod}\,A$ *oraz monomorfizm $u : M \to I$ taki, że dowolny homomorfizm $q : I \to N$ w* $\mathrm{mod}\,A$*, dla którego złożenie qu jest monomorfizmem w* $\mathrm{mod}\,A$*, jest również monomorfizmem; taki monomorfizm nazywamy minimalnym.*

(2) Monomorfizm minimalny $u : M \to I(M)$, dla którego $I(M)$ jest modułem injektywnym, jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu, to znaczy, jeśli I' jest modułem injektywnym w $\mathrm{mod}\,A$ *oraz istnieje pewien monomorfizm minimalny w* $\mathrm{mod}\,A$ *postaci $u' : M \to I'$, to istnieje wtedy izomorfizm $\psi : I' \to I$ w* $\mathrm{mod}\,A$ *taki, że $\psi u' = u$; w szczególności, moduł injektywny $I = I(M)$ jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu.*

Na podstawie powyższych dwóch twierdzeń dla każdego modułu $M \neq 0$ istnieją w $\operatorname{mod} A$ epimorfizm minimalny $\pi : P(M) \to M$ oraz monomorfizm minimalny $u : M \to I(M)$, gdzie $P(M)$ jest modułem projektywnym, zaś $I(M)$ modułem injektywnym. Co więcej homomorfizmy π oraz u o tych własnościach są wówczas wyznaczone z dokładnością do izomorfizmu $P(M) \to P(M)$ oraz odpowiednio, izomorfizmu $I(M) \to I(M)$. W takim przypadku, epimorfizm $\pi : P(M) \to M$, lub czasami sam moduł projektywny $P(M)$ jest nazywany *nakryciem projektywnym modułu M w* $\operatorname{mod} A$. Dualnie, monomorfizm $u : I \to I(M)$ lub czasem również moduł $I(M)$ nazywać będziemy *injektywną powłoką modułu M w* $\operatorname{mod} A$.

Udowodnimy teraz następujący prosty lemat, którego dowód wymaga jedynie odpowiedniego zastosowania powyższych definicji.

Lemat 1.3.3. *Niech A będzie algebrą, zaś $B = A/I$ algebrą ilorazową, dla której wszystkie moduły projektywne (odpowiednio, injektywne) w* $\operatorname{ind} B$ *są projektywne (odpowiednio, injektywne) w* $\operatorname{ind} A$. *Wówczas dla każdego modułu $X \neq 0$ w* $\operatorname{mod} B$, *jego nakrycie projektywne (odpowiednio, powłoka injektywna) w* $\operatorname{mod} B$ *jest także nakryciem projektywnym (powłoką injektywną) w* $\operatorname{mod} A$.

Dowód · Niech $X \neq 0$ będzie dowolnym modułem w $\operatorname{mod} B$, zaś $\pi_B : P_B(X) \to X$ oraz $\pi_A : P_A(X) \to X$ jego nakryciem projektywnym w $\operatorname{mod} B$ oraz $\operatorname{mod} A$, odpowiednio. Ponieważ π_B jest epimorfizmem a $P_A(X)$ jest projektywnym A-modułem wnioskujemy, że $\pi_A = \pi_B h$, dla pewnego $h \in \operatorname{Hom}_A(P_A(X), P_B(X))$. Z drugiej strony, $P_B(X)$ jest projektywny w $\operatorname{mod} B$, a więc z założenia jest także modułem projektywnym w $\operatorname{mod} A$, czyli π_B ma także faktoryzację $\pi_B = \pi_A h'$, dla $h' \in \operatorname{Hom}_A(P_B(X), P_A(X))$, bo π_A jest epimorfizmem w $\operatorname{mod} A$. Ostatecznie odnotujmy, że π_A jest nakryciem projektywnym modułu X w $\operatorname{mod} A$, a więc mimimalnym epimorfizmem w $\operatorname{mod} A$. W konsekwencji, na mocy Twierdzenia 1.3.1(1) homomorfizm h' musi być epimorfizmem, gdyż $\pi_A h' = \pi_B$ jest epimorfizmem. Stąd oczywiście h' jest retrakcją, bo $P_A(X)$ jest projektywny. Ale wówczas $P_A(X)$ jest izomorficzny ze składnikiem prostym modułu $P_B(X)$, toteż $P_A(X)$ jest wtedy modułem projektywnym w $\operatorname{mod} B$. W takim razie $\pi_A = \pi_B h$ jest epimorfizmem w $\operatorname{mod} B$, a ponieważ π_B jest minimalnym epimorfizmem w $\operatorname{mod} B$ (jako nakrycie projektywne modułu X w $\operatorname{mod} B$), to ponownie korzystając z Twierdzenia 1.3.1(1) otrzymujemy, że h musi być epimorfizmem w $\operatorname{mod} A$. Wtedy h jest retrakcją bo $P_B(X)$ jest projektywny w $\operatorname{mod} A$, skąd wynika już, że $P_B(X) \simeq P_A(X)$ i nakrycie π_B w $\operatorname{mod} B$ jest w istocie również nakryciem projektywnym w $\operatorname{mod} A$. Analogicznie wykorzystując Twierdzenie 1.3.2(1) oraz definicję modułu injektywnego i monomorfizmu minimalnego łatwo można dowieść, że zachodzi również dualna własność dla powłok injektywnych w $\operatorname{mod} B$. □

Odnotujmy również poniższy dobrze znany lemat, dzięki któremu możemy wyznaczyć proste kompozycyjne faktory niezerowego modułu M na podstawie znajomości przestrzeni homomorfizmów $\operatorname{Hom}_A(P, M)$, dla modułów projektywnych P w $\operatorname{ind} A$.

Lemat 1.3.4. *Niech A będzie algebrą, $1_A = e_1 + \cdots + e_n$, dla pewnego kompletnego zestawu parami ortogonalnych prymitywnych idempotentów $e_1, \ldots, e_n$ w A, a M dowolnym niezerowym modułem w* $\operatorname{mod} A$. *Wówczas, dla każdego $k \in \{1, \ldots, n\}$, zachodzą następujące stwierdzenia.*

(1) *Krotność $c_k(M)$ modułu prostego S_k ciągu kompozycyjnym modułu M jest równa długości $l_{\Phi_k}(\operatorname{Hom}_A(P_k, M))$ modułu $\operatorname{Hom}_A(P_k, M)$ traktowanego jako moduł w $\operatorname{mod} \Phi_k$, gdzie $\Phi_k = \operatorname{End}_A(P_k)$.*

(2) *Krotność $c_k(M)$ jest równa długości $l_{\Gamma_k^{\mathrm{op}}}(\operatorname{Hom}_A(M, I_k))$ modułu $\operatorname{Hom}_A(M, I_k)$ rozważanego jako moduł w $\operatorname{mod} \Gamma_k^{\mathrm{op}}$, przy czym $\Gamma_k = \operatorname{End}_A(I_k)$.*

W szczególności, ustalony moduł prosty S_k, $k \in \{1, \ldots, n\}$, jest kompozycyjnym faktorem modułu M wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{Hom}_A(P_k, M) \neq 0$, lub równoważnie, gdy $\operatorname{Hom}_A(M, I_k) \neq 0$.

Przypomnijmy tutaj tylko, że dowolna algebra A jest półprosta wtedy i tylko wtedy, gdy każdy moduł w $\operatorname{mod} A$ jest projektywny, lub równoważnie, każdy moduł w $\operatorname{mod} A$ jest injektywny. Przed omówieniem koncepcji rezolwenty projektywnej i injektywnej modułów pozwólmy sobie teraz wykazać następujący przydatny później elementarny lemat techniczny, którego dowód wykorzystuje istotnie pojęcia nakrycia projektywnego i injektywnej powłoki, oraz różne omawiane wyżej własności modułów projektywnych (injektywnych).

Lemat 1.3.5. *Niech A będzie spójną algebrą, zaś $\mathscr{C}$ dowolną rodziną modułów w $\operatorname{ind} A$. Załóżmy ponadto, że stowarzyszona algebra ilorazowa $B = A(\mathscr{C}) = A/\operatorname{Ann}_A(\mathscr{C})$ spełnia następujący warunek: wszystkie moduły projektywne w $\operatorname{ind} B$ są projektywne w $\operatorname{ind} A$ oraz wszystkie moduły injektywne w $\operatorname{ind} B$ są injektywne w $\operatorname{ind} A$. Wówczas $\mathscr{C}$ jest dokładną rodziną modułów, to znaczy $\operatorname{Ann}_A(\mathscr{C}) = 0$.*

Dowód · Oznaczmy przez $e_1, \ldots, e_n$ pełen zestaw parami ortogonalnych prymitywnych idempotentów bazowej i spójnej algebry A oraz niech $Q_A(\mathscr{C})$ oznacza pełny wartościowany podkołczan w Q_A rozpięty na zbiorze $\{i_1, \ldots, i_l\}$ wszystkich tych wierzchołków i w Q_A, dla których moduł projektywny $P_i = e_iA$ w $\operatorname{ind} A$ jest jednym z modułów projektywnych w $\operatorname{ind} B$. Łatwo zauważyć, że algebra $B = B_B$ jako moduł w $\operatorname{mod} A$ ma następujący rozkład na sumę prostą modułów projektywnych $B = B_A = e_{i_1}A \oplus \cdots \oplus e_{i_l}A$.

Pokażemy najpierw, że podkołczan $Q_A(\mathscr{C})$ jest zamknięty na branie następników. W istocie rozważmy dowolny wierzchołek j podkołczanu $Q_A(\mathscr{C})$ oraz niech wierzchołek i będzie dowolnym bezpośrednim następnikiem wierzchołka j w Q_A. Wówczas mamy oczywiście w Q_A strzałkę postaci $j \to i$, a więc na mocy definicji kołczanu zwyczajnego algebry wnosimy, że $e_j(\operatorname{rad} A)e_i/e_j(\operatorname{rad} A)^2e_i \neq 0$. Możemy zatem wybrać pewien element $a \in e_j(\operatorname{rad} A)e_i \setminus e_j(\operatorname{rad} A)^2e_i$, który indukuje poprzez izomorfizm $e_jAe_i \cong \operatorname{Hom}_A(e_iA, e_jA)$ pewien homomorfizm $f = f_a : P_i \to P_j$ w $\operatorname{mod} A$ pomiędzy odpowiadającymi modułami projektywnymi $P_i = e_iA$ oraz $P_j = e_jA$ w $\operatorname{ind} A$. W szczególności, $a \notin e_j(\operatorname{rad} A)^2e_i$ implikuje, że homomorfizm $f = f_a$ nie może być złożeniem postaci $f = hg$, gdzie $g \in \operatorname{rad}_A(P_i, P)$, $h \in \operatorname{rad}_A(P, P_j)$ oraz P jest pewnym modułem projektywnym w $\operatorname{mod} A$. Udowodnimy teraz, że wierzchołek i również należy do podkołczanu $Q_A(\mathscr{C})$. Przypuśćmy w tym celu, że jest odwrotnie. Wtedy $j \neq i$, zatem $P_i \not\simeq P_j$, skąd f nie może być epimorfizmem, gdyż wtedy byłby retrakcją (więc izomorfizmem) między nieizomorficznymi nierozkładalnymi modułami projektywnymi P_i oraz P_j, sprzeczność. Toteż $\operatorname{Im} f$ jest właściwym podmodułem P_j, więc jest podmodułem jedynego maksymalnego podmodułu $\operatorname{rad} P_j$ w P_j (patrz [49, Proposition I.5.16]). Wówczas projektywność P_i implikuje, że istnieje diagram przemienny w $\operatorname{mod} A$ postaci

$$\begin{tikzcd}
 & P_i \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "\bar{f}"] \\
P(\operatorname{rad} P_j) \arrow[r, "\pi"] & \operatorname{rad} P_j
\end{tikzcd}$$

przy czym $\pi : P(\operatorname{rad} P_j) \to \operatorname{rad} P_j$ jest nakryciem projektywnym modułu $\operatorname{rad} P_j$ w $\operatorname{mod} A$, zaś $f = u\bar{f}$, gdzie $u : \operatorname{rad} P_j \to P_j$ jest kanoniczną inkluzją radykału. Zauważmy również, że ponieważ j należy do $Q_A(C)$, to moduł P_j jest projektywny w $\operatorname{ind} B$, zatem jego radykał $\operatorname{rad} P_j$ jest modułem w $\operatorname{mod} B$. To implikuje na mocy Lematu 1.3.3, że homomorfizm π jest jednocześnie nakryciem projektywnym modułu $\operatorname{rad} P_j$ w $\operatorname{mod} B$, gdyż moduły projektywne w $\operatorname{ind} B$ są z założenia projektywne w $\operatorname{ind} A$. Konsekwentnie otrzymujemy, że dla wszystkich nierozkładalnych składników prostych P_k modułu $P(\operatorname{rad} P_j)$, wierzchołek k należy do $Q_A(\mathscr{C})$. W takim razie g należy do $\operatorname{rad}_A(P_i, P(\operatorname{rad} P_j))$, bo $i \notin Q_A(\mathscr{C})$, a ponieważ $\operatorname{Im} u\pi = \operatorname{rad} P_j \neq P_j$ więc $h = u\pi$ nie jest retrakcją, czyli należy do $\operatorname{rad}_A(P(\operatorname{rad} P_j), P_j)$; patrz Twierdzenie 1.1.1(3). Jednakże wtedy homomorfizm f ma niedozwolony rozkład $f = u\bar{f} = hg$ na złożenie homomorfizmów $g \in \operatorname{rad}_A(P_i, P)$ oraz $h \in \operatorname{rad}(P, P_j)$ z $P = P(\operatorname{rad} P_j)$ będącym modułem projektywnym w $\operatorname{mod} B$, a więc i w $\operatorname{mod} A$. Otrzymana sprzeczność ostatecznie dowodzi, że każdy bezpośredni następnik i wierzchołka j z $Q_A(\mathscr{C})$, również należy do $Q_A(\mathscr{C})$. Stąd już natychmiast wynika, że podkołczan $Q_A(\mathscr{C})$ jest w istocie zamknięty na branie następników w Q_A.

Analogicznie można rozważać podkołczan $Q^*_A(\mathscr{C})$ składający się dokładnie z tych wierzchołków i w Q_A, dla których odpowiadający moduł injektywny $D(Ae_i)$ w $\operatorname{ind} A$ jest injektywny w $\operatorname{ind} B$. Wykorzystując injektywne powłoki oraz argumenty dualne do przedstawionych powyżej nietrudno jest pokazać, że podkołczan $Q^*_A(\mathscr{C})$ jest zamknięty na branie poprzedników w Q_A. Wystarczy już tylko zauważyć, że każdy moduł injektywny I w $\operatorname{ind} B$ jest izomorficzny z modułem postaci $D\operatorname{Hom}_B(P, B)$, gdzie P jest projektywny w $\operatorname{ind} B$, a więc z założenia jest również projektywny w $\operatorname{ind} A$, czyli $P \simeq e_{i_k}A$, dla pewnego $k \in \{1, \ldots, l\}$. To jednak oznacza, że $I = D\operatorname{Hom}_B(P, B) \simeq D\operatorname{Hom}_A(e_{i_k}A, B_A) \simeq D(Be_{i_k})$, na podstawie Twierdzenia 1.2.1(1), skąd już łatwo wywnioskować, że $B = {}_BB$ jako moduł w $\operatorname{mod} A^{\mathrm{op}}$ ma rozkład $B = {}_BB = Ae_{i_1} \oplus \cdots \oplus Ae_{i_l}$, a w konsekwencji zachodzi równość $Q_A(\mathscr{C}) = Q^*_A(\mathscr{C})$. Implikuje to teraz, że podkołczan $Q_A(\mathscr{C})$ jest zamknięty zarówno na branie poprzedników, jak i na branie następników w Q_A. Ostatecznie otrzymujemy stąd równość $Q_A = Q_A(\mathscr{C})$, ponieważ z założenia algebra A jest spójna, a więc spójny jest jej kołczan zwyczajny Q_A, co implikuje, że nie może istnieć wierzchołek x w Q_A nie należący do $Q_A(\mathscr{C})$, bo byłby on wówczas połączony z co najmniej jednym wierzchołkiem $i \in Q_A(\mathscr{C})$ strzałką $i \to x$, albo strzałką $x \to i$, a to w obu przypadkach prowadzi do sprzeczności, gdyż $Q_A(\mathscr{C})$ jest zamknięty na następników i poprzedników. Tak więc $Q_A = Q_A(\mathscr{C})$, skąd wynika, że każdy moduł projektywny w $\operatorname{ind} A$ jest jednym z modułów projektywnych w $\operatorname{ind} B$, toteż mamy $B = A$, a zatem faktycznie $\operatorname{Ann}_A(\mathscr{C}) = 0$, co kończy dowód. □

Przypominamy teraz pojęcie rezolwenty projektywnej i injektywnej modułu. Niech A będzie algebrą, zaś M dowolnym niezerowym modułem w $\operatorname{mod} A$. *Rezolewentą projektywną modułu M* w $\operatorname{mod} A$ nazywamy dowolny ciąg dokładny w $\operatorname{mod} A$ postaci $\cdots \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ taki, że wszystkie moduły P_n, dla $n \in \mathbb{N}$, są projektywne w $\operatorname{mod} A$. Projektywną rezolwentę

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

(niezerowego) modułu M w $\operatorname{mod} A$ nazwiemy natomiast *minimalną projektywną rezolwentą modułu M*, o ile wszystkie indukowane epimorfizmy $d_n : P_n \to \operatorname{Im} d_n$, dla $n \geqslant 0$, są minimalne (to znaczy, są to nakrycia projektywne obrazów $\operatorname{Im} d_n$). Dualnie, jeśli dany będzie ciąg dokładny w $\operatorname{mod} A$ postaci $0 \to M \to I^0 \to I^1 \to \cdots \to I^m \to \ldots$ oraz wszystkie moduły I^m, dla $m \in \mathbb{N}$, są injektywne, to powiemy, że ciąg ten jest *injektywną rezolwentą modułu M w* $\operatorname{mod} A$. Podobnie, dualne założenie o minimalności odpowiednich monomorfizmów indukowanych prowadzi do definicji *minimalnej injektywnej rezolwenty modułu M*. Odnotujmy także, że jeśli dana jest minimalna projektywna rezolwenta M powyższej postaci, to ciąg dokładny $P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$ utworzony z jej końcowych wyrazów nazywany jest *minimalną projektywną prezentacją modułu M*. Analogicznie należy rozumieć pojęcie *minimalnej injektywnej prezentacji modułu*.

Wspominamy tutaj jedynie, że minimalna projektywna (odpowiednio, injektywna) rezolwenta danego modułu wyznaczona jest jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu ciągów dokładnych, co opisuje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 1.3.6. *Niech A będzie algebrą, a M dowolnym niezerowym modułem w* $\operatorname{mod} A$. *Załóżmy ponadto, że*

$$\mathbb{P}: \ \cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

jest minimalną projektywną rezolwentą modułu M w $\operatorname{mod} A$. *Wówczas dla dowolnej projektywnej rezolwenty $\mathbb{P}'$: $\cdots \xrightarrow{d_2'} P_1' \xrightarrow{d_1'} P_0' \xrightarrow{d_0'} M \longrightarrow 0$ modułu M istnieje w* $\operatorname{mod} A$ *diagram przemienny postaci*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "f_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "f_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}_M"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P_2' \arrow[r, "d_2'"] & P_1' \arrow[r, "d_1'"] & P_0' \arrow[r, "d_0'"] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

W szczególności, jeśli przy tym również $\mathbb{P}'$ jest minimalną projektywną rezolwentą modułu M, to wszystkie homomorfizmy $f_i : P_i \to P_i'$, dla $i \in \mathbb{N}$, są izomorfizmami w $\operatorname{mod} A$.

W świetle powyższego dowolne dwie minimalne projektywne rezolwenty $\mathbb{P}$ i $\mathbb{P}'$ ustalonego modułu $M \neq 0$ w $\operatorname{mod} A$ są izomorficzne jako ciągi dokładne. W szczególności, dla każdego $n \geqslant 0$ zachodzi izomorfizm $P_n \simeq P_n'$. Innymi słowy, klasy izomorfizmu modułów projektywnych P_n (odpowiednio, injektywnych I_n), dla $n \geqslant 0$, są wyznaczone jednoznacznie. Wynika stąd również, że jeśli moduły $P_0, \ldots, P_m$, $m \geqslant 0$, są niezerowe, zaś $P_{m+1} = 0$, dla pewnego $m \geqslant 0$, to $P_k = 0$, dla $k > m$, oraz dowolna minimalna projektywna rezolwenta M spełnia tę samą własność. Wówczas mówimy, że $\mathbb{P}$ jest długości m. W przeciwnym wypadku, to jest, gdy $P_s \neq 0$, dla dowolnego $s \geqslant 0$, określamy długość $\mathbb{P}$ jako ∞. Uzasadnia to, że długość $m = \min\{s \geqslant 0; P_{s+1} = 0\}$ minimalnej projektywnej rezolwenty $\mathbb{P}$ modułu M, jest poprawnie określona i nie zależy od jej wyboru, a jedynie od samego modułu $M \neq 0$; wielkość ta nazywana jest *projektywnym wymiarem (modułu) M* i oznaczamy ją symbolem $\operatorname{pd}_A M \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Zachodzi również dualne twierdzenie, które pokazuje, że także minimalna injektywna rezolwenta dowolnego niezerowego modułu M w $\operatorname{mod} A$ jest wyznaczona z dokładnością do izomorfizmu ciągów dokładnych, toteż analogicznie można rozważać jej długość, którą nazywa się *wymiarem injektywnym M* i oznacza przez $\operatorname{id}_A M \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. W szczególności zachodzi $\operatorname{pd}_A M = 0$ (odpowiednio, $\operatorname{id}_A M = 0$) wtedy i tylko wtedy, gdy M jest modułem projektywnym (odpowiednio, injektywnym) w $\operatorname{mod} A$.

Badanie projektywnych oraz injektywnych wymiarów modułów nad daną algebrą A daje wiele ciekawych informacji o samej algebrze, o czym będziemy mieli okazję się przekonać w dalszym toku rozważań. W pewnym sensie wymiary projektywne (lub injektywne) modułów w $\operatorname{mod} A$ są jednoznacznie wyznaczone przez odpowiednie wymiary modułów nierozkładalnych. W istocie bowiem, dla każdego niezerowego modułu M w $\operatorname{mod} A$, jeżeli $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_r$, gdzie $M_1, \ldots, M_r$ są niezerowymi modułami w $\operatorname{ind} A$, $r \geqslant 1$, to $\operatorname{pd}_A M = \max\{\operatorname{pd}_A M_1, \ldots, \operatorname{pd}_A M_r\}$ oraz $\operatorname{id}_A M = \max\{\operatorname{id}_A M_1, \ldots, \operatorname{id}_A M_r\}$. W szczególności, bardzo ważny niezmiennik K-algebr A *globalny wymiar*, oznaczany przez $\operatorname{gl.dim} A$, jest zdefiniowany jako kres górny wymiarów projektywnych (równoważnie, injektywnych) wszystkich modułów nierozkładalnych w $\operatorname{mod} A$. Zagadnienia te omówimy pobieżnie w pozostałej części tej sekcji wykorzystując tak zwane funktory rozszerzeń, które są szczególnym przypadkiem *funktorów pochodnych* należących do dobrze znanych koncepcji algebry homologicznej. Rozważmy dla ustalenia uwagi parę modułów M, N w $\operatorname{mod} A$, gdzie A jest dowolną K-algebrą. Wówczas, dla każdej minimalnej rezolwenty projektywnej

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} \cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

modułu M w $\operatorname{mod} A$, możemy rozważyć następujący kompleks kołańcuchowy w $\operatorname{mod} K$ indukowany przez funktor kontrawariantny $\operatorname{Hom}_A(-, N)$

$$0 \xrightarrow{\partial^0} \operatorname{Hom}_A(P_0, N) \xrightarrow{\quad\partial^1\quad} \operatorname{Hom}_A(P_1, N) \xrightarrow{\quad\partial^2\quad} \operatorname{Hom}_A(P_2, N) \xrightarrow{\quad\partial^3\quad} \cdots,$$

gdzie $\partial^n = \operatorname{Hom}_A(d_n, N)$, dla $n \geqslant 1$. Kohomologie tego kompleksu są tak zwanymi *przestrzeniami rozszerzeń*; dla każdego $n \in \mathbb{N}$, n-ta przestrzeń kohomologii tego kompleksu, to znaczy następująca ilorazowa przestrzeń K-liniowa

$$H^n(M, N) = \operatorname{Ker} \partial^{n+1} / \operatorname{Im} \partial^n = \begin{cases} \operatorname{Ker} \partial^1, & \text{gdy } n{=}0; \\ \operatorname{Ker} \operatorname{Hom}_A(d_{n+1}, N) / \operatorname{Im} \operatorname{Hom}_A(d_n, N), & \text{jeśli } n{\geqslant}1, \end{cases}$$

nie zależy (z dokładnością do izomorfizmu przestrzeni liniowych) od początkowego wyboru minimalnej rezolwenty projektywnej modułu M w $\operatorname{mod} A$, nazywana jest *n-tą przestrzenią rozszerzeń z M do N*, oraz oznaczana jest symbolem $\operatorname{Ext}_A^n(M, N)$. Bezpośrednio z tej definicji oraz lewostronnej dokładności funktora $\operatorname{Hom}_A(-, N)$ wnosimy, że $\operatorname{Ext}_A^0(M, N) = \operatorname{Ker} \partial^1 = \operatorname{Ker} \operatorname{Hom}_A(d_1, N) = \operatorname{Im} \operatorname{Hom}_A(d_0, N) \simeq \operatorname{Hom}_A(M, N)$ (w $\operatorname{mod} K$), ponieważ $\operatorname{Hom}_A(d_0, N) : \operatorname{Hom}_A(M, N) \to \operatorname{Hom}_A(P_0, N)$ jest monomorfizmem w $\operatorname{mod} K$. Przypomnijmy tylko, że zachodzi poniższe twierdzenie [49, patrz III.3].

Twierdzenie 1.3.7. *Niech A będzie algebrą, M modułem w $\operatorname{mod} A$. Wówczas dla każdej liczby naturalnej n istnieje indukowany funktor kowariantny $\operatorname{Ext}_A^n(M, -) : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} K$ oraz indukowany funktor kontrawariantny $\operatorname{Ext}_A^n(-, M) : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} K$.*

Funktory rozszerzeń można równoważnie skonstruować odpowiednio wykorzystując minimalną injektywną rezolwentę modułu z drugiej współrzędnej. Uzasadnienie, że konstrukcja ta jest równoważna wymaga pewnych nietrywialnych technik algebry homologicznej i nie będziemy tego robić. Wspominamy jedynie, że prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.3.8. *Niech A będzie dowolną algebrą, M zaś modułem w $\operatorname{mod} A$. Wówczas*

(1) Wymiar projektywny modułu M jest skończony i równy $\operatorname{pd}_A M = n$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi $\operatorname{Ext}_A^n(M, -) \neq 0$, przy czym $\operatorname{Ext}_A^{n+1}(M, -) = 0$.

(2) $\operatorname{pd}_A M = \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{Ext}_A^n(M, -) \neq 0$, dla każdej liczby $n \geqslant 0$.

(3) Dualnie, $\mathrm{id}_A M = n$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathrm{Ext}_A^n(-, M) \neq 0$ *oraz* $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(-, M) = 0$.

(4) $\mathrm{id}_A M = \infty$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathrm{Ext}_A^n(-, M) \neq 0$, *dla dowolnej liczby* $n \geqslant 0$.

Stosując Twierdzenie Jordana-Höldera oraz pewne elementarne własności wymiarów projektywnych i injektywnych modułów można stąd wywnioskować, że globalny wymiar dowolnej algebry A jest równy kresowi górnemu wymiarów projektywnych (równoważnie, injektywnych) wszystkich modułów prostych w $\operatorname{mod} A$. Prowadzi to do następującego wniosku.

Wniosek 1.3.9. *Niech A będzie dowolną algebrą. Wówczas następujące warunki są równoważne.*

(i) Globalny wymiar algebry A jest skończony.

(ii) Dla każdego modułu M w $\operatorname{mod} A$ *zachodzi* $\mathrm{pd}_A M < \infty$ *(równoważnie,* $\mathrm{id}_A M < \infty$*).*

(iii) Wszystkie moduły M w $\operatorname{ind} A$ *mają* $\mathrm{pd}_A M < \infty$ *(równoważnie,* $\mathrm{id}_A M < \infty$*).*

(iv) Wymiar projektywny (równoważnie, injektywny) dowolnego modułu prostego w $\operatorname{mod} A$ *jest skończony.*

(v) Istnieje $m \geqslant 0$ *takie, że* $\mathrm{Ext}_A^m(-,-) = 0$, *to znaczy* $\mathrm{Ext}_A^m(X, Y) = 0$, *dla dowolnych modułów* X, Y *w* $\operatorname{mod} A$.

Z powyższego otrzymujemy natychmiast, że dla dowolnej algebry A zachodzi $\operatorname{gl.dim} A = \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje moduł M w $\operatorname{ind} A$ o nieskończonym wymiarze projektywnym (lub injektywnym), lub równoważnie, gdy dla każdego $m \geqslant 0$ mamy $\mathrm{Ext}_A^m(-,-) \neq 0$, to znaczy, istnieją moduły X i Y w $\operatorname{mod} A$, dla których $\mathrm{Ext}_A^m(X, Y) \neq 0$. Można pokazać, że jest to równoważne istnieniu modułu M w $\operatorname{ind} A$, dla którego zarówno projektywny, jak i injektywny wymiar są nieskończone. Oczywiście jest to warunek wystarczający, lecz jego konieczność wymaga pewnej argumentacji, która została przedstawiona przez A. Skowrońskiego, S. O. Smalø oraz D. Zacharię w króciutkiej notce [48]. Odnotujmy jeszcze następujące znane twierdzenie, które pokazuje w jaki sposób ograniczenia na wymiary homologiczne modułów determinują globalny wymiar algebry.

Twierdzenie 1.3.10. *Niech* $m, n \in \mathbb{N}$ *oraz załóżmy, że A jest algebrą, dla której wszystkie moduły X w* $\operatorname{ind} A$ *spełniają* $\mathrm{pd}_A X \leqslant m$ *lub* $\mathrm{id}_A X \leqslant n$. *Wówczas* $\operatorname{gl.dim} A \leqslant m + n + 1$. *W szczególności, jeżeli dla każdego modułu X w* $\operatorname{ind} A$ *zachodzi* $\mathrm{pd}_A X \leqslant 1$ *lub* $\mathrm{id}_A X \leqslant 1$, *to A* $\operatorname{gl.dim} A \leqslant 3$.

Przypominamy ostatecznie, że przestrzenie rozszerzeń zawierają wiele informacji o samej algebrze. Na przykład pierwsze przestrzenie rozszerzeń pomiędzy modułami prostymi kompletnie determinują kołczan zwyczajny algebry.

Lemat 1.3.11. *Niech A będzie dowolną K-algebrą oraz rozważmy dwa dowolne wierzchołki i, j kołczanu Q_A. Wówczas istnieje strzałka* $i \xrightarrow{(d_{ij}, d'_{ij})} j$ *w Q_A, wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathrm{Ext}_A^1(S_i, S_j) \neq 0$. *W tym przypadku, zachodzą także równości*

$$d_{ij} = \dim_{\mathrm{End}_A(S_j)} \mathrm{Ext}_A^1(S_i, S_j) \text{ oraz } d'_{ij} = \dim_{\mathrm{End}_A(S_i)} \mathrm{Ext}_A^1(S_i, S_j).$$

1.4 Teoria Auslandera-Reitena ·

Podrozdział ten jest zestawieniem wybranych wyników *teorii Auslandera-Reiten*, której zawdzięczamy głębokie spojrzenie na homologiczną strukturę kategorii modułów. Autorzy tej teorii wprowadzili bardzo ważne pojęcie ciągu prawie rozszczepialnego, które przyczyniło się do rozwoju wielu nowych pojęć i metod, z powodzeniem wykorzystywanych w nowoczesnej teorii reprezentacji algebr. Sekcja ta podzielona jest na trzy zasadnicze części. W pierwszej definiujemy odwzorowania nieprzywiedlne i prawie rozszczepialne oraz krótko omawiamy podstawowe własności ciągów prawie rozszczepialnych i bezpośrednio z tym związane pojęcie translacji Auslandera-Reiten. Druga część jest poświęcona wprowadzeniu jednego z najważniejszych niezmienników teorii Auslandera-Reiten, to znaczy kołczanu

Auslandera-Reiten, który jest obiektem kombinatorycznym zawierającym ważne informacje o wszystkich ciągach prawie rozszczepialnych i odwzorowaniach nieprzywiedlnych w kategorii modułów danej algebry. W trzeciej części natomiast omawiamy pobieżnie najważniejsze znane typy składowych w kołczanach Auslandera-Reiten algebr, które będą pojawiały się w rozważaniach rozprawy.

Przypominamy, że dla dowolnej algebry A homomorfizm $f : X \to Y$ w $\operatorname{mod} A$ nazywany jest *nieprzywiedlnym*, o ile f nie jest ani sekcją, ani retrakcją oraz dla każdego rozkładu $f = f_2 f_1$ w $\operatorname{mod} A$, albo f_1 jest sekcją albo f_2 jest retrakcją. Zbiór homomorfizmów nieprzywiedlnych z X do Y w $\operatorname{mod} A$ oznaczać będziemy symbolem $\operatorname{Irr}_A(X, Y)$. Odnotujmy tylko, że na mocy twierdzenia udowodnionego przez R. Bautistę (patrz także [49, Lemma III.7.8]), dla dowolnych modułów X i Y w $\operatorname{ind} A$ zachodzi równość $\operatorname{Irr}_A(X, Y) = \operatorname{rad}_A(X, Y) \setminus \operatorname{rad}^2_A(X, Y)$. Ponadto wówczas dowolny homomorfizm nieprzywiedlny $X \to Y$ jest albo właściwym epimorfizmem albo właściwym monomorfizmem. Dla dowolnych modułów X i Y w $\operatorname{ind} A$ przez $\operatorname{irr}_A(X, Y)$ oznaczamy ilorazową przestrzeń K-liniową $\operatorname{rad}_A(X, Y)/\operatorname{rad}^2_A(X, Y)$. Oczywiście $\operatorname{irr}_A(X, Y) \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{Irr}_A(X, Y) \neq \emptyset$.

Przypomnijmy dalej, że homomorfizm $f : L \to M$ w $\operatorname{mod} A$ nazywany jest *lewostronnie prawie rozszczepialnym w* $\operatorname{mod} A$ wtedy i tylko wtedy, gdy f nie jest sekcją oraz dla dowolnego homomorfizmu $f' : L \to M'$, który nie jest sekcją w $\operatorname{mod} A$, istnieje homomorfizm $h : M \to M'$ taki, że $f' = hf$. Dualnie, powiemy, że homomorfizm $g : M \to N$ w $\operatorname{mod} A$ jest *prawostronnie prawie rozszczepialny w* $\operatorname{mod} A$ wtedy i tylko wtedy, gdy g nie jest retrakcją oraz dla dowolnego homomorfizmu $g' : M' \to N$, który nie jest retrakcją w $\operatorname{mod} A$, istnieje homomorfizm $h : M' \to M$ taki, że $g' = gh$. Odnotujmy również, że homomorfizm $f : L \to M$ nazywamy *lewostronnie minimalnym*, o ile dowolny endomorfizm $\alpha \in \operatorname{End}_A(M)$ taki, że $\alpha f = f$, jest izomorfizmem. Homomorfizm $g : M \to N$ nazwawamy natomiast *prawostronnie minimalnym*, gdy dowolny endomorfizm $\alpha \in \operatorname{End}_A(M)$ taki, że $g\alpha = g$, jest izomorfizmem. Jeśli $f : L \to M$ jest lewostronnie minimalny i lewostronnie prawie rozszczepialny, to powiemy krótko, że f jest *lewostronnie minimalny prawie rozszczepialny*. Powinno być również jasne co rozumiemy stosując określenie homomorfizm *prawostronnie minimalny prawie rozszczepialny*.

Następne dwa twierdzenia stanowią ważne wyniki teorii Auslandera-Reiten, które pokazują, że homomorfizmy nieprzywiedlne o początku lub końcu w ustalonym module nierozkładalnym są zdeterminowane przez odpowiednie homomorfizmy lewostronnie lub prawostronnie minimalne prawie rozszczepialne. Po dowody odsyłamy do [49, patrz Theorem III.7.11 oraz Theorem III.7.12].

Twierdzenie 1.4.1. *Niech A będzie algebrą, $L, M \neq 0$ modułami w* $\operatorname{mod} A$*, oraz załóżmy, że istnieje homomorfizm lewostronnie minimalny prawie rozszczepialny $f : L \to M$. Wówczas*

(1) L jest modułem w $\operatorname{ind} A$ *oraz f jest homomorfizmem nieprzywiedlnym.*

(2) Homomorfizm postaci $f' : L \to M'$ w $\operatorname{mod} A$ *jest homomorfizmem nieprzywiedlnym wtedy i tylko wtedy, gdy $M' \neq 0$ oraz istnieje homomorfizm w* $\operatorname{mod} A$ *postaci $f'' : L \to M''$ taki, że homomorfizm $[f' \ \ f'']^t \in \operatorname{Hom}_A(L, M' \oplus M'')$ jest lewostronnie minimalny prawie rozszczepialny w* $\operatorname{mod} A$.

Twierdzenie 1.4.2. *Niech A będzie algebrą, zaś $M, N \neq 0$ modułami w* $\operatorname{mod} A$ *takimi, że istnieje homomorfizm prawostronnie minimalny prawie rozszczepialny postaci $g : M \to N$. Wówczas*

(1) N jest modułem w $\operatorname{ind} A$ *oraz g jest homomorfizmem nieprzywiedlnym.*

(2) Homomorfizm postaci $g' : M' \to N$ w $\operatorname{mod} A$ *jest homomorfizmem nieprzywiedlnym wtedy i tylko wtedy, gdy $M' \neq 0$ oraz istnieje homomorfizm w* $\operatorname{mod} A$ *postaci $g'' : M'' \to N$ taki, że homomorfizm $[g' \ \ g''] \in \operatorname{Hom}_A(M' \oplus M'', N)$ jest prawostronnie minimalny prawie rozszczepialny w* $\operatorname{mod} A$.

Odnotujmy tutaj jeszcze kilka faktów, które można wywnioskować między innymi przy użyciu dwóch powyższych twierdzeń. Przypominamy [49, Lemma III.9.2], że dla algebry A oraz dowolnego modułu Z w $\operatorname{ind} A$, przez $\mathbb{F}_Z$ oznaczamy algebrę $\mathbb{F}_Z := \operatorname{End}_A(Z)/\operatorname{rad}\operatorname{End}_A(Z)$, która jest algebrą z dzieleniem. Jeśli X oraz Y są modułami w $\operatorname{ind} A$, dla których istnieje odwzorowanie nieprzywiedlne postaci $X \to Y$ w $\operatorname{mod} A$, to $\operatorname{irr}_A(X,Y) \neq 0$ ma ponadto również naturalną strukturę ($\mathbb{F}_Y$-$\mathbb{F}_X$)-bimodułu, gdzie

$$(b + \operatorname{rad} \operatorname{End}_A(Y)).f = bf + \operatorname{rad}_A^2(X,Y) \text{ oraz } f.(a + \operatorname{rad} \operatorname{End}_A(X)) = fa + \operatorname{rad}_A^2(X,Y)$$

dla dowolnych $a \in \operatorname{End}_A(X)$, $b \in \operatorname{End}_A(Y)$ oraz $f \in \operatorname{rad}_A(X,Y)$. Wspominamy także, że bimodułowa struktura na $\operatorname{irr}_A(X,Y)$ odzwierciedla istotne własności homomorfizmów lewostronnie (odpowiednio, prawostronnie) minimalnych prawie rozszczepialnych o początku w X (odpowiednio, końcu w Y). W istocie można wykazać, że jeżeli istnieje lewostronnie minimalny prawie rozszczepialny homomorfizm $f : X \to M$ w $\operatorname{mod} A$, to $M = Y^s \oplus M'$, gdzie $s \geqslant 1$, M' nie ma składników prostych izomorficznych z Y, i przy tym krotność s modułu Y w M jest równa $s = \dim_{\mathbb{F}_Y} \operatorname{irr}_A(X,Y)$. Dualnie, jeśli istnieje prawostronnie minimalny prawie rozszczepialny homomorfizm $g : N \to Y$ w $\operatorname{mod} A$, to $N = X^r \oplus N'$, gdzie N' nie ma składników prostych izomorficznych z X oraz krotność r wynosi $r = \dim_{\mathbb{F}_X} \operatorname{irr}_A(X,Y)$.

Przypominamy ostatecznie, że dla każdej algebry A, krótki ciąg dokładny w $\operatorname{mod} A$ postaci

$$\sigma : \quad 0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0,$$

nazywamy *ciągiem prawie rozszczepialnym* w $\operatorname{mod} A$, o ile f jest homomorfizmem lewostronnie minimalnym prawie rozszczepialnym, natomiast g jest homomorfizmem prawostronnie minimalnym prawie rozszczepialnym. Stosując dobrze znane własności homomorfizmów prawie rozszczepialnych można wywnioskować, że każdy ciąg prawie rozszczepialny w $\operatorname{mod} A$ jest ciągiem nierozszczepialnym i ma nierozkładalne końce L oraz N.

Uwaga · Istnieje wiele ciekawych warunków równoważnych na to, aby ciąg dokładny w $\operatorname{mod} A$ był prawie rozszczepialny. Odnotujmy dla przykładu, że ciąg dokładny jest prawie rozszczepialny wtedy i tylko wtedy, gdy L i N są modułami nierozkładalnymi oraz homomorfizmy f i g są nieprzywiedlne. Równoważnie, wystarczy założyć, że tylko jeden z homomorfizmów f lub g jest minimalnie prawie rozszczepialny (odpowiednio, lewostronnie lub prawostronnie). Po więcej charakteryzacji odsyłamy do [49, Theorem III.8.3]. Przypomnijmy także, że dwa ciągi Auslandera-Reitena w kategorii modułów $\operatorname{mod} A$ algebry A są izomorficzne jako ciągi dokładne wtedy i tylko wtedy, gdy mają izomorficzne lewe końce, lub równoważnie, mają izomorficzne prawe końce (patrz [49, Lemma III.8.2]). W ten sposób rozumiemy stwierdzenie, że ciąg prawie rozszczepialny (o ile istnieje) jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu ciągów dokładnych przez moduł nierozkładalny będący jego lewym (lub równoważnie, prawym) końcem ·

Problem istnienia ciągów prawie rozszczepialnych okazał się dalece nietrywialnym zagadnieniem, którego rozwiązanie doprowadziło do ciekawej i głębokiej teorii. Rozstrzygnięcie tej hipotezy było bezpośrednio związane z opisem tak zwanych *translacji Auslandera-Reiten*, to znaczy wzajemnie odwrotnych operacji, a ściślej, funktorów pomiędzy pewnymi kategoriami ilorazowymi kategorii modułów danej algebry. Odnotujmy tylko, że dla dowolnego modułu $M \neq 0$ w $\operatorname{mod} A$ oraz ustalonej minimalnej projektywnej prezentacji $P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$ modułu M w $\operatorname{mod} A$ możemy rozważać następujący ciąg dokładny w $\operatorname{mod} A^{\mathrm{op}}$ indukowany przez funktor kontrawariantny $(-)^t := \operatorname{Hom}_A(-, A) : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} A^{\mathrm{op}}$

$$0 \to M^t \to P_0^t \to P_1^t \to \operatorname{Coker} p_1^t \to 0.$$

Moduł $\operatorname{Tr} M := \operatorname{Coker} p_1^t$ w $\operatorname{mod} A^{\mathrm{op}}$ nazywany jest *transpose modułu* M i z dokładnością do izomorfizmu nie zależy od początkowego wyboru minimalnej projektywnej prezentacji moduł M. Nie będziemy tu szczegółowo omawiać własności operacji transpose (parz w tym celu, na przykład [49, Proposition III.4.5]). Wspominamy jedynie, że $\operatorname{Tr} : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod}^{\mathrm{op}}$ jest operacją pomiędzy klasami modułów. Odnotujmy również, że operacja Tr rozszerza się do funktora kontrawariantnego pomiędzy pewnymi ściśle określonymi kategoriami ilorazowami kategorii $\operatorname{mod} A$ oraz $\operatorname{mod} A^{\mathrm{op}}$, nazywanymi *stabilnymi kategoriami kategorii modułów*. Przypominamy tylko [49, patrz Theorem III.4.7], że dla K-algebry A, operacja transpose indukuje dualności kategorii

$$\underline{\operatorname{mod}}\, A \underset{\operatorname{Tr}}{\overset{\operatorname{Tr}}{\rightleftarrows}} \underline{\operatorname{mod}}\, A^{\mathrm{op}} ,$$

gdzie $\underline{\operatorname{mod}}\, A$ jest kategorią ilorazową postaci $\underline{\operatorname{mod}}\, A = \operatorname{mod} A / \mathcal{P}_A$, przy czym $\mathcal{P}_A$ jest dwustronnym ideałem w kategorii $\mathrm{mod}\, A$ określonym dla modułów M, N z $\mathrm{mod}\, A$, jako podprzestrzeń K-liniowa $\mathcal{P}_A(M, N)$ przestrzeni $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ składająca się z takich homomorfizmów $f : M \to N$ w $\mathrm{mod}\, A$, które faktoryzują się przez pewien moduł projektywny, to jest, istnieją homomorfizmy $f_1 : M \to P$ oraz $f_2 : P \to N$, dla których $f = f_2 f_1$ oraz P jest modułem projektywnym w $\mathrm{mod}\, A$. Dualnie, można rozważać dwustronny ideał $\mathcal{I}_A$ w kategorii $\mathrm{mod}\, A$, zdefiniowany dla każdej pary modułów M, N z $\mathrm{mod}\, A$, jako podprzestrzeń liniowa $\mathcal{I}_A(M, N)$ przestrzeni $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ składająca się z homomorfizmów posiadających faktoryzację przez moduły injektywne. Wówczas kategoria ilorazowa $\mathrm{mod}\, A/\mathcal{I}_A$ oznaczana jest symbolem $\overline{\mathrm{mod}}\, A$. Kategorie $\underline{\mathrm{mod}}\, A$ i $\overline{\mathrm{mod}}\, A$ nazywane są *stabilnymi kategoriami modułów*. Przypomnijmy ostatecznie, że funktor dualności D indukuje naturalnie funktory

$$D : \underline{\mathrm{mod}}\, A \to \overline{\mathrm{mod}}\, A^{\mathrm{op}} \text{ oraz } D : \overline{\mathrm{mod}}\, A \to \underline{\mathrm{mod}}\, A^{\mathrm{op}}.$$

Złożenie tych funktorów z odpowiednimi funktorami brania transpose prowadzi do funktorów translacji Auslandera-Reiten τ_A i τ_A^{-1}, które zdefiniowane są jako następujące wzajemnie odwrotne równoważności na stabilnych kategoriach modułów:

$$\tau_A := D\,\mathrm{Tr} : \underline{\mathrm{mod}}\, A \to \overline{\mathrm{mod}}\, A \qquad \text{oraz} \qquad \tau_A^{-1} := \mathrm{Tr}\, D : \overline{\mathrm{mod}}\, A \to \underline{\mathrm{mod}}\, A.$$

Wprost z definicji operacji Tr wnioskujemy, że $\mathrm{Tr}_A\, M = 0$ oraz $\mathrm{Tr}_{A^{\mathrm{op}}}\, N$, o ile moduły M i N są projektywne w $\mathrm{mod}\, A$ i $\mathrm{mod}\, A^{\mathrm{op}}$, odpowiednio, skąd w szczególności otrzymujemy równości $\tau_A P = 0$ oraz $\tau_A^{-1} I = 0$, dla dowolnego modułu projektywnego P oraz injektywnego I w $\mathrm{ind}\, A$.

Poniższe twierdzenie stanowi jeden z przełomowych wyników teorii Auslandera-Reiten, który rozwiązuje problem istnienia ciągów prawie rozszczepialnych (pełny dowód można znaleźć w [49, Theorem III.8.4]).

Twierdzenie 1.4.3. [Auslander-Reiten] *Niech A będzie algebrą. Wówczas*

(1) Dla dowolnego modułu nieprojektywnego M w $\mathrm{ind}\, A$ *istnieje ciąg prawie rozszczepialny w* $\mathrm{mod}\, A$ *postaci* $0 \to \tau_A M \to E \to M \to 0$.

(2) Dla dowolnego modułu nieinjektywnego N w $\mathrm{ind}\, A$ *istnieje ciąg prawie rozszczepialny w* $\mathrm{mod}\, A$ *postaci* $0 \to N \to F \to \tau_A^{-1} N \to 0$.

Twierdzenie to wymusiło natychmiast szereg poważnych konsekwencji. W szczególności, otrzymano dzięki temu dalece nietrywialną charakteryzację odwzorowań nieprzywiedlnych o początku i końcu w danym module nierozkładalnym. W istocie [49, patrz Lemma III.7.6], dla każdego modułu projektywnego M w $\mathrm{ind}\, A$ kanoniczne włożenie radykału $\mathrm{rad}\, M \to M$ jest homomorfizmem prawostronnie minimalnie prawie rozszczepialnym, zatem dla każdego modułu M w $\mathrm{ind}\, A$ istnieje co najmniej jeden prawostronnie minimalny prawie rozszczepialny homomorfizm $g : E \to M$ w $\mathrm{mod}\, A$, który jest nieprzywiedlny oraz wszystkie inne homomorfizmy nieprzywiedlne w $\mathrm{mod}\, A$ o końcu w module M są składnikami odwzorowania g w sensie opisanym w Twierdzeniu 1.4.2 podpunkt (2). Podobnie, każdy moduł N w $\mathrm{ind}\, A$ jest początkiem pewnego lewostronnie minimalnego odwzorowania prawie rozszczepialnego $f : N \to F$, co daje również pełną kontrolę nad odwzorowaniami nieprzywiedlnymi o początku N na mocy [49, Lemma III.7.7] oraz Twierdzenia 1.4.1(2). W konsekwencji, dowolny homomorfizm z $\mathrm{rad}_A(X, Y)$ pomiędzy modułami X i Y w $\mathrm{ind}\, A$ faktoryzuje się przez pewien homomorfizm nieprzywiedlny w $\mathrm{ind}\, A$ o początku w X oraz pewien homomorfizm nieprzywiedlny w $\mathrm{ind}\, A$ o końcu w Y. Odnotujmy także następujący bardzo przydatny wynik pochodzący z artykułu [41], który opisuje pewnego rodzaju uogólnienie tej własności w przypadku homomorfizmów z nieskończonego radykału Jacobsona.

Lemat 1.4.4. *Niech A będzie algebrą, zaś X i Y modułami w* $\mathrm{ind}\, A$ *takimi, że* $\mathrm{rad}_A^{\infty}(X, Y) \neq 0$. *Wtedy*

(1) Istnieje nieskończona droga odwzorowań nieprzywiedlnych w $\mathrm{ind}\, A$ *postaci*

$$X = X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} X_2 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{f_r} X_r \longrightarrow \cdots$$

oraz homomorfizmy $g_r \in \mathrm{rad}_A^{\infty}(X_r, Y)$ *takie, że* $g_r f_r \ldots f_1 \neq 0$, *dla każdego* $r \geqslant 1$.

(2) Istnieje nieskończona droga odwzorowań nieprzywiedlnych w $\operatorname{ind} A$ *postaci*

$$\cdots \longrightarrow Y_r \xrightarrow{h_r} \cdots \longrightarrow Y_2 \xrightarrow{h_2} Y_1 \xrightarrow{h_1} Y_0 = Y$$

oraz homomorfizmy $u_r \in \operatorname{rad}_A^\infty(X, Y_r)$ *takie, że* $h_1 \dots h_r u_r \neq 0$*, dla każdego* $r \geqslant 1$.

Dowód · Dowód tego lematu można znaleźć w cytowanej pracy [41, patrz Lemma 2.1]. □

Na koniec podajemy jeszcze kilka lematów opisujących różne potrzebne później własności translacji Auslandera-Reiten oraz ciągów prawie rozszczepialnych. Rozpocznijmy od następującego często stosowanego lematu [49, patrz Corollary III.6.4].

Lemat 1.4.5. *Niech A będzie algebrą, zaś X dowolnym niezerowym modułem w* $\operatorname{mod} A$*. Wówczas*

(1) $\operatorname{pd}_A X \leqslant 1$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\operatorname{Hom}_A(D(A), \tau_A X) = 0$.

(2) $\operatorname{id}_A X \leqslant 1$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\operatorname{Hom}_A(\tau_A^{-1} X, A) = 0$.

Następny lemat opisuje dobrze znane własności translacji nad algebrami ilorazowymi danej algebry. Po dowód odsyłamy do [50, Proposition VIII.7.3].

Lemat 1.4.6. *Niech A będzie algebrą, zaś $B = A/I$ dowolną algebrą ilorazową algebry A. Wówczas dla każdego modułu M w* $\operatorname{mod} B$

(a) translacja $\tau_B M$ modułu M w $\operatorname{mod} B$ *jest podmodułem translacji $\tau_A M$;*

(b) translacja odwrotna $\tau_B^{-1} M$ jest epimorficznym obrazem translacji $\tau_A^{-1} M$.

Ostatecznie formułujemy dwa istotne lematy opisujące pewne własności ciągów prawie rozszczepialnych nad algebrami macierzowymi bimodułów. Dowody lematów można znaleźć na przykład w [50, patrz Corollary VII.10.10].

Lemat 1.4.7. *Niech R i S będą algebrami, zaś A algebrą macierzową* $A = \begin{bmatrix} S & M \\ 0 & R \end{bmatrix}$ *pewnego (S-R)-bimodułu M. Wówczas dowolny ciąg prawie rozszczepialny w* $\operatorname{mod} R$ *postaci* $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ *jest również ciągiem prawie rozszczepialnym w* $\operatorname{mod} A$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\operatorname{Hom}_R(M, X) = 0$.

Lemat 1.4.8. *Niech R i S będą algebrami, zaś A algebrą macierzową postaci* $A = \begin{bmatrix} R & D(N) \\ 0 & S \end{bmatrix}$*, dla pewnego ($S$-$R$)-bimodułu N. Wówczas ciąg prawie rozszczepialny w* $\operatorname{mod} R$ *postaci* $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ *pozostaje prawie rozszczepialny w* $\operatorname{mod} A$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\operatorname{Hom}_R(Z, N) = 0$.

Omówimy teraz krótko pojęcie kołczanu Auslandera-Reiten K-algebry oraz podamy różne podstawowe koncepcje i wyniki związane z opisem struktury kołczanów Auslandera-Reiten. Przypominamy, że dla K-algebry A jej *kołczanem Auslandera-Reiten* nazywamy wartościowany kołczan $\Gamma_A = (\Gamma_A, d) = (\Gamma_0, \Gamma_1, s, t, d)$, gdzie

- zbiorem wierzchołków Γ_A jest zbiór Γ_0 wszystkich klas izomorfizmu modułów z $\operatorname{ind} A$,
- dla klas izomorfizmu $\{X\}$, $\{Y\}$ modułów X, Y z $\operatorname{ind} A$ przyjmujemy, że istnieje strzałka $\{X\} \to \{Y\}$ w Γ_1 wtedy i tylko wtedy gdy istnieje homomorfizm nieprzywiedlny $X \to Y$ w $\operatorname{mod} A$,

oraz każdej strzałce $\alpha : \{X\} \longrightarrow \{Y\}$ przyporządkowuje się wartościowanie $d(\alpha) = (d_{XY}, d'_{XY})$, tak więc mamy w Γ_A strzałkę z wartościowaniem postaci

$$\{X\} \xrightarrow{(d_{XY}, d'_{XY})} \{Y\},$$

gdzie $d_{XY} = \dim_{\mathbb{F}_Y} \operatorname{irr}_A(X, Y)$ oraz $d'_{XY} = \dim_{\mathbb{F}_X} \operatorname{irr}_A(X, Y)$. Odnotujmy, że oczywiście zbiór strzałek w Γ_A jest poprawnie określony, bowiem jeśli $X \simeq X'$ oraz $Y \simeq Y'$ w $\operatorname{ind} A$, to istnieje odwzorowanie nieprzywiedlne $X \to Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odwzorowanie nieprzywiedlne $X' \to Y'$. Identyfikujemy odtąd moduły X w $\operatorname{ind} A$ z odpowiadającymi im wierzchołkami $\{X\}$ w Γ_A, które oznaczać będziemy tym samym symbolem X, zawsze pomijając nawiasy sześcienne. Ponadto, w przypadku gdy istnieje w Γ_A strzałka postaci $X \xrightarrow{(1,1)} Y$, to będziemy wówczas pisać po prostu $X \to Y$, pomijając trywialne wartościowanie $(1, 1)$.

Zauważmy, że na mocy Twierdzeń 1.4.1, 1.4.2 i 1.4.3 (patrz również [49, Lemma III.7.6 i 7.7]) otrzymujemy natychmiast pełną teoretyczną wiedzę o lokalnej strukturze kołczanu Γ_A algebry A. W istocie cytowane twierdzenia implikują, że dla każdego nieprojektywnego (lub nieinjektywnego) modułu X w $\operatorname{ind} A$ kołczan Auslandera-Reiten Γ_A zawiera, tak zwane *oczko* o prawym (lub lewym) końcu w X, to znaczy pełny podkołczan postaci

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & E_1 \arrow[dr, "{(d_{E_1X}, d'_{E_1X})}"] & \\
\tau_A X \arrow[ur, "{(d'_{E_1X}, d_{E_1X})}"] \arrow[dr, "{(d'_{E_rX}, d_{E_rX})}"'] & \vdots & X \\
 & E_r \arrow[ur, "{(d_{E_rX}, d'_{E_rX})}"'] &
\end{tikzcd}$$

odpowiednio, postaci:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & F_1 \arrow[dr, "{(d'_{XF_1}, d_{XF_1})}"] & \\
X \arrow[ur, "{(d_{XF_1}, d'_{XF_1})}"] \arrow[dr, "{(d_{XF_s}, d'_{XF_s})}"'] & \vdots & \tau_A^{-1} X \\
 & F_s \arrow[ur, "{(d'_{XF_s}, d_{XF_s})}"'] &
\end{tikzcd}$$

stowarzyszony z ciągiem prawie rozszczepialnym $0 \to \tau_A X \to E \to X \to 0$ w $\operatorname{mod} A$ o prawym końcu w module X (lub odpowiednio, ciągiem prawie rozszczepialnym $0 \to X \to F \to \tau_A^{-1} X \to 0$ w $\operatorname{mod} A$ o lewym końcu w X), przy czym zachodzą odpowiednio, izomorfizmy $E \simeq E_1^{d'_{E_1X}} \oplus \cdots \oplus E_r^{d'_{E_rX}}$ oraz $F \simeq F_1^{d_{XF_1}} \oplus \cdots \oplus F_s^{d_{XF_s}}$ w $\operatorname{mod} A$. Jeżeli natomiast P jest modułem projektywnym, zaś I, modułem injektywnym w $\operatorname{ind} A$, to istnieją następujące (pełne) podkołczany w Γ_A

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
X_1 \arrow[dr, "{(d_{X_1P}, d'_{X_1P})}"] & \\
\vdots & P \\
X_n \arrow[ur, "{(d_{X_nP}, d'_{X_nP})}"'] &
\end{tikzcd}
\quad \text{oraz} \quad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & Y_1 \\
I \arrow[ur, "{(d_{IY_1}, d'_{IY_1})}"] \arrow[dr, "{(d_{IY_m}, d'_{IY_m})}"'] & \vdots \\
 & Y_m
\end{tikzcd}$$

gdzie $X_1^{d'_{X_1P}} \oplus \cdots \oplus X_n^{d'_{X_nP}} = \operatorname{rad} P$ oraz $Y_1^{d_{IF_1}} \oplus \cdots \oplus Y_m^{d_{IF_m}} = I/\operatorname{soc} I$. Co najistotniejsze, dla kołczanu Auslandera-Reiten możemy określić tak zwaną *translację*, to znaczy bijekcję

$$\tau_A : (\Gamma_0 \setminus \Gamma'_0) \to (\Gamma_0 \setminus \Gamma''_0)$$

indukowaną przez operacje translacji Auslandera-Reiten, to znaczy $\tau_A\{X\} = \{\tau_A X\}$, dla każdego nieprojektywnego modułu X z $\operatorname{ind} A$, gdzie Γ'_0 (odpowiednio, Γ''_0) jest zbiorem wszystkich wierzchołków Z w Γ_0 takich, że moduł Z jest projektywny (odpowiednio, injektywny) w $\operatorname{ind} A$. Wyabstrahowanie kombinatorycznych własności kołczanu Auslandera-Reiten i indukowanej funkcji translacji prowadzi do pojęcia *kołczanu z translacją*; przypomnijmy tu jedynie, że *kołczanem z translacją* nazywamy trójkę (Γ, d, τ), spełniającą następujące warunki.

1) Γ jest lokalnie skończonym kołczanem bez pętli oraz podwójnych krawędzi w $\bar{\Gamma}$, wraz z określonym wartościowaniem $d : \Gamma_1 \to \mathbb{N}^2$ strzałek w Γ.

2) $\tau : (\Gamma_0 \setminus \Gamma'_0) \to \Gamma_0$ jest różnowartościową funkcją zbiorów, gdzie Γ'_0 jest pewnym podzbiorem zbioru Γ_0 wierzchołków kołczanu Γ, składającym się z wierzchołków, które będziemy dalej nazywać *wierzchołkami projektywnymi* (w Γ).

3) Dla każdego wierzchołka nieprojektywnego $x \in \Gamma_0$, zachodzi równości zbiorów $x^- = \tau(x)^+$, gdzie dla $z \in \Gamma_0$ przez z^- (odpowiednio, z^+) oznaczamy podzbiór Γ_0 złożony ze wszystkich bezpośrednich poprzedników (odpowiednio, następników) wierzchołka z w Γ.

4) Jeżeli $x \xrightarrow{(a,b)} y$ jest strzałką w Γ_1 oraz y nie jest wierzchołkiem projektywnym, to istnieje w Γ_1 także strzałka postaci $\tau(y) \xrightarrow{(b,a)} x$.

Przypomnijmy, że w każdym kołczanie z translacją można określić dualne pojęcie *wierzchołka injektywnego*. Przyjmuje się bowiem, że injektywne są wierzchołki ze zbioru $\Gamma_0'' = \Gamma_0 \setminus \tau(\Gamma_0 \setminus \Gamma_0')$, to znaczy, *nie są injektywne* dokładnie te wierzchołki, które są translacjami wierzchołków nieprojektywnych. Wówczas mamy bijekcję $\tau : \Gamma_0 \setminus \Gamma_0' \to \Gamma_0 \setminus \Gamma_0''$ pomiędzy zbiorem wierchołków nieinjektywnych $\Gamma_0 \setminus \Gamma_0'' = \tau(\Gamma_0 \setminus \Gamma_0')$ oraz zbiorem wierzchołków nieprojektywnych $\Gamma_0 \setminus \Gamma_0'$ w dowolnym kołczanie z translacją (Γ, d, τ). Odnotujmy tutaj bez dowodu, że kołczan Auslandera-Reiten $\Gamma_A = (\Gamma_A, d)$ każdej algebry A, wraz z translacją $\tau_A : \Gamma_0 \setminus \Gamma_0' \to \Gamma_0$ indukowaną przez operację $\tau_A : \operatorname{ind} A \to \operatorname{ind} A$, jest w istocie kołczanem z translacją $\Gamma_A = (\Gamma_A, d, \tau_A)$. Oczywiście każda składowa spójności kołczanu Γ_A jest również kołczanem z translacją dziedziczoną z τ_A. Niech odtąd Γ będzie ustalonym kołczanem z translacją $\Gamma = (\Gamma, d, \tau)$.

Definicja · Niech Φ będzie pełnym podkołczanem kołczanu Γ oraz przez d_Φ oznaczmy wartościowanie kołczanu Φ dziedziczone z d, to znaczy d_Φ jest obcięciem d do strzałek z Φ. Podkołczan Φ nazywamy *podkołczanem z translacją w* $\Gamma = (\Gamma, d, \tau)$, jeśli dla każdego wierzchołka x w Φ, który nie jest projektywny w Γ zachodzi $\tau(x) \in \Phi$, lub dualnie, dla wszystkich wierzchołków x w Φ, które nie są injektywne w Γ, zachodzi $\tau^{-1}(x) \in \Phi$. Wówczas podkołczan Φ w Γ ma naturalną strukturę kołczanu z translacją $(\Phi, d_\Phi, \tau_\Phi)$, przy czym $\tau_\Phi(x) = \tau(x)$ lub $\tau_\Phi^{-1}(x) = \tau^{-1}(x)$, dla wszystkich wierzchołków x w Φ, dla których translacja $\tau(x)$, lub odpowiednio $\tau^{-1}(x)$, jest poprawnie określona.

Orbitę wierzchołka $x \in \Gamma_0$ definiuje się jako podzbiór $\mathscr{O}_x = \{\tau^z x : \quad z \in \mathbb{Z}_x\} \subseteq \Gamma_0$, gdzie $\mathbb{Z}_x$ jest zbiorem liczb $z \in \mathbb{Z}$ takich, że $\tau^z x$ jest określone; naturalnie, dla każdego $z \in \mathbb{Z}$ przez τ^z oznaczamy odpowiednią potęgą translacji τ lub translacji odwrotnej τ^{-1}. Dla dowolnej rodziny wierzchołków $\boldsymbol{Q} \subseteq \Gamma_0$ w kołczanie z translacją Γ oraz liczby $k \in \mathbb{Z}$ będziemy również oznaczać przez $\tau^k \boldsymbol{Q}$ rodzinę wszystkich wierzchołków w Γ postaci $\tau^k Q$, gdzie Q należy do $\boldsymbol{Q}$, zaś $k \in \mathbb{Z}_Q$. Wierzchołek $x \in \Gamma_0$ nazywamy *lewostronnie* (odpowiednio, *prawostronnie*) *stabilnym* w Γ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{Z}_x \supseteq \mathbb{N}$ (odpowiednio, gdy $\mathbb{Z}_x \supseteq -\mathbb{N}$); wtedy oczywiście orbita $\mathscr{O}_x$ nie zawiera wierzchołków projektywnych (odpowiednio, injektywnych) i taką orbitę nazywamy orbitą *lewostronnie* (lub odpowiednio, *prawostronnie*) *stabilną*. Powiemy natomiast, że wierzchołek $x \in \Gamma_0$, lub ogólniej, orbita $\mathscr{O}_x$ jest *stabilna* gdy jest zarówno prawostronnie jak i lewostronnie stabilna. Przypomnijmy tutaj, że Γ nazywamy *lewostronnie stabilnym* (odpowiednio, *prawostronnie stabilnym* lub *stabilnym*), o ile składa się wyłącznie z wierzchołków danego typu. Odnotujmy również, że każdemu kołczanowi z translacją Γ można przyporządkować trzy podkołczany ${}_l\Gamma$, ${}_r\Gamma$ oraz ${}_s\Gamma$ w kołczanie Γ, nazywane odpowiednio *lewostronnie stabilną*, *prawostronnie stabilną* oraz *stabilną częścią kołczanu* Γ. Mianowicie, definiujemy ${}_l\Gamma$ jako pełny podkołczan ${}_l\Gamma$ otrzymany z Γ poprzez usunięcie wszystkich wierzchołków leżących na orbitach zawierających wierzchołki projektywne (równoważnie, wszystkich wierzchołków, które nie są lewostronnie stabilne) oraz strzałek z nimi związanych. Ponadto, ${}_l\Gamma$ jako pełny podkołczan kołczanu Γ, składający się ze wszystkich lewostronnie stabilnych wierzchołków w Γ, jest oczywiście podkołczanem z translacją w Γ; w szczególności ${}_l\Gamma$ jest lewostronnie stabilny jako kołczan z translacją oraz kołczan z translacją Γ jest lewostronnie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $\Gamma = {}_l\Gamma$. Dualnie, mamy prawostronnie stabilny podkołczan z translacją ${}_r\Gamma$ w Γ, złożony dokładnie z tych wierzchołków w Γ, które leżą na prawostronnie stabilnych orbitach w Γ. Naturalnie, stabilna częśc ${}_s\Gamma := {}_l\Gamma \cap {}_r\Gamma$ jest podkołczanem składającym się ze wszystkich wierzchołków stabilnych w Γ.

Rozważmy teraz dowolną drogę σ w kołczanie Γ postaci $X = X_0 \to X_1 \to X_2 \to \cdots \to X_{m-1} \to X_m = Y$, gdzie $m \geqslant 1$. Wówczas Y nazwiemy *następnikiem* X *w* Γ, zaś X *poprzednikiem* Y *w* Γ. Podkołczan Φ kołczanu Γ nazywamy *zamkniętym na (branie) poprzedników w* Γ, jeżeli dla dowolnego X w Φ, każdy poprzednik wierzchołka X w Γ również należy do Φ. Dualnie definiuje się pojęcie *podkołczanu zamkniętego na następniki w* Γ. Powiemy również, że droga σ *posiada hak w* X_i, o ile $\tau X_{i+1} = X_{i-1}$, dla pewnego $1 \leqslant i \leqslant m-1$. Liczbę haków drogi σ oznaczać będziemy symbolem $\operatorname{hk}(\sigma)$. Drogę σ nazywamy *sekcyjną* (odpowiednio, *prawie sekcyjną*), o ile $\operatorname{hk}(\sigma) = 0$ (odpowiednio, gdy $\operatorname{hk}(\sigma) = 1$). Najogólniej rozważa się tak zwane *drogi presekcyjne*, które są z definicji takimi drogami σ w Γ_A, że dla każdego $i \in \{1, \ldots, m-1\}$, jeżeli X_{i+1} nie jest projektywny, to moduł $X_{i-1} \oplus \tau_A X_{i+1}$ jest składnikiem prostym środka ciągu prawie rozszepialnego w $\operatorname{mod} A$ o prawym końcu w module X_i. Przypominamy tylko, że każda droga sekcyjna w Γ_A jest również drogą presekcyjną (nie będziemy jednak istotnie korzystać z tego pojęcia poza sformułowaniami kilku wyników w następnym podrozdziale. Wspominamy również, że dla każdego kołczanu z translacją Γ można zdefiniować podkołczan Γ^* składający się ze wszystkich wierzchołków x w Γ, dla których istnieje nieskończona droga sekcyjna w Γ postaci $\cdots \to x_1 \to x_0 = x$. Dualnie definiuje się także podkołczan Γ_* składający się ze wszystkich wierzchołków, które są początkami nieskończonych dróg sekcyjnych w Γ. Odnotujmy, że zachodzi następujący elementarny lemat.

Lemat 1.4.9. *Niech Γ będzie spójnym kołczanem z translacją. Wówczas jeżeli Γ jest lewostronnie stabilny, to Γ^* jest zamknięty na branie poprzedników w Γ. Dualnie, jeśli Γ jest prawostronnie stabilny, to Γ_* jest podkołczanem zamkniętym na branie następników w Γ.*

Dowód · Niech $\Gamma = {}_l\Gamma$ oraz ustalmy dowolny wierzchołek x w Γ^*. Wówczas x leży na nieskończonej drodze sekcyjnej w Γ postaci $\cdots \to x_1 \to x_0 = x$, zatem istnieje również nieskończona droga sekcyjna w Γ postaci $(*)$: $\cdots \to \tau x_1 \to \tau x$, na mocy lewostronnej stabilności Γ. Stąd otrzymujemy, że $\tau x \in \Gamma^*$. Co więcej, z definicji również wszystkie wierzchołki x_i oraz τx_i, dla $i \geqslant 0$, leżące na obu tych drogach, należą do Γ^*. Niech teraz $y \in x^-$. Jeżeli $y = x_1$, to trywialnie $y \in \Gamma^*$. Jeżeli natomiast $y \neq x_1$, to mamy wtedy w Γ strzałkę $y \to x$, a więc i strzałkę $\tau x \to y$, zaś $y \neq x_1$ implikuje $\tau y \neq \tau x_1$. Wystarczy teraz zauważyć, że $\tau x = \tau x_0$ leży na nieskończonej drodze sekcyjnej $(*)$ w Γ, a więc wierzchołek y jest również końcem nieskończonej drogi w Γ postaci $(**)$: $\cdots \to \tau x_2 \to \tau x_1 \to \tau x \to y$, która jest drogą sekcyjną w Γ, ponieważ droga $(*)$ jest sekcyjna oraz $\tau y \neq \tau x_1$. W konsekwencji $y \in \Gamma^*$. Wynika stąd ostatecznie, że dla dowolnego wierzchołka x w Γ^* zachodzi $x_\Gamma^- \subset \Gamma^*$, to znaczy, podkołczan z translacją Γ^* jest zamknięty na branie poprzedników w Γ. Stosując dualne argumenty łatwo jest również dowieść, że zachodzi odpowiednia własność podkołczanu Γ_* w przypadku, gdy Γ jest prawostronnie stabilny. □

Z przyczyn objaśnionych później bardzo ważne okazuje się badanie cykli w kołczanach z translacją, i ogólniej cykli w kategoriach modułów, o czym traktujemy szerzej w rozdziale 4 oraz częściowo w pierwszych sekcjach rozdziału 3. Zobaczymy wielokrotnie, że przydatne będzie rozważanie własności cykli w składowych kołczanu Auslandera-Reiten algebry. Przypomnijmy tylko, że dla każdego podkołczanu Φ kołczanu Γ, *częścią cykliczną* Φ nazywamy podkołczan ${}_c\Phi$ otrzymany z Φ poprzez usunięcie wszystkich wierzchołków nie leżących na zorientowanych cyklach w Φ oraz strzałek z nimi związanych. Naturalnie, podkołczan Φ nazywać będziemy *acyklicznym*, o ile jego część cykliczna ${}_c\Phi$ jest pusta, to znaczy Φ nie ma zorientowanych cykli.

Przypominamy, że jeśli dana jest algebra A, to część cykliczna ${}_c\Gamma_A$ kołczanu Γ_A składa się z części cyklicznych ${}_c\mathcal{C}$ wszystkich składowych $\mathcal{C}$ w Γ_A. Spójne składowe kołczanu ${}_c\Gamma_A$ nazywane są *cyklicznymi składowymi kołczanu* Γ_A. Oczywiście, jeśli dwa moduły X oraz Y leżą w jednej cyklicznej składowej, to każdy z nich leży na pewnym cyklu w Γ_A. Można pokazać nawet więcej [27], mianowicie, że moduły X i Y leżą wówczas na wspólnym cyklu, co daje przydatną charakteryzację cyklicznych składowych, którą formułujemy za źródłowym artykułem w postaci następującego lematu [27, patrz Lemma 5.1].

Lemat 1.4.10. *Niech A będzie algebrą oraz X, Y modułami w części cyklicznej ${}_c\Gamma_A$ kołczanu Γ_A. Wtedy X i Y leżą w jednej spójnej składowej ${}_c\Gamma_A$ wtedy i tylko wtedy, gdy leżą na zorientowanym cyklu w Γ_A.*

Gdy bierzemy pod uwagę translację w Γ, to sensowne jest rozważanie cykli pochodzących od punktów stałych iteracji translacji. Prowadzi to natychmiast do kolejnego bardzo ważnego pojęcia, mianowicie, pojęcia wierzchołka (orbity) okresowej, badanego na przykład przez D. Happela, S. Liu, C. M. Ringela, A. Skowrońskiego, czy Y. Zhang. Przypomnijmy tylko, że wierzchołek $x \in \Gamma_0$ nazywamy *okresowym* (*o okresie* $r \geqslant 1$), o ile zachodzi $\tau^r x = x$. W tym przypadku, τ-orbita $\mathcal{O}_x$ jest skończona i składa się z r wierzchołków $x, \tau x, \ldots, \tau^{r-1}x$, z których każdy jest okresowy (o tym samym okresie). Warto nadmienić, iż istnienie wierzchołków okresowych w kołczanach Auslandera-Reiten algebr istotnie determinuje strukturę składowych je zawierających, co w pełni wyjaśnimy w następnym podrozdziale.

Wiele wyników sugeruje, że nie warto posługiwać się jedynie interpretacją kołczanu Γ jako kołczanu z translacją, bowiem nie uwzględniamy wówczas wielu istotnych własności, które wynikają z tego, że translacja w Γ jest indukowana przez operację translacji τ_A na kategorii modułów, przez co pośrednio nie uwzględniamy również, że oczka w Γ pochodzą od ciągów prawie rozszczepialnych, zaś strzałki, od ściśle określonych homomorfizmów nieprzywiedlnych w $\operatorname{ind} A$. Dla przykładu, strukturę kategorii modułów w kołczanie z translacją można odzwierciedlić wprowadzając pojęcia takie jak *funkcja długości*.

Przypomnijmy tylko, że dla dowolnego kołczanu z translacją Γ *funkcją addytywną na* Γ nazywać będziemy dowolną funkcję $l : \Gamma_0 \to \mathbb{Z}$, o ile spełniona jest następującą równość

$$l(x) + l(\tau x) = \sum_{y \in x^-} d'_{yx} l(y),$$

dla każdego wierzchołka nieprojektywnego $x \in \Gamma_0$. Jeżeli funkcja addytywna l na Γ spełnia dodatkowo $l(p) = 1 + \sum_{y \in p^-} d'_{yp} l(y)$ oraz $l(i) = 1 + \sum_{y \in i^+} d_{iy} l(y)$, dla wszystkich $p \in \Gamma'_0$ oraz $i \in \Gamma''_0$, to l nazwywamy *funkcją długości na* Γ. Powiemy również, że funkcja addytywna lub funkcja długości l jest *dodatnia*, jeśli $l(x) \geqslant 1$, dla wszystkich $x \in \Gamma_0$. Oczywiście jeśli Γ jest składową spójności kołczanu Γ_A, to funkcja $l : \Gamma_0 \to \mathbb{Z}$ przyporządkowująca każdemu wierzchołkowi $\{X\}$ w Γ jego długość $l(\{X\}) = l_A(X)$, jako A-modułu, jest dodatnią funkcją długości na Γ. Na ogół, jeśli Γ jest składową w Γ_A to obcięcie funkcji długości $l = l_A$ na Γ do wierzchołków z lewej ${}_l\Gamma$, lub prawej części ${}_r\Gamma$ składowej Γ, nie jest funkcją addytywną na Γ.

Kołczan Auslandera-Reiten jest jednym z głównych narzędzi nowoczesnej teorii reprezentacji algebr. Opis jego kształtu daje bardzo często nietrywialną wiedzę o strukturze algebry oraz jej kategorii modułów, o czym będziemy mogli się wielokrotnie przekonać w dalszym ciągu rozprawy. Szczególnie ważne okazuje się badanie składowych spójności kołczanu Γ_A, które nazywane są po prostu, *składowymi kołczanu* Γ_A. Dla ilustracji, przypomnijmy klasyczny wynik M. Auslandera [49, patrz Theorem III.10.2], na mocy którego dla każdej spójnej K-algebry A takiej, że istnieje składowa $\mathcal{C}$ w Γ_A zawierająca moduły o wspólnie ograniczonej (z góry) długości, zachodzi $\mathcal{C} = \Gamma_A$ oraz $\mathcal{C}$ jest skończoną składową. W szczególności, A jest wówczas algebrą skończonego reprezentacyjnego typu. Pozostałą część niniejszego podrozdziału poświęcamy na krótkie omówienie podstawowych typów składowych pojawiających się w dalszych rozważaniach, przy czym dla niektórych z nich podajemy także najważniesze przykłady konstrukcji kołczanów z translacją danego typu.

Odnotujmy tutaj, że jeżeli $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ są składowymi w kołczanie Γ_A algebry A, to piszemy $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = 0$, o ile zachodzą równości $\mathrm{Hom}_A(X, Y) = 0$, dla każdej pary modułów X w $\mathcal{C}$ oraz Y w $\mathcal{D}$. Tę samą konwencję notacji stosować będziemy, w intuicyjnie jasny sposób, również w przypadku, gdy zamiast składowych $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ w Γ_A rozważać będziemy dowolne rodziny $\mathscr{C}$ i $\mathscr{D}$ modułów w $\mathrm{ind}\, A$. Oznaczenia $\mathrm{Hom}_A(X, \mathcal{C}) = 0$ oraz $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{C}, X) = 0$ nie powinny również budzić wątpliwości. Przypomnijmy także, że składowe $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ w Γ_A nazywamy składowymi *ortogonalnymi* wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \mathrm{Hom}_A(\mathcal{D}, \mathcal{C}) = 0$. Odnotujmy ostatecznie, że składową $\mathcal{C}$ (lub ogólnie, rodzinę składowych) w Γ_A nazywać będziemy składową *dokładną*, o ile rodzina $\mathcal{C}_0$ wszystkich nierozkładalnych modułów z tej składowej (rodziny) jest dokładna, to jest $\mathrm{Ann}_A(\mathcal{C}_0) = 0$. Składową $\mathcal{C}$ nazywamy natomiast *wierną*, o ile wierna jest rodzina $\mathcal{C}_0$ wszystkich modułów z $\mathcal{C}$, to znaczy $\mathrm{supp}_A(\mathcal{C}_0) = A^*$ (patrz także 1.2).

Składowe zawierające sekcje · Szczególnie istotną rolę w naszych rozważaniach, ale również przy badaniu klasy *algebr odwróconych* (patrz 2.2), pełnią składowe zawierające tak zwane *sekcje*. Przypomnijmy, że jeśli $\mathcal{C}$ jest spójnym kołczanem z translacją, to *sekcją* w $\mathcal{C}$ nazywamy lokalnie skończony (wartościowany) podkołczan Δ w $\mathcal{C}$, który spełnia poniższe warunki.

1) Δ jest kołczanem acyklicznym.
2) Δ jest wypukłym podkołczanem w $\mathcal{C}$.
3) Dla każdego wierzchołka x w $\mathcal{C}$ mamy $|\Delta \cap \mathscr{O}_x| = 1$.

PRZYKŁAD · Przypomnijmy, że każdemu (wartościowanemu) lokalnie skończonemu kołczanowi Δ możemy przyporządkować tak zwany, *kołczan iterowany* $\mathbb{Z}\Delta$, to znaczy stabilny kołczan z translacją, dla którego

- zbiór wierzchołków określamy jako $(\mathbb{Z}\Delta)_0 := \mathbb{Z} \times \Delta_0$;

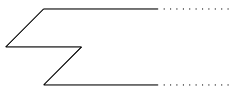
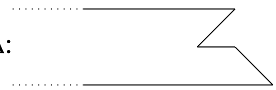
- zbiór strzałek $(\mathbb{Z}\Delta)_1$ składa się z następujących dwóch typów wartościowanych strzałek

$$(i, \alpha) : \qquad (i, x) \xrightarrow{(d_{xy}, d'_{xy})} (i, y)$$

oraz
$$(i, \alpha') : \qquad (i+1, y) \xrightarrow{(d'_{xy}, d_{xy})} (i, x) \, ,$$
gdzie $i \in \mathbb{Z}$, zaś α jest dowolną strzałką $\alpha : \ x \xrightarrow{(d_{xy}, d'_{xy})} y$ w Δ;

- oraz translacja w $\mathbb{Z}\Delta$ jest naturalnie określona jako funkcja
$$\tau : \mathbb{Z}\Delta_0 \to \mathbb{Z}\Delta_0,$$
przyporządkowywująca wierzchołkowi (i, x) w $\mathbb{Z}\Delta_0$, $i \in \mathbb{Z}$, $x \in \Delta_0$, wierzchołek $\tau(i, x) := (i + 1, x)$.

Często będziemy mieć także do czynienia z podkołczanami postaci $\mathbb{N}\Delta$ (odpowiednio, $(-\mathbb{N})\Delta$) kołczanu $\mathbb{Z}\Delta$, które są zdefiniowane jako pełne podkołczany (z translacją) rozpięte na wierzchołkach ze zbioru $\mathbb{N} \times \Delta_0$ (odpowiednio, ze zbioru $(-\mathbb{N}) \times \Delta_0$). Zauważmy, że oczywiście podkołczan $\mathbb{N}\Delta$ jest zamknięty na branie poprzedników w $\mathbb{Z}\Delta$, zaś $(-\mathbb{N})\Delta$ na branie następników w $\mathbb{Z}\Delta$. Kołczany $(-\mathbb{N})\Delta$ oraz $\mathbb{N}\Delta$ będziemy będziemy czasami ilustrować na schematycznych rysunkach w ogólnej postaci

(-$\mathbb{N}$)Δ:  oraz, odpowiednio $\mathbb{N}\Delta$: 

Łatwe sprawdzenie pokazuje, że dla każdego lokalnie skończonego wartościowanego kołczanu Δ bez zorientowanych cykli, kołczan iterowany $C = \mathbb{Z}\Delta$ jest kołczanem z translacją zawierającym nieskończenie wiele sekcji; na przykład dla dowolnego $i \in \mathbb{Z}$, pełny podkołczan $\tau^i\Delta$ rozpięty na wierzchołkach ze zbioru $\{(i, a);\ a \in \Delta_0\}$ jest sekcją w $\mathbb{Z}\Delta$ oraz $\tau^i\Delta \simeq \Delta$ jako kołczany wartościowane. Co więcej, łatwo zauważyć, że każdy lewostronnie stabilny podkołczan C kołczanu $\mathbb{Z}\Delta$, który jest zamknięty na branie poprzedników, posiada również pewną sekcję (można nawet wybrać w C sekcję postaci $\tau^i\Delta \simeq \Delta$). Oczywiście, jeśli C jest prawostronnie stabilnym podkołczanem z translacją w $\mathbb{Z}\Delta$ zamkniętym na branie następników, to C zawiera również pewną sekcję izomorficzną z Δ. Wykorzystując teraz wyniki prezentowane w podrozdziale 1.5 wnioskujemy, że każda półregularna i acykliczna składowa w kołczanie Auslandera-Reiten dowolnej algebry zawiera pewną sekcję ·

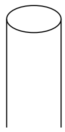
Składowe półregularne · Jeżeli Γ jest składową w kołczanie Γ_A algebry A, to Γ nawiemy *składową półregularną* wtedy i tylko wtedy, gdy składowa Γ jest lewostronnie lub prawostronnie stabilna jako kołczan z translacją, lub równoważnie, gdy nie zawiera jednocześnie modułów projektywnych oraz injektywnych. Składowe, które są stabilne jako kołczany z translacją nazywa się także *składowymi regularnymi*. Przypomnijmy również, że składową Γ nazywamy *postprojektywną* wtedy i tylko wtedy, gdy jest to składowa półregularna bez zorientowanych cykli oraz każdy moduł w tej składowej leży na orbicie modułu projektywnego. Dualnie, przez *składową preinjektywną* rozumiemy każdą półregularną składową bez zorientowanych cykli, która składa się wyłącznie z orbit modułów injektywnych. Wielu przykładów półregularnych składowych zawierających zorientowane cykle dostarczają omówione poniżej konstrukcje tak zwanych *stabilnych tub* oraz *tub promieniowych i kopromieniowych*.

PRZYKŁAD · Wspominamy jedynie, że istnieje interesująca kategoria, której obiektami są kołczany z translacją. Morfizmami w tej kategorii są funkcje pomiędzy odpowiednimi kołczanami zachowujące translacje oraz wartościowania strzałek, w intuicyjnym sensie; po więcej szczegółów odsyłamy do [49, III.9]. Istnieje także naturalne pojęcie izomorfizmu kołczanów z translacją oraz dla każdego kołczanu z translacją Γ możemy rozważać *automorfizmy* Γ, to znaczy izomorfizmy kołczanów z translacją postaci $\Gamma \to \Gamma$. W konsekwencji, jeśli G jest grupą automorfizmów Γ, to G działa na kołczanie z translacją Γ, to znaczy na jego zbiorze wierzchołków i strzałek. Co więcej, jeśli to działanie jest *dopuszczalne*, to jest, każda G-orbita $Gx \subset \Gamma_0$ wierzchołka $x \in \Gamma_0$ przecina zbiory $y^- \cup \{y\}$ oraz $\{y\} \cup y^+$ co najwyżej jeden raz, dla wszystkich $y \in \Gamma_0$, to istnieje poprawnie określony *kołczan orbitowy* Γ/G, którego wierzchołkami są orbity działania grupy G na Γ_0, strzałki w Γ/G są G-orbitami strzałek z Γ_1, zaś translacja $\tau_{\Gamma/G}$ jest zadana na orbitach $Gx \in (\Gamma/G)_0$, $x \in \Gamma_0$, naturalnym wzorem $\tau_{\Gamma/G}(Gx) = G\tau_\Gamma(x)$.

Szczególny przypadek kołczanu orbitowego prowadzi do konstrukcji tak zwanych *stabilnych tub*. W istocie, niech $\Gamma = \mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$, gdzie $\mathbb{A}_\infty$ jest nieskończonym kołczanem postaci

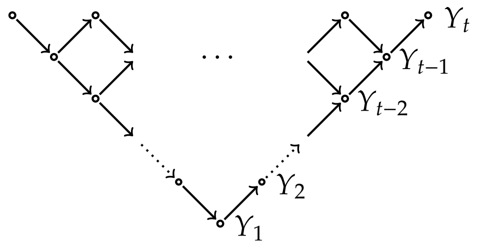
$$0 \to 1 \to 2 \to \dots$$

Wówczas dla każdego $r \geqslant 1$, r-ta potęga τ^r translacji $\tau = \tau_\Gamma$ indukuje automorfizm kołczanu z translacją Γ oraz grupa cykliczna $G = (\tau^r)$ automorfizmów G, generowana przez potęgę τ^r, działa w sposób dopuszczalny na G. Ponadto, w tej sytuacji kołczan orbitowy $\Gamma/G = \mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty/(\tau^r)$ jest kołczanem z translacją składającym się wyłącznie z $\tau_{\Gamma/G}$-orbit okresowych (o okresie r), którego realizacja topologiczna jest homeomorficzna z powierzchnią $S^1 \times [0, +\infty]$, dlatego też nazywany jest *stabilną tubą rangi r*. Stabilną tubę rangi r (lub ogólniej, całą rodzinę stabilnych tub) będziemy przedstawiać na rysunkach w następującej schematycznej formie



nie uwzględniając rang; po szczegółową ilustrację struktury stabilnej tuby $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty/(\tau^r)$, dla przykładowej rangi $r = 3$, odsyłamy do [49, patrz III.9]. Jeżeli $\Gamma \simeq \mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty/G$ jest pewną stabilną tubą rangi $r \geqslant 1$, $G = (\tau^r)$, to Γ zawiera r rozłącznych dróg postaci $Y_0 \to Y_1 \to Y_2 \to \dots$, przy czym każda jest pewną translacją $\tau_\Gamma^i \mathbb{X}_\infty$, $i \in \{0, 1, \dots, r\}$, ustalonej drogi $\mathbb{X}_\infty : X_0 \to X_1 \to \dots$ izomorficznej z sekcją $\mathbb{A}_\infty$ w $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$, gdzie możemy przyjmować $X_n = G(0, n)$, dla $n \geqslant 0$. Ponadto wówczas istnieje także nieskończona droga sekcyjna w Γ postaci $\mathbb{X}_\infty^* : \dots \to \tau_\Gamma^n X_n \to \dots \to \tau_\Gamma^2 X_2 \to \tau_\Gamma X_1 \to X_0$, i wtedy drogi $\tau_\Gamma^i \mathbb{X}_\infty^*$, dla $i \in \{0, 1, \dots, r-1\}$, również są rozłącznymi drogami $\dots \to Z_2 \to Z_1 \to Z_0 = X_0$ w Γ zawierającymi wszystkie wierzchołki Γ. Wierzchołki $X^0, X^1, \dots, X^{r-1}$, gdzie $X^i = \tau_\Gamma^i X_0$, dla $i \in \{0, 1, \dots, r-1\}$, tworzą tak zwane *usta stabilnej tuby* Γ. Przypomnijmy również, że każdy wierzchołek M w stabilnej tubie leży na dokładnie jednej drodze postaci $Y_0 \to Y_1 \to \dots \to Y_m = M \to \dots$ oraz na dokładnie jednej drodze postaci $\dots \to Z_n = M \to \dots \to Z_1 \to Z_0$, gdzie Z_0 oraz Y_0 leżą na ustach Γ. Łatwo zauważyć, że wówczas $n = m$ zależy jedynie od wyboru wierzchołka M; liczba ta nazywana jest *quazi-długością* (wierzchołka) M oraz oznaczamy ją symbolem $\mathrm{ql}(M)$. Ostatecznie wspominamy, że jeżeli dana jest rodzina stabilnych tub $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, to *typem tubularnym rodziny* $\mathcal{T}$ nazywamy funkcję $(r_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ przyporządkowującą każdemu indeksowi $\lambda \in \Lambda$ rangę r_λ stabilnej tuby $\mathcal{T}_\lambda$. Bardzo często kołczan Γ_A danej algebry A zawiera rodzinę $\mathcal{T}^A = (\mathcal{T}_\lambda^A)_{\lambda \in \Lambda}$ stabilnych tub $\mathcal{T}_\lambda^A$, z których wszystkie poza skończoną ilością są rangi 1 (takie stabilne tuby nazywane są *jednorodnymi*), i w tym przypadku będziemy utożsamiać typ tubularny $r^A = (r_\lambda^A)_{\lambda \in \Lambda}$ rodziny $\mathcal{T}^A$ ze skończonym ciągiem $r^A = (r_1, \dots, r_n)$, składającym się ze wszystkich rang niejednorodnych tub z $\mathcal{T}^A$ ustawionych w kolejności niemalejącej ·

Niech Γ będzie dowolnym spójnym kołczanem z translacją. Przypominamy, że nieskończoną drogę $\mathbb{X}$ w Γ postaci $X = X_0 \to X_1 \to X_2 \to \dots \to X_n \to X_{n+1} \to \dots$ nazywać będziemy *promieniem* (w Γ), o ile $\mathbb{X}$ jest drogą sekcyjną w Γ oraz każda droga sekcyjna w Γ o początku w X jest poddrogą drogi $\mathbb{X}$. Odnotujmy, że jeśli Γ jest stabilną tubą, to wierzchołek X w Γ jest początkiem promienia w Γ wtedy i tylko wtedy, gdy leży na ustach Γ. Wówczas istnieje dokładnie jeden promień w Γ o początku w tym wierzchołku. Wierzchołek X w kołczanie z translacją Γ, który jest początkiem pewnego promienia w Γ, nazywać będziemy także *wierzchołkiem promieniowym*. Będziemy również oznaczać przez Γ_t, dla $t \geqslant 1$, kołczan Auslandera-Reiten $\Gamma_t = \Gamma_{H_t}$ algebry $H_t = \mathbb{T}_t(F)$ macierzy górno-trójkątnych $t \times t$ o współczynnikach w ustalonej algebrze z dzieleniem F, która będzie w poniższych rozważaniach zawsze jednoznacznie określona. Nietrudno sprawdzić, że niezależnie od ustalonej algebry z dzieleniem F, kołczan Γ_t jest zawsze kołczanem z translacją następującej postaci



Na rysunku przez $Y_1, \dots, Y_t$ oznaczamy moduły injektywne w Γ_t odpowiadające kolejno, idempotentom $e_t, e_{t-1}, \dots, e_1$ w H_t, gdzie $e_j = E_{jj} \in H_t$ jest macierzą diagonalną z jedynym niezerowym elementem w miejscu (j, j) równym 1_F, dla $j \in \{1, \dots, t\}$. W szczególności, $Y_1 = D(H_t e_t)$ jest jedynym projektywno-injektywnym modułem $Y_1 \simeq e_1 H_t$ w $\operatorname{ind} H_t$. Ponadto wówczas moduły $S_j = \operatorname{top}(P_j)$, $j \in \{1, \dots, t\}$, tworzą pełen zbiór parami nieizomorficznych modułów prostych w $\operatorname{mod} H_t$ oraz dla każdego $j \in \{1, \dots, t\}$ algebra endomorfizmów $F_j := \operatorname{End}_{H_t}(S_j)$ jest izomorficzna z F. Odnotujmy również, że zachodzą wtedy izomorfizmy $S_j \simeq F$ w $\operatorname{mod} F^{\mathrm{op}}$, dla $j \in \{1, \dots, t\}$.

Definicja · Niech $\Gamma = (\Gamma, \tau)$ będzie spójnym kołczanem z translacją, zaś $\mathbb{X} : X_0 \to X_1 \to \dots$ promieniem w Γ. Wtedy dla każdej liczby $t \in \mathbb{N}$, definiujemy tak zwane *t-liniowe rozszerzenie* Γ *wzdłuż promienia* $\mathbb{X}$, jako (spójny) kołczan z translacją $\Gamma[\mathbb{X}, t] = (\Gamma', \tau')$ otrzymany z kołczanu Γ poprzez dołączenie kołczanu Γ_t oraz $t + 1$ promieni tworzących prostokąt złożony z wierzchołków $Z_{i,j}$, dla $i \geqslant 0$, $j \in \{1, \dots, t\}$, oraz wierzchołków $\hat{X}_i$, dla $i \geqslant 0$, to znaczy

$$\Gamma'_0 = \Gamma_0 \cup (\Gamma_t)_0 \cup \{Z_{i,j}\}_{\substack{j \in \{1, \dots, t\} \\ i \geqslant 0}} \cup \{\hat{X}_i\}_{i \geqslant 0}$$

oraz zbiór Γ'_1 składa się ze strzałek postaci:

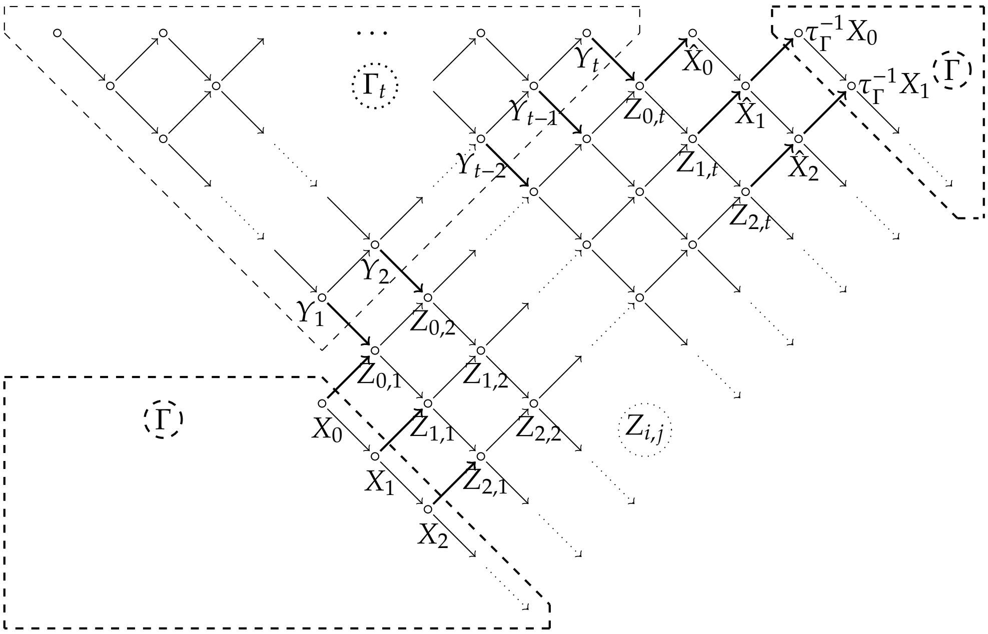
- $Y \to Y'$, o ile Y oraz Y' należą do Γ_t oraz istnieje strzałka $Y \to Y'$ w Γ_t,
- $Z_{i,j} \to Z_{i+1,j}$, dla wszystkich $1 \leqslant j \leqslant t$, $i \geqslant 0$, oraz $\hat{X}_i \to \hat{X}_{i+1}$, dla każdego $i \geqslant 0$,
- $Z_{i,j} \to Z_{i,j+1}$, jeśli $i \geqslant 0$, $j \in \{1, \dots, t-1\}$, oraz $Z_{i,t} \to \hat{X}_i$, dla $i \geqslant 0$,
- $X_i \to Z_{i,1}$, dla wszystkich $i \geqslant 0$ oraz $\hat{X}_i \to \tau_\Gamma^{-1} X_{i-1}$, o ile $i \geqslant 1$,
- oraz strzałek $Y_j \to Z_{0,j}$, dla $1 \leqslant j \leqslant t$,

zaś translacja τ' w $\Gamma[\mathbb{X}, t]$ określona jest wzorami

- $\tau'(X) = \tau(X)$, gdy X jest wierzchołkiem w Γ oraz $X \neq \tau^{-1} X_i$, dla każdego $i \geqslant 0$,
- $\tau'(\tau^{-1} X_i) = \hat{X}_i$, dla dowolnego $i \geqslant 0$, $\tau'(\hat{X}_i) = Z_{i-1,t}$, gdy $i \geqslant 1$ oraz $\tau'(\hat{X}_0) = Y_t$,
- $Z_{0,1}$ jest projektywny w $\Gamma[\mathbb{X}, t]$, zaś dla $j \in \{2, \dots, t\}$, przyjmujemy $\tau'(Z_{0,j}) = Y_{j-1}$,
- jeśli $i \geqslant 1$, to kładziemy $\tau'(Z_{i,1}) = X_{i-1}$,

i ostatecznie $\tau'(Z_{i,j}) = Z_{i-1,j-1}$, dla wszystkich $i \geqslant 1$ oraz $2 \leqslant j \leqslant t$.

Powyższą definicję należy rozumieć jako formalny opis konstrukcji prowadzącej od Γ do kołczanu $\Gamma[\mathbb{X}, t]$ powstającego z Γ poprzez wstawienie $t + 1$ nowych promieni połączonych odpowiednimi strzałkami. Dla uproszczenia ilustracji załóżmy, że wszystkie wierzchołki leżące na promieniu $\mathbb{X}$ nie są injektywne. Wtedy $\Gamma[\mathbb{X}, t]$ jest kołczanem z translacją, którego strukturę ilustruje następujący rysunek.



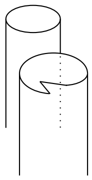
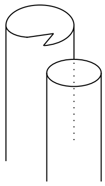
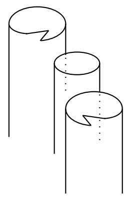
Warto tutaj odnotować, że każda ze wstawionych dróg $Z_{0,j} \to Z_{1,j} \to \dots$, dla $j \in \{1, \dots, t\}$ jest poddrogą dokładnie jednego promienia w $\Gamma[\mathbb{X}, t]$ o początku w module należącym do τ_{Γ_t}-orbity modułu $Y_t \in \Gamma_t$, zaś ostatnia droga $\hat{X}_0 \to \hat{X}_1 \to \dots$ jest promieniem w $\Gamma[\mathbb{X}, t]$. Z tego względu operacja liniowego rozszerzenia nazywana jest często *operacją wstawienia promieniowego*, lub czasami również (z przyczyn, których nie będziemy tu objaśniać) *operacją typu* (ad. 1); wspominamy także, że 0-liniowe rozszerzenia nazywane są *rozszerzeniami jednopunktowymi*. Ponadto odnotujmy, że jeśli Γ jest stabilną tubą, to kołczan Γ zawiera dokładnie r wierzchołków promieniowych $E_s = \tau_{\Gamma}^{s} X_0$, dla $s \in \{0, \dots, r-1\}$, gdzie r jest rangą Γ, które pozostają również wierzchołkami promieniowymi w $\Gamma' = \Gamma[\mathbb{X}, t]$, o ile $s \neq 0$; jeśli zaś $s = 0$, to wierzchołek $E_s = X_0$ jest początkiem promienia $\mathbb{X}$ w Γ, który jest nieskończoną drogą sekcyjną w Γ' nie będącą promieniem w Γ'. W szczególności, wówczas wierzchołki $E_1, \dots, E_{r-1}$ oraz wierzchołki $\hat{X}_0, Y_t, \tau_{\Gamma'} Y_t, \dots, \tau_{\Gamma'}^{t-1} Y_t$ wyczerpują wszystkie z $r + t$ wierzchołków promieniowych w Γ', które w analogii do stabilnych tub również tworzą tak zwane *usta* kołczanu Γ'. Pozwólmy sobie ostatecznie sformułować definicję bardzo ważnego typu kołczanów z translacją nazywanych *tubami promieniowymi*.

Definicja · Spójny kołczan z translacją $\mathcal{T}$ nazywany jest *tubą promieniową*, o ile istnieje stabilna tuba $\mathcal{S}$ taka, że kołczan $\mathcal{T}$ jest otrzymany z $\mathcal{S}$ poprzez zastosowanie skończonej liczby operacji typu (ad. 1). Innymi słowy istnieje stabilna tuba $\mathcal{S}$ i skończony ciąg kołczanów z translacją $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n$, $n \geqslant 0$, taki, że $\mathcal{T}_0 = \mathcal{S}$, $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}$ oraz jeśli $i \in \{1, \dots, n\}$, to kołczan $\mathcal{T}_i$ jest postaci $\mathcal{T}_i = \mathcal{T}_{i-1}[\mathbb{X}_i, t_i]$, dla pewnego promienia $\mathbb{X}_i$ w kołczanie $\mathcal{T}_{i-1}$ i liczby naturalnej t_i.

Nie będziemy tu w szczegółach omawiać dualnej konstrukcji, która prowadzi do definicji operacji wstawienia kopromieniowego. Odnotujmy tylko, że *kopromieniem* w kołczanie z translacją Γ nazywamy każdą nieskończoną drogę sekcyjną postaci $\cdots \to X_2 \to X_1 \to X_0$, o ile dowolna droga sekcyjna w Γ o końcu w X_0 jest jej poddrogą. Dokonując niewielkich modyfikacji można w analogiczny sposób zdefiniować dla każdego kopromienia $\mathbb{X}$ w Γ oraz liczby $t \geqslant 0$ tak zwane *t-liniowe korozszerzenie kołczanu* Γ *wzdłuż kopromienia* $\mathbb{X}$, to znaczy kołczan z translacją $[\mathbb{X}, t]\Gamma$ otrzymany z Γ poprzez wstawienie $t+1$ nowych kopromieni równoległych do $\mathbb{X}$. Przypominamy jedynie, że w tym przypadku wystarczy rozważyć podkołczan $\Gamma^{\mathbb{X}}$ składający się ze wszystkich wierzchołków w Γ_0 oraz wszystkich strzałek w Γ_1 poza strzałkami postaci $\tau_\Gamma X_{i-1} \to X_i$, dla $i \geqslant 1$, i wówczas kołczan $[\mathbb{X}, t]\Gamma$ powstaje z rozłącznej sumy $\Gamma_t \cup \Gamma^{\mathbb{X}}$ poprzez wstawienie $t + 1$ równoległych kopromieni postaci $\cdots \to \hat{X}_1 \to \hat{X}_0$ i $\cdots \to Z_{2,j} \to Z_{1,j} \to Z_{0,j}$, dla $j \in \{1, \dots, t\}$, połączonych z $\Gamma^{\mathbb{X}}$ strzałkami postaci $\tau_\Gamma X_i \to \hat{X}_{i+1}$ i $Z_{i,t} \to X_i$, dla $i \geqslant 0$, zaś z Γ_t strzałkami $Z_{0,j} \to U_j$, dla $j \in \{1, \dots, t\}$, gdzie $U_1, \dots, U_t = Y_1$ są wierzchołkami odpowiadającymi, kolejno modułom projektywnym $e_t H_t, \dots, e_1 H_t$ w Γ_t. Będziemy czasami również nazywać operację t-liniowego korozszerzenia poprostu operacją *wstawienia kopromieniowego* lub krótko, operacją *typu* (ad. 1*). Pozwólmy sobie zamknąć nasze rozważania następującą definicją.

Definicja · Spójny kołczan z translacją $\mathcal{T}$ nazwiemy *tubą kopromieniową*, jeżeli $\mathcal{T}$ powstaje z pewnej stabilnej tuby $\mathcal{S}$ poprzez zastosowanie skończonej liczby operacji typu (ad. 1*).

Zarówno tuby promieniowe jak i kopromieniowe określa się wspólnym mianem *tub półregularnych*. Odnotujmy, że oczywiście wprost z definicji każda stabilna tuba jest tubą promieniową i kopromieniową jednocześnie, zatem jest w szczególności tubą półregularną. Dla zaznaczenia, że kołczan Auslandera-Reiten danej algebry zawiera rodzinę tub promieniowych lub kopromieniowych, bądź najogólniej, tub półregularnych będziemy wykorzystywać, odpowiednio, następujące schematyczne rysunki.

 lub  i najogólniej: 

Uogólnione standardowe składowe · Składowe nazywane *uogólnionymi standardowymi składowymi* zostały wprowadzone przez A. Skowrońskiego, któremu zawdzięczamy również kilka pionierskich prac w tym temacie; patrz na przykład [38, 39]. Nadmieniamy tylko, że pojęcie uogólnionej standardowej składowej powstało w wyniku poszukiwań odpowiedniego uogólnienienia rozważanego pierwotnie pojęcia składowej *standardowej* w kołczanach Auslandera-Reiten skończenie wymiarowych algebr nad ciałami algebraicznie domkniętymi [36, patrz Definition X.2.5]. Przypominamy, że składowa C kołczanu Γ_A nazywana jest *uogólnioną standardową* wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{rad}_A^\infty(X, Y) = 0$, dla dowolonych modułów X i Y należących do C. Następujące twierdzenie udowodnione przez A. Skowrońskiego [39, patrz (2.3)] pokazuje, że założenie o uogólnionej standardowości składowej dość istotnie determinuje jej kombinatoryczną strukturę.

Twierdzenie 1.4.11. [A. Skowroński] *Niech A będzie algebrą oraz C dowolną uogólnioną standardową składową w kołczanie Γ_A. Wtedy C jest składową prawie okresową.*

Odwołując się do definicji podanej w [39] przypominamy, że składowa C w kołczanie Γ_A nazywana jest *prawie okresową*, o ile prawie wszystkie (to znaczy wszystkie poza skończoną ilością) τ_A-orbity w C są okresowe. Warto także zauważyć, że własność uogólnionej standardowości jest niezależna od dokładności rozważanej składowej. W istocie, zachodzi następujący łatwy do wykazania lemat.

Lemat 1.4.12. *Niech A będzie algebrą, C dowolną składową w Γ_A, zaś B algebrą ilorazową $B = A/\operatorname{Ann}(C)$ algebry A. Wówczas C jest dokładną składową w kołczanie Γ_B oraz C jest uogólniona standardowa jako składowa Γ_A wtedy i tylko wtedy, gdy C jest uogólnioną standardową składową w Γ_B.*

dowód · Dowód można znaleźć na przykład w pracy [38, Lemma 2]. Odnotujmy tylko, że oczywiście składowa C w Γ_A zawiera wyłącznie moduły z $\operatorname{ind} B$, więc nieprzywiedlne odwzorowania w $\operatorname{mod} A$ pomiędzy modułami z C są także nieprzywiedlne w $\operatorname{mod} B$, a zatem C jest składową w Γ_B. Wykorzystując odwzorowania minimalne prawie rozszczepialne (lub korzystając bezpośrednio z Lematu 1.4.4), można dalej łatwo wywnioskować, że w istocie $\operatorname{rad}_A^\infty(C, C) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{rad}_B^\infty(C, C) = 0$. □

Przypomnijmy ostatecznie następujący wynik A. Skowrońskiego [38, patrz Theorem 2], który stanowi ważną charakteryzację uogólnionej standardowości składowych zawierających sekcje.

Twierdzenie 1.4.13. *Niech A będzie K-algebrą, C zaś dowolną składową w Γ_A zawierającą pewną sekcję Δ. Wówczas następujące warunki są równoważne.*

(i) *C jest uogólnioną standardową składową w Γ_A.*

(ii) *Sekcja Δ jest skończona oraz* $\operatorname{rad}_A^\infty(\Delta, \Delta) = 0$.

(iii) $\operatorname{Hom}_A(\Delta, \tau_A \Delta) = 0$.

(iv) $\operatorname{Hom}_A(\tau_A^{-1}\Delta, \Delta) = 0$.

Składowe prawie acykliczne · W następnej kolejności, wprowadzamy po krótce szczególnie dla nas istotny typ składowych, w których prawie wszystkie moduły nie leżą na zorientowanych cyklach. Składowe o tej własności posiadają bogatą strukturę kombinatoryczną, którą w pełni opiszemy przy okazji omawiania klasy tak zwanych *uogólnionych algebr podwójnie odwróconych* w 2.7. Tutaj podajemy jedynie podstawowe definicje oraz kilka uwag ogólnych odnośnie kształtu takich składowych.

Przypomnijmy, że kołczan z translacją $\mathcal{C}$ nazywamy *kołczanem prawie acyklicznym*, jeśli co najwyżej skończenie wiele modułów w $\mathcal{C}$ leży na zorientowanych cyklach, to znaczy, gdy jego część cykliczna ${}_c\mathcal{C}$ jest skończonym podkołczanem. Prawie acykliczne składowe w kołczanach Auslandera-Reitena algebr będą pełniły bardzo ważną rolę w dowodach obu twierdzeń rozprawy. Odnotujmy również, że jeśli $\mathcal{C}$ jest prawie acykliczną składowa $\mathcal{C}$ w kołczanie Γ_A algebry A, to dowolny moduł w $\mathcal{C}$ jest albo jednym ze skończenie wielu modułów leżących na cyklach w ${}_c\mathcal{C}$, albo należy do (pełnego) acyklicznego podkołczanu rozpiętego na modułach z części acyklicznej ${}_{ac}\mathcal{C} \coloneqq \mathcal{C} \setminus {}_c\mathcal{C}$ składowej $\mathcal{C}$, który, na mocy pewnych nietrywialnych wyników omówionych w 2.7, jest sumą dwóch rozłącznych podkołczanów z translacją w $\mathcal{C}$ oraz jeden z nich jest zamknięty na branie poprzedników, zaś drugi, na branie następników.

Składowe prawie acykliczne mają bardzo interesującą charakteryzację, której pełne sformułowanie wymaga wprowadzenia dalece nieoczywistego uogólnienia pojęcia sekcji w składowej. Nadmieńmy jedynie, że istnieje pojęcie *wielosekcji*, które zostało zdefiniowane przez I. Reiten i A. Skowrońskiego w pracy [32]. Przypomnijmy, że wielosekcja w składowej w $\mathcal{C}$ jest pełnym lokalnie skończonym wartościowanym podkołczanem, który jest prawie acykliczny i wypukły w $\mathcal{C}$ oraz zawiera co najmniej jeden i co najwyżej skończenie wiele modułów z każdej τ_A-orbity w $\mathcal{C}$ (więcej szczegółów w 2.7). Odnotujmy tutaj tylko, że na mocy wspominanej charakteryzacji składowych prawie acyklicznych ustanowionej w [32], *składowa $\mathcal{C}$ w kołczanie Γ_A dowolnej algebry A jest składową prawie acykliczną wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wielosekcja w $\mathcal{C}$.* Omówimy teraz pobieżnie ogólne konsekwencje istnienia wielosekcji w składowej dla jej kombinatorycznej struktury. Załóżmy w tym celu, że $\mathcal{C}$ jest składową w Γ_A, zaś Δ dowolną ustaloną wielosekcją w $\mathcal{C}$. Niech ponadto $\mathcal{C}$ będzie nieskończoną składową, przy czym dla uniknięcia trywialnych przypadków przyjmujemy, że $\mathcal{C}$ zawiera jednocześnie moduły projektywne i moduły injektywne.

Oznaczmy przez $\mathcal{C}'_l$ (odpowiednio, przez $\mathcal{C}'_r$) pełny podkołczan w $\mathcal{C}$ składający się ze wszystkich modułów X w $\mathcal{C}$, dla których istnieje niesekcyjna droga w $\mathcal{C}$ postaci $X \to \cdots \to P$ (odpowiednio, postaci $I \to \cdots \to X$), gdzie moduł P jest projektywny (odpowiednio, I jest injektywny). Oczywiście $\mathcal{C}'_l$ jest podkołczanem zamkniętym na branie poprzedników w $\mathcal{C}$, zaś $\mathcal{C}'_r$ na branie następników, skąd wprost wynika, że również podkołczan rozpięty na wierzchołkach z $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}'_r$ (odpowiednio, z $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}'_l$) jest zamknięty na branie poprzedników (odpowiednio, następników). Dalej rozważmy dowolny moduł X w $\mathcal{C}$ oraz odnotujmy, że jeśli X należy do $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}'_r$, to moduł $\tau_A^n X$ należy do $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}'_r$, dla każdego $n \geqslant 0$, dla którego jest określony. W szczególności, wówczas albo cała τ_A-orbita $\mathcal{O}_X$ modułu X leży w $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}'_r$, albo istnieje dokładnie jeden moduł $X(r) \in \mathcal{O}_X \cap \mathcal{C}'_r$, który wyznacza podział jego τ_A-orbity na dwie części $\mathcal{O}_X \cap \mathcal{C}'_r = \{\tau_A^{-n} X(r)\}_{n \geqslant 0}$ oraz $\mathcal{O}_X \setminus \mathcal{C}'_r = \{\tau_A^n X(r)\}_{n \geqslant 1}$. Przyjmijmy oznaczenia $\Delta'_r = \Delta \cap \mathcal{C}'_r$ oraz $\Delta''_r = \{X \in \Delta'_r;\ \tau_A X \notin \Delta'_r\}$. Zauważmy ostatecznie, że orbita $\mathcal{O}_X$ zawiera co najmniej jeden moduł z $\Delta \setminus \Delta'_r$, bądź $\Delta \cap \mathcal{O}_X \subset \Delta'_r$, i wtedy istnieje w $\Delta'_r \cap \mathcal{O}_X$ pewien moduł Y, dla którego $\tau_A Y \notin \Delta'_r$, to znaczy $Y \in \Delta''_r$. W konsekwencji jasne jest, że τ_A-orbita dowolnego modułu X w $\mathcal{C}$, zawiera co najmniej jeden moduł należący do podkołczanu $\Delta_l \coloneqq (\Delta \setminus \Delta'_r) \cup \tau_A \Delta''_r$.

Dualne rozważania pokazują, że dowolna τ_A-orbita w $\mathcal{C}$ zawiera pewien moduł z podkołczanu $\Delta_r = (\Delta \setminus \Delta'_l) \cup \tau_A^{-1} \Delta''_l$, gdzie $\Delta''_l = \{X \in \Delta'_l;\ \tau_A^{-1} X \notin \Delta'_l\}$. Wspomnijmy tu tylko jeden z nietrywialnych wyników pracy [32], której autorzy pokazali, że każdy cykl w składowej $\mathcal{C}$ musi przechodzić przez moduły ze skończonego podkołczanu $\Delta_c = \Delta'_r \cap \Delta'_l$ w Δ. Oczywiście łatwo sprawdzić, że każdy moduł w $\mathcal{C}$, który nie należy do Δ_c, jest albo translacją $\tau_A^n X_l$ pewnego modułu $X_l \in \Delta_l$, albo translacją $\tau_A^{-n} X_r$ pewnego modułu $X_r \in \Delta_r$, dla $n \geqslant 0$. Stąd składowa $\mathcal{C}$ ma postać rozłącznej sumy $\mathcal{C} = \mathcal{C}_r \cup \Delta_c \cup \mathcal{C}_l$, gdzie $\mathcal{C}_l$ (odpowiednio, $\mathcal{C}_r$) jest pełnym podkołczanem w $\mathcal{C}$ składającym się ze wszystkich poprzedników Δ_l (odpowiednio, wszystkich następników Δ_r) w $\mathcal{C}$. Ostatecznie przypominamy, że podkołczany $\mathcal{C}_r$ i $\mathcal{C}_l$ są acykliczne, bo ${}_c\mathcal{C} \subset \Delta_c$, oraz każda τ_A-orbita modułu Y w $\mathcal{C}_l$ zawierająca pewien moduł projektywny zawiera tylko skończenie wiele modułów należących do $\mathcal{C}_l$. W konsekwencji, lewa część ${}_l\mathcal{C}_l$ kołczanu z translacją $\mathcal{C}_l$ jest koskończonym podkołczanem w $\mathcal{C}_l$, oraz jako kołczan z translacją jest lewostronnie stabilny i acykliczny, a więc prawie wszystkie moduły w ${}_l\mathcal{C}_l$ należą do rozłącznej sumy $\mathcal{D}_l^1 \cup \cdots \cup \mathcal{D}_l^p$ podkołczanów $\mathcal{D}_l^i$ postaci $\mathbb{N}\Delta_i$, dla $i \in \{1, \ldots, p\}$, z których każdy jest zamknięty na branie poprzedników w $\mathcal{C}$. Podobnie można pokazać, że usuwając z $\mathcal{C}_r$ skończoną liczbę modułów otrzymujemy rozłączną sumę $\mathcal{D}_r^1 \cup \cdots \cup \mathcal{D}_r^q$ acyklicznych i prawostronnie stabilnych podkołczanów postaci $\mathcal{D}_r^j \simeq (-\mathbb{N})\Delta'_j$, $j \in \{1, \ldots, q\}$ zamkniętych na branie następników w $\mathcal{C}$. W tym sensie opis składowych prawie acyklicznych sprowadza się, z dokładnością do skończonej liczby wierzchołków, do opisu skończenie wielu rozłącznych lewostronnie, bądź prawostronnie stabilnych acyklicznych podkołczanów z translacją $\mathcal{D}_l^1, \ldots, \mathcal{D}_l^p, \mathcal{D}_r^1, \ldots, \mathcal{D}_r^q$.

1.5 Elementy teorii stopnia Liu ·

Podrozdział niniejszy poświęcamy na poglądowe wprowadzenie podstawowej terminologii oraz technik pochodzących z tak zwanej *teorii stopnia odwzorowań nieprzywiedlnych*, której szczególne wyniki zawdzięczamy dysertacji S. Liu. Pośród przedstawionych tu twierdzeń zwracamy przede wszystkim uwagę na przełomowe konsekwencje teorii stopnia Liu, dzięki zastosowaniu której opisano w pewnym sensie kształt wszystkich półregularnych składowych w kołczanach Auslandera-Reiten skończenie wymiarowych algebr nad ciałami (patrz Twierdzenia 1.5.8 i 1.5.12 oraz Wniosek 1.5.7).

Punktem wyjścia do rozważań teorii stopnia było odkrycie pewnej subtelnej charakteryzacji odwzorowań nieprzywiedlnych w języku przekształceń funktorów. Udowodniono mianowicie, że homomorfizm $f : X \to Y$ w $\operatorname{mod} A$ z kodziedziną w ustalonym module Y w $\operatorname{ind} A$ jest nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy, gdy f należy do $\operatorname{rad}_A(X, Y)$ oraz następujące przekształcenie funktorów

$$r_0(f) : \frac{\operatorname{Hom}_A(-, X)}{\operatorname{rad}_A(-, X)} \longrightarrow \frac{\operatorname{rad}_A(-, Y)}{\operatorname{rad}_A^2(-, Y)},$$

zadane wzorem $r_0(f)_Z(h + \operatorname{rad}_A(Z, X)) = fh + \operatorname{rad}_A^2(Z, Y)$, dla każdego modułu Z w $\operatorname{mod} A$ i $h \in \operatorname{Hom}_A(Z, X)$, jest monomorfizmem funktorów. Istnieje również analogiczna charaktaryzacja, odwzorowań o początku w ustalonym module nierozkładalnym, która wykorzystuje dulane przekształcenie funktorów $l_0(f)$: $\frac{\operatorname{Hom}_A(Y,-)}{\operatorname{rad}_A(Y,-)} \longrightarrow \frac{\operatorname{rad}_A(X,-)}{\operatorname{rad}_A^2(X,-)}$ indukowane przez operację składania „z lewej strony” z homomorfizem f. Odnotujmy tutaj, że w podobny sposób składanie z homomorfizem f indukuje przekształcenia funktorów

$$r_n(f) : \frac{\operatorname{rad}_A^n(-, X)}{\operatorname{rad}_A^{n+1}(-, X)} \longrightarrow \frac{\operatorname{rad}_A^{n+1}(-, Y)}{\operatorname{rad}_A^{n+2}(-, Y)} \quad \text{oraz} \quad l_n(f) : \frac{\operatorname{rad}_A^n(Y, -)}{\operatorname{rad}_A^{n+1}(Y, -)} \longrightarrow \frac{\operatorname{rad}_A^{n+1}(X, -)}{\operatorname{rad}_A^{n+2}(X, -)},$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Zaznaczamy jedynie, że wspominane wyniki zostały ustanowione przez K. Igusa oraz G. Todorov [18], którzy badali zachowanie złożeń homomorfizmów nieprzywiedlnych odpowiadających strzałkom na drogach sekcyjnych w kołczanach Auslandera-Reiten algebr. Jednym z głównych wyników tychże autorów jest następujące twierdzenie, które stało się motywacją do dalszych badań podjętych przez S. Liu.

Twierdzenie 1.5.1. [Igusa-Todorov] *Niech $X = X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_n = Y$, $n \in \mathbb{N}$, będzie drogą sekcyjną w kołczanie Γ_A algebry A. Wówczas dla dowolnego wyboru homomorfizmów nieprzywiedlnych $f_i : X_{i-1} \to X_i$ w $\operatorname{mod} A$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, zachodzi inkluzja funktorów postaci*

$$\operatorname{Im} \operatorname{Hom}_A(-, f_n \ldots f_1) \subseteq \operatorname{rad}_A^n(-, Y),$$

podczas gdy $\operatorname{Im} \operatorname{Hom}_A(-, f_n \ldots f_1) \nsubseteq \operatorname{rad}_A^{n+1}(-, Y)$. W szczególności otrzymujemy, że $\operatorname{Im} \operatorname{Hom}_A(Z, f_n \ldots f_1) \nsubseteq \operatorname{rad}_A^{n+1}(Z, Y)$, dla pewnego modułu Z w $\operatorname{mod} A$, to znaczy istnieje $h \in \operatorname{Hom}_A(Z, X)$, dla którego $f_n \ldots f_1 h \in \operatorname{rad}_A^n(Z, Y) \setminus \operatorname{rad}_A^{n+1}(Z, Y)$.

Odnotujmy jedynie poniższy natychmiastowy wniosek z powyższego, który opisuje ważną własność złożeń homomorfizmów nieprzywiedlnych pomiędzy modułami nierozkładalnymi leżącymi na drogach sekcyjnych.

Twierdzenie 1.5.2. **[Igusa-Todorov]** *Niech A będzie algebrą, zaś $X = X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_n = Y$ dowolną drogą sekcyjną w Γ_A. Wówczas dla każdego wyboru homomorfizmów nieprzywiedlnych $f_i : X_{i-1} \to X_i$ w $\operatorname{mod} A$, $i \in \{1, \dots, n\}$, spełniona jest następująca własność:*

$$f_n \dots f_2 f_1 \in \operatorname{rad}_A^n(X, Y) \setminus \operatorname{rad}_A^{n+1}(X, Y).$$

W szczególności, wtedy również $f_n \dots f_2 f_1 \neq 0$.

Przypominamy teraz defininję prawego (odpowiednio, lewego) stopnia dla odwzorowań nieprzywiedlnych, która została podana przez S. Liu. Niech f będzie odwzorowaniem nieprzywiedlnym $f : X \to Y$ w $\operatorname{mod} A$. Wówczas *lewy stopień $d_l(f)$ homomorfizmu f* jest równy $d_l(f) = \infty$, jeżeli wszystkie przekształcenia $l_n(f)$, dla $n \in \mathbb{N}$, są monomorfizmami funktorów, a w przeciwnym wypadku definiujemy lewy stopień f jako miminimalną liczbę naturalną $d_l(f) = n$ taką, że przekształcenie funktorów $l_n(f)$ nie jest monomorfizmem. Wykorzystując przekształcenia $r_n(f)$, $n \in \mathbb{N}$, dualnie definiujemy prawy stopień $d_r(f) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ homomorfizmu $f \in \operatorname{Irr}_A(X, Y)$. Dalsza część tego podrozdziału poświęcona jest krótkiemu zaprezentowaniu wybranych wyników wykorzystujących pojęcie stopnia do opisu różnych własności składowych kołczanów Auslandera-Reitena algebr. Część poniżej przedstawionych twierdzeń ma charakter informacyjny i zostanie pozostawiona bez dowodów, które można znaleźć w źródłowych artykułach Liu [22], [23].

Uwaga · W przypadku, gdy X i Y są modułami nierozkładalnymi pomiędzy którymi istnieje odwzorowanie nieprzywiedlne, jeden z nietrywialnych wyników S. Liu orzeka, że zarówno lewy $d_l(f)$ jak i prawy $d_r(f)$ stopień jest taki sam dla wszystkich możliwych odwzorowań $f \in \operatorname{Irr}_A(X, Y)$, to znaczy, wielkości te nie zależą od wyboru homomorfizmu $f \in \operatorname{Irr}_A(X, Y)$. W szczególności więc wnioskujemy, że lewy i prawy stopień określony jest ogólniej, dla każdej strzałki $X \to Y$ w kołczanie Γ_A ·

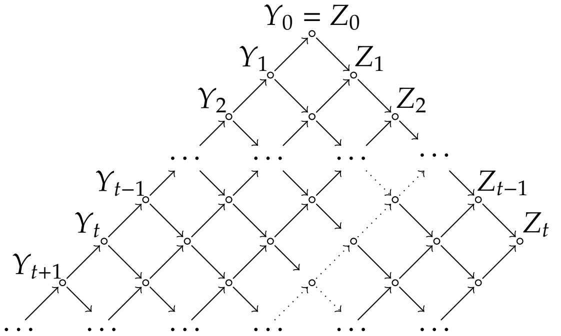
Twierdzenie 1.5.3. *Niech X oraz Y będą modułami w $\operatorname{mod} A$, f zaś dowolnym homomorfizmem z $\operatorname{Irr}_A(X, Y)$. Prawdziwe są wówczas następujące stwierdzenia.*

(1) Jeżeli Y jest modułem w $\operatorname{ind} A$ oraz istnieje nieskończona droga presekcyjna w Γ_A postaci $\cdots \to Y_n \to \cdots \to Y_2 \to Y_1 \to Y_0 = Y$, dla której moduł $X \oplus Y_1$ jest składnikiem prostym środka ciągu prawie rozszczepialnego $\mathcal{E}^+(Y)$ o prawym końcu Y, to $d_r(f) = \infty$.

(2) Jeśli X jest modułem w $\operatorname{ind} A$, dla którego istnieje nieskończona droga presekcyjna w Γ_A postaci $X = X_0 \to X_1 \to X_2 \to \cdots \to X_m \to \dots$ taka, że moduł $X_1 \oplus Y$ jest składnikiem prostym środka ciągu prawie rozszczepialnego $\mathcal{E}^-(X)$ o lewym końcu w X, to $d_l(f) = \infty$.

Otrzymujemy stąd bezpośrednio następujący elementarny wniosek, w którym opisano zachowania złożeń homomorfizmów nieprzywiedlnych z pewnych szczególnych dróg prawie sekcyjnych.

Wniosek 1.5.4. *Niech A będzie algebrą oraz załóżmy, że istnieje spójny podkołczan z translacją w ${}_l\Gamma_A$ postaci*



składający się z $t+1$ nieskończonych równoległych dróg leżących na kolejnych translacjach ustalonej nieskończonej drogi sekcyjnej $(*)$: $\cdots \to Y_2 \to Y_1 \to Y_0$, przy czym $t \geqslant 1$ oraz $Z_j = \tau_A^{-j} Y_j$, dla każdego $j \in \{0, 1, \ldots, t\}$. Wówczas złożenie $g_t \cdots g_2 g_1 f_0 f_1 \cdots f_n$ dowolnie wybranych homomorfizmów nieprzywieldlnych $f_s : Y_{s+1} \to Y_s$, $s \in \{0, 1, \ldots, n\}$, oraz $g_j : Z_{j-1} \to Z_j$, dla $1 \leqslant j \leqslant m$, jest niezerowe.

dowód · Teza jest bezpośrednią konsekwencją Twierdzenia 1.5.3 oraz definicji stopnia. W istocie, zauważmy, że z założenia dla każdego $j \in \{1, \ldots, t\}$ istnieje w Γ_A strzała $\alpha_j : Z_{j-1} \to Z_j$ oraz nieskończona droga sekcyjna postaci $\cdots \to \tau_A^{-j} Y_n \cdots \to \tau_A^{-j} Y_{j+1} \to \tau_A^{-j} Y_j = Z_j$, przy czym $Z_{j-1} = \tau_A^{j-1} Y_{j-1} \neq \tau_A^{-j} Y_{j+1}$, ponieważ droga $(*)$ jest sekcyjna, skąd oczywiście moduł $Z_{j-1} \oplus \tau_A^{-j} Y_{j+1}$ jest składnikiem środka ciągu prawie rozszepialnego $\mathcal{E}^+(Z_j)$ w $\operatorname{mod} A$, a więc $d_r(\alpha_j) = \infty$ na mocy Twierdzenia 1.5.3(1). W rezultacie, dla dowolnego wyboru homomorfizmów $g_j \in \operatorname{Irr}_A(Z_{j-1}, Z_j)$, $j \in \{1, \ldots, t\}$, mamy $d_r(g_1) = \cdots = d_r(g_t) = \infty$. Wystarczy teraz zauważyć, że jeśli ustalimy również dowolne homomorfizmy nieprzywiedlne $f_s : Y_{s+1} \to Y_s$ w $\operatorname{ind} A$, powiedzmy dla $s \in \{0, 1, \ldots, n\}$, gdzie $n \geqslant 0$, to na mocy Twierdzenia Igusa-Todorov złożenie $f_0 f_1 \ldots f_n$ należy do $\operatorname{rad}_A^{n+1}(Y_{n+1}, Y_0)$ ale nie należy do $\operatorname{rad}_A^{n+2}(Y_{n+1}, Y_0)$, a stąd $d_r(g_1) = \infty$ implikuje, że $r_{n+1}(g_1)$ jest monomorfizmem funktorów. W szczególności więc mamy również $r_{n+1}(g_1)_{Y_{n+1}}(f_0 \ldots f_n + \operatorname{rad}_A^{n+2}(Y_{n+1}, Y_0)) = g_1 f_0 \ldots f_n + \operatorname{rad}_A^{n+3}(Y_{n+1}, Z_1) \neq 0$, ponieważ $f_0 \ldots f_n \notin \operatorname{rad}_A^{n+2}$, co oznacza, że złożenie $g_1 f_0 f_1 \cdots f_n : Y_{n+1} \to Z_1$ należy do $\operatorname{rad}_A^{n+2} \setminus \operatorname{rad}_A^{n+3}$. Ostatecznie korzystając z nieskończoności prawego stopnia dla pozostałych homomorfizmów $g_2, \ldots, g_t$ łatwo dowieść, że również dla wszystkich $j \in \{2, \ldots, t\}$ złożenie $g_j \cdots g_2 g_1 f_0 \cdots f_n$ należy do $\operatorname{rad}_A^{j+n+1}(Y_{n+1}, Z_j)$, zaś nie należy do $\operatorname{rad}_A^{j+n+2}(Y_{n+1}, Z_j)$, czyli w szczególności, jest niezerowe. □

Uwaga · Zachodzi także analogiczne twierdzenie opisujące dualne własności złożeń odpowiednich homomorfizmów nieprzywiedlnych z dróg prawie sekcyjnych w prawostronnie stabilnych podkołczanach Γ_A, którego nie będziemy dowodzić. Odnotujmy tylko, że jeśli ${}_r\Gamma_A$ zawiera drogę prawie sekcyjną postaci

$$Y_t \to \cdots \to Y_1 \to Y_0 = Z_0 \to Z_1 \to Z_2 \to \cdots \to Z_n \to \ldots,$$

gdzie dla $j \in \{1, \ldots, t\}$ mamy $\tau_A^j Z_j = Y_j$ oraz istnieją moduły $\tau_A^j Z_s \neq 0$, dla wszystkich $s \geqslant j+1$, to korzystając z dualnego kryterium opisanego w Twierdzeniu 1.5.3(2) można wywnioskować nieskończoność lewych stopni wszystkich strzałek $\beta_j : Y_j \to Y_{j-1}$, $j \in \{1, \ldots, t\}$. Ponadto wówczas $f_n \cdots f_1 f_0 g_1 g_2 \cdots g_t \neq 0$ dla dowolnie wybranych homomorfizmów nieprzywieldlnych $f_s : Z_s \to Z_{s+1}$, $s \in \{0, \ldots, n\}$, oraz $g_j : Y_j \to Y_{j-1}$, dla $1 \leqslant j \leqslant t$ ·

Wniosek 1.5.5. *Niech Γ będzie dowolną tubą kopromieniową. Załóżmy ponadto, że Γ jest podkołczanem z translacją w ${}_l\Gamma_A$, dla pewnej algebry A. Wówczas dla dowolnych nieskończonych rodzin $\mathscr{U}$ oraz $\mathscr{W}$ modułów z części cyklicznej ${}_c\Gamma$ tuby Γ zachodzi* $\operatorname{Hom}_A(\mathscr{U}, \mathscr{W}) \neq 0$.

dowód · Oczywiście teza jest spełniona dla dowolnych dwóch rodzin $\mathscr{U}$ oraz $\mathscr{W}$ z niepustym przekrojem, tak więc możemy dalej zakładać, że rodziny $\mathscr{U}$ i $\mathscr{W}$ nie mają wspólnych modułów. Co więcej, wówczas każdy moduł w Γ leży na dokładnie jednym ze skończenie wielu (rozłącznych) kopromieni, które oznaczmy przez $\mathbb{Y}_1, \ldots, \mathbb{Y}_k$. Ponieważ rodzina modułów $\mathscr{U}$ jest nieskończona wnosimy, że istnieje $i \in \{1, \ldots, k\}$, takie, że kopromień $\mathbb{Y}_i$ zawiera nieskończenie wiele modułów z rodziny $\mathscr{U}$. Z drugiej strony, prawie wszystkie moduły w Γ są rozmieszczone na skończenie wielu promieniach $\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_p$, zatem musi istnieć również $j \in \{1, \ldots, p\}$ takie, że promień $\mathbb{X}_j$ zawiera nieskończenie wiele modułów należących do $\mathscr{W}$. Oczywiście kopromień $\mathbb{Y}_i$ przecina promień $\mathbb{X}_j$ nieskończenie wiele razy, zatem Γ zawiera nieskończoną drogę prawie sekcyjną postaci $\cdots \to Y_2 \to Y_1 = \tau_A Z_1 \to Y_0 = Z_0 \to Z_1 \to Z_2 \to \ldots$, gdzie dla każdego $s \geqslant 0$ moduł Y_s leży na kopromieniu $\mathbb{Y}_i$, zaś moduł Z_s, na promieniu $\mathbb{X}_j$. W konsekwencji, istnieje wówczas liczba $t \geqslant 0$, dla której moduł Z_t należy do $\mathscr{W}$ oraz liczba $n \geqslant 0$, dla której moduł Y_n należy do $\mathscr{U}$. Ostatecznie, mamy wtedy drogę sekcyjną $Z_0 \to Z_1 \to \ldots Z_t$ oraz nieskończone równoległe drogi sekcyjne $\cdots \to \tau_A^{-j} Y_{j+2} \to \tau_A^{-j} Y_{j+1} \to \tau_A^{-j} Y_j = Z_j$, dla każdego $j \in \{0, \ldots, t\}$, czyli istnieje podkołczan w ${}_l\Gamma_A$ o żądanej we Wniosku 1.5.4 postaci, skąd otrzymujemy złożenie dowolnie wybranych homomorfizmów nieprzywiedlnych odpowiadających strzałkom na drodze $Y_n \to Y_{n-1} \to \cdots \to Y_1 \to Y_0 = Z_0 \to Z_1 \to \cdots \to Z_t$ jest niezerowe. Wtedy $\mathrm{Hom}_A(U, W) \neq 0$, dla modułów $U = Y_n$ z $\mathscr{U}$ oraz $W = Z_t$ z $\mathscr{W}$. □

Uwaga · Oczywiście prawdziwe jest również dualne twierdzenie dla tub promieniowych będących podkołczanami z translacją w kołczanach ${}_r\Gamma_A$, którego sformułowanie pozwólmy sobie pominąć ·

Przedstawiamy dalej konsekwentnie pełny opis struktury kombinatorycznej półregularnych składowych w kołczanach Auslandera-Reiten algebr. Rozpocznijmy od podania odpowiednich własności półregularnych składowych nie zawierających zorientowanych cykli. Odnotujmy bez dowodu następujące twierdzenie charakteryzujące prawostronnie (odpowiednio, lewostronnie) stabilne kołczany z translacją bez zorientowanych cykli.

Twierdzenie 1.5.6. *Niech Γ będzie dowolnym spójnym acyklicznym kołczanem z translacją. Wówczas*

(1) Jeżeli Γ jest lewostronnie stabilny, to istnieje pełny podkołczan Δ w Γ taki, że Γ jest izomorficzny z pewnym podkołczanem z translacją Γ' kołczanu $\mathbb{Z}\Delta$ zamkniętym na branie poprzedników w $\mathbb{Z}\Delta$.

(2) Jeśli Γ jest prawostronnie stabilny, to istnieje pełny podkołczan Δ w Γ taki, że Γ jest izomorficzny z pewnym podkołczanem z translacją Γ' w $\mathbb{Z}\Delta$ zamkniętym na branie następników w $\mathbb{Z}\Delta$.

Wniosek 1.5.7. *Niech C będzie półregularną acykliczną składową kołczanu Γ_A algebry A. Wówczas*

(1) Jeśli ${}_lC = C$, to składowa C jako kołczan z translacją jest izomorficzna z pełnym podkołczanem z translacją kołczanu $\mathbb{Z}\Delta$ zamkniętym na branie poprzedników w $\mathbb{Z}\Delta$.

(2) Dualnie, jeżeli ${}_rC = C$, to C jest izomorficzna z pełnym podkołczanem z translacją kołczanu $\mathbb{Z}\Delta$ zamkniętym na branie następników w $\mathbb{Z}\Delta$.

(3) Jeżeli C jest składową regularną w Γ_A, to C jest składową postaci $C \simeq \mathbb{Z}\Delta$, dla pewnego pełnego podkołczanu Δ w C.

W pozostałej części niniejszego podrozdziału zajmiemy się nieco szerzej opisem półregularnych składowych zawierających zorientowane cykle, w szczególności podając kilka ważnych technicznych lematów wykorzystanych do uzyskania ich pełnej klasyfikacji. Pierwszy krok w tę stronę został postawiony przez D. Happel'a, U. Preisera oraz C. M. Ringela [14], którzy pokazali, że dla algebry A, dowolny nieskończony i stabilny podkołczan w Γ_A jest stabilną tubą, jeśli tylko składa się z orbit τ_A-okresowych (wystarczy założyć istnienie τ_A-orbity okresowej). Wyniki te zostały następnie uzupełnione, niezeleżnie przez S. Liu [23] oraz Y. Zhang [55], dając tym samym następującą charakteryzację (spójnych) nieskończonych stabilnych podkołczanów Γ_A, zawierających zorientowane cykle.

Twierdzenie 1.5.8. *Niech A będzie algebrą, zaś Γ dowolnym spójnym podkołczanem z translacją kołczanu ${}_s\Gamma_A$. Jeżeli Γ jest nieskończony, to następujące warunki są równoważne.*

(i) Γ zawiera zorientowany cykl.

(ii) Wszystkie τ_A-orbity w Γ są okresowe.

(iii) Γ jest stabilną tubą $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty/(\tau_A^r)$ rangi $r \geqslant 1$.

Twierdzenie to pokazuje między innymi, że wszystkie nieskończone regularne składowe w kołczanach Auslandera-Reiten skończenie wymiarowych algebr nad ciałami, które zawierają zorientowane cykle, muszą być stabilnymi tubami. Przedstawione dalej Twierdzenie 1.5.12 daje również pełną kontrolę nad strukturą wszystkich półregularnych składowych w Γ_A zawierających zorientowane cykle. Oryginalny dowód, którego nie będziemy prezentować, wykorzystuje wiele pomocniczych faktów dotyczących osobliwych zachowań stopni strzałek w lewostronnie (odpowiednio, prawostronnie) stabilnych podkołczanach z translacją kołczanów Auslandera-Reiten algebr. Przypomnijmy tylko następujący lemat, dzięki któremu otrzymujemy pewne wstępne informacje o strukturze dowolnego lewostronnie stabilnego podkołczanu z translacją w kołczanie Γ_A zawierającego zorientowany cykl.

Lemat 1.5.9. *Niech Γ będzie dowolnym spójnym lewostronnie stabilnym kołczanem z translacją oraz załóżmy, że Γ zawiera zorientowany cykl. Wówczas jeśli Γ zawiera τ-orbitę okresową, to każda τ-orbita w Γ jest okresowa. Jeśli zaś kołczan Γ nie zawiera żadnej τ-orbity okresowej, to istnieje nieskończona droga sekcyjna w Γ*

$$(*) \qquad \cdots \to \tau_A^{3r}X_1 \to \tau_A^{2r}X_s \to \tau_A^{2r}X_{s-1} \to \cdots \to \tau_A^{2r}X_1 \to \tau_A^{r}X_s \to \cdots \to \tau_A^{r}X_1 \to X_s \to X_{s-1} \to \cdots \to X_1,$$

gdzie $r > s$ oraz τ-orbity wierzchołków $X_1, \ldots, X_s$ są parami rozłącznymi τ-orbitami w Γ, z których co najmniej jedna nie jest prawostronnie stabilna. Co więcej, jeżeli Γ jest przy tym podkołczanem z translacją w kołczanie Γ_A pewnej algebry A, to zachodzą również poniższe warunki.

(a) Istnieje nieskończenie wiele strzałek na drodze $(*)$ postaci $\alpha : X \to Y$, dla których następująca droga w Γ

$$\cdots \to \tau_A^{n}X \to \tau_A^{n}Y \to \tau_A^{n-1}X \to \cdots \to \tau_A^{2}Y \to \tau_A X \to \tau_A Y \to X \to Y$$

ma co najmniej jedną strzałkę skończonego prawego stopnia.

(b) Wszystkie strzałki w Γ mają trywialne wartościowanie $(1, 1)$.

(c) Dowolny moduł X w Γ ma co najwyżej dwóch bezpośrednich poprzedników w Γ.

(d) Γ składa się z τ-orbit modułów $X_1, \ldots, X_s$; w szczególności ma skończoną liczbę τ-orbit.

Dowód · Po pełną argumentację odsyłamy do [22]. □

Warto wspomnieć, że minimum ze wszystkich prawych stopni strzałek leżących na drodze stowarzyszonej ze strzałką α opisanej w (a) postaci nazywane jest *prawym globalnym stopniem strzałki α*. Inaczej mówiąc podpunkt (a) orzeka, że każda droga $(*)$ zawiera nieskończenie wiele strzałek o skończonym globalnym prawym stopniu. Odnotujmy tu jedynie, że zachodzi następujący lemat.

Lemat 1.5.10. *Niech A będzie algebrą, zaś Γ spójnym podkołczanem z translacją w ${}_l\Gamma_A$ zawierającym zorientowany cykl oraz żadnej τ_A-orbity okresowej. Ustalmy ponadto pewną nieskończoną drogę sekcyjną w Γ postaci $(*) : \cdots \to X_{s+1} = \tau_A^r X_1 \to X_s \to \cdots \to X_1$, spełniającą warunki (a)-(d) z tezy Lematu 1.5.9. Jeżeli istnieje przy tym poprawnie określona dodatnia funkcja addytywna l na $\Gamma = (\Gamma, \tau)$, to zachodzą następujące stwierdzenia.*

(1) Dla dowolnego $n \geqslant 1$, jeżeli $\tau^{-n}X_i \neq 0$, dla pewnego $i \geqslant 1$, to również $\tau^{-n}X_{i+1} \neq 0$.

(2) Jeśli jeden z wierzchołków X_j, dla $j \in \{1, \ldots, s\}$, jest stabilny, to X_i jest stabilny dla wszystkich $i \geqslant 1$.

Dowód · Dowód w przypadku, gdy Γ jest składową w Γ_A można znaleźć w pracy [22]. Argumentację tę można naturalnie uogólnić dla podkołczanów Γ spełniających warunki podane w sformułowaniu. □

Wykorzystując ostatnie dwa lematy można udowodnić następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 1.5.11. *Niech A będzie algebrą, zaś Γ lewostronnie stabilną składową w Γ_A zawierającą zorientowany cykl. Wówczas Γ jest tubą kopromieniową.*

Uwaga · Teza powyższego stwierdzenia jest prawdziwa przy nieco słabszych założeniach o Γ. Wystarczy mianowicie założyć, że Γ jest lewostronnie stabilnym podkołczanem z translacją w Γ_A zawierającym zorientowany cykl oraz istnieje pewna dodatnia funkcja addytywna na Γ i wówczas analogicznymi metodami można udowodnić, że Γ jako kołczan z translacją jest tubą kopromieniową ·

Powyższy wynik wraz ze swoim dualnym odpowiednikiem prowadzą do następującego twierdzenia.

Twierdzenie 1.5.12 (Liu). *Niech A będzie dowolną K-algebrą, zaś $\mathcal{C}$ pewną półregularną składową w Γ_A zawierającą zorientowany cykl. Wówczas $\mathcal{C}$ jest półregularną tubą.*

1.6 Moduły odwracające ·

W tej części niniejszego rozdziału przedyskutujemy krótko najważniejsze pojęcia i wyniki jednej z najdonioślejszych koncepcji dwudziestowiecznej teorii reprezentacji algebr, mianowicie, koncepcji modułu odwracającego. Moduły odwracające T odgrywają ogromnie ważną rolę w nowoczesnej teorii reprezentacji algebr, gdzie nierozerwalnie wiążą się ze swoimi algebrami endomorfizmów $B = \operatorname{End}_A(T)$. W szczególności, jeśli kategoria modułów $\operatorname{mod} A$ danej algebry A jest dobrze znana, to dzięki metodom teorii odwracania można opisać często równie dobrze kategorię $\operatorname{mod} B$. Przykład takiego rozumowania będziemy mieli okazję zobaczyć w następnym rozdziale, gdzie opiszemy w ten sposób kategorie modułów algebr odwróconych 2.2.

Podstawowym pojęciem wykorzystywanym w badaniu modułów odwracających jest klasyczne pojęcie pary torsyjnej w kategoriach modułów, lub ogólniej, w kategoriach abelowych. Przypominamy tylko, że para pełnych podkategorii $\mathscr{T}, \mathscr{F}$ w kategorii $\operatorname{mod} A$ algebry A nazywana jest *parą torsyjną (w $\operatorname{mod} A$)* wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki.

1) $\operatorname{Hom}_A(\mathscr{T}, \mathscr{F}) = 0$.

2) Jeżeli moduł X w $\operatorname{mod} A$ spełnia $\operatorname{Hom}_A(X, \mathscr{F}) = 0$, to X należy do $\mathscr{T}$.

3) Jeżeli moduł Y w $\operatorname{mod} A$ spełnia $\operatorname{Hom}_A(\mathscr{T}, Y) = 0$, to Y należy do $\mathscr{F}$.

Nazywamy wówczas $\mathscr{T}$ (odpowiednio, $\mathscr{F}$) *klasą torsyjną* (odpowiednio, *klasą beztorsyją*) pary torsyjnej $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$. Powiemy ponadto, że dana pełna podkategoria $\mathscr{C}$ w $\operatorname{mod} A$ jest *klasą torsyjną* (odpowiednio, *beztorsyjną*), o ile jest ona klasą torsyjną (odpowiednio, beztorsyjną) pewnej pary torsyjnej w $\operatorname{mod} A$. Można udowodnić [2, patrz Proposition VI.1.4(a)], że $\mathscr{C}$ jest klasą torsyjną wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathscr{C}$ jest zamknięta na sumy proste, rozszerzenia oraz branie obrazów. Dualnie [2, VI.1.4(b)], klasa $\mathscr{C}$ jest klasą beztorsyjną wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathscr{C}$ jest zamknięta na sumy proste, rozszerzenia oraz branie podmodułów.

Uwaga · Jeżeli $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ jest parą torsyjną w $\operatorname{mod} A$, to dowodzi się, że dowolny moduł prosty w $\operatorname{mod} A$ należy albo do klasy torsyjnej $\mathscr{T}$ albo do klasy beztorsyjnej $\mathscr{F}$. Własność ta posiada ciekawe uogólnienie, prowadzące do określenia bardzo ważnego typu par torsyjnych, nazywanych *parami rozszczepiającymi*. W istocie, naturalnie jest rozważać pary torsyjne, dla których podział klasy modułów prostych można rozszerzyć do podziału klasy modułów nierozkładalnych. Powiemy mianowicie, że para torsyjna $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ jest *rozszczepiająca*, o ile dowolny moduł w $\operatorname{ind} A$ należy albo do klasy torsyjnej $\mathscr{T}$ albo do klasy beztorsyjnej $\mathscr{F}$. Zostało pokazane, że dowolna para torsyjna $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ w $\operatorname{mod} A$ jest rozszczepiająca wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{Ext}^1_A(\mathscr{F}, \mathscr{T}) = 0$, lub równoważnie, gdy $\tau_A^{-1}\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}$ (lub $\tau_A\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}$); patrz na przykład [2, Proposition VI.1.7] ·

Przypominamy teraz definicję modułu odwracającego [17].

Definicja · Niech A będzie algebrą, zaś T dowolnym modułem w $\operatorname{mod} A$. Moduł T nazywamy *modułem częściowo odwracającym* wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{pd}_A T \leqslant 1$ oraz $\operatorname{Ext}^1_A(T, T) = 0$. Jeżeli ponadto istnieje ciąg dokładny w $\operatorname{mod} A$ postaci

$$0 \to A \to T' \to T'' \to 0,$$

gdzie T' oraz T'' są modułami w $\operatorname{add} T$, to T nazywać będziemy *modułem odwracającym w* $\operatorname{mod} A$. Przypominamy, że każdy moduł odwracający T jest modułem dokładnym.

Poniżej sformułowane twierdzenie prowadzi do ważnej obserwacji umożliwiającej rozważanie stowarzyszonych z modułem odwracającym T par torsyjnych zarówno w kategorii $\operatorname{mod} A$, której obiektem jest T, jak i w kategorii $\operatorname{mod} B$ modułów nad algebrą endomorfizmów $B = \operatorname{End}_A(T)$ modułu T. Po dowód odyłamy do [2, Lemma VI.2.3, Theorem VI.2.5 i Corollary VI.3.6].

Twierdzenie 1.6.1. *Niech A będzie algebrą, zaś T modułem odwracającym w* $\operatorname{mod} A$. *Wówczas istnieje para torsyjna $(\mathscr{T}(T), \mathscr{F}(T))$ w* $\operatorname{mod} A$*, gdzie*

(1) $\mathscr{T}(T)$ jest pełną podkategorią w $\operatorname{mod} A$ składającą się z modułów M w $\operatorname{mod} A$, dla których $\operatorname{Ext}^1_A(T, M) = 0$.

(2) $\mathscr{F}(T)$ jest pełną podkategorią w $\operatorname{mod} A$ składającą się z modułów N w $\operatorname{mod} A$, dla których $\operatorname{Hom}_A(T, N) = 0$.

Ponatdo, wtedy $\mathscr{T}(T) = \operatorname{Gen} T$ oraz $\mathscr{F}(T) = \operatorname{Cogen} \tau_A T$, przy czym moduł $T = {}_BT$ jest również modułem odwracającym w $\operatorname{mod} B^{\mathrm{op}}$, gdzie B jest algebrą $B = \operatorname{End}_A(T)$.

Wniosek 1.6.2. *Dla dowolnego modułu odwracającego T w $\operatorname{mod} A$ następująca para podkategorii $(\mathscr{X}(T), \mathscr{Y}(T)) = (D\mathscr{F}({}_BT), D\mathscr{T}({}_BT))$, gdzie $(\mathscr{T}({}_BT), \mathscr{F}({}_BT))$ jest kanoniczną parą torsyjną stowarzyszoną z modułem odwracającym $T = {}_BT$ w $\operatorname{mod} B^{\mathrm{op}}$, jest parą torsyjną w $\operatorname{mod} B$.*

Uwaga · Przypominijmy, że moduł odwracający T (w $\operatorname{mod} A$) nazywany jest *rozszczepiającym*, o ile rozszczepiająca jest stowarzyszona z T para torsyjna $(\mathscr{X}(T), \mathscr{Y}(T))$ w $\operatorname{mod} B$. Odnotujmy również, że znana jest homologiczna charakteryzacja rozszczepiających modułów odwracających, której dowód można znaleźć, na przykład, w [2, Theorem VI.5.6(b)]. Zostało tam bowiem pokazane, że moduł odwracający T w $\operatorname{mod} A$ jest modułem rozszepiającym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego modułu $N = N_A$ z $\mathscr{F}(T)$ zachodzi $\operatorname{id}_A N = 1$ ·

Pozostałą część tej sekcji poświęcamy przedstawieniu kluczowego wyniku teorii odwracania oraz najważniejszych z niego wniosków. Dowody można również znaleźć w [2, patrz Theorem VI.3.8, VI.4.3, oraz Corollary VI.4.4] . Przypominamy mianowicie, że zachodzi następujące twierdzenie udowodnione przez S. Brenner i M. C. R. Butlera [6], które opisuje ważne równoważności pomiędzy określonymi powyżej klasami torsyjnymi i beztorsyjnymi w $\operatorname{mod} A$ i w $\operatorname{mod} B$ stowarzyszonymi z modułem odwracającym T.

Twierdzenie 1.6.3. [**Brenner-Butler**] *Dla dowolnej algebry A i modułu odwracającego T w $\operatorname{mod} A$ mamy następujące równoważności kategorii.*

(1) Funktory $\operatorname{Hom}_A(T, -) : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} B$ oraz $- \otimes_B T : \operatorname{mod} B \to \operatorname{mod} A$ indukują wzajemnie odwrotne równoważności kategorii postaci
$$\mathscr{T}(T) \underset{-\otimes_B T}{\overset{\operatorname{Hom}_A(T,-)}{\rightleftarrows}} \mathscr{Y}(T).$$

(2) Funktory $\operatorname{Ext}^1_A(T, -) : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} B$ oraz $\operatorname{Tor}^B_1(-, T) : \operatorname{mod} B \to \operatorname{mod} A$ indukują wzajemnie odwrotne równoważności kategorii postaci
$$\mathscr{F}(T) \underset{\operatorname{Tor}^B_1(-,T)}{\overset{\operatorname{Ext}^1_A(T,-)}{\rightleftarrows}} \mathscr{X}(T).$$

Przywołajmy jeszcze następujęce dwa ważne wnioski z Twierdzenia Brenner-Butlera, które dają pewne wstępne intuicje odnośnie struktury kategorii $\operatorname{mod} \operatorname{End}_A(T)$ modułów nad algebrami endomorfizmów rozszczepiających modułów odwracających T.

Wniosek 1.6.4. *Niech T będzie rozszczepiającym modułem odwracającym w $\operatorname{mod} A$. Wówczas prawdziwe są poniższe stwierdzenia.*

(1) Klasa beztorsyjna $\mathscr{X}(T)$ jest zamknięta na branie następników w $\operatorname{mod} B$.

(2) Klasa torsyjna $\mathscr{Y}(T)$ jest zamknięta na branie poprzedników w $\operatorname{mod} B$.

Co więcej, dla dowolnego ciągu Auslandera-Reiten $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ *w* $\operatorname{mod} A$ *zachodzą następujące warunki.*

(3) Jeśli moduły L, M oraz N należą do $\mathscr{T}(T)$*, to indukowany ciąg*

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(T,L) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_A(T,f)} \operatorname{Hom}_A(T,M) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_A(T,g)} \operatorname{Hom}_A(T,N) \longrightarrow 0$$

jest ciągiem prawie rozszczepialnym w $\operatorname{mod} B$.

(4) Jeśli moduły L, M oraz N są z $\mathscr{F}(T)$*, to indukowany ciąg*

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_A(T,L) \xrightarrow{\operatorname{Ext}^1_A(T,f)} \operatorname{Ext}^1_A(T,M) \xrightarrow{\operatorname{Ext}^1_A(T,g)} \operatorname{Ext}^1_A(T,N) \longrightarrow 0$$

jest ciągiem prawie rozszczepialnym w $\operatorname{mod} B$.

Jasne jest, że jeżeli $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_n$ jest modułem w $\operatorname{mod} A$ o parami nieizomorficznych nierozkładalnych składnikach prostych $T_1, \ldots, T_n$, to moduły $\operatorname{Hom}_A(T, T_i)$, dla $i \in \{1, \ldots, n\}$, tworzą zbiór wszystkich parami nieizomorficznych modułów projektywnych w $\operatorname{ind} \operatorname{End}_A(T)$. Kolejny wniosek z twierdzenia Brenner-Butlera sformułowany poniżej [50, patrz Proposition VIII.5.4] daje również pełną kontrolę nad postacią nierozkładalnych modułów injektywnych w $\operatorname{mod} \operatorname{End}_A(T)$, gdy T jest rozszczepiającym modułem odwracającym.

Wniosek 1.6.5. *Niech A będzie algebrą,* $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_n$ *rozszczepiającym modułem odwracającym w* $\operatorname{mod} A$ *o parami nieizomorficznych nierozkładalnych składnikach prostych* $T_1, \ldots, T_n$ *oraz* $B = \operatorname{End}_A(T)$ *stowarzyszoną algebrą endomorfizmów. Wówczas, jeżeli dla pewnego* $m \in \{1, \ldots, n\}$ *moduły* $T_1, \ldots, T_m$ *są projektywne w* $\operatorname{ind} A$*, zaś moduły* $T_{m+1}, \ldots, T_n$ *nie są projektywne, to następujące moduły*

$$\operatorname{Hom}_A(T, T_1), \ldots, \operatorname{Hom}_A(T, T_m), \operatorname{Ext}^1_A(T, \tau_A T_{m+1}), \ldots, \operatorname{Ext}^1_A(T, \tau_A T_n)$$

stanowią pełen układ parami nieizomorficznych modułów injektywnych w $\operatorname{ind} B$.

Rozważania niniejszej sekcji zamyka następujący wniosek dopełniający przedstawiony we Wniosku 1.6.4 powyżej częściowy opis ciągów prawie rozszczepialnych w kategorii modułów $\operatorname{mod} B$ algebry endomorfizmów $B = \operatorname{End}_A(T)$ rozszczepiającego modułu odwracającego T.

Wniosek 1.6.6. *Niech A będzie algebrą, T rozszczepiającym modułem odwracającym w* $\operatorname{mod} A$ *oraz* $B = \operatorname{End}_A(T)$*. Wówczas dowolny ciąg prawie rozszczepialny w* $\operatorname{mod} B$*, jest albo całkowicie zawarty w* $\mathscr{X}(T)$ *albo całkowicie zawarty w* $\mathscr{Y}(T)$*, albo jest (izomorficzny z) jednym ze skończenie wielu tak zwanych ciągów łączących w* $\operatorname{mod} B$*, to znaczy ciągów prawie rozszczepialnych w* $\operatorname{mod} B$ *postaci*

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(T,I) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_A(T, \operatorname{rad} P) \oplus \operatorname{Hom}_A(T, I/\operatorname{soc} I) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_A(T,P) \longrightarrow 0,$$

gdzie P jest modułem projektywnym w $\operatorname{ind} A$ *nie należącym do* $\operatorname{add} T$*, zaś I jest modułem injektywnym w* $\operatorname{ind} A$*, dla którego* $\operatorname{soc} I = \operatorname{top} P$.

Uwaga · Przypomnijmy tu jedynie, że przy założeniach powyższego wniosku, przyjmuje się ogólniej, nazywać *ciągiem łączącym* (w $\operatorname{mod} B$), każdy ciąg prawie rozszczepialny $0 \to Y \to E \to X \to 0$ w $\operatorname{mod} B$, którego końce Y oraz X są modułami, w $\mathscr{Y}(T)$ oraz $\mathscr{X}(T)$, odpowiednio. Dowodzi się wówczas, że ciągi prawie rozszczepialne w $\operatorname{mod} B$ o określonej w powyższym wniosku postaci wyczerpują wszystkie (z dokładnością do izomorfizmu ciągów dokładnych) ciągi łączące w $\operatorname{mod} B$ w tym sensie. Patrz także [50, Lemma VIII.4.1, VIII.4.2 oraz Theorem VIII.4.3] ·

1.7 Tuby półregularne w kołczanach Auslandera-Reiten ·

Kołczany z translacją nazywane półregularnymi tubami zostały omówione w sekcji 1.4. W tym podrozdziale zestawiamy bardziej szczegółowo różne techniczne lematy, w których opisujemy pewne przydatne później własności półregularnych tub jako składowych w kołczanach Auslandera-Reiten algebr. Często półregularne tuby występują w całych rodzinach, które mają również interesujące własności, co postaramy się zilustrować na zakończenie niniejszej sekcji, między innymi wprowadzając dobrze znaną koncepcję *silnie separującej rodziny składowych* pochodzącą od C. M. Ringela [34]. Dowodzimy przy tym kilka elementarnych lematów wykorzystanych w 4.3, które dotyczą pewnych własności separowania rodzin parami ortogonalnych uogólnionych standardowych półregularnych tub w kołczanach Auslandera-Reiten. Warto rozpocząć od następującego dobrze znanego lematu który pokazuje, że każda półregularna tuba jest uogólnioną standardową składową w kołczanie Auslandera-Reiten pewnej skończenie wymiarowej algebry nad ciałem.

Lemat 1.7.1. *Niech $\mathcal{T}$ będzie dowolną tubą półregularną. Wówczas istnieje K-algebra A, której kołczan Γ_A zawiera uogólnioną standardową składową $\mathcal{C}$ taką, że $\mathcal{C} = \mathcal{T}$ jako kołczany z translacją.*

dowód · Dowód w przypadku, gdy ciało K jest algebraicznie domknięte, jest konsekwencją indukcyjnego zastosowania [37, Proposition XV.2.7] (oraz dulanego wyniku). Po odpowiednie argumenty dla algebr nad dowolnym ciałem odsyłamy do pracy [27, patrz Theorem E]. □

Uwaga · Idea dowodu powyższego lematu polega na pokazaniu, że każdej operacji typu (ad. 1) (odpowiednio, (ad. 1*)) odpowiada ściśle określona operacja na algebrach w następującym sensie. Jeżeli A jest algebrą i $\mathcal{C}$ jest uogólnioną standardową tubą promieniową w Γ_A, to dla każdego promienia $\mathbb{X}$ w $\mathcal{C}$ oraz liczby naturalnej t konstruuje się algebrę $A' = A[\mathbb{X}, t]$ taką, że kołczan $\Gamma_{A'}$ zawiera uogólnioną standardową tubę promieniową postaci $\mathcal{C}[\mathbb{X}, t]$. Analogicznie własności przysługują operacjom wstawienia kopromieniowego ·

W bardzo często spotykanej sytuacji, to jest gdy kołczan Γ_A wyjściowej algebry zawiera rodzinę parami ortogonalnych uogólnionych standardowych stabilnych tub, można iterować operacje wstawienia promieniowego (odpowiednio, kopromieniowego) i stosować do kolejnych stabilnych tub, co prowadzi do pojęcia tubularnego (ko)rozszerzenia, którego źródeł należy szukać w pracy C. M. Ringela [34]. Zauważmy, że jeżeli $\mathcal{T}^A$ jest rodziną uogólnionych standardowych tub promieniowych w Γ_A, to dla każdego $t \geqslant 0$ oraz dowolnego promienia $\mathbb{X}$ w jednej z tub $\mathcal{C}$ z $\mathcal{T}^A$, kołczan $\Gamma_{A[\mathbb{X},t]}$ zawiera rodzinę $\mathcal{T}^A[\mathbb{X}, t]$ parami ortogonalnych uogólnionych standardowych tub promieniowych składającą się z tuby promieniowej $\mathcal{C}[\mathbb{X}, t]$ oraz wszystkich tub z $\mathcal{T}^A$ różnych od $\mathcal{C}$, które pozostają składowymi w $\Gamma_{A[\mathbb{X},t]}$. Algebrę B nazywamy *$\mathcal{T}^A$-tubularnym rozszerzeniem algebry A*, o ile istnieje taki ciąg algebr $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$, $n \geqslant 0$, wraz z odpowiadającym ciągiem $(\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n)$ rodzin tub promieniowych, że $A_0 = A$, $A_n = B$, $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}^A$ i każda z rodzin $\mathcal{T}_{i-1}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ zawiera pewien promień $\mathbb{X}_i$, dla którego $A_i = A_{i-1}[\mathbb{X}_i, t_i]$ oraz $\mathcal{T}_i = \mathcal{T}_{i-1}[\mathbb{X}_i, t_i]$, dla pewnego $t_i \geqslant 0$. Pomijamy dualne sformułowanie definicji *$\mathcal{T}^A$-tubularnego korozszerzenia*, które jest algebrą $B = A_n$ powstającą z algebry $A = A_0$ poprzez zastosowanie ciągu operacji odpowiadających operacjom wstawień kopromieniowych wykonywanych na rodzinie $\mathcal{T}^A$; w tej sytuacji oczywiście kołczan Γ_B algebry B zawiera rodzinę parami ortogonalnych uogólnionych standardowych tub kopromieniowych otrzymaną z $\mathcal{T}^A$ poprzez iterację odpowiednich operacji typu (ad. 1*). Odnotujmy tutaj również, że jeśli algebra B jest $\mathcal{T}^A$-tubularnym rozszerzeniem (odpowiednio, korozszerzeniem) (algebry A), to B jest izomorficzna z następującym rozszerzeniem

$$\begin{bmatrix} F & M \\ 0 & A \end{bmatrix} \quad \text{(odpowiednio, korozszerzeniem } \begin{bmatrix} A & D(M) \\ 0 & F \end{bmatrix}\text{)}$$

algebry A względem pewnego $(F\text{-}A)$-bimodułu M, przy czym nierozkładalne składniki proste A-modułu M_A należą to rodziny $\mathcal{T}^A$, co często pozwala dobrze kontrolować strukturę kołczanu Γ_B w zależności od struktury Γ_A.

Dalej prezentujemy serię technicznych lematów związanych z opisem położenia w kołczanie Γ_A danej algebry A modułów z uogólnionych standardowych stabilnych tub w kołczanach Γ_B jej algebr ilorazowych B. Odnotujmy najpierw, że zachodzi poniższy ogólny lemat.

Lemat 1.7.2. *Niech A będzie algebrą, $C = A/I$ algebrą ilorazową algebry A, zaś $\mathcal{T}$ dowolną stabilną tubą w Γ_C. Załóżmy ponadto, że istnieje składowa $\mathcal{C}$ w Γ_A, która zawiera wszystkie moduły należące do $\mathcal{T}$. Jeżeli $\mathcal{C}$ jest stabilną tubą w Γ_A, to $\mathcal{C} = \mathcal{T}$.*

Dowód · W istocie, rozważmy dowolny moduł M w $\operatorname{ind} A$ należący do składowej $\mathcal{C}$. Pokażemy, że M jest modułem w $\operatorname{ind} C$. Odnotujmy, że M jest modułem w stabilnej tubie $\mathcal{C}$ w Γ_A więc istnieje nieskończona droga sekcyjna monomorfizmów nieprzywiedlnych w $\operatorname{ind} A$ postaci

$$M = M_0 \to M_1 \to \cdots \to M_n \to M_{n+1} \to \ldots$$

Ponadto, $\mathcal{C}$ jest stabilną tubą w Γ_A zawierającą wszystkie moduły z $\mathcal{T}$, tak więc dla pewnej liczby $l \in \mathbb{N}_0$ istnieje ciąg epimorfizmów nieprzywiedlnych w $\operatorname{ind} A$ postaci $N = N_0 \to N_1 \to \cdots \to N_m = Z = M_l$ taki, że N jest modułem w $\mathcal{T}$. To implikuje ostatecznie, że M jest podmodułem modułu $M_l = Z$, który z kolei jest epimorficznym obrazem nierozkładalnego C-modułu N, toteż Z, i w konsekwencji M są modułami w $\operatorname{ind} C$. Wnioskujemy już stąd, że stabilna tuba $\mathcal{C}$ w Γ_A składa się wyłącznie modułów w $\operatorname{ind} C$, czyli jest stabilną tubą w Γ_C, a więc $\mathcal{T} = \mathcal{C}$, co należało udowodnić. □

Przypomnijmy teraz następujący znany wynik z pracy A. Skowrońskiego [43, patrz Proposition 2.2].

Stwierdzenie 1.7.3. *Niech A będzie algebrą, I dwustronnym ideałem w A oraz $B = A/I$ stowarzyszoną algebrą ilorazową. Załóżmy, że $\mathcal{T}$ jest nieregularną tubą kopromieniową w Γ_B, zaś $\mathcal{C}$ półregularną i uogólnioną standardową składową w Γ_A zawierającą zorientowany cykl oraz wszystkie moduły z części cyklicznej tuby $\mathcal{T}$. Wówczas $\mathcal{C}$ jest nieregularną tubą kopromieniową w Γ_A oraz wszystkie kopromienie w $\mathcal{T}$ są kopromieniami w $\mathcal{C}$.*

Poniższe dualne sformułowanie także pochodzi z cytowanego artykułu [43, patrz Proposition 2.3].

Stwierdzenie 1.7.4. *Niech A będzie algebrą, I dwustronnym ideałem w A oraz $B = A/I$ stowarzyszoną algebrą ilorazową. Załóżmy, że $\mathcal{T}$ jest nieregularną tubą promieniową w Γ_B, zaś $\mathcal{C}$ półregularną uogólnioną standardową składową w Γ_A zawierającą zorientowany cykl oraz wszystkie moduły z części cyklicznej tuby $\mathcal{T}$. Wówczas $\mathcal{C}$ jest nieregularną tubą promieniową w Γ_A oraz promienie w $\mathcal{T}$ są promieniami w $\mathcal{C}$.*

Zachodzą również następujące dwa stwierdzenia, których dowody można znaleźć w [10, (2.4)].

Stwierdzenie 1.7.5. *Niech A będzie algebrą, zaś $\mathcal{T}^A$ dokładną rodziną $(\mathcal{T}^A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ parami ortogonalnych uogólnionych standardowych tub promieniowych w Γ_A. Wówczas istnieje algebra ilorazowa B algebry A taka, że kołczan Γ_B zawiera dokładną rodzinę $\mathcal{T}^B = (\mathcal{T}^B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ parami ortogonalnych stabilnych tub oraz A jest $(\mathcal{T}^B)$-tubularnym rozszerzeniem algebry B, przy czym wtedy $\mathcal{T}^A$ powstaje z $\mathcal{T}^B$ poprzez iterację odpowiadających operacji wstawień promieniowych.*

Stwierdzenie 1.7.6. *Niech A będzie algebrą oraz $\mathcal{T}^A$ dokładną rodziną $(\mathcal{T}^A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ parami ortogonalnych uogólnionych standardowych tub kopromieniowych w Γ_A. Wówczas istnieje algebra ilorazowa B algebry A taka, że kołczan Γ_B zawiera dokładną rodzinę $\mathcal{T}^B = (\mathcal{T}^B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ parami ortogonalnych stabilnych tub oraz A jest $(\mathcal{T}^B)$-tubularnym korozszerzeniem algebry B; przy tym $\mathcal{T}^A$ powstaje z $\mathcal{T}^B$ poprzez odpowiadającą iterację operacji wstawień kopromieniowych.*

Poniżej przedstawiamy pewne przydatne później własności homomorfizmów w $\operatorname{ind} A$ o dziedzinie lub kodziedzinie należącej do półregularnych tub w Γ_A. Pierwszy lemat pochodzi z pracy A. Skowrońskiego [42, Lemma 3.9] poświęconej opisowi kompozycyjnych faktorów modułów okresowych leżących w uogólnionych standardowych stabilnych tubach.

Lemat 1.7.7. *Niech $\mathcal{T}$ będzie stabilną tubą w Γ_A rangi r oraz N modułem w $\operatorname{ind} A$ nie należącym do $\mathcal{T}$. Wówczas prawdziwe są następujące stwierdzenia.*

(1) Jeżeli $\operatorname{Hom}_A(\mathcal{T}, N) \neq 0$, to $\operatorname{Hom}_A(M, N) \neq 0$, dla każdego modułu M w $\mathcal{T}$ o quazi-długości $\operatorname{ql}(M) \geqslant r$.

(2) Jeżeli $\operatorname{Hom}_A(N, \mathcal{T}) \neq 0$, to $\operatorname{Hom}_A(N, M) \neq 0$, dla wszystkich modułów M w $\mathcal{T}$ z $\operatorname{ql}(M) \geqslant r$.

DOWÓD · Po odpowiednie argumenty odsyłamy do źródłowego artykułu [42, Lemma 3.9]. □

LEMAT 1.7.8. *Niech A będzie algebrą, $\mathcal{T}$ półregularną tubą w Γ_A, zaś X dowolnym modułem w* $\operatorname{ind} A$. *Wówczas zachodzą następujące warunki.*

(1) *Jeżeli $\mathcal{T}$ jest tubą promieniową otrzymaną z pewnej stabilnej tuby $\mathcal{T}'$ poprzez iterację operacji* (ad. 1), *to dowolny niezerowy homomorfizm w $f \in \operatorname{rad}_A^\infty(X, M)$, gdzie M jest modułem z* $\operatorname{add} \mathcal{T}$, *posiada faktoryzację postaci $f = gf'$, gdzie $f' \in \operatorname{rad}_A^\infty(X, M')$, $g \in \operatorname{Hom}_A(M', M)$ oraz M' jest modułem w* $\operatorname{add} \mathcal{T}'$.

(2) *Jeśli $\mathcal{T}$ jest tubą kopromieniową otrzymaną z pewnej stabilnej tuby $\mathcal{T}'$ poprzez iterację operacji* (ad. 1*), *dowolny niezerowy homomorfizm w $f \in \operatorname{rad}_A^\infty(N, X)$, gdzie N jest modułem w* $\operatorname{add} \mathcal{T}$, *ma faktoryzację $f = f'h$, gdzie $f' \in \operatorname{rad}_A^\infty(N', X)$, $h \in \operatorname{Hom}_A(N, N')$ i modułem N' jest modułem w* $\operatorname{add} \mathcal{T}'$.

DOWÓD · Dowód pozostawiamy jako ćwiczenie. □

Wykażemy jeszcze poniższe wygodne kryterium na to, aby składowa była półregularną tubą.

LEMAT 1.7.9. *Niech A będzie algebrą zaś $\mathcal{C}$ składową w Γ_A. Wówczas zachodzą następujące warunki.*

(1) *Jeżeli istnieje spójna składowa Γ w ${}_l\mathcal{C}$ zawierająca zorientowany cykl oraz taka, że podkołczan Γ^* nie zawiera bezpośrednich poprzedników modułów projektywnych w $\mathcal{C}$, to $\mathcal{C} = \Gamma^*$ jest tubą kopromieniową w Γ_A.*

(2) *Dualnie, jeśli ${}_r\mathcal{C}$ posiada spójną składową Γ taką, że istnieje zorientowany cykl w Γ oraz podkołczan Γ_* nie zawiera bezpośrednich następników modułów injektywnych w $\mathcal{C}$, to $\mathcal{C} = \Gamma_*$ jest tubą promieniową w Γ_A.*

DOWÓD · Dowodzimy jedynie (1), gdyż teza (2) będzie jasno wynikać z dualnych argumentów. Załóżmy zatem, że Γ jest pewną składową spójności lewej części ${}_l\mathcal{C}$ składowej $\mathcal{C}$ zawierającą zorientowany cykl, dla której podkołczan Γ^* nie ma bezpośrednich poprzedników modułów projektywnych w $\mathcal{C}$. Pokażemy poniżej, że wówczas $\Gamma^* = \mathcal{C}$ jest tubą kopromieniową w Γ_A.

Odnotujmy najpierw, że Γ^* jest tubą kopromieniową jako kołczan z translacją. W istocie, Γ^* jest spójnym i lewostronnie stabilnym podkołczanem z translacją w Γ_A (oraz Γ) zawierającym zorientowany cykl oraz zamkniętym na branie poprzedników w Γ, na mocy Lematu 1.4.9. Ponadto albo Γ składa się z τ_A-orbit okresowych albo takich τ_A-orbit nie zawiera. Jeżeli wszystkie τ_A-orbity w Γ są okresowe, to Γ jest stabilną tubą i wówczas oczywiście $\Gamma^* = \Gamma$ jest również stabilną tubą. Przypuśćmy zatem, że w Γ nie ma żadnej τ_A-orbity okresowej. Wtedy z Lematu 1.5.9 wynika, że kołczan Γ ma trywialne wartościowania, dla każdego X w Γ zachodzi $|X^-| \leqslant 2$ oraz istnieje nieskończona droga sekcyjna w Γ postaci

$$(*) \qquad \cdots \to X_{s+1} = \tau_A^r X_1 \to X_s \to \cdots \to X_1,$$

gdzie $r > s$ i Γ składa się z parami rozłącznych τ_A-orbit modułów $X_1, \ldots, X_s$, przy czym co najmniej jedna z nich nie jest stabilna. Przypominamy również, że drogę $(*)$ można wybrać w taki sposób, aby moduł $\tau_A^{-t} X_s = I$ był injektywny w Γ, dla pewnego $t \geqslant 0$. W szczególności, wówczas I należy do Γ^*, więc jest to również wierzchołek injektywny w Γ^*. Dalej zauważmy, że Γ^* jest również zamknięty na branie poprzedników w Γ. Rzeczywiście, jeśli istnieje strzałka w $\mathcal{C}$ postaci $X \to Y$ oraz Y należy do Γ^*, to X musi należeć do lewostronnie stabilnej τ_A-orbity, bowiem w przeciwnym razie istnieje takie $n \geqslant 0$, że mamy w $\mathcal{C}$ strzałkę postaci $\tau_A^n X \to \tau_A^n Y$, gdzie $\tau_A^n X = P$ jest projektywny. To prowadzi jednak do sprzeczności z założeniem, bo wtedy moduł $\tau_A^{n+1} Y$ należy do Γ^* oraz jest bezpośrednim poprzednikiem modułu projektywnego P. Tak więc X należy do ${}_l\mathcal{C}$, a więc należy do Γ, bo $Y \in \Gamma$ i Γ jest składową spójności w ${}_l\mathcal{C}$. Stąd oczywiście otrzymujemy, że X należy do Γ^*, bo Γ^* jest zamknięty na poprzedniki w Γ. Zatem Γ^* jest zamknięty na branie poprzedników w Γ_A. Wynika stąd, że każde oczko w $\mathcal{C}$ o prawym końcu w module z Γ^* składa się wyłącznie z modułów w Γ^*, a to implikuje, że obcięcie $l^* : \Gamma_0^* \to \mathbb{N}$ funkcji długości $l_A : (\Gamma_A)_0 \to \mathbb{N}$ na Γ_A do wierzchołków z podkołczanu Γ^* jest poprawnie określoną dodatnią funkcją addytywną na Γ^*. W konsekwencji, możemy stąd już wywnioskować, że Γ^* jest tubą kopromieniową (patrz Stwierdzenie 1.5.11 oraz uwaga po nim).

Udowodnimy teraz, że $\Gamma^* = \Gamma$. Wystarczy w tym celu wykazać, że wszystkie moduły należące do Γ^*, które są injektywne w Γ^* są także injektywne w Γ. Wiadomo oczywiście, że moduł $I = I_s^* = I_s$

leżący na τ_A-orbicie modułu X_s jest injektywny w Γ^* oraz w Γ. Dalej dowodzimy indukcyjnie względem s, że pozostałe moduły injektywne I_k^* w Γ^* leżące na orbitach modułów X_k, dla $k \in \{1, \ldots, s-1\}$, są również injektywne w Γ. Wspominamy jedynie, że dla $k = s \geqslant 2$ moduł $I_k^* = I_k = \tau_A^{-t_0} X_s$, gdzie $t_0 = t$, jest injektywny w Γ^* oraz Γ, i wówczas moduł injektywny I_{k-1}^* w Γ^* jest postaci $\tau_A^{-t_1} X_{s-1}$, dla pewnego $t_1 \in \{0, 1, \ldots t\}$, przy czym jeśli $t_1 < t$, to istnieje w Γ nieskończona droga sekcyjna postaci

$$\cdots \to \tau_A^{-t_1-1} X_{s+1} \to \tau_A^{-t_1-1} X_s \to \tau_A^{-t_1-1} X_{s-1} = \tau_\Gamma^{-1} I_{k-1}^*,$$

skąd $\tau_\Gamma^{-1} I_{k-1}^*$ należy do Γ^*, o ile jest określony w Γ. W konsekwencji, jeżeli $t_1 < t$, to I_{k-1}^* jest także injektywny w Γ ponieważ jest injektywny w Γ^*. Załóżmy zatem, że $t_1 = t$. W tym przypadku moduł I_{k-1}^* jest postaci $\tau_A^{-t} X_{s-1}$, i wtedy również musi być injektywny w Γ. W przeciwnym bowiem razie na mocy injektywności modułu I_k^* w Γ wnioskujemy, że $\tau_\Gamma^{-1} I_k^* = \tau_A^{-t-1} X_k = 0$, a więc moduł $X := \tau_\Gamma^{-1} I_{k-1}^*$ ma dokładnie jednego bezpośredniego poprzednika w Γ postaci $\tau_A^{-t} X_{k-2}$, który należy przy tym do Γ^*, i wówczas możemy zdefiniować pełny podkołczan Γ' w Γ składający się ze wszystkich wierzchołków w Γ^* oraz dodatkowo wierzchołka X, gdzie translacja τ' w Γ' pokrywa się z τ_{Γ^*} na wierzchołkach z Γ^*, zaś $\tau' X := I_{k-1}^*$. Stąd jednak wynika, że Γ' jest spójnym podkołczanem z translacją w ${}_l\Gamma_A$ zawierającym zorientowany cykl oraz żadnej τ_A-orbity okresowej, przy czym $(*)$ jest wtedy również drogą w Γ' spełniającą odpowiednie warunki (a)-(d), zaś obcięcie funkcji długości l do wierzchołków z Γ'_0 zadaje poprawnie określoną dodatnią funkcję addytywną na Γ', zatem na mocy Lematu 1.5.10(2), wnioskujemy, że istnieje $\tau_{\Gamma'}^{-t-1} X_k = \tau_{\Gamma'}^{-1} I_k^*$, ponieważ istnieje $\tau_{\Gamma'}^{-t-1} X_{k-1} = \tau_{\Gamma'}^{-1} I_{k-1}^* = X$. Ale wówczas otrzymujemy sprzeczność z definicją kołczanu Γ', bowiem $I_k^* \in \Gamma_0^* \subset \Gamma'_0$ jest z założenia injektywny zarówno w Γ^* jak i w Γ. Podsumowując, otrzymana sprzeczność pokazuje, że I_{k-1}^* jest faktycznie modułem injektywnym w Γ^*, a stąd wszystkie moduły injektywne $I_1^*, \ldots, I_k^*$ w Γ^* są injektywne w Γ. W konsekwencji, zachodzi równość $\Gamma^* = \Gamma$.

Teraz wystarczy zauważyć, że ponieważ Γ^* jest wówczas składową spójności $\Gamma^* = \Gamma$ w ${}_l\mathcal{C}$, to Γ jest także podkołczanem zamkniętym na branie następników w $\mathcal{C}$. Rzeczywiście, jeśli istnieje strzałka $X \to Y$ w $\mathcal{C}$ z X w Γ, to Y musi należeć do Γ, gdyż w przeciwnym razie należałby do τ_A-orbity modułu projektywnego, a wtedy istnienie strzałki $X \to Y$ implikuje istnienie strzałki $\tau_A^n X \to \tau_A^n Y$, dla pewnego $n \geqslant 0$ takiego, że $\tau_A^n Y = P$ jest projektywny, co jest niemożliwe, bo X, a więc i $\tau_A^n X$, należą do $\Gamma = \Gamma^*$ i nie mogą mieć z założenia bezpośrednich projektywnych następników w $\mathcal{C}$. Czyli faktycznie Γ nie ma następników w $\mathcal{C}$ leżących na τ_A-orbitach modułów projektywnych zatem jasne jest, że Γ jest zamknięty na branie następników w $\mathcal{C}$. Pokazaliśmy wcześniej, że podkołczan Γ^* jest również zamknięty na branie poprzedników w $\mathcal{C}$, skąd w konsekwencji $\Gamma = \Gamma^*$ jest zamknięty zarówno na branie poprzedników, jak i następników w $\mathcal{C}$, więc oczywiście $\Gamma = \mathcal{C}$ ponieważ $\mathcal{C}$ jest składową w Γ_A. Zatem w istocie $\Gamma^* = \Gamma = \mathcal{C}$ jest tubą kopromieniową jako składowa w Γ_A, co kończy dowód. □

W pozostałej części tego podrozdziału omawiamy krótko definicję i podstawowe własności tak zwanych *separujących rodzin składowych*. W dalszej części rozprawy pojawią się konkretne przykłady ilustrujące znaczenie tego pojęcia. Podajemy poniżej sformułowania podstawowych definicji oraz dowodzimy jeden potrzebny później lemat techniczny opisujący kołczany Auslandera-Reiten szczególnej postaci, w których prawie wszystkie składowe tworzą rodzinę uogólnionych standardowych półregularnych tub spełniającą pewne ściśle określone warunki separowania.

Przypominamy najpierw, że rodzinę składowych $\mathcal{C}^A = (\mathcal{C}_i^A)_{i \in I}$ w Γ_A nazywamy *separującą* w $\operatorname{mod} A$ wtedy i tylko wtedy, gdy kołczan Γ_A posiada rozkład $\Gamma_A = \mathcal{P}^A \cup \mathcal{C}^A \cup \mathcal{Q}^A$ na sumę trzech rozłącznych rodzin składowych $\mathcal{P}^A$, $\mathcal{C}^A$ oraz $\mathcal{Q}^A$, przy czym spełnione są następujące warunki.

(S1) $\mathcal{C}^A$ jest wierną rodziną parami ortogonalnych i uogólnionych standardowych składowych w Γ_A.

(S2) $\operatorname{Hom}_A(\mathcal{Q}^A, \mathcal{P}^A) = 0$, $\operatorname{Hom}_A(\mathcal{Q}^A, \mathcal{C}^A) = 0$ oraz $\operatorname{Hom}_A(\mathcal{C}^A, \mathcal{P}^A) = 0$.

(S3) Dowolny homomorfizm w $\operatorname{mod} A$ z $\mathcal{P}^A$ do $\mathcal{Q}^A$ faktoryzuje się przez $\operatorname{add} \mathcal{C}^A$.

W tej sytuacji powiemy czasami również, że rodzina $\mathcal{C}^A$ jest rodziną (składowych) *separującą $\mathcal{P}^A$ od $\mathcal{Q}^A$ w* $\operatorname{mod} A$. Jeżeli natomiast zachodzą warunki $(S1)$, $(S2)$ oraz następujący silniejszy warunek

(S3$^+$) homomorfizmy w $\operatorname{mod} A$ z $\mathcal{P}^A$ do $\mathcal{Q}^A$ faktoryzują się przez $\operatorname{add} \mathcal{C}_i^A$, dla każdego $i \in I$,

to rodzinę $\mathcal{C}$ nazwiemy rodziną *silnie separującą w* $\operatorname{mod} A$ (lub czasami *silnie separującą* $\mathcal{P}^A$ *od* $\mathcal{Q}^A$ *w* $\operatorname{mod} A$); patrz także [28], [29], [20], [21], [34]. Wspominamy tutaj jedynie, że koncepcja rodziny separującej pochodzi od C. M. Ringela i została zdefiniowana pracy [34], gdzie oryginalnie rodziną separującą nazywano rodzinę silnie separującą w powyższym sensie. Pozwólmy sobie dla skrócenia późniejszych sformułowań wprowadzić tutaj jeszcze jeden dodatkowy termin. Mianowicie będziemy nazywać rodzinę $\mathcal{C}^A$ składowych w Γ_A rodziną *prawie separującą* (odpowiednio, *prawie silnie separującą*), o ile Γ_A jest rozłączną sumą $\Gamma_A = \mathcal{P}^A \cup \mathcal{C}^A \cup \mathcal{Q}^A$, gdzie $\mathcal{C}^A$ jest rodziną parami ortogonalnych uogólnionych standardowych składowych w Γ_A oraz spełnione są warunki (S2) i (S3) (odpowiednio, (S2) i (S3$^+$)). Innymi słowy, dowolna rodzina prawie (silnie) separująca jest (silnie) separująca, o ile tylko jest wierna. W 4.3 będziemy mieli do czynienia z sytuacją, w której kołczan Γ_A algebry A jest postaci

$$\Gamma_A = \mathcal{P}^A \cup \bigcup_{q \in \bar{\mathbb{Q}}_1^n} \mathcal{T}_q^A \cup \mathcal{Q}^A,$$

przy czym $\mathcal{P}^A$ i $\mathcal{Q}^A$ są pewnymi rodzinami półregularnych składowych, zaś pozostałe składowe tworzą rozłączną sumę $\mathcal{T}_{[1,n]}^A = \bigcup_{q \in \bar{\mathbb{Q}}_1^n} \mathcal{T}_q^A$ rodzin $\mathcal{T}_q^A$ indeksowanych liczbami q z odcinka $\bar{\mathbb{Q}}_1^n = \mathbb{Q} \cap [1,n] \subset \mathbb{Q}$ oraz dla każdego $q \in \bar{\mathbb{Q}}_1^n$

$\mathcal{T}_q^A$ jest rodziną półregularnych tub prawie silnie separującą $\mathcal{P}^A \cup \mathcal{T}_{[1,q)}^A$ od $\mathcal{T}_{(q,n]}^A \cup \mathcal{Q}^A$ w $\operatorname{mod} A$,

gdzie dla dowolnego podzbioru $O \subset [1,n]$ przez $\mathcal{T}_O^A$ oznaczamy rodzinę $\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap O} \mathcal{T}_q^A$. Wówczas stosujemy także oznaczenia $\mathcal{P}_q^A$ i $\mathcal{Q}_q^A$, dla rodzin $\mathcal{P}^A \cup \mathcal{T}_{[1,q)}^A$ i $\mathcal{T}_{(q,n]}^A \cup \mathcal{Q}^A$, odpowiednio. Przykładowo, kołczan Γ_A dowolnej *cyklowo skończonej algebry A półregularnego typu* jest takiej postaci, co zostanie wykazane w sekcji 4.3 poświęconej omówieniu tej klasy algebr (patrz Twierdzenie 4.3.2). Wykażemy teraz następujący pomocniczy lemat.

Lemat 1.7.10. *Niech B będzie algebrą taką, że istnieje w Γ_B rodzina tub kopromieniowych $\mathcal{T}^B$ prawie silnie separująca $\mathcal{P}^B$ od $\mathcal{Q}(B)$ w* $\operatorname{mod} B$, *gdzie $\mathcal{P}^B$ jest rodziną składowych zawierającą wszystkie moduły projektywne w* $\operatorname{ind} B$, *a $\mathcal{Q}(B)$ preinjektywną składową w Γ_B. Ponadto załóżmy, że A jest $({}_s\mathcal{T}^B)$-tubularnym rozszerzeniem algebry B oraz $\mathcal{T}^A$ jest rodziną półregularnych tub w Γ_A powstającą z $\mathcal{T}^B$ poprzez iterację operacji typu* (ad. 1). *Wówczas $\mathcal{T}^A$ jest również rodziną prawie silnie separującą $\mathcal{P}^A = \mathcal{P}^B$ od $\mathcal{Q}^A$ w* $\operatorname{mod} A$, *gdzie $\mathcal{Q}^A$ jest rodziną składowych zawierającą wszystkie moduły X w* $\operatorname{ind} A$ *z* $\operatorname{res}_B(X)$ *w* $\operatorname{add} \mathcal{Q}(B)$.

dowód · Oczywiście algebra A jest izomorficzna z rozszerzeniem $A \cong B[M]$ algebry B o pewien bimoduł $M = {}_FM_B$, gdzie F jest K-algebrą, zaś M_B jest modułem w $\operatorname{add}({}_s\mathcal{T}^B)$. W szczególności, $\operatorname{Hom}_B(M, \mathcal{P}^B) = 0$, gdyż z założenia $\operatorname{Hom}_B(\mathcal{T}^B, \mathcal{P}^B) = 0$, tak więc na mocy Lematu 1.4.7 wszystkie składowe w Γ_B z rodziny $\mathcal{P}^B$ są również składowymi w Γ_A. Ponadto, tuby kopromieniowe w $\mathcal{T}^B$ są parami ortogonalne i uogólnione standardowe, zatem również dla każdej tuby $\mathcal{T}$ w $\mathcal{T}^B$, która nie zawiera żadnego składnika prostego modułu M_B, zachodzi $\operatorname{Hom}_B(M, \mathcal{T}) = 0$, a więc jak wyżej jest to także składowa w Γ_A. Dalej stosując indukcyjnie [37, Proposition XV.2.7] wnioskujemy, że $\mathcal{T}^A$ jest rodziną uogólnionych standardowych i parami ortogonalnych półregularnych tub w Γ_A oraz dowolny moduł X w $\operatorname{ind} A$ należy do $\mathcal{T}^A$, wtedy i tylko wtedy, gdy jego obcięcie $\operatorname{res}_B(X)$ do B ma przynajmniej jeden składnik prosty należący do pewnej stabilnej tuby z $\mathcal{T}^B$ zawierającej składniki proste modułu M. Wówczas moduł X w $\operatorname{ind} A$ nie należy do $\mathcal{P}^A = \mathcal{P}^B$ ani do $\mathcal{T}^A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{res}_B(X)$ jest modułem w $\operatorname{add} \mathcal{Q}(B)$. Stąd Γ_A ma rozkład na rozłączną sumę $\Gamma_A = \mathcal{P}^A \cup \mathcal{T}^A \cup \mathcal{Q}^A$, a więc pozostaje pokazać, że zachodzą warunki (S2) i (S3$^+$) z definicji rodziny separującej. Przypomnijmy najpierw, że kategoria $\operatorname{mod} A$ jest równoważna z kategorią reprezentacji bimodułu ${}_FM_B$, i możemy utożsamiać dowolny moduł X w $\operatorname{mod} A$ z trójką postaci $(X_0, X_1; \phi)$, gdzie $X_1 = \operatorname{res}_B(Y)$, $X_0 = \operatorname{Hom}_B(M, X_1)$ oraz $\phi = \operatorname{Id}_{X_0}$. Jeśli przy tym X jest modułem w $\mathcal{P}^A$, to $X_0 = 0$. Co więcej, dowolny homomorfizm $f : Y \to X$ w $\operatorname{ind} A$, gdzie $Y = (Y_0, Y_1; \psi)$ jest modułem w $\mathcal{T}^A \cup \mathcal{P}^A$, zaś $X = (0, X_1; 0)$ modułem w $\mathcal{P}^A$, identyfikujemy z parą $(0, g)$ dla pewnego homomorfizmu $g \in \operatorname{Hom}_B(Y_1, X_1)$, przy czym $g \neq 0$, jeśli tylko $f \neq 0$. Wynika stąd jasno, że $\operatorname{Hom}_A(\mathcal{T}^A \cup \mathcal{Q}^A, \mathcal{P}^A) = 0$, ponieważ $\mathcal{T}^B$ jest rodziną prawie silnie separującą $\mathcal{P}^B$ od $\mathcal{Q}(B)$ w $\operatorname{mod} B$.

Podobnie można pokazać, że $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{Q}^A, \mathcal{T}^B) = 0$. Ostatecznie odnotujmy, że dowolny niezerowy homomorfizm $Y \to Z$ w $\mathrm{ind}\, A$, gdzie Z należy do $\mathcal{T}^A$ oraz $Y \in \mathcal{Q}^A$, indukuje na mocy Lematu 1.7.8(1) niezerowy homomorfizm postaci $Y \to Z'$, gdzie Z' należy do $\mathcal{T}^B$, skąd $\mathrm{Hom}_A(Y, \mathcal{T}^B) \neq 0$, i otrzymujemy sprzeczność. To pokazuje, że zachodzi również $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{Q}^A, \mathcal{T}^A) = 0$, skąd wnioskujemy, że rodzina $\mathcal{T}^A$ spełnia warunek (S2). Aby udowodnić, że zachodzi również (S3$^+$) wystarczy zauważyć, że dowolny niezerowy homomorfizm $f : X \to Y$ w $\mathrm{mod}\, A$, gdzie X należy do $\mathcal{P}^A = \mathcal{P}^B$, zaś Y do $\mathcal{Q}^A$, można identyfikować z odpowiednim morfizmem trójek postaci $(h, g) : (0, X_1; 0) \to (Y_0, Y_1; \phi)$, dla $h = 0$ oraz $g \in \mathrm{Hom}_B(X_1, Y_1)$, przy czym g jest wówczas niezerowym homomorfizmem w $\mathrm{Hom}_B(\mathcal{P}^B, \mathrm{add}\, \mathcal{Q}(B))$. W szczególności, ponieważ rodzina $\mathcal{T}^B$ jest prawie silnie separująca w $\mathrm{mod}\, B$, to dla dowolnej tuby $\mathcal{T}$ w $\mathcal{T}^B$ homomorfizm g posiada faktoryzację $g = g_2 g_1$, gdzie $g_1 \in \mathrm{Hom}_B(X_1, U)$, $g_2 \in \mathrm{Hom}_B(U, Y_1)$ oraz U jest modułem z $\mathrm{add}\, \mathcal{T}$. Wówczas mamy również indukowaną faktoryzację $f = f_2 f_1$ homomorfizmu f, gdzie $f_1 : X \to V$ i $f_2 : V \to Y$ są homomorfizmami w $\mathrm{mod}\, A$ odpowiadającymi morfizmom trójek postaci $(0, g_1) : (0, X; 0) \to (0, U; 0)$ i $(0, g_2) : (0, U; 0) \to (Y_0, Y_1; \phi)$, odpowiednio, zaś $V = (0, U; 0) \simeq U$ jest oczywiście modułem w $\mathrm{add}\, \mathcal{T}^A$. Ponieważ rodzina $\mathcal{T}^A$ powstaje z rodziny $\mathcal{T}^B$ poprzez iteracje odpowiednich operacji (ad. 1), wnioskujemy teraz, że dla każdej tuby $\mathcal{T}$ w $\mathcal{T}^A$ homomorfizm f jest złożeniem $f = f_2 f_1$ pewnych homomorfizmów $f_1 : X \to V$ i $f_2 : V \to Y$ w $\mathrm{mod}\, A$, gdzie V jest modułem w $\mathrm{add}\, \mathcal{T}$. Tak więc rodzina $\mathcal{T}^A$ spełnia również warunek (S3$^+$), i w konsekwencji, jest to rodzina prawie silnie separująca $\mathcal{P}^A$ od $\mathcal{Q}^A$ w $\mathrm{mod}\, A$, co kończy dowód. □

Nietrudno wywieść stąd poniższy poniższy wniosek.

Wniosek 1.7.11. *Niech B będzie algebrą taką, że $\Gamma_B = \mathcal{P}^B \cup \mathcal{T}^B_{[1,n]} \cup \mathcal{Q}(B)$, gdzie $\mathcal{P}^B$ jest rodziną składowych zawierającą postprojektywną składową $\mathcal{P}(B)$, $\mathcal{Q}(B)$ jest preinjektywną składową w Γ_B, zaś $\mathcal{T}^B_{[1,n]}$, $n \geqslant 2$, jest rozłączną sumą rodzin $\mathcal{T}^B_{[1,n]} = \bigcup_{q \in \bar{\mathbb{Q}}^n_1} \mathcal{T}^B_q$ spełniającą następujące warunki.*

- *$\mathcal{T}^B_q$ jest rodziną półregularnych tub prawie silnie separującą $\mathcal{P}^B_q$ od $\mathcal{Q}^B_q$ w $\mathrm{mod}\, B$, dla każdego $q \in \bar{\mathbb{Q}}^n_1$.*
- *$\mathcal{T}^B_n$ zawiera wyłącznie tuby kopromieniowe.*
- *$\mathcal{T}^B_q$ jest rodziną stabilnych tub, dla wszystkich $q \in \bar{\mathbb{Q}}^n_1 \setminus \{1, \dots, n\}$.*

Wówczas, jeżeli algebra A jest $({}_s\mathcal{T}^B_n)$-tubularnym rozszerzeniem B, to kołczan Γ_A jest postaci $\Gamma_A = \mathcal{P}^A \cup \mathcal{T}^A_{[1,n]} \cup \mathcal{Q}^A$, gdzie $\mathcal{P}^A = \mathcal{P}^B$ oraz $\mathcal{T}^A_{[1,n]} = \bigcup_{q \in \bar{\mathbb{Q}}^n_1} \mathcal{T}^A_q$, przy czym $\mathcal{T}^A_q = \mathcal{T}^B_q$, jeśli $q \in [1, n)$. Ponadto, wtedy każda z rodzin $\mathcal{T}^A_q$, dla $q \in \bar{\mathbb{Q}}^n_1$, jest także rodziną półregularnych tub w Γ_A prawie silnie separującą $\mathcal{P}^A_q$ od $\mathcal{Q}^A_q$ w $\mathrm{mod}\, A$.

Dowód · Na mocy założeń $\mathcal{P}^B \cup \mathcal{T}^B_{[1,n)}$ zawiera wszystkie moduły projektywne w $\mathrm{ind}\, B$, więc z Lematu 1.7.10 otrzymujemy, że kołczan Γ_A ma żądany rozkład $\Gamma_A = \mathcal{P}^A \cup \mathcal{T}^A \cup \mathcal{Q}^A$, gdzie $\mathcal{P}^A = \mathcal{P}^B$, $\mathcal{T}^A = \mathcal{T}^A_{[1,n]}$ oraz dla każdego $q \in \mathbb{Q} \cap [1, n)$ mamy $\mathcal{T}^A_q = \mathcal{T}^B_q$. Ponadto $\mathcal{Q}^A$ jest rodziną składowych zawierającą wszystkie moduły X w $\mathrm{ind}\, A$ z obcięciem $\mathrm{res}_B(X)$ należącym do $\mathrm{add}\, \mathcal{Q}(B)$, przy czym $\mathcal{T}^A_n$ jest rodziną półregularnych tub prawie silnie separującą $\mathcal{P}^A_n = \mathcal{P}^A \cup \mathcal{T}^A_{[1,n)}$ od $\mathcal{Q}^A = \mathcal{Q}^A_n$ w $\mathrm{mod}\, A$ powstającą z rodziny $\mathcal{T}^B_n$ poprzez iterację operacji typu (ad. 1). Pozostaje wykazać, że dla każdego $q \in \bar{\mathbb{Q}}^n_1$ rodzina $\mathcal{T}^A_q$ jest również rodziną składowych prawie silnie separującą $\mathcal{P}^A_q$ od $\mathcal{Q}^A_q$ w $\mathrm{mod}\, A$. Ponieważ $q \in [1, n)$, mamy $\mathcal{T}^A_q = \mathcal{T}^B_q$ oraz $\mathcal{P}^A_q = \mathcal{P}^B_q$, czyli z założenia $\mathcal{T}^A_q = \mathcal{T}^B_q$ jest rodziną półregularnych tub prawie silnie separującą $\mathcal{P}^B_q = \mathcal{P}^A_q$ od $\mathcal{Q}^B_q$ w $\mathrm{mod}\, B$. Stąd $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{T}^A_q, \mathcal{P}^A_q) = \mathrm{Hom}_B(\mathcal{T}^B_q, \mathcal{P}^B_q) = 0$ oraz $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{Q}^B_q, \mathcal{T}^A_q \cup \mathcal{P}^A_q) = 0$. Ponadto $\mathcal{Q}^B_q = \mathcal{T}^B_{(q,n)} \cup \mathcal{T}^B_n \cup \mathcal{Q}(B)$ oraz $\mathcal{Q}^A_q = \mathcal{T}^A_{(q,n)} \cup \mathcal{T}^A_n \cup \mathcal{Q}^A$, zatem zachodzi również $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{Q}^A_q, \mathcal{T}^A_q \cup \mathcal{P}^A_q) = 0$, gdyż $\mathcal{T}^A_n$ jest rodziną prawie silnie separującą $\mathcal{P}^A_n$ od $\mathcal{Q}^A_n = \mathcal{Q}^A$ w $\mathrm{mod}\, A$, oraz $\mathcal{P}^B_q \cup \mathcal{T}^B_q = \mathcal{P}^A_q \cup \mathcal{T}^A_q \subset \mathcal{P}^A_n$. Tak więc zachodzi warunek (S2). Dalej, niech f będzie niezerowym homomorfizmem $f : X \to Y$ w $\mathrm{mod}\, A$, gdzie moduły X, Y są nierozkładalne i należą do $\mathcal{P}^A_q$ oraz $\mathcal{Q}^A_q$, odpowiednio. Wnioskujemy stąd, że X jest modułem w $\mathrm{ind}\, B$, bo $\mathcal{P}^A_q = \mathcal{P}^B_q$, zaś dla dowolnego nakrycia projektywnego $\pi : P(Y) \to Y$ modułu Y w $\mathrm{mod}\, A$ moduł $P(Y)$ należy do $\mathrm{add}\, \mathcal{P}^A \cup \mathcal{T}^A_{[1,n]}$, ponieważ rodzina $\mathcal{Q}^A$ nie zawiera modułów projektywnych. Jeżeli wszystkie nierozkładalne składniki proste modułu $P(Y)$ należą do $\mathcal{P}^A_n = \mathcal{P}^A \cup \mathcal{T}^A_{[1,n)}$, to są to moduły projektywne w $\mathrm{ind}\, B$ należące do $\mathcal{P}^B \cup \mathcal{T}^B_{[1,n-1]}$, i wtedy moduł $P(Y)$ jest modułem w $\mathrm{mod}\, B$, toteż Y, jako jego epimorficzny obraz jest modułem w $\mathrm{ind}\, B$, bo jest nierozkładalny w $\mathrm{mod}\, A$. Ponadto, Y jest przy tym modułem w składowej z rodziny $\mathcal{Q}^A_q = \Gamma_A \setminus (\mathcal{P}^B_q \cup \mathcal{T}^B_q)$, a więc Y jako moduł w $\operatorname{ind} B$ musi należeć do rodziny składowych $\mathcal{Q}_q^B$ w Γ_B. Stąd otrzymujemy, że homomorfizm $f : X \to Y$ jest niezerowym homomorfizmem w $\operatorname{ind} B$ z modułu X w $\mathcal{P}_q^B$ do modułu Y w $\mathcal{Q}_q^B$, tak więc f ma żądaną faktoryzację przez moduł z $\operatorname{add}(\mathcal{C})$, dla każdej składowej $\mathcal{C}$ w $\mathcal{T}_q^B = \mathcal{T}_q^A$, ponieważ $\mathcal{T}_q^B$ jest rodziną prawie silnie separującą $\mathcal{P}_q^B$ od $\mathcal{Q}_q^B$ w $\operatorname{mod} B$. Przypuśćmy ostatecznie, że nakrycie projektywne $P(Y)$ modułu Y ma co najmniej jeden składnik prosty należący do $\mathcal{T}_n^A$. Wtedy Y jako moduł w $\operatorname{ind} A$ może być identyfikowany z trójką $Y \simeq (Y_0, Y_1, \phi)$, gdzie Y_1 jest modułem w $\operatorname{mod} B$, $Y_0 = \operatorname{Hom}_B(M, Y_1) \neq 0$ oraz $\phi = \mathrm{Id}_{Y_0}$ (patrz 1.2), przy czym na mocy Lematu 1.2.4 mamy $\operatorname{Hom}_B(M, Y') \neq 0$, dla dowolnego $Y' \Subset Y_1$ w $\operatorname{ind} B$, zatem nierozkładalne składniki proste modułu Y_1 w $\operatorname{ind} B$ należą do $\mathcal{Q}_q^B$, ponieważ $q < n$. Wystarczy teraz zauważyć, że X jest modułem w $\operatorname{ind} B$ należącym do $\mathcal{P}_q^A = \mathcal{P}_q^B$, więc stowarzyszona z nim trójka jest postaci $(0, X; 0)$, czyli homomorfizm $f : X \to Y$ można wówczas utożsamiać z parą $(0, g)$, gdzie 0 oznacza homomorfizm zerowy $0 \to Y_0$ w $\operatorname{mod} F$, zaś $g \in \operatorname{Hom}_B(X, Y_1)$. Jednak wtedy g jest homomorfizmem w $\operatorname{mod} B$ z modułu $X \in \mathcal{P}_q^B$ do modułu $Y_1 \in \operatorname{add} \mathcal{Q}_q^B$, skąd podobnie jak w dowodzie Lematu 1.7.10 wnioskujemy, że dla dowolnej składowej $\mathcal{C}$ w $\mathcal{T}_q^A = \mathcal{T}_q^B$, homomorfizm g ma faktoryzację przez moduł C w $\operatorname{add} \mathcal{C}$, która indukuje analogiczną faktoryzację homomorfizmu f, i w konsekwencji, zachodzi również warunek (S3$^+$). $\square$

Rozdział 2

· Od algebr o małych wymiarach homologicznych do uogólnionych algebr podwójnie odwróconych ·

Rozdział ten ma na celu wprowadzenie i omówienie najważniejszych własności różnych znanych klas algebr, które pojawiać się będą w rozważaniach niniejszej rozprawy. Wszystkie zdefiniowane tutaj typy algebr są w pewnym sensie uogólnieniami klasy *algebr odwróconych* 2.2, lub generalnie, tak zwanych *algebr podwójnie odwróconych* 2.6. Klasa algebr podwójnie odwróconych została odkryta przy okazji badań nad klasą *algebr o małych wymiarach homologicznych*, to znaczy algebr A, dla których dowolny moduł Z w $\operatorname{ind} A$ spełnia $\operatorname{pd}_A Z \leqslant 1$ lub $\operatorname{id}_A Z \leqslant 1$. Każda taka algebra ma $\operatorname{gl.dim} A \leqslant 3$, oraz z pewnych powodów wyróżnia się wśród nich te, dla których $\operatorname{gl.dim} A = 3$, i nazywa algebrami o *ściśle małych wymiarach homologicznych*. Okazało się, że pozostałe algebry o małych wymiarach homologicznych tworzą ważną klasę algebr zwanych *algebrami quazi-odwróconymi*, którą będziemy konsekwentnie omawiać kolejno, w sekcjach 2.1–2.5. Podrozdział 2.6 poświęcony jest klasie algebr o ściśle małych wymiarach homologicznych i dopełnia on ostatecznie klasyfikację wszystkich algebr o małych wymiarach homologicznych. Przedstawiamy tam ważną strukturalną charakteryzację klasy algebr o ściśle małych wymiarach homologicznych, pokazującą, że każda taka algebra jest algebrą podwójnie odwróconą A, to znaczy kołczan Γ_A posiada dokładną i uogólnioną standardową składową zawierającą tak zwaną *podwójną sekcję*, czyli pewien podkołczan spełniający ściśle określone warunki, które istotnie rozszerzają definicję sekcji w składowej 1.4. Dzięki tej obserwacji można interpretować algebry o (ściśle) małych wymiarach homologicznych jako kolejny przykład uogólnienia klasy algebr odwróconych. Otrzymane wyniki zainicjowały również badania nad dalszym rozszerzeniem definicji podwójnej sekcji, w związku z czym I. Reiten i A. Skowroński [32] wprowadzili i zbadali pojęcie *wielosekcji* w składowej o którym wspominaliśmy w 1.4, co bezpośrednio wiązało się z odkryciem klasy tak zwanych *uogólnionych algebr podwójnie odwróconych*, omówionej w zamykającym nasze rozważania podrozdziale 2.7.

2.1 Algebry dziedziczne ·

Rozpoczynamy od przypomnienia najważniejszych własności *algebr dziedzicznych*, które stanowią pierwszy szczególny przypadek algebr o małych wymiarach homologicznych. Kategorie modułów algebr dziedzicznych mają możliwie najprostszą strukturę homologiczną, przez co rozumiemy tutaj, że wszystkie moduły w $\operatorname{ind} A$ mają projektywny oraz injektywny wymiar co najwyżej równy jeden (oczywiście, trywialnie wszystkie algebry półproste spełniają to ograniczenie). Przypominamy, że dowolną K-algebrę A nazywamy *algebrą prawostronnie* (odpowiednio, *lewostronnie*) *dziedziczną* wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie ideały prawostronne (odpowiednio, lewostronne) algebry A są zawsze modułami projektywnymi w $\operatorname{mod} A$ (odpowiednio, w $\operatorname{mod} A^{\mathrm{op}}$).

Odnotujmy najpierw następujące dobrze znane twierdzenie [49, patrz Theorem I.9.1], które zestawia kilka równoważnych warunków charakteryzujących algebry prawostronnie dziedziczne.

Twierdzenie 2.1.1. *Dla dowolnej algebry H następujące warunki są równoważne.*

(i) H jest prawostronnie dziedziczna.

(ii) *Dowolny podmoduł modułu wolnego w* $\operatorname{mod} H$ *jest modułem projektywnym.*

(iii) *Każdy podmoduł modułu projektywnego w* $\operatorname{mod} H$ *jest również modułem projektywnym w* $\operatorname{mod} H$.

(iv) *Radykał* $\operatorname{rad} P$ *dowolnego modułu projektywnego* P *w* $\operatorname{ind} H$ *jest modułem projektywnym w* $\operatorname{mod} H$.

(v) *Wszystkie moduły* M *w* $\operatorname{mod} H$ *spełniają* $\operatorname{pd}_H M \leqslant 1$.

(vi) $\operatorname{gl.dim} H \leqslant 1$.

Uwaga · Powyższe twierdzenie ma swój dualny odpowiednik, który orzeka, że H jest algebrą lewostronnie dziedziczną wtedy i tylko wtedy, gdy dowolny moduł ilorazowy modułu injektywnego w $\operatorname{mod} H$ jest modułem injektywnym w $\operatorname{mod} H$ (lub odpowiednio, moduł ilorazowy $E/\operatorname{soc} E$ jest injektywny w $\operatorname{mod} H$ dla każdego modułu injektywnego E w $\operatorname{ind} H$) wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{id}_H M \leqslant 1$ dla wszystkich modułów M w $\operatorname{mod} H$, co jest równoważne także w tym przypadku nierówności $\operatorname{gl.dim} H \leqslant 1$. Innymi słowy dowolna K-algebra jest dziedziczna prawostronnie wtedy i tylko wtedy, gdy jest dziedziczna lewostronnie. Dlatego też każdą taką algebrę nazywa się po prostu *algebrą dziedziczną* ·

Przypomnijmy tutaj tylko [49, patrz Corollary I.9.4], że jeżeli A jest algebrą dziedziczną, to dla każdego projektywnego lub injektywnego modułu X w $\operatorname{ind} A$, jego algebra endomorfizmów $\operatorname{End}_A(X)$ jest algebrą z dzieleniem. Pierwszej szerokiej klasy algebr dziedzicznych dostarczają algebry dróg kołczanów acyklicznych, o czym mówi następujące twierdzenie, którego dowód można znaleźć na przykład w [49, Theorem I.9.6].

Twierdzenie 2.1.2. *Niech Q będzie kołczanem skończonym, zaś K dowolnym ciałem. Wówczas jeśli Q jest kołczanem acyklicznym, to algebra dróg KQ kołczanu Q jest algebrą dziedziczną. Ponadto, dla każdego ideału dopuszczalnego I w algebrze dróg KQ algebra ilorazowa KQ/I jest dziedziczna wtedy i tylko wtedy, gdy Q jest kołczanem acyklicznym oraz $I = 0$.*

Uwaga · Na mocy [2, Theorem II.3.7] oraz powyższego Twierdzenia algebry dróg kołczanów acyklicznych wyczerpują wszystkie możliwe (z dokładnością do izomorfizmu) algebry dziedziczne nad ciałami algebraicznie domkniętymi. Znacznie szerszą klasę algebr dziedzicznych nad dowolnymi ciałami tworzą K-algebry tensorowe pewnych układów bimodułów, W istocie, rozważmy dowolne skończenie wymiarowe K-algebry z dzieleniem $F_1, \dots, F_n$ oraz niech $\mathbb{M} = ({}_iM_j)_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$ będzie układem $(F_i$-$F_j)$-bimodułów ${}_iM_j$, dla $i, j \in \{1, \dots, n\}$, na których ciało K działa centralnie, to jest, dla wszystkich $m \in {}_iM_j$ i $\lambda \in K$ zachodzi równość $\lambda(1_{F_i}m) = (m1_{F_j})\lambda$ oraz $\dim_K {}_iM_j < +\infty$, dla dowolnych $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Niech ponadto $F = F_1 \times \cdots \times F_n$. Przypominamy, że każdemu takiemu układowi $\mathbb{M}$ można przyporządkować wartościowany kołczan $Q_{\mathbb{M}}$ oraz K-algebrę $T(\mathbb{M})$, gdzie:

- zbiór wierzchołków kołczanu $Q_{\mathbb{M}}$ to $\{1, \dots, n\}$, zaś dla dwóch $i, j \in \{1, \dots, n\}$ przyjmujemy, że istnieje w $Q_{\mathbb{M}}$ strzałka $i \to j$ wtedy i tylko wtedy, gdy ${}_iM_j \neq 0$; ponadto, jeśli $\alpha : i \to j$ jest strzałką $Q_{\mathbb{M}}$, to jej wartościowanie $d(\alpha) = (\delta_{ij}, \delta'_{ij})$ określają odpowiednie wymiary $\delta_{ij} = \dim_{F_j} {}_iM_j$ oraz $\delta'_{ij} = \dim_{F_i^{\mathrm{op}}} {}_iM_j$ bimodułu ${}_iM_j$.
- Algebra $T(\mathbb{M})$ jest algebrą tensorową $T(\mathbb{M}) := T_F(M)$ stowarzyszoną z $(F$-$F)$-bimodułem $M = \bigoplus_{i,j\in\{1,\dots,n\}} {}_iM_j$, to znaczy $T(\mathbb{M})$ jest algebrą postaci $T(\mathbb{M}) = \bigoplus_{n\geqslant 0} M^{\otimes n}$, gdzie $M^{\otimes n} = M \otimes_F M \otimes_F \cdots \otimes_F M$ jest produktem tensorowym n kopi $(F$-$F)$-bimodułu M.

Przypomnijmy jedynie, że wszystkie algebry dróg $A = KQ$ kołczanów acyklicznych Q są algebrami tego typu i w tym sensie algebry postaci $T(\mathbb{M})$ stanowią uogólnienie algebr dróg kołczanów acyklicznych ·

Twierdzenie 2.1.3. *Niech $\mathbb{M}$ będzie układem $(F_i$-$F_j)$-bimodułów nad ustalonymi K-algebrami z dzieleniem $F_1, \dots, F_n$. Załóżmy ponadto, że $Q_{\mathbb{M}}$ jest spójnym i acyklicznym kołczanem wartościowanym. Wtedy algebra tensorowa $T(\mathbb{M})$ jest skończenie wymiarową (spójną) K-algebrą dziedziczną oraz $Q_{T(\mathbb{M})} = Q_{\mathbb{M}}$.*

Podamy teraz kilka zasadniczych własności dających pierwsze ogólne intuicje odnośnie struktury kołczanu Auslandera-Reiten i kategoriach modułów algebr dziedzicznych.

Twierdzenie 2.1.4. *Niech A będzie spójną algebrą dziedziczną. Wówczas istnieje w Γ_A składowa postprojektywna $\mathcal{P}(A)$ i składową preinjektywna $\mathcal{Q}(A)$ oraz zachodzą następujące stwierdzenia.*

(1) Składowa $\mathcal{P}(A)$ zawiera sekcję $\Gamma = \Gamma(A)$ składającą się ze wszystkich modułów projektywnych w $\operatorname{ind} A$.

(2) Składowa $\mathcal{Q}(A)$ zawiera sekcję $\Sigma = \Sigma(A)$ składającą się ze wszystkich modułów injektywnych w $\operatorname{ind} A$.

(3) Γ oraz Σ są izomorficzne z Q_A^{op}, jako kołczany wartościowane.

Dowód · Patrz [50, Theorem VII.6.1, VII.6.2]. □

Dla algebry dziedzicznej A, moduły w $\operatorname{ind} A$, które nie należą ani do składowej $\mathcal{P}(A)$ ani do składowej $\mathcal{Q}(A)$, nazywane są *modułami regularnymi* (w $\operatorname{ind} A$). Pełną podkategorię $\operatorname{ind} A$ składającą się ze wszystkich modułów regularnych w $\operatorname{ind} A$ oznaczamy symbolem $\mathscr{R}^A$ i nazywamy czasami *częścią regularną* $\operatorname{ind} A$. Odnotujmy następujący wniosek dający wstępny obraz struktury algebr dziedzicznych.

Wniosek 2.1.5. *Jeśli A jest dowolną spójną algebrą dziedziczną, to zachodzą następujące stwierdzenia.*

(1) Kołczan zwyczajny Q_A algebry A jest acykliczny.

(2) Dowolny moduł X leżący w składowej $\mathcal{P}(A)$ bądź $\mathcal{Q}(A)$ nie ma samorozszerzeń, to jest $\operatorname{Ext}_A^1(X,X) = 0$, oraz jego algebra endomorfizmów $\operatorname{End}_A(X)$ jest jest algebrą z dzieleniem.

(3) Algebra A jest skończonego reprezentacyjnego typu wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{P}(A) = \mathcal{Q}(A)$. W szczególności, jeśli A jest nieskończonego typu, to część regularna $\mathscr{R}^A$ jest niepusta, i co za tym idzie, kołczan Γ_A zawiera co najmniej jedną składową poza składowymi $\mathcal{P}(A)$ oraz $\mathcal{Q}(A)$. Zachodzi przy tym trysekcja

$$\Gamma_A = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{R}^A \cup \mathcal{Q}(A),$$

gdzie rodzina $\mathcal{R}^A$ składająca się z modułów w części regularnej $\operatorname{ind} A$ *jest rodziną składowych regularnych.*

Dowód · Patrz poprzednie twierdzenie oraz [50, Corollary VII.6.3, Proposition VI.6.6 i 6.7]. □

Uwaga · Dowodzi się [50, Theorem VII.7.4], że (spójna) algebra dziedziczna A jest skończonego reprezentacyjnego typu wtedy i tylko wtedy, gdy $\bar{Q}_A$ jest grafem typu Dynkina (patrz A.1). Ponadto, dowolną spójną algebrę dziedziczną A, przyjmujemy nazywać algebrą *oswojonego* (odpowiednio, *dzikiego*) *typu reprezentacyjnego* wtedy i tylko wtedy, gdy graf $\bar{Q}_A$ jest wartościowanym grafem jednego z typów Euklidesowych A.2, lub odpowiednio, jest grafem typu dzikiego, to znaczy, dowolnym grafem, który nie jest ani typu Dynkina ani typu Euklidesa ·

Następne dwa twierdzenia dają pełną wiedzę o typach składowych występujących w kołczanie Auslandera-Reiten dowolnej reprezentacyjnie-nieskończonej spójnej algebry dziedzicznej, które w zależności od typu reprezentacyjnego algebry, są jednej z dwóch istotnie różnych postaci. W przypadku algebr dziedzicznych typu Euklidesa sytuacja przedstawia się następująco.

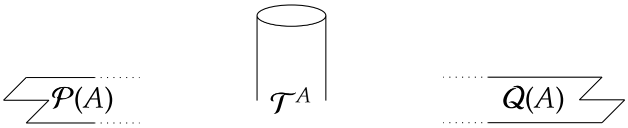
Twierdzenie 2.1.6. *Niech A będzie spójną algebrą dziedziczną. Załóżmy również, że stowarzyszony kołczan Q_A algebry A jest kołczanem typu Euklidesa. Wtedy część regularna $\mathcal{R}^A$ kołczanu Γ_A ma rozkład*

$$\mathcal{R}^A = \mathcal{T}^A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda(A)} \mathcal{T}_\lambda^A$$

na rozłączną sumę stabilnych tub $\mathcal{T}_\lambda^A$, $\lambda \in \Lambda$. Ponadto, $\mathcal{T}^A$ jest rodziną silnie separującą $\mathcal{P}(A)$ od $\mathcal{Q}(A)$ w $\operatorname{mod} A$ *oraz prawie wszystkie tuby należące do rodziny $\mathcal{T}^A$ są jednorodne, to znaczy są stabilnymi tubami rangi jeden.*

Dowód · Patrz [50, Theorem VII.8.12]. □

Dzięki powyższemu twierdzeniu wnioskujemy, że kołczan Auslandera-Reiten dowolnej spójnej algebry dziedzicznej A oswojonego reprezentacyjnego typu jest następującej postaci



Opis rodziny składowych regularnych dopełnia poniższe twierdzenie [50, patrz Corollary VII.9.4], ilustrujące jej strukturę w przypadku algebr dziedzicznych dzikiego typu reprezentacyjnego.

Twierdzenie 2.1.7. *Niech A będzie spójną algebrą dziedziczną, której kołczan zwyczajny Q_A jest kołczanem dzikiego typu. W tym przypadku część regularna kategorii* $\operatorname{ind} A$ *tworzy rozłączną sumę regularnych składowych*

$$\mathcal{R}^A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{R}^A_\lambda,$$

z których każda jest składową w Γ_A postaci $\mathcal{R}^A_\lambda \simeq \mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$.

Zamykamy niniejszym zasadniczy opis kategorii modułów oraz kołczanu Auslandera-Reiten algebr dziedzicznych. Bardziej szczegółowe informacje o strukturze podkategorii $\mathscr{R}^A$ w przypadku typów Euklidesowych zawdzięczamy opublikowanej w 1976 roku głębokiej pracy V. Dlaba i C. M. Ringela [13], która została zwieńczona obszernym zestawem tabel dostarczającym w skondensowanej formie większość ówcześnie posiadanej wiedzy w zakresie teorii reprezentacji wartościowanych grafów o dodatnio półokreślonej stowarzyszonej formie kwadratowej, o czym ze względu na rozmiary niniejszej rozprawy, nie będziemy się szerzej rozwodzić. Warto również wspomnieć, że tabele te zawierają w szczególności pełne informacje o wektorach kompozycyjnych (a zatem i o nośnikach) każdego modułu leżącego na ustach dowolnej stabilnej tuby w $\mathcal{R}^A$, dla wszystkich (spójnych) reprezentacyjnie nieskończonych algebr dziedzicznych A typu Euklidesa z kołczanem Q_A zorientowanym kanonicznie. Wiedza ta natomiast będzie nam potrzebna w 3.4, gdzie zostanie istotnie wykorzystana w dowodach kluczowych dla rozprawy lematów technicznych (patrz Lematy 3.4.2 oraz 3.4.3), opisujących pewne własności związane z rozmieszczeniem *postprojektywnych i preinjektywnych nośników* modułów leżących na ustach stabilnych tub w kołczanach Auslandera-Reiten algebr dziedzicznych typu Euklidesa.

Pełny opis nośników modułów leżących na ustach tub w $\mathcal{R}^A$, dla wszystkich (spójnych) algebr dziedzicznych A typu Euklidesa z kołczanem Q_A zorientowanym kanonicznie, z wyjątkiem typów $\widetilde{\mathbb{A}}_{11}$ i $\widetilde{\mathbb{A}}_{12}$, zamieszczony został w tabelach A.5. Następujący poniżej lemat opisuje pozostałe typy $\widetilde{\mathbb{A}}_{11}$ oraz $\widetilde{\mathbb{A}}_{12}$, w przypadku których mamy skrajnie zdegenerowaną sytuację, to znaczy rodzina $\mathcal{R}^A$ składa się wyłącznie z tub jednorodnych, co jednocześnie istotnie wpływa na trywializację nośników modułów leżących na ich ustach.

Lemat 2.1.8. *Niech H będzie spójną algebrą dziedziczną, dla której kołczan zwyczajny Q_H jest kanonicznie zorientowanym kołczanem jedego z typów Euklidesowych $\widetilde{\mathbb{A}}_{11}$ lub $\widetilde{\mathbb{A}}_{12}$. Wówczas część regularna $\mathcal{R}^H$ jest rodziną $\mathcal{R}(H) = \mathcal{T}^H$ wiernych i jednorodnych stabilnych tub w Γ_H. W szczególności, dowolny moduł E leżący na ustach tuby z $\mathcal{R}^H$ spełnia* $\operatorname{supp}(E) = H$.

2.2 Algebry odwrócone ·

W niniejszym podrozdziale omawiamy bardzo ważną klasę algebr nazywanych *algebrami odwróconymi*, które zostały po raz pierwszy zdefiniowane około 1982 roku przez D. Happela oraz C. M. Ringela w pracy [17], po czym były dalej intensywnie badane przez następne dziesięciolecia. Algebry odwrócone pojawiają się naturalnie jako pierwszy szczególny przypadek algebr endomorfizmów modułów odwracających. Przypominamy za autorami tej koncepcji, że algebrę B nazywamy *algebrą odwróconą*, o ile B jest izomorficzna z algebrą $\operatorname{End}_A(T)$, dla pewnej algebry dziedzicznej A oraz modułu odwracającego T w $\operatorname{mod} A$. Dziedziczność wyjściowej algebry A implikuje, że każdy moduł odwracający w $\operatorname{mod} A$ jest rozszczepiający, co natychmiast wymusza szereg konsekwencji o strukturze kategorii modułów $\operatorname{mod} B$

algebry endomorfizmów $B = \mathrm{End}_A(T)$, omówionych w poprzednim rozdziale w 1.6. Rozważania tego podrozdziału poświęcone są przedstawieniu różnych własności algebr odwróconych, w tym między innymi, omawiamy strukturę ich kategorii modułów, kształt składowych w kołczanie Auslandera-Reiten, jak i podajemy klasyczne kryterium Liu-Skowrońskiego charakteryzujące klasę algebr odwróconych poprzez istnienie uogólnionej standardowej składowej kołczanu Auslandera-Reiten zawierającej dokładną sekcję.

Odnotujmy na początek następujące twierdzenie opisujęce podstawowe własności kategorii modułów algebr odwróconych.

Twierdzenie 2.2.1. *Niech B będzie algebrą odwróconą, $B = \mathrm{End}_A(T)$, gdzie T jest modułem odwracającym w kategorii modułów* $\mathrm{mod}\, A$ *algebry dziedzicznej A. Zachodzą wówczas poniższe stwierdzenia.*

(1) Kołczan zwyczajny Q_B algebry B jest acykliczny.

(2) Dla każdego modułu Z w $\mathrm{ind}\, B$ *zachodzi* $\mathrm{pd}_B\, Z \leqslant 1$ *lub* $\mathrm{id}_B\, Z \leqslant 1$ *oraz* $\mathrm{gl.dim}\, B \leqslant 2$.

(3) Klasa torsyjna $\mathscr{X}(T)$ jest pełną podkategorią zamkniętą na branie następników w $\mathrm{mod}\, B$*, zaś klasa beztorsyjna $\mathscr{Y}(T)$ jest pełną podkategorią zamkniętą na branie poprzedników w* $\mathrm{mod}\, B$.

(4) Każdy ciąg prawie rozszczepialny σ w $\mathrm{mod}\, A$ *całkowicie zawarty w $\mathscr{T}(T)$ (odpowiednio, w $\mathscr{F}(T)$), indukuje ciąg prawie rozszczepialny* $\mathrm{Hom}_A(T,\sigma)$ *(odpowiednio,* $\mathrm{Ext}^1_A(T,\sigma)$*) w* $\mathrm{mod}\, B$.

(5) Dowolny ciąg prawie rozszczepialny w $\mathrm{mod}\, B$*, jest albo całkowicie zawarty w $\mathscr{X}(T)$ albo całkowicie zawarty w $\mathscr{Y}(T)$, albo jest (izomorficzny z) jednym ze skończenie wielu ciągów łączących w* $\mathrm{mod}\, B$*, to znaczy ciągów prawie rozszczepialnych w* $\mathrm{mod}\, B$ *postaci*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T,I) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(T,\mathrm{rad}\, P) \oplus \mathrm{Hom}_A(T, I/\mathrm{soc}(I)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(T,P) \longrightarrow 0,$$

gdzie P jest modułem projektywnym w $\mathrm{ind}\, A$ *nie należącym do* $\mathrm{add}\, T$*, zaś I jest modułem injektywnym w* $\mathrm{ind}\, A$*, dla którego* $\mathrm{soc}(I) = \mathrm{top}(P)$.

DOWÓD · Tezy (1)-(2) są konsekwencjami [50, Proposition VIII.6.1 i 6.2]. Dowód (3) można znaleźć w [50, Lemma VIII.5.1]. Po argumenty wykorzystane w dowodach (4) i (5) odsyłamy do [50, patrz Proposition VIII.5.3, Lemma VIII.4.1 oraz Theorem VIII.4.3]. □

Następnie skupimy się na bardziej szczegółowym opisie struktury kołczanu Auslandera-Reiten algebry odwróconej. Między innymi, przytaczamy poniżej znane *kryterium Liu-Skowrońskiego*, które charakteryzuje algebry odwrócone poprzez istnienie składowej w kołczanie Auslandera-Reiten zawierającej sekcję o nieprzypadkowo dobranych własnościach. Przywołajmy najpierw następujące twierdzenie [50, patrz Theorem VIII.6.7] opisujące pewne wyróżnione składowe w kołczanie Γ_B każdej algebry odwróconej B, nazywane *składowymi łączącymi wyznaczonymi przez moduł odwracający*, ponieważ każda taka składowa jest zdeterminowana przez ustalony moduł odwracający T w kategorii modułów $\mathrm{mod}\, A$ pewnej algebry dziedzicznej A, dla którego zachodzi izomorifzm $B \cong \mathrm{End}_A(T)$.

Twierdzenie 2.2.2. *Niech $B = \mathrm{End}_A(T)$ będzie algebrą odwróconą, gdzie A jest algebrą dziedziczną, zaś T modułem odwracającym w* $\mathrm{mod}\, A$*. Wówczas zachodzą następujące stwierdzenia.*

(1) Zbiór modułów postaci $\mathrm{Hom}_H(T,E)$ *w* $\mathrm{mod}\, B$*, gdzie E przebiega wszystkie moduły injektywne w* $\mathrm{ind}\, A$*, jest sekcją $\Delta = \Delta_T$ w jednoznacznie wyznaczonej przez moduł T acyklicznej składowej $\mathcal{C}_T$ kołczanu Γ_B.*

(2) Kołczan Δ_T jest izomorficzny z kołczanem Q_A^{op}.

(3) Każdy poprzednik Δ_T w $\mathcal{C}_T$ należy do $\mathscr{Y}(T)$.

(4) Każdy właściwy następnik Δ_T w $\mathcal{C}_T$ należy do $\mathscr{X}(T)$.

Uwaga · Składowa $\mathcal{C}_T$ opisana w powyższym twierdzeniu, nazywana jest w literaturze *składową łączącą w Γ_B wyznaczoną przez moduł odwracający T*. W sytuacji, gdy B ma wiele przedstawień jako algebra endomorfizmów pewnego modułu odwracającego nad algebrą dziedziczną, może istnieć także wiele różnych składowych w Γ_B, odpowiadających modułom odwracającym z różnych przedstawień; każdą taką składową nazywać będziemy często, po prostu *składową łączącą*, nie zaznaczając, jeśli nie prowadzi to do nieporozumień, przez jaki konkretnie moduł odwracający jest wyznaczona ·

Warto tutaj zaznaczyć, że pewne własności składowej łączącej w kołczanie Γ_B algebry odwróconej $B = \operatorname{End}_A(T)$ są ściśle określone przez położenie składników prostych modułu odwracającego T w kołczanie Γ_A algebry dziedzicznej A, co wyjaśnia w pełni następujący dobrze znany wynik.

Stwierdzenie 2.2.3. *Niech B będzie (spójną) algebrą odwróconą oraz przyjmijmy, że $B = \operatorname{End}_A(T)$, dla pewnej algebry dziedzicznej A oraz modułu odwracającego T w* $\operatorname{mod} A$. *Wówczas*

(1) $\mathcal{C}_T$ zawiera moduł projektywny wtedy i tylko wtedy, gdy T ma nierozkładalny składnik prosty z preinjektywnej składowej $\mathcal{Q}(A)$ w Γ_A.

(2) $\mathcal{C}_T$ zawiera moduł injektywny wtedy i tylko wtedy, gdy T posiada nierozkładalny składnik prosty z postprojektywnej składowej $\mathcal{P}(A)$ w Γ_A.

dowód · Odsyłamy do [50, Proposition VIII.6.9]. □

Otrzymujemy stąd poniższy wniosek [50, patrz Corollary VIII.6.10 oraz Proposition VIII.6.11].

Wniosek 2.2.4. *Niech $B = \operatorname{End}_A(T)$ będzie algebrą odwróconą, gdzie A jest algebrą dziedziczną, a T modułem odwracającym w* $\operatorname{mod} A$. *Rozważmy również rozkład modułu T na sumę prostą $T = T^{pp} \oplus T^{rg} \oplus T^{pi}$ modułów T^{pp}, T^{rg} i T^{pi} bez wspólnych niezerowych składników prostych, gdzie T^{pp} (odpowiednio, T^{rg} i T^{pi}) jest sumą prostą wszystkich nierozkładalnych składników prostych T, które należą do $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{R}^A$, lub $\mathcal{Q}(A)$, odpowiednio. Wtedy*

(1) B jest algebrą skończonego reprezentacyjnego typu wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{C}_T$ jest zarówno postprojektywną jak i preinjektywną składową w Γ_B.

(2) Jeśli B jest skończonego reprezentacyjnego typu, to $T^{pp} \neq 0$ oraz $T^{pi} \neq 0$.

(3) Jeżeli A jest algebrą dziedziczną typu Euklidesa, to wówczas B jest skończonego typu reprezentacyjnego wtedy i tylko wtedy, gdy $T^{pp} \neq 0$ i $T^{pi} \neq 0$.

Uwaga · Odnotujmy jedynie, że składowa łącząca $\mathcal{C}_T$ w kołczanie Γ_B dowolnej algebry odwróconej $B = \operatorname{End}_H(T)$ wyznacza w pewien sposób podział kołczanu Γ_B, dzięki któremu opis wszystkich pozostałych składowych w Γ_B sprowadza się w istocie do opisu składowych w kołczanie Γ_A algebry dziedzicznej A. Można mianowicie udowodnić, że wówczas kołczan Γ_B ma następującą postać

$$\Gamma_B = \mathcal{Y}\Gamma_B \cup \mathcal{C}_T \cup \mathcal{X}\Gamma_B,$$

gdzie $\mathcal{Y}\Gamma_B$ (odpowiednio, $\mathcal{X}\Gamma_B$) jest rodziną (być może pustą) składowych w kołczanie Γ_B zawierających wyłącznie moduły z części beztorsyjnej $\mathscr{Y}(T)$ (odpowiednio, z części torsyjnej $\mathscr{X}(T)$). Ponieważ wszystkie ciągi łączące w $\operatorname{mod} B$ leżą w składowej $\mathcal{C}_T$, to na mocy własności opisanych we Wniosku 1.6.6 otrzymujemy, że dowolny ciąg prawie rozszczepialny w $\operatorname{mod} B$ o prawym końcu w module ze składowej różnej od $\mathcal{C}_T$ jest postaci $\operatorname{Hom}_A(T, \sigma)$ lub $\operatorname{Ext}^1_A(T, \sigma)$, dla pewnego ciągu prawie rozszczepialnego σ w $\operatorname{mod} A$ składającego się wyłącznie z modułów w $\mathscr{T}(T)$, lub w $\mathscr{F}(T)$, odpowiednio ·

Reasumując, opisaliśmy powyżej ogólną strukturę kołczanu Γ_B dowolnej algebry odwróconej $B = \operatorname{End}_A(T)$, pokazując w szczególności, że istnieje wyróżniona składowa $\mathcal{C}_T$ w Γ_B zawierająca pewną sekcję Δ_T, co stanowi jednocześnie interesujący warunek konieczny na to, aby algebra była odwrócona. Powstało w związku z tym naturalne pytanie, jakich własności należy żądać od składowej $\mathcal{C}$ w Γ_B zawierającej sekcję, aby otrzymać warunek wystarczający na to by algebra B była odwrócona? Odpowiedź została sformułowana niezależnie przez S. Liu [24] oraz A. Skowrońskiego [40] i przedstawiamy ją w postaci twierdzenia poniżej, nazywanego również **kryterium Liu-Skowrońskiego**.

Twierdzenie 2.2.5. *Niech B będzie dowolną algebrą. Wówczas następujące warunki są równoważne.*

(i) B jest algebrą odwróconą.

(ii) Istnieje składowa $\mathcal{C}$ w Γ_B, która posiada dokładną sekcję Δ taką, że $\mathrm{Hom}_B(\Delta, \tau_B\Delta) = 0$.

(iii) Istnieje dokładna i uogólniona standardowa składowa w Γ_B zawierająca sekcję.

Ponadto, wówczas dla dowolnie wybranej sekcji Δ w wyróżnionej składowej $\mathcal{C}$, algebra endomorfizmów $A_\Delta := \mathrm{End}_B(T_\Delta)$ sumy prostej T_Δ wszystkich modułów w $\mathrm{ind}\, B$ należących do Δ jest algebrą dziedziczną z $Q_{A_\Delta} = \Delta$ oraz $T = D({}_{A_\Delta}T_\Delta)$ jest modułem odwracającym w $\mathrm{mod}\, A_\Delta$, dla którego zachodzi izomorfizm K-algebr $B \cong \mathrm{End}_{A_\Delta}(T)$.

Dowód · Dowód równoważności warunków (i) oraz (ii) można znaleźć, na przykład w [50, Theorem VIII.7.7]. Warunki (ii) oraz (iii) są natomiast równoważne na podstawie przywołanej w poprzednim rozdziale charakteryzacji uogólnionych standardowych składowych z sekcją; patrz Twierdzenie 1.4.13.□

Odnotujmy tutaj bez dowodu następujące twierdzenie pochodzące z artykułu [39, patrz Theorem 3.1], który wraz ze swoim dualnym odpowiednikiem [39, Theorem 3.2] implikuje, że każda półregularna acykliczna i uogólniona standardowa składowa kołczanu Γ_A dowolnej algebry A jest składową łączącą pewnej algebry odwróconej.

Twierdzenie 2.2.6. *Niech A będzie algebrą, zaś $\mathcal{C}$ acykliczną i uogólnioną standardową składową w Γ_A bez modułów projektywnych. Wówczas $\mathcal{C}$ jest składową w kołczanie Γ_B algebry ilorazowej $B = A(\mathcal{C}) = A/\,\mathrm{Ann}_A(\mathcal{C})$, która jest algebrą odwróconą postaci $B = \mathrm{End}_H(T)$, gdzie H-moduł odwracający T nie posiada preinjektywnych składników prostych. Ponadto, $\mathcal{C}$ jest składową łączącą $\mathcal{C} = \mathcal{C}_T$ jako składowa w Γ_B.*

Na koniec omawiamy krótko pewną interpretację algebr odwróconych typu Euklidesowego jako szczególnego przypadku tubularnych (ko)rozszerzeń, która została opisana już przez C. M. Ringela w [34] w nieco innym, ale równoważnym, języku (ko)rozszerzeń gałęziowych. Okazało się bowiem, że każda oswojona algebra odwrócona nieskończonego typu reprezentacyjnego jest $\mathcal{T}^C$-tubularnym rozszerzeniem bądź korozszerzeniem pewnej *oswojonej utajonej* algebry ilorazowej C, gdzie $\mathcal{T}^C$ jest silnie separującą rodziną (dokładnych) stabilnych tub w Γ_C. Przypominamy, że algebra C nazywana jest *algebrą utajoną*, o ile jest algebrą odwróconą postaci $C = \mathrm{End}_A(T)$ oraz $T = T^{pp}$, to znaczy wszystkie nierozkładalne składniki proste modułu T należą do $\mathcal{P}(A)$. Algebrę utajoną C nazywamy *oswojoną* wtedy i tylko wtedy, gdy A jest algebrą dziedziczną typu Euklidesa. Odnotujmy tylko sformułowanie następującego twierdzenia, które daje pełną wiedzę o strukturze kołczanu Auslandera-Reiten dowolnej oswojonej algebry utajonej.

Twierdzenie 2.2.7. *Niech $C = \mathrm{End}_A(T)$ będzie oswojoną algebrą utajoną, gdzie T jest postprojektywnym modułem odwracającym w $\mathrm{mod}\, A$. Wtedy część torsyjna $\mathrm{ind}\, \mathscr{T}(T)$ zawiera prawie wszystkie moduły w $\mathrm{ind}\, A$, poza skończoną ilością modułów z $\mathcal{P}(A)$, podczas gdy $\mathrm{ind}\, \mathscr{F}(T)$ składa się ze skończonej liczby modułów postprojektywnych. Ponadto C jest algebrą nieskończonego reprezentacyjnego typu, której kołczan Γ_C ma postać następującej rozłącznej sumy*

$$\Gamma_C = \mathcal{P}(C) \cup \mathcal{T}^C \cup \mathcal{Q}(C),$$

gdzie:

(a) Obraz $\mathrm{Hom}_A(T, \mathscr{T}(T) \cap \mathcal{P}(A))$ części torsyjnej składowej postprojektywnej $\mathcal{P}(A)$ w Γ_A jest postprojektywną składową $\mathcal{P}(C)$ kołczanu Γ_C, zawierającą wszystkie moduły projektywne z $\mathrm{ind}\, C$.

(b) $\mathcal{Q}(C) = \mathcal{C}_T$ jest preinjektywną składową łączącą w Γ_C, zawierającą wszystkie moduły injektywne z $\mathrm{ind}\, C$ oraz dokładną sekcję $\Delta = \Delta_T = \mathrm{Hom}_A(T, D(A))$. W szczególności, $\mathcal{Q}(C)$ jest „sklejeniem wzdłuż sekcji" pełnego podkołczanu z translacją $\mathrm{Hom}_A(T, \mathcal{Q}(A))$ z pełnym podkołczanem z translacją rozpiętym na skończenie wielu wierzchołkach z $\mathrm{Ext}^1_A(T, \mathrm{ind}\, \mathscr{F}(T))$.

(c) $\mathcal{T}^C = (\mathcal{T}^C_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ jest rodziną $\mathcal{T}^C = \mathrm{Hom}_A(T, \mathcal{T}^A)$ wszystkich stabilnych tub w Γ_C silnie separującą $\mathcal{P}(C)$ od $\mathcal{Q}(C)$ w $\mathrm{mod}\, C$, przy czym jej typ tubularny $r^C = \bar{r}^C$ pokrywa się z typem tubularnym r^A i nie zależy od orientacji kołczanu Q_A, a jedynie od typu Euklidesowego stowarzyszonego grafu $\bar{Q}_A$.

Co więcej, zachodzi $\mathrm{pd}_C X \leqslant 1$ *oraz* $\mathrm{id}_C X \leqslant 1$*, dla wszystkich modułów z* $\mathcal{T}^C$*, oraz prawie wszystkich modułów zawartych w* $\mathcal{P}(C) \cup \mathcal{Q}(C)$*.*

DOWÓD · Odsyłamy do [50, Theorem VIII.6.13]. □

Jak wspominaliśmy, każda reprezentacyjnie-nieskończona algebra odwrócona typu Euklidesa posiada pewną oswojoną utajoną algebrę ilorazową, której jest rozszerzeniem (bądź korozszerzeniem) tubularnym w sensie definicji podanych w 1.7. W istocie odnotujmy, że zachodzi poniższe twierdzenie.

TWIERDZENIE 2.2.8. *Niech B będzie reprezentacyjnie-nieskończoną algebrą odwróconą typu Euklidesa oraz* $B = \mathrm{End}_A(T)$*, gdzie A jest algebrą dziedziczną typu Euklidesa, zaś* $T = T^{pp} \oplus T^{rg} \oplus T^{pi}$ *modułem odwracającym w* $\mathrm{mod}\, A$ *takim, że* $T^{pi} = 0$*. Wtedy algebra* $C = \mathrm{End}_A(T^{pp})$ *jest oswojoną algebrą utajoną oraz B jest* $\mathcal{T}^C$*-tubularnym rozszerzeniem C. Co więcej, kołczan Auslandera-Reiten* Γ_B *algebry B jest postaci*

$$\Gamma_B = \mathcal{P}(B) \cup \mathcal{T}^B \cup \mathcal{Q}(B),$$

gdzie

(a) $\mathcal{P}(B) = \mathrm{Hom}_A(T, \mathscr{T}(T) \cap \mathcal{P}(A)) = \mathcal{P}(C)$ *jest (jedyną) postprojektywną składową w* Γ_B*.*

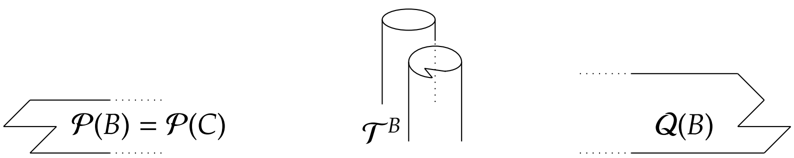
(b) $\mathcal{Q}(B)$ *jest preinjektywną składową łączącą w* Γ_B *zawierającą wszystkie moduły injektywne w* $\mathrm{ind}\, B$*, przy czym* $\mathcal{Q}(B) \cap \mathscr{Y}(T) = \mathrm{Hom}_A(T, \mathcal{Q}(A))$ *oraz* $\mathcal{Q}(B) \cap \mathscr{X}(T) = \mathrm{Ext}^1_A(T, \mathcal{P}(A) \cap \mathscr{F}(T))$*.*

(c) $\mathcal{T}^B = \mathrm{Hom}_A(T, \mathscr{T}(T) \cap \mathcal{T}^A)$ *jest rodziną* $(\mathcal{T}^B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *tub promieniowych w* Γ_B*, silnie separującą* $\mathcal{P}(B)$ *od* $\mathcal{Q}(B)$ *w* $\mathrm{mod}\, B$*, otrzymaną z rodziny stabilnych tub* $\mathcal{T}^C$ *w* Γ_C *poprzez zastosowanie iteracji operacji typu* (ad. 1)*. Ponadto typ tubularny* r^B *rodziny* $\mathcal{T}^B$ *jest równy* $r^B = r^A$*, to znaczy dla każdego* $\lambda \in \Lambda$*, zachodzi równość rang* $r^B_\lambda = r^A_\lambda$*, przy czym* $\mathcal{T}^B_\lambda = \mathrm{Hom}_A(T, \mathscr{T}(T) \cap \mathcal{T}^A_\lambda) = \mathcal{T}^C_\lambda$*, jeśli* $\mathcal{T}^A_\lambda$ *nie ma składników prostych T.*

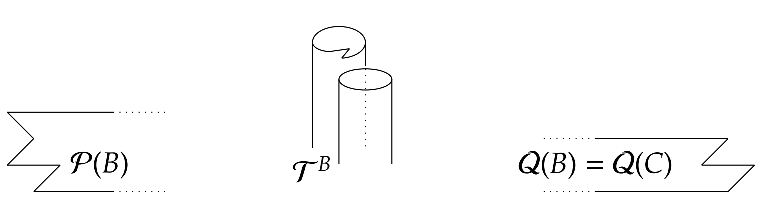
DOWÓD · Dowód można znaleźć na przykład w [37, Theorem XVII.3.5]. □

Przypominamy także, że w przypadku gdy $T^{pp} = 0$, algebra $C = \mathrm{End}_A(T^{pi})$ jest oswojoną utajoną algebrą ilorazową algebry B, przy czym B jest pewnym $(\mathcal{T}^C)$-tubularnym korozszerzeniem algebry C. Wówczas kołczan Γ_B jest dualnej postaci, której nie będziemy szczegółowo przedstawiać [37, patrz Theorem VII.3.6]. Powyższe wyniki można uznać za motywację do badania klasy algebr nazywanych *tubularnymi rozszerzeniami* lub *korozszerzeniami*. Przypominamy, że algebra A jest *tubularnym rozszerzeniem* (odpowiednio, *tubularnym korozszerzeniem*) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje oswojona algebra utajona C taka, że A jest $\mathcal{T}^C$-tubularnym rozszerzeniem (odpowiednio, korozszerzeniem) algebry C.

Odnotujmy w szczególności, że na mocy poprzedniego twierdzenia każda algebra odwrócona B typu Euklidesowego, która jest nieskończonego reprezentacyjnego typu jest albo tubularnym rozszerzeniem albo tubularnym korozszerzeniem algebry C, bądź w najprostszym przypadku, $A = C$ jest oswojoną algebrą utajoną. Tak więc jej kołczan Auslandera-Reiten jest jednej z następujących dwóch postaci:



lub



2.3 Wzmianka o algebrach kanonicznych ·

W tej sekcji pobieżnie omawiamy podstawowe potrzebne nam wiadomości odnośnie ważnej klasy tak zwanych *algebr kanonicznych*, która została wprowadzona w klasycznej pracy C. M. Ringela [35]. Treść niniejszego podrozdziału jest w całości oparta na przekrojowym artykule [29]. Rozpoczynamy od następującej klasycznej definicji pochodzącej od C. M. Ringela.

Definicja · Niech $\mathfrak{p} \in \mathbb{N}^m$ będzie ustalonym ciągiem liczb naturalnych $\mathfrak{p} = (p_1, \dots, p_m)$, przy czym zakładamy, że $m \geqslant 2$ oraz $p_i \geqslant 2$, dla każdego $i \in \{1, \dots, m\}$. Przyjmijmy ponadto, że $\Delta(\mathfrak{p})$ jest następującym kołczanem składającym się z m dróg, długości $p_1, p_2, \dots, p_m$ odpowiednio, o wspólnym początku ω i końcu 0

$$\Delta(\mathfrak{p}) = \Delta(p_1, \dots, p_m) : \quad \begin{tikzcd}
 & \circ \arrow[dl, "\alpha_1^{(1)}"'] & \circ \arrow[l, "\alpha_2^{(1)}"'] & \circ \arrow[l, "\alpha_3^{(1)}"'] \cdots & \circ \arrow[l, "\alpha_{p_1-1}^{(1)}"'] & \\
\circ\, 0 & \circ \arrow[l, "\alpha_1^{(2)}"'] & \circ \arrow[l, "\alpha_2^{(2)}"'] & \circ \arrow[l, "\alpha_3^{(2)}"'] \cdots & \circ \arrow[l, "\alpha_{p_2-1}^{(2)}"'] & \circ\, \omega \arrow[l, "\alpha_{p_2}^{(2)}"'] \arrow[ul, "\alpha_{p_1}^{(1)}"'] \arrow[dl, "\alpha_{p_m}^{(m)}"] \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
 & \circ \arrow[uul, "\alpha_1^{(m)}"] & \circ \arrow[l, "\alpha_2^{(m)}"] & \circ \arrow[l, "\alpha_3^{(m)}"] \cdots & \circ \arrow[l, "\alpha_{p_m-1}^{(m)}"] &
\end{tikzcd}$$

Wówczas każdemu ciągowi $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ parami różnych punktów prostej rzutowej $\mathbb{P}^1(K)$ nad ciałem K przyporządkowuje się algebrę $\Lambda = \Lambda(\mathfrak{p}, \lambda) = K\Delta(\mathfrak{p})/I(\mathfrak{p}, \lambda)$, nazywaną *algebrą kanoniczną typu* $(\mathfrak{p}, \lambda)$, gdzie:

a) $I(\mathfrak{p}, \lambda) = (0)$, dla $m = 2$; wtedy $\Lambda(\mathfrak{p}, \lambda) = K\Delta(\mathfrak{p})$ jest algebrą dróg kołczanu $\Delta(\mathfrak{p})$;

b) jeśli $m \geqslant 3$, to $I(\mathfrak{p}, \lambda)$ jest ideałem w $K\Delta(\mathfrak{p})$ generowanym przez wszystkie relacje postaci

$$\alpha^{(1)} + \lambda_j \alpha^{(2)} + \alpha^{(j)} \in K\Delta(\omega, 0),$$

gdzie $j \in \{3, \dots, m\}$, zaś dla $i \in \{1, \dots, m\}$, $\alpha^{(i)}$ oznacza drogę $\alpha^{(i)} := \alpha_{p_i}^{(i)} \cdots \alpha_2^{(i)} \alpha_1^{(i)}$

Zakładamy, że $\lambda_1 = \infty$, $\lambda_2 = 0$ oraz $\lambda_3 = 1$. Wówczas każdy z punktów $\lambda_j = (1 : \lambda_j)$, dla $j \geqslant 3$, można identyfikować z odpowiadającym mu niezerowym skalarem $\lambda_j \in K$.

Uwaga · Odnotujmy tylko, że istnieje uogólnienie powyższej definicji zaproponowane przez W. Crawley-Boevey'ego. Według tej definicji, dla ustalonego ciągu $\mathfrak{n} = (n_1, \dots, n_m) \in (\mathbb{N}_{\geqslant 2})^m$, $m \geqslant 1$, algebra Λ nazywana jest *algebrą kanoniczną typu* $\mathfrak{n}$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieją K-algebry z dzieleniem F i G oraz bimoduł M w $\mathrm{bimod}(F, G)$ z $(\dim_G M)(\dim_{F^{\mathrm{op}}} M) = 4$ takie, że Λ jest izomorficzna algebrą $\Lambda(\mathfrak{n}; \mathbf{N})$ stowarzyszoną z ciągiem $\mathbf{N} = (\mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_m)$ tak zwanych (parami nieizomorficznych) *M-trójek*. Nie będziemy wyjaśniać wszystkich niezbędnych detali technicznych, po które odsyłamy do artykułu [35] lub [29]. Pozwólmy sobie jedynie wspomnieć, że każda z M-trójek $\mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_m$ jest obiektem postaci $\mathbf{N}_i = (N_i, \varphi_i, N_i')$, gdzie N_i oraz N_i' są modułami w $\mathrm{mod}\, F^{\mathrm{op}}$ oraz $\mathrm{mod}\, G$ odpowiednio, zaś φ_i homomorfizmem w $\mathrm{bimod}(F, G)$ postaci $\varphi_i : N_i \otimes_{\mathbb{Z}} N_i' \to M$ spełniającym pewne ściśle określone ograniczenia. Wtedy algebra $\Lambda(\mathfrak{n}; \mathbf{N})$ jest algebrą macierzową

$$\begin{bmatrix}
F & \mathbb{M}_{1\times n_1-1}(N_1) & \mathbb{M}_{1\times n_2-1}(N_2) & \dots & \mathbb{M}_{1\times n_m-1}(N_m) & M \\
0 & \mathbb{T}_{n_1-1}(D_1) & 0 & \dots & 0 & \mathbb{M}_{n_1-1\times 1}(N_1') \\
0 & 0 & \mathbb{T}_{n_2-1}(D_2) & \dots & 0 & \mathbb{M}_{n_2-1\times 1}(N_2') \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & & \mathbb{T}_{n_m-1}(D_m) & \mathbb{M}_{n_m-1\times 1}(N_m') \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & G
\end{bmatrix},$$

gdzie $D_1, \dots, D_m$ są pewnymi algebrami z dzieleniem nazywanymi *środkami* M-trójek $\mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_m$. Ponadto $D_j \subseteq \mathrm{End}_{F^{\mathrm{op}}}(N_j) \times \mathrm{End}_G(N_j')$, zaś mnożenie macierzy z $\Lambda(\mathfrak{n}, \mathbf{N})$ określone jest za pomocą indukowanych działań bimodułowych w ${}_F M_G$ i w ${}_F(N_j)_{D_j}$ oraz ${}_{D_j}(N_j')_G$, dla $j \in \{1, \dots, m\}$, oraz odpowiedniego zastosowania homomorfizmów $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, co pozwólmy sobie pozostawić bez szczegółowego komentarza. Odnotujmy jeszcze, że kołczan zwyczajny Q_Λ każdej algebry kanonicznej Λ typu $\mathfrak{n}$ jest izomorficzny z $\Delta(\mathfrak{n})$, jako kołczany, przy czym dla dowolnego $i \in \{1, \ldots, m\}$ strzałka $\alpha_1^{(i)}$ ma wartościowanie $(\dim_{F^{\mathrm{op}}} N_i, \dim_{D_i} N_i)$, zaś strzałka $\alpha_{n_i}^{(i)}$ wartościowanie $(\dim_{D_i^{\mathrm{op}}} N_i', \dim_G N_i')$; pozostałe strzałki w Q_Λ mają wartościowania trywialne. Wiadomo również, że dowolna algebra kanoniczna jest algebrą globalnego wymiaru co najwyżej dwa. Przypomnijmy ostatecznie, że każda algebra kanoniczna typu $(\mathfrak{p}, \lambda)$ jest algebrą kanoniczną typu $\mathfrak{p}$ w powyższym sensie, zaś w przypadku gdy ciało K jest ciałem algebraicznie domkniętym, wszystkie K-algebry kanoniczne typu $\mathfrak{p}$ są postaci $\Lambda(\mathfrak{p}, \lambda)$, dla odpowiedniego ciągu λ punktów leżących na prostej rzutowej $\mathbb{P}^1(K)$ ·

Odnotujmy tu jedynie, że typ reprezentacyjny dowolnej algebry kanonicznej Λ jest zdeterminowany przez określoność formy Eulera q_Λ. Wspominamy mianowicie, że jej forma q_Λ jest nieujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieujemnie określona korangi 1 lub 2 wtedy i tylko wtedy, gdy Λ jest generycznie oswojonego typu, lub w tym przypadku równoważnie, generycznie wielomianowego wzrostu; patrz [29, Theorem 6.4, 6.5(2)]). Przypomnijmy, że algebrę kanoniczną Λ nazwiemy *algebrą kanoniczną typu Euklidesa* (odpowiednio, *typu tubularnego*), o ile forma q_Λ jest nieujemnie określona korangi 1 (odpowiednio, nieujemnie określona korangi 2). W pozostałych przypadkach powiemy, że Λ jest *typu dzikiego*.

Uwaga · Na mocy powyższych komentarzy klasa algebr kanonicznych oswojonego typu scharakteryzowana jest poprzez nieujemność stowarzyszonej formy Eulera oraz dzieli się ze względu na wielkość jej korangi na dwie rozłączne klasy algebr typu Euklidesa i typu tubularnego, przy czym mamy również pełną kontrolę nad kołczanami zwyczajnymi wszystkich algebr w obu tych podklasach. W istocie, opis kołczanów algebr kanonicznych typu Euklidesa zawdzięczamy C. M. Ringelowi, który udowodnił że każda algebra kanoniczna Λ ma nieujemnie określoną formę q_Λ korangi jeden wtedy i tylko wtedy, gdy jej kołczan zwyczajny Q_Λ jest jednym z trzynastu kołczanów przedstawionych na liście A.3. Ponadto H. Lenzing oraz C. M. Ringel pokazali również, że dowolna algebra kanoniczna Λ posiada nieujemnie określoną formę Eulera korangi dwa wtedy i tylko wtedy, gdy kołczan zwyczajny Q_Λ jest jednym z dwudziestu czterech kołczanów przedstawionych na liście A.4 ·

Na zakończenie tej sekcji odnotujmy tylko sformułowanie następującego twierdzenia [29, patrz Theorem 6.6], które opisuje strukturę kołczanu Auslandera-Reiten oraz podstawowe homologiczne własności dowolnej algebry kanonicznej.

Twierdzenie 2.3.1. [Ringel] *Załóżmy, że Λ jest algebrą kanoniczną typu $\mathfrak{p}$. Wówczas kołczan Γ_Λ algebry Λ jest następującej postaci $\Gamma_\Lambda = \mathcal{P}^\Lambda \cup \mathcal{T}^\Lambda \cup \mathcal{Q}^\Lambda$, gdzie*

(a) $\mathcal{P}^\Lambda$ jest rodziną składowych kołczanu Γ_Λ zawierającą wszystkie moduły projektywne w $\operatorname{ind}\Lambda$ oraz jedyną postprojektywną składową $\mathcal{P}(\Lambda)$ w Γ_Λ.

(b) $\mathcal{Q}^\Lambda$ jest rodziną składowych w Γ_Λ zawierającą wszystkie nierozkładalne Λ-moduły injektywne oraz jedyną preinjektywną składową $\mathcal{Q}(\Lambda)$ kołczanu Γ_Λ.

(c) Rodzina $\mathcal{T}^\Lambda$ jest nieskończoną rodziną dokładnych stabilnych tub w Γ_Λ, silnie separującą $\mathcal{P}^\Lambda$ od $\mathcal{Q}^\Lambda$ w $\operatorname{mod}\Lambda$, oraz jej typ tubularny jest równy $r^\Lambda = \mathfrak{p}$.

Ponadto $\operatorname{pd}_\Lambda X \leqslant 1$, dla każdego modułu X w $\mathcal{P}^\Lambda \cup \mathcal{T}^\Lambda$, zaś $\operatorname{id}_\Lambda Y \leqslant 1$, dla wszystkich modułów Y z $\mathcal{T}^\Lambda \cup \mathcal{Q}^\Lambda$, przy czym $\operatorname{gl.dim}\Lambda \leqslant 2$. W szczególności, każda algebra kanoniczna jest algebrą o małych wymiarach homologicznych.

2.4 Utajone algebry kanoniczne oraz algebry tubularne ·

Klasa algebr kanonicznych pojawia się jako naturalne uogólnienie koncepcji algebry dziedzicznej w kontekście omówionej w następnym paragrafie klasy *algebr quazi-odwróconych*. Okazuje się bowiem, że również algebry endomorfizmów modułów odwracających nad algebrami kanonicznymi tworzą interesującą klasę algebr, która jest ważnym uogólnieniem klasy algebr odwróconych typu Euklidesa, i krótkiemu omówieniu jej najważniejszych własności poświęcamy niniejszy podrozdział.

Pierwszy istotny przykład algebr endomorfizmów modułów odwracających nad algebrami kanonicznymi stanowią tak zwane *utajone algebry kanoniczne*. Niech Λ będzie dowolną algebrą kanoniczną. Przez *utajoną algebrę kanoniczną typu* Λ rozumieć będziemy dowolną algebrę B postaci $B \cong \operatorname{End}_\Lambda(T)$, gdzie T jest pewnym Λ-modułem odwracającym w $\operatorname{add} \mathcal{P}^\Lambda$. Utajoną algebrę kanoniczną B typu Λ nazwiemy *typu Euklidesa* (odpowiednio, *typu tubularnego* lub *typu dzikiego*) o ile algebra kanoniczna Λ jest odpowiednio, typu Euklidesa, typu tubularnego lub typu dzikiego. Zasadnicze informacje o strukturze kategorii modułów oraz kołczanu Auslandera-Reiten utajonych algebr kanonicznych zestawione zostały w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 2.4.1. *Dla dowolnej algebry B następujące warunki są równoważne.*

(i) B jest utajoną algebrą kanoniczną

(ii) Kołczan Γ_B zawiera separującą rodzinę stabilnych tub $\mathcal{T}^B$.

(iii) Kołczan Γ_B zawiera silnie separującą rodzinę stabilnych tub $\mathcal{T}^B$.

Ponadto kołczan Γ_B każdej utajonej algebry kanonicznej $B = \operatorname{End}_\Lambda(T)$ ma rozkład na rozłączną sumę $\Gamma_B = \mathcal{P}^B \cup \mathcal{T}^B \cup \mathcal{Q}^B$ oraz zachodzą poniższe stwierdzenia.

(1) $\mathcal{T}^B = \operatorname{Hom}_\Lambda(T, \mathcal{T}^\Lambda)$ jest nieskończoną rodziną dokładnych stabilnych tub w Γ_B silnie separującą $\mathcal{P}^B$ od $\mathcal{Q}^B$ w $\operatorname{mod} B$, o typie tubularnym $r^B = r^\Lambda$.

(2) $\mathcal{P}^B = \operatorname{Hom}_\Lambda(T, \mathcal{P}^\Lambda \cap \mathscr{T}(T)) \cup \operatorname{Ext}^1_\Lambda(T, \mathscr{F}(T))$ jest rodziną składowych w Γ_B zawierającą wszystkie moduły projektywne w $\operatorname{ind} B$ oraz jedyną składową postprojektywną $\mathcal{P}(B)$.

(3) $\mathcal{Q}^B$ jest rodziną $\mathcal{Q}^B = \operatorname{Hom}_\Lambda(T, \mathcal{Q}^\Lambda)$ składowych w Γ_B zawierającą wszystkie moduły injektywne w $\operatorname{ind} B$ oraz jedyną preinjektywną składową $\mathcal{Q}(B)$ w Γ_B.

Co więcej, $\operatorname{pd}_B X \leqslant 1$, dla każdego modułu X w $\mathcal{P}^B \cup \mathcal{T}^B$, zaś wszystkie moduły Y w $\mathcal{T}^B \cup \mathcal{Q}^B$ spełniają $\operatorname{id}_B Y \leqslant 1$, przy czym B jest algebrą globalnego wymiaru $\operatorname{gl.dim} B \leqslant 2$.

Dowód · Równoważność warunków (i)-(iii) została udowodniona przez H. Lenzinga i J. A. de la Peñę w pracy [20]. Pozostała część tezy jest natomiast konsekwencją Twierdzenia 2.3.1 z poprzedniej sekcji oraz wyników teorii odwracania (patrz również [29, Theorem 6.7]). □

Warto tutaj wspomnieć, że dowolna utajona algebra kanoniczna typu Euklidesa jest oswojoną algebrą utajoną (faktycznie klasy te pokrywają się; patrz [29, Theorem 6.9]), a więc reprezentacyjnie-nieskończoną algebrą odwróconą typu Euklidesa. Prowadzi to naturalnie do rozważania klasy tak zwanych *prawie utajonych algebr kanonicznych*, które stanowią w pewnym sensie analogię reprezentacyjnie-nieskończonych algebr odwróconych typu Euklidesa. Przypomnijmy, że algebra B nazywana jest *prawie utajoną algebrą kanoniczną* (*typu* Λ) wtedy i tylko wtedy, gdy jest (izomorficzna z) algebrą endomorfizmów $\operatorname{End}_\Lambda(T)$, gdzie Λ jest algebrą kanoniczną, zaś T pewnym Λ-modułem odwracającym w $\operatorname{add} \mathcal{P}^\Lambda \cup \mathcal{T}^\Lambda$. Przypomnijmy tylko, że zachodzą następujące dwa twierdzenia [29, Section 6], w których opisano własności homologiczne i ogólną postać kołczanu Auslandera-Reiten prawie utajonych algebr kanonicznych oraz ich algebr przeciwnych.

Twierdzenie 2.4.2. *Niech $B = \operatorname{End}_\Lambda(T)$ będzie prawie utajoną algebrą kanoniczną. Wówczas kołczan Γ_B algebry B ma następującą postać $\Gamma_B = \mathcal{P}^B \cup \mathcal{T}^B \cup \mathcal{Q}^B$, gdzie*

- *$\mathcal{T}^B$ jest nieskończoną rodziną dokładnych tub promieniowych w Γ_B silnie separującą $\mathcal{P}^B$ od $\mathcal{Q}^B$.*
- *$\mathcal{P}^B = \mathcal{P}^C$, dla pewnej ilorazowej utajonej algebry kanonicznej C algebry B.*
- *$\mathcal{Q}^B$ jest rodziną składowych w Γ_B zawierającą wszystkie moduły injektywne w $\operatorname{ind} B$.*

Ponadto $\operatorname{pd}_B X \leqslant 1$, dla każdego modułu X w $\mathcal{P}^B \cup \mathcal{T}^B$, $\operatorname{id}_B Y \leqslant 1$, dla modułów Y z $\mathcal{Q}^B$ oraz $\operatorname{gl.dim} B \leqslant 2$.

Twierdzenie 2.4.3. *Załóżmy, że B jest algebrą postaci $\operatorname{End}_\Lambda(T)$, gdzie Λ jest pewną algebrą kanoniczną, zaś T jest Λ-modułem odwracającym należącym do $\operatorname{add} \mathcal{T}^B \cup \mathcal{Q}^B$. Wówczas algebra przeciwna B^{op} jest prawie utajoną algebrą kanoniczną oraz kołczan Γ_B algebry B jest postaci:*

- *$\mathcal{T}^B$ jest nieskończoną rodziną dokładnych tub kopromieniowych w Γ_B silnie separującą $\mathcal{P}^B$ od $\mathcal{Q}^B$.*
- *$\mathcal{Q}^B = \mathcal{Q}^C$, dla pewnej ilorazowej utajonej algebry kanonicznej C algebry B.*
- *$\mathcal{P}^B$ jest rodziną składowych w Γ_B zawierającą wszystkie moduły projektywne w $\operatorname{ind} B$.*

Co więcej, mamy $\operatorname{pd}_B X \leqslant 1$, dla każdego modułu X w $\mathcal{P}^B$, $\operatorname{id}_B Y \leqslant 1$, dla modułów Y z $\mathcal{T}^B \cup \mathcal{Q}^B$, oraz $\operatorname{gl.dim} B \leqslant 2$.

Ostatecznie, przypominamy że *algebrą tubularną* nazywamy każdą prawie utajoną algebrę kanoniczną typu tubularnego. Przedstawiamy poniżej bez dowodu dobrze znany wynik opisujący strukturę kategorii modułów oraz kształt składowych w kołczanach Auslandera-Reiten algebr tubularnych.

Twierdzenie 2.4.4. *Niech B będzie dowolną algebrą tubularną. Wówczas*

(1) Algebra przeciwna B^{op} jest również algebrą tubularną o tym samym typie tubularnym co B.

(2) Istnieją dwie różne oswojone utajone algebry ilorazowe C_0 oraz C_∞ algebry B takie, że B jest tubularnym rozszerzeniem C_0 oraz równocześnie tubularnym korozszerzeniem C_∞.

(3) Kołczan Γ_B jest postaci

$$\Gamma_B = \mathcal{P}(B) \cup \mathcal{T}_0^B \cup \Big(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}^+} \mathcal{T}_q^B \Big) \cup \mathcal{T}_\infty^B \cup \mathcal{Q}(B),$$

gdzie:

(a) $\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(C_0)$ jest jedyną składową postprojektywną w Γ_B, zaś $\mathcal{T}_0^B = \mathcal{T}^B(C_0)$ jest rodziną parami ortogonalnych uogólnionych standardowych tub promieniowych w Γ_B zawierającą przynajmniej jeden moduł projektywny, otrzymaną z rodziny stabilnych tub $\mathcal{T}^{C_0}$ w Γ_{C_0} poprzez wstawienia promieniowe;

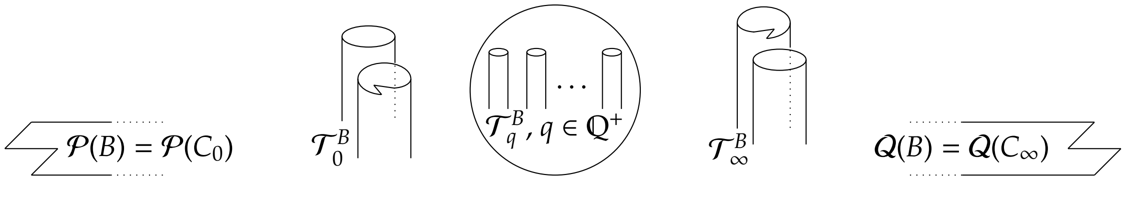
(b) $\mathcal{Q}(B) = \mathcal{Q}(C_\infty)$ jest jedyną składową preinjektywną w Γ_B, a $\mathcal{T}_\infty^B = \mathcal{T}^B(C_\infty)$ jest rodziną parami ortogonalnych uogólnionych standardowych tub kopromieniowych w Γ_B zawierającą przynajmniej jeden moduł injektywny, otrzymaną z rodziny stabilnych tub $\mathcal{T}^{C_\infty}$ w Γ_{C_∞} poprzez wstawienia kopromieniowe;

(c) dla każdego $q \in \mathbb{Q}^+$, $\mathcal{T}_q^B$ jest rodziną $\mathcal{T}_q^B = (\mathcal{T}_{q,\lambda}^B)_{\lambda \in \Lambda_q}$ parami ortogonalnych uogólnionych standardowych stabilnych tub w Γ_B.

Ponadto każda z rodzin $\mathcal{T}_0^B$, $\mathcal{T}_\infty^B$ oraz rodzin $\mathcal{T}_q^B$, dla $q \in \mathbb{Q}^+$, ma ten sam typ tubularny równy r^B, oraz dla wszystkich $q \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0, \infty\}$, rodzina $\mathcal{T}_q^B$ jest rodziną składowych silnie separującą $\mathcal{P}(B) \cup \bigcup_{0 \leqslant p < q} \mathcal{T}_p^B$ od $\bigcup_{q < p \leqslant \infty} \mathcal{T}_p^B \cup \mathcal{Q}(B)$ w $\operatorname{mod} B$.

dowód · Patrz [35] lub [29, Theorem 6.10]. □

Podsumowując, strukturę kołczanu Auslandera-Reiten dowolnej algebry tubularnej B można zilustrować w następującej schematycznej formie



Uwaga · Odnotujmy tutaj tylko, że oswojone utajone algebry ilorazowe C_0 oraz C_∞ są w istocie wypukłymi podkategoriami algebry $B = B^*$. Co więcej, można stąd wywnioskować, że istnieje wtedy co najmniej jeden wierzchołek i w kołczanie zwyczajnym Q_B algebry B, który należy do części wspólnej wypukłych podkategorii C_0 oraz C_∞ ·

2.5 Algebry quazi-odwrócone ·

Klasa tytułowych algebr quazi-odwróconych, stanowiąca uogólnienie zarówno klasy algebr odwróconych 2.2 jak i klasy algebr tubularnych 2.4, została wprowadzona i zcharakteryzowana po raz pierwszy przez D. Happela, I. Reiten oraz S. O. Smalø w pracy [16]. Zasadnicza idea stojąca za wprowadzeniem tej klasy algebr była następująca: rozszerzyć definicję modułu odwracającego tak, aby funkcjonowała w dostatecznie dobrych K-kategoriach abelowych, uogólniających kategorie modułów algebr dziedzicznych. W ten sposób odkryto nową ciekawą klasę algebr zawierającą wszystkie algebry tubularne i odwrócone. Pojęcie obiektu odwracającego w kategoriach abelowych traktujemy czysto informacyjnie i nie będziemy się nim w ogóle posługiwać, toteż pozostawiamy je dalej bez odwoływania się do dokładnych sformułowań (po więcej szczegółów odsyłamy do [16]). Skupimy się tutaj natomiast na własnościach homologicznych kategorii modułów i strukturze kołczanu Auslandera-Reiten algebr quazi-odwróconych. Przedstawiamy między innymi znane twierdzenia pokazujące, że kategoria modułów każdej algebry quazi-odwróconej A oswojonego reprezentacyjnego typu jest całkowicie zdeterminowana przez kategorie modułów dwóch stowarzyszonych z A algebr ilorazowych $A^{(l)}$ oraz $A^{(r)}$, z których każda jest albo algebrą odwróconą typu Euklidesa albo algebrą tubularną. Oswojone algebry quazi-odwrócone odegrają także szczególnie ważną rolę w opisie struktury kategorii modułów algebr cyklowo skończonych półregularnego typu; do tego tematu podejdziemy szczegółowo w 4.3.

Odnotujmy, że przyjmujemy za [16] nazywać algebrę A algebrą *quazi-odwróconą* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje (abelowa) K- *kategoria dziedziczna* $\mathscr{H}$ oraz *obiekt odwracający* T w $\mathscr{H}$ takie, że $A \cong \operatorname{End}_{\mathscr{H}}(T)$ jako algebry. Dalsze rozważania warto rozpocząć od następującej homologicznej charakteryzacji algebr quazi-odwróconych, udowodnionej w pracy [16].

Twierdzenie 2.5.1. *Niech A będzie dowolną algebrą. Wtedy następujące warunki są równoważne.*

(i) *A jest algebrą quazi-odwróconą.*

(ii) $\operatorname{gl.dim} A \leqslant 2$ *oraz dla każdego modułu Z w* $\operatorname{ind} A$ *zachodzi* $\operatorname{pd}_A Z \leqslant 1$ *lub* $\operatorname{id}_A Z \leqslant 1$.

Innymi słowy klasa algebr quazi-odwróconych jest podklasą klasy algebr o małych wymiarach homologicznych, składającą się dokładnie z tych algebr A, które są globalnego wymiaru $\operatorname{gl.dim} A \leqslant 2$. Co więcej wszystkie algebry tubularne są algebrami quazi-odwróconymi, które nie są algebrami odwróconymi. Odnotujmy dalej, że wspominani autorzy [16] badali również własności naturalnie stowarzyszonych z algebrą A pełnych podkategorii $\mathscr{L}_A$ i $\mathscr{R}_A$ kategorii $\operatorname{ind} A$, oraz używając ich otrzymali kolejną interesującą homologiczną charakteryzację algebr quazi-odwróconych, sformułowaną poniżej.

Twierdzenie 2.5.2. *Niech A będzie algebrą. Następujące warunki są równoważne.*

(i) *A jest algebrą quazi-odwróconą.*

(ii) *Podkategoria $\mathscr{L}_A$ zawiera wszystkie nierozkładalne moduły projektywne w* $\operatorname{mod} A$.

(iii) *Podkategoria $\mathscr{R}_A$ zawiera wszystkie nierozkładalne moduły injektywne w* $\operatorname{mod} A$.

dowód · Patrz [16, Theorem II.1.14]. □

Z drugiej strony, bezpośrednio z pierwszej definicji wynika natychmiast, że wszystkie algebry odwrócone są jednocześnie quazi-odwrócone (moduły odwracające są przykładem obiektów odwracających w dziedzicznych K-kategoriach abelowych). Wspominamy tu jedynie, że przedstawione w powyższym twierdzeniu równoważne warunki (i)-(iii) można uzupełnić o jeszcze jeden warunek (iv) wyrażony w języku dróg pomiędzy modułami injektywnymi a projektywnymi, którego pełne sformułowanie podane zostanie później w 3.3, gdzie szerzej omawiamy tego typu zagadnienia. Wobec tego, że znajomość klasy algebr odwróconych jest względnie dobra, szczególnie interesujący będzie dla nas teraz opis własności algebr quazi-odwróconych, które nie są odwrócone. Algebry te, z przyczyn których nie będziemy w pełni wyjaśniać, nazywane są *algebrami quazi-odwróconymi typu kanonicznego*, gdyż mają one ścisły związek z algebrami kanonicznymi.

Wspominamy również następujący wynik otrzymany przez F. U. Coelho oraz A. Skowrońskiego w [11], który stanowi pierwszą ważną obserwację dotyczącą struktury kołczanu Auslandera-Reiten algebr quazi-odwróconych typu kanonicznego.

Twierdzenie 2.5.3. *Niech A będzie algebrą quazi-odwróconą, która nie jest algebrą odwróconą. Wówczas zachodzą następujące stwierdzenia.*

(1) Dowolna składowa C w Γ_A zawierająca moduł projektywny należy całkowicie do klasy $\mathscr{L}_A \setminus \mathscr{R}_A$.

(2) Dowolna składowa C w Γ_A, która zawiera moduł injektywny, należy całkowicie do klasy $\mathscr{R}_A \setminus \mathscr{L}_A$.

(3) A jest algebrą półregularnego typu, to znaczy każda składowa w Γ_A jest półregularna.

(4) Każda składowa regularna w Γ_A zawierająca moduł z $\mathscr{L}_A \cap \mathscr{R}_A$ jest całkowicie zawarta w $\mathscr{L}_A \cap \mathscr{R}_A$.

Dowód · Dowód przedstawiony został w cytowanej pracy: patrz [11, Theorem (D)] oraz dalsze wnioski z niego [11, Corollary (E) i Corollary (F)]. □

Przypominamy, że wszystkie algebry quazi-odwrócone typu kanonicznego są nieskończonego typu reprezentacyjnego. W istocie, zostało pokazane w [16], że każda algebra quazi-odwrócona, która jest algebrą skończonego reprezentacyjnego typu, musi być algebrą odwróconą.

Przedstawiamy dalej równoważny opis klasy algebr quazi-odwróconych typu kanonicznego w języku półregularnych powiększeń gałęziowych (powstających poprzez jednoczesne wykonanie na algebrze zarówno rozszerzeń jak i korozszerzeń tubularnych), co znacznie upraszcza opis struktury kołczanu Auslandera-Reiten oswojonych algebr quazi-odwróconych A typu kanonicznego sprowadzając go w zasadzie do opisu odpowiednich kołczanów Auslandera-Reiten dwóch naturalnie stowarzyszonych z A algebr ilorazowych $A^{(l)}$ oraz $A^{(r)}$, które będą w tej sytuacji algebrami tubularnymi albo odwróconymi typu Euklidesa. Niech C będzie dowolną utajoną algebrą kanoniczną, co jest na mocy Twierdzenia 2.4.1 równoważne założeniu, że kołczan Γ_C zawiera (silnie) separującą rodzinę $\mathcal{T}^C$ (dokładnych) stabilnych tub. Możemy wtedy rozważać zarówno $\mathcal{T}^C$-tubularne rozszerzenia, jak i korozszerzenia algebry C, w sensie definicji podanych w 1.7. Przypominamy za [21], że *półregularnym (gałęziowym) powiększeniem algebry C* nazywamy dowolną algebrę A następującej postaci

$$\begin{bmatrix} F & M & 0 \\ 0 & C & D(N) \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix},$$

gdzie M oraz N są bimodułami, odpowiednio w $\mathrm{bimod}(F, C)$, oraz w $\mathrm{bimod}(G, C)$, przy czym algebry

$$A^{(r)} = \begin{bmatrix} F & M \\ 0 & C \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad A^{(l)} = \begin{bmatrix} C & D(N) \\ 0 & G \end{bmatrix}$$

są odpowiednio, ($\mathcal{T}^C$)-tubularnym rozszerzeniem i korozszerzeniem algebry C oraz tuby z $\mathcal{T}^C$ wykorzystane do rozszerzeń oraz korozszerzeń stanowią dwie rozłączne rodziny (lub równoważnie, żadna tuba z $\mathcal{T}^C$ nie zawiera zarówno składnika prostego modułu M_C jak i modułu N_C). Algebry $A^{(r)}$ oraz $A^{(l)}$ nazywane są odpowiednio, *prawą* oraz *lewą częścią algebry A*. Zobaczymy dalej (patrz Twierdzenie 2.5.5), że ze struktury kategorii $\mathrm{ind}\, A^{(l)}$ oraz $\mathrm{ind}\, A^{(r)}$ można w pewnym sensie często odtworzyć kategorię $\mathrm{ind}\, A$ z dokładnością do skończonej liczby modułów. Pierwszych intuicji odnośnie klasy algebr quazi-odwróconych kanonicznego typu dostarcza nam poniższe twierdzenie, które stanowi wniosek z głównego twierdzenia pracy [21].

Twierdzenie 2.5.4. [Lenzing-Skowroński] *Niech A będzie dowolną K-algebrą. Wówczas następujące warunki są równoważne.*

(i) A jest reprezentacyjnie-nieskończoną algebrą quazi-odwróconą typu kanonicznego.

(ii) A jest półregularnym gałęziowym powiększeniem pewnej utajonej algebry kanonicznej C.

(iii) Kołczan Γ_A algebry A zawiera separującą rodzinę półregularnych tub.

(iv) Kołczan Γ_A algebry A zawiera silnie separującą rodzinę półregularnych tub.

Zauważmy również, że każde półregularne powiększenie A oswojonej algebry utajonej C jest na mocy powyższego twierdzenia zawsze reprezentacyjnie-nieskończoną algebrą quazi-odwróconą typu kanonicznego. Powiemy, że A jest *oswojoną algebrą quazi-odwróconą kanonicznego typu*, o ile jest półregularnym powiększeniem pewnej oswojonej algebry utajonej, dla którego zarówno lewa $A^{(l)}$, jak i prawa algebra $A^{(r)}$ jest algebrą odwróconą typu Euklidesa bądź algebrą tubularną. Przypominamy tylko, że jeśli ciało K jest algebraicznie domknięte, to dowolna (spójna) K-algebra quazi-odwrócona typu kanonicznego jest oswojona w powyższym sensie wtedy i tylko wtedy, gdy jest algebrą oswojonego reprezentacyjnego typu (patrz [44, Theorem A]). Odnotujmy teraz następujące twierdzenie, które dostarcza pełnej wiedzy o kształcie składowych w kołczanach Γ_A oswojonych algebr quazi-odwróconych A kanonicznego typu.

Twierdzenie 2.5.5. *Niech A będzie oswojoną algebrą quazi-odwróconą kanonicznego typu. Wtedy A jest oswojonym półregularnym powiększeniem pewnej oswojonej algebry C utajonej oraz kołczan Γ_A ma następujący rozkład*

$$\Gamma_A = \mathcal{P}^A \cup \mathcal{T}^A \cup \mathcal{Q}^A, \quad \textit{gdzie}:$$

(1) $\mathcal{T}^A$ jest rodziną parami ortogonalnych uogólnionych standardowych tub półregularnych w Γ_A silnie separującą $\mathcal{P}^A$ od $\mathcal{Q}^A$ w $\operatorname{mod} A$.

(2) Jeżeli $A^{(l)}$ jest algebrą odwróconą typu Euklidesa, to $\mathcal{P}^A$ jest składową postprojektywną $\mathcal{P}(A^{(l)})$ w $\Gamma_{A^{(l)}}$, zaś w przypadku, gdy algebra $A^{(l)}$ jest algebrą tubularną, $\mathcal{P}^A$ jest rodziną składowych $\mathcal{P}^A = \mathcal{P}^{A^{(l)}}$ w $\Gamma_{A^{(l)}}$ postaci

$$\mathcal{P}(A^{(l)}) \cup \mathcal{T}_0^{A^{(l)}} \cup \Big(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}^+} \mathcal{T}_q^{A^{(l)}} \Big).$$

Ponadto w obydwu powyższych przypadkach $\mathcal{P}^A$ zawiera wszystkie moduły projektywne w $\operatorname{ind} A^{(l)}$, które są jednocześnie modułami projektywnymi w $\operatorname{ind} A$.

(3) Jeśli algebra $A^{(r)}$ jest algebrą odwróconą typu Euklidesa, to $\mathcal{Q}^A$ jest preinjektywną składową $\mathcal{Q}(A^{(r)})$ w $\Gamma_{A^{(r)}}$, zaś w przypadku, gdy $A^{(r)}$ jest algebrą tubularną, $\mathcal{Q}^A$ jest rodziną składowych $\mathcal{Q}^{A^{(r)}}$ w $\Gamma_{A^{(r)}}$ postaci

$$\Big(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}^+} \mathcal{T}_q^{A^{(r)}} \Big) \cup \mathcal{T}_\infty^{A^{(r)}} \cup \mathcal{Q}(A^{(r)}).$$

Co więcej, w obu przypadkach rodzina $\mathcal{Q}^A$ zawiera wszystkie moduły injektywne w $\operatorname{ind} A^{(r)}$, które są przy tym również injektywne w $\operatorname{ind} A$.

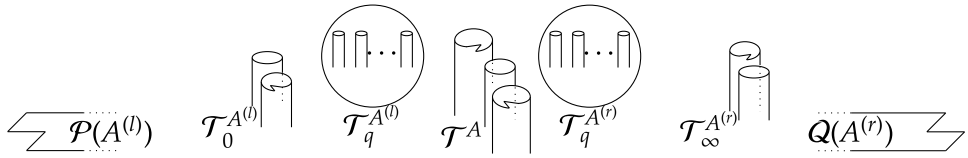
(4) $\mathcal{P}^A \cup \mathcal{Q}^A$ zawiera wszystkie moduły projektywne, zaś $\mathcal{T}^A \cup \mathcal{Q}^A$, wszystkie moduły injektywne w $\operatorname{ind} A$.

(5) Algebra A jest $({}_s\mathcal{T}_\infty^{A^{(l)}})$-tubularnym rozszerzeniem algebry $A^{(l)}$ oraz rodzina tub kopromieniowych $\mathcal{T}_\infty^{A^{(l)}}$ w $\Gamma_{A^{(l)}}$ jest rodziną ${}_l\mathcal{T}^A$ wszystkich tub kopromieniowych z $\mathcal{T}^A$. W szczególności, rodzina $\mathcal{T}^A$ zawiera moduły injektywne wtedy i tylko wtedy, gdy $A^{(l)} \neq C$, lub równoważnie $A \neq A^{(r)}$.

(6) Algebra A jest $({}_s\mathcal{T}_0^{A^{(r)}})$-tubularnym korozszerzeniem algebry $A^{(r)}$ oraz rodzina tub promieniowych $\mathcal{T}_0^{A^{(r)}}$ w $\Gamma_{A^{(r)}}$ jest rodziną ${}_r\mathcal{T}^A$ wszystkich tub promieniowych z $\mathcal{T}^A$. W szczególności, rodzina $\mathcal{T}^A$ zawiera moduły projektywne wtedy i tylko wtedy, gdy $A^{(r)} \neq C$, lub równoważnie $A \neq A^{(l)}$.

Dowód · Teza jest bezpośrednią konsekwencją definicji półregularnego gałęziowego powiększenia oraz sformułowanego wcześniej Twierdzenia 2.5.4. □

W świetle powyższego twierdzenia kołczan Γ_A oswojonej algebry quazi-odwróconej kanonicznego typu zawiera silnie separującą rodzinę półregularnych tub, przy czym pozostałe składowe w Γ_A są wówczas składowymi w kołczanie $\Gamma_{A^{(l)}}$ lub $\Gamma_{A^{(r)}}$ jednej z algebr ilorazowych $A^{(l)}$ lub $A^{(r)}$, z których każda jest albo algebrą tubularną albo odwróconą typu Euklidesa, a więc mamy pełną kontrolę nad strukturą ich kołczanów Auslandera-Reiten. Jeśli $A^{(l)}$ jest algebrą odwróconą, to rodzina $\mathcal{P}^A$ zawiera tylko składową postprojektywną. Podobnie, w sytuacji gdy $A^{(r)}$ jest odwrócona, rodzina $\mathcal{Q}^A$ zawiera tylko składową preinjektywną. W najbardziej złożonym przypadku, to jest gdy zarówno $A^{(l)}$ i $A^{(r)}$ są algebrami tubularnymi kołczan Γ_A algebry A ma następującą postać



Ostatecznie na zakończenie rozważań niniejszej sekcji udowodnimy jeszcze kilka prostych lematów techniczych opisujących różne własności oswojonych algebr quazi-odwróconych kanonicznego typu związane z operacją sumy włóknistej algebr zdefiniowaną w 1.2.

Lemat 2.5.6. *Niech A będzie dowolną oswojoną algebrą quazi-odwróconą kanonicznego typu, która jest półregularnym gałęziowym powiększeniem oswojonej utajonej algebry C. Wówczas C jest wspólną wypukłą podkategorią algebr $A^{(l)}$ i $A^{(r)}$ oraz A jest izomorficzna z sumą włóknistą $A^{(l)} \sqcup_C A^{(r)}$.*

dowód · Teza jest oczywistą konsekwencją definicji sumy włóknistej oraz półregularnego gałęziowego powiększenia. Ponadto C jest wypukłą podkategorią $A^{(r)}$ oraz $A^{(l)}$, ponieważ z definicji $A^{(r)}$ oraz $A^{(l)}$ są odpowiednio, $\mathcal{T}^C$-tubularnym rozszerzeniem i korozszerzeniem algebry C. □

Lemat 2.5.7. *Niech A i B będą oswojonymi algebrami quazi-odwróconymi kanonicznego typu oraz załóżmy, że $A^{(r)} = B^{(l)}$ jest algebrą tubularną, którą oznaczmy przez C. Wówczas prawdziwe są następujące stwierdzenia.*

(1) A oraz B są wypukłymi podkategoriami w $A \sqcup_C B$.

(2) Algebra $A \sqcup_C B$ jest $({}_s\mathcal{T}_\infty^C)$-tubularnym rozszerzeniem algebry A.

(3) Algebra $A \sqcup_C B$ jest $({}_s\mathcal{T}_0^C)$-tubularnym korozszerzeniem algebry B.

Ponadto jeśli przy tym $A \sqcup_C B$ nie jest oswojoną algebrą quazi-odwróconą kanonicznego typu, to $A \neq C$ i $B \neq C$.

dowód · Przypominamy, że teza (1) jest oczywiście spełniona na mocy Lematu 1.2.2, ponieważ C jest zarówno wypukłą podkategorią $C = A^{(r)}$ w A, jak i wypukłą podkategorią $C = B^{(l)}$ w B. Pokażemy dalej, że zachodzi warunek (2). Odnotujmy w tym celu, że zarówno A jak i B są oswojonymi algebrami quazi-odwróconymi kanonicznego typu, zatem są również półregularnymi gałęziowymi powiększeniami pewnych oswojonych algebr utajonych C_A i C_B, odpowiednio. W tej sytuacji algebry A i B są izomorficzne z algebrami macierzowymi, odpowiednio, postaci

$$\begin{bmatrix} F & M & 0 \\ 0 & C_A & D(N) \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{bmatrix} H & U & 0 \\ 0 & C_B & D(V) \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix},$$

dla pewnych algebr z dzieleniem F, G, H, J oraz bimodułów ${}_FM_{C_A}, {}_GN_{C_A}, {}_HU_{C_B}$ i ${}_JV_{C_B}$. Dalej, ponieważ $A^{(r)} = B^{(l)}$ jest algebrą tubularną C, która jest jednocześnie tubularnym rozszerzeniem oswojonej algebry C_A oraz tubularnym korozszerzeniem algebry C_B, to wnioskujemy, że $C_A = C_0$ oraz $C_B = C_\infty$ w notacji z Twierdzenia 2.4.4. Zauważmy teraz, że na mocy definicji sumy włóknistej algebra $A \sqcup_C B$ jest w tym przypadku izomorficzna z algebrą macierzową postaci

$$\begin{bmatrix} H & 0 & U & 0 \\ 0 & F & M & 0 \\ 0 & 0 & C_A & D(N) \\ 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}.$$

Co więcej, oswojona algebra quazi-odwrócona B jest oczywiście $({}_s\mathcal{T}_\infty^C)$-tubularnym rozszerzeniem algebry $C = B^{(l)}$. Ponieważ $C = A^{(r)}$, to wszystkie tuby z $\mathcal{T}_\infty^C$ są także składowymi w Γ_A, tak więc możemy rozważyć algebrę A', która jest $({}_s\mathcal{T}_\infty^C)$-tubularnym rozszerzeniem otrzymanym z algebry A po zastosowaniu ciągu odpowiednich operacji typu (ad. 1) prowadzących z C do B. Nietrudno teraz zauważyć, że U jest również $(H\text{-}A)$-bimodułem oraz algebra A' jest wówczas rozszerzeniem $A[{}_HU_A]$ algebry A o bimoduł U. Stąd już jasno wynika, że A' jest izomorficzna z algebrą macierzową powyższej postaci, a więc faktycznie zachodzi również izomorfizm algebr $A' \cong A \sqcup_C B$, czyli w szczególności, $A \sqcup_C B$ jest żądanej postaci tubularnym rozszerzeniem algebry A. To kończy dowód (2). Stosując dalne argumenty można pokazać, że $A \sqcup_C B$ jest $({}_s\mathcal{T}_0^C)$-tubularnym korozszerzeniem algebry B powstającym z algebry B poprzez zastosowanie ciągu operacji typu (ad. 1*) prowadzących z algebry C do algebry A, która jest $({}_s\mathcal{T}_0^C)$-tubularnym korozszerzeniem $C = A^{(r)}$. Oczywiście, jeżeli $A = C$ lub $B = C$, to algebra $A \sqcup_C B$ jest izomorficzna z B lub A, a więc jest algebrą quazi-odwróconą, co kończy dowód. □

Odnotujmy jeszcze jeden natychmiastowy wniosek z powyższego dowodu.

Lemat 2.5.8. *Niech C będzie algebrą taką, że Γ_C zawiera rodzinę $\mathcal{T}_0^C$ parami ortogonalnych tub promieniowych i rodzinę $\mathcal{T}_\infty^C$ parami ortogonalnych tub kopromieniowych oraz rodziny te są rozłączne. Niech również A będzie $({}_s\mathcal{T}_0^C)$-tubularnym korozszerzeniem algebry C, zaś B jej $({}_s\mathcal{T}_\infty^C)$-tubularnym rozszerzeniem. Wtedy*

(1) Jeżeli $\mathcal{T}_\infty^C$ jest rodziną składowych w Γ_A, to algebra $A \sqcup_C B$ jest $({}_s\mathcal{T}_\infty^C)$-tubularnym rozszerzeniem A.

(2) Jeśli $\mathcal{T}_0^C$ jest rodziną składowych w Γ_B, to $A \sqcup_C B$ jest $({}_s\mathcal{T}_0^C)$-tubularnym korozszerzeniem B.

dowód · Tezy (1) i (2) można łatwo udowodnić korzystając z argumentów analogicznych do przedstawionych w dowodzie poprzedniego lematu, przy czym odnotujmy tylko, że nie skorzystaliśmy tam istotnie z tubularności algebry C, a jedynie z faktu, że A jest $({}_s\mathcal{T}_0^C)$-tubularnym korozszerzeniem algebry $A^{(r)} = C$ (odpowiednio, B jest $({}_s\mathcal{T}_\infty^C)$-tubularnym rozszerzeniem $B^{(l)} = C$), zaś rodziny $\mathcal{T}_0^C$ lub $\mathcal{T}_\infty^C$ składają się z tub promieniowych w Γ_B, lub odpowiednio, tub kopromieniowych w Γ_A. □

2.6 Algebry podwójnie odwrócone ·

Wyniki wspominanej w poprzedniej sekcji pracy [16] zakończyły zasadniczą klasyfikację algebr o małych wymiarach homologicznych, których globalny wymiar jest co najwyżej równy dwa (patrz Twierdzenie 2.5.1). Następnym naturalnym krokiem było więc zbadanie klasy algebr A o małych wymiarach homologicznych z globalnym wymiarem $\operatorname{gl.dim} A = 3$, to znaczy klasy algebr o ściśle małych wymiarach homologicznych. Zadanie to zostało podjęte przez I. Reiten oraz A. Skowrońskiego, którzy zdefiniowali w tym celu oraz szeroko opisali klasę tak zwanych *algebr podwójnie odwróconych* omówioną po krótce dalej. Odnotujmy, że klasa algebr o małych wymiarach homologicznych była równocześnie niezależnie badana przez F. U. Coelho oraz M. Lanzilottę w [7]. Rozważania tych autorów poprowadziły do następującej charakteryzacji algebr o małych wymiarach homologicznych w terminach własności podkategorii $\mathscr{L}_A$ oraz $\mathscr{R}_A$.

Twierdzenie 2.6.1. [Coelho-Lanzilotta] *Dla dowolnej algebry A następujące warunki są równoważne.*

(i) A jest algebrą o małych wymiarach homologicznych.

(ii) Istnieje para torsyjna $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ w $\operatorname{mod} A$, taka, że dla dowolnego modułu Y w $\mathscr{Y}$ zachodzi $\operatorname{pd}_A Y \leqslant 1$, zaś dla dowolnego modułu X w $\mathscr{X}$ mamy $\operatorname{id}_A X \leqslant 1$.

(iii) $\operatorname{ind} A = \mathscr{L}_A \cup \mathscr{R}_A$.

dowód · Patrz [7, (2.1)]. □

Wyniki badań I. Reiten i A. Skowrońskiego opublikowane w pracy [31] odsłoniły głębokie i nietrywialne związki między kategoriami modułów algebr o małych wymiarach homologicznych oraz kategoriami modułów algebr odwróconych. Okazało się bowiem, że w kołczanie Γ_A każdej algebry A o ściśle małych wymiarach homologicznych można zawsze znaleźć składową zawierającą pewien podkołczan, który spełnia szereg ogólniejszych odpowiedników własności spełnianych przez sekcje w składowych łączących kołczanów Auslandera-Reiten algebr odwróconych. To odkrycie przyczyniło się ostatecznie do sformułowania przez wspominanych autorów następującej definicji, tak zwanej *podwójnej sekcji*, która pojawiła się po raz pierwszy w [31, Section 7].

Definicja · Niech A będzie algebrą, a $\mathcal{C}$ dowolną składową w kołczanie Γ_A. Każdy pełny (wartościowany) podkołczan Δ składowej $\mathcal{C}$, nazywać będziemy *podwójną sekcją* (w $\mathcal{C}$), o ile spełnione są następujące warunki.

1) Δ jest kołczanem acyklicznym.
2) Δ jest wypukły w $\mathcal{C}$.
3) Dla każdej τ_A-orbity $\mathcal{O}$ w $\mathcal{C}$ mamy $1 \leqslant |\mathcal{O} \cap \Delta| \leqslant 2$.
4) Jeżeli $\mathcal{O}$ jest τ_A-orbitą w $\mathcal{C}$, dla której $|\mathcal{O} \cap \Delta| = 2$, to istnieją drogi sekcyjne w $\mathcal{C}$ postaci

$$I \to \cdots \to \tau_A X \quad \text{oraz} \quad X \to \cdots \to P,$$

takie, że I jest modułem injektywnym w $\mathcal{C}$, P modułem projektywnym w $\mathcal{C}$, natomiast X jest modułem w $\mathcal{C}$ dobranym tak, aby $\{\tau_A X, X\} = \mathcal{O} \cap \Delta$.

Przypomnijmy tutaj również, że dowolnej podwójnej sekcji Δ w składowej $\mathcal{C}$ przyporządkowane są naturalnie określone podkołczany Δ_l oraz Δ_r w $\mathcal{C}$, które zdefiniowane są jak następuje.

- $\Delta_l := (\Delta \setminus \Delta_r') \cup \tau_A \Delta_r'$, gdzie Δ_r' jest podkołczanem w Δ składającym się z modułów X, dla których istnieje prawie sekcyjna droga $I \to \cdots \to X$ w $\mathcal{C}$ taka, że I jest modułem injektywnym.

- $\Delta_r := (\Delta \setminus \Delta_l') \cup \tau_A^{-1} \Delta_l'$, gdzie Δ_l' jest podkołczanem w Δ składającym się z modułów X, dla których istnieje prawie sekcyjna droga $X \to \cdots \to P$ w $\mathcal{C}$, gdzie P jest modułem projektywnym.

Uwaga · Zauważmy najpierw, że zdefiniowane powyżej pojęcie podwójnej sekcji w składowej jest faktycznie uogólnieniem pojęcia sekcji. W istocie, jeżeli Δ jest podwójną sekcją w składowej $\mathcal{C}$ taką, że $|\mathcal{O} \cap \Delta| = 1$ dla każdej orbity $\mathcal{O}$ w $\mathcal{C}$, to oczywiście wówczas $\Delta_l = \Delta = \Delta_r$, oraz Δ jest sekcją w składowej $\mathcal{C}$. Jeśli natomiast Δ jest podwójną sekcją która nie jest sekcją (przypadek niezdegenerowany), lub równoważnie, istnieje orbita $\mathcal{O}$ w $\mathcal{C}$, dla której $|\mathcal{O} \cap \Delta| = 2$, to Δ nazywana jest wtedy *ściśle podwójną sekcją* w składowej $\mathcal{C}$ ·

Ostatni krok pozostający nam do finalnego sformułowania definicji algebry podwójnie odwróconej, stanowi następujące dalece nieoczywiste twierdzenie, wywnioskowane we wspominanej pracy [31], co wymagało między innymi, szczegółowego zbadania rozmaitych własności algebr o małych wymiarach homologicznych w kontekście jednopunktowych rozszerzeń.

Twierdzenie 2.6.2. *Niech A będzie algebrą (spójną, bazową), zaś $\mathcal{C}$ składową w Γ_A zawierającą pewną podwójną sekcję Δ. Wówczas następujące warunki są równoważne.*

(i) *$\mathcal{C}$ jest uogólnioną standardową składową w Γ_A.*

(ii) *Kołczan Δ jest skończony oraz $\operatorname{rad}_A^{\infty}(X, Y) = 0$, dla dowolnych modułów X oraz Y leżących na Δ.*

(iii) $\operatorname{Hom}_A(\tau_A^{-1} X, Y) = 0$, *dla dowolnych modułów X w Δ_r oraz Y w Δ_l.*

(iv) $\operatorname{Hom}_A(X, \tau_A Y) = 0$, *dla dowolnych modułów X w Δ_r oraz Y w Δ_l.*

Ponadto, jeśli założymy dodatkowo, że składowa $\mathcal{C}$ jest dokładna, to powyższe warunki można uzupełnić o następujący równoważny warunek.

(v) *Istnieją algebry ilorazowe A_l oraz A_r algebry A o następujących własnościach.*

- *A_l jest algebrą odwróconą (niekoniecznie spójną) taką, że lewa część Δ_l (sekcji Δ) jest rozłączną sumą sekcji w składowych łączących spójnych bloków algebry A_l, oraz przy tym kategoria wszystkich poprzedników Δ_l w $\operatorname{ind} A$ pokrywa się z kategorią wszystkich poprzedników Δ_l w $\operatorname{ind} A_l$.*

- *A_r jest algebrą odwróconą (niekoniecznie spójną) taką, że kołczan Δ_r jest rozłączną sumą sekcji w składowych łączących spójnych bloków algebry A_r, oraz przy tym kategoria wszystkich następników Δ_r w* ind A *pokrywa się z kategorią wszystkich następników Δ_r w* ind A_r.

DOWÓD · Dowód jest konsekwencją [31, Proposition 7.2 oraz Theorem 7.3]. □

Powyższe twierdzenie poprowadziło w rezultacie do przyjęcia poniższej definicji algebry podwójnie odwróconej.

DEFINICJA · Niech A będzie spójną K-algebrą. Wówczas A nazywamy *algebrą podwójnie odwróconą* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje składowa w Γ_A zawierająca dokładną podwójną sekcję Δ spełniająca jeden z równoważnych warunków sformułowanych w Twierdzeniu 2.6.2.

Ostatecznie odnotujmy, że wprost z powyższej definicji oraz kryterium Liu-Skowrońskiego każda algebra odwrócona jest algebrą podwójnie odwróconą. Algebrę A nazwiemy *ściśle podwójnie odwróconą* wtedy i tylko wtedy, gdy A jest algebrą podwójnie odwróconą ale nie jest izomorficzna z algebrą odwróconą. Co więcej, algebra podwójnie odwrócona A jest ściśle podwójnie odwrócona, o ile odpowiednia składowa w Γ_A zawiera ściśle podwójną sekcję. Następujące twierdzenie zamyka klasyfikację algebr o małych wymiarach homologicznych.

TWIERDZENIE 2.6.3. *Niech A będzie algebrą. Wówczas następujące warunki są równoważne.*

(i) A jest algebrą o ściśle małych wymiarach homologicznych.

(ii) Algebra A jest ściśle podwójnie odwrócona.

DOWÓD · Teza wynika z [31, Theorem 8.2]. □

Pełen opis struktury kołczanu Auslandera-Reiten algebr (ściśle) podwójnie odwróconych, a w szczególności struktury wyróżnionej składowej z podwójną sekcją, pojawi się w następnym z kolei podrozdziale, w którym omawiamy kluczową dla naszych rozważań klasę tak zwanych algebr uogólnionych podwójnie odwróconych istotnie rozszerzającą klasę algebr podwójnie odwróconych.

2.7 UOGÓLNIONE ALGEBRY PODWÓJNIE ODWRÓCONE ·

W niniejszym podrozdziale uzupełniamy listę uogólnień klasy algebr odwróconych o ostatni bardzo istotny przykład. Tytułowe uogólnione algebry podwójnie odwrócone stanowią bodaj najszerszą dotychczas zbadaną klasę algebr zawierającą klasy algebr odwróconych i podwójnie odwróconych, która posiadałaby jednocześnie tak zbliżone strukturalne własności. Przedstawiamy poniżej kompletny opis tej klasy zaczynając od omówienia pojęcia wielosekcji w składowych kołczanów Auslandera-Reiten. Następnie formułujemy za I. Reiten i A. Skowrońskiego [32, patrz Section 2] definicję uogólnionej algebry podwójnie odwróconej oraz podajemy najważniejsze własności kategorii modułów tego typu algebr. Prezentowane w tej sekcji wyniki oraz omawiane pojęcia pochodzą praktycznie w całości z artykułu [32], do którego odsyłamy po dowody większości sformułowanych tu twierdzeń.

Rozpocznijmy od krótkiego omówienia definicji wielosekcji w składowych kołczanów Auslandera-Reiten. Niech A będzie dowolną algebrą, zaś C ustaloną składową kołczanu Γ_A. Przypominamy za [32], że każdy pełny spójny wartościowany podkołczan Δ w składowej C nazywany jest *wielosekcją w C* wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą poniższe warunki:

(1) Δ jest kołczanem prawie acyklicznym,

(2) Δ jest wypukłym podkołczanem w C,

(3) $1 \leqslant |\Delta \cap \mathscr{O}| < \infty$, dla każdej τ_A-orbity $\mathscr{O}$ w C, przy czym $|\Delta \cap \mathscr{O}| \geqslant 2$ dla co najwyżej skończenie wielu τ_A-orbit $\mathscr{O}$ w C,

(4) nie istnieje żaden właściwy pełny i wypukły podkołczan wartościowany kołczanu Δ, dla którego zachodziłyby warunki (1)-(3).

Tak jak wcześniej w przypadku podwójnej sekcji, rozważa się stowarzyszone z wielosekcją Δ podkołczany wartościowane Δ_l i Δ_r oraz tutaj również podkołczan Δ_c w C, gdzie

- $\Delta_l := (\Delta \setminus \Delta'_r) \cup \tau_A \Delta''_r$, przy czym Δ'_r jest podkołczanem w Δ składającym się z modułów X, dla których istnieje niesekcyjna droga $I \to \cdots \to X$ w C taka, że I jest modułem injektywnym, zaś $\Delta''_r = \{X \in \Delta'_r | \tau_A X \notin \Delta'_r\}$;
- $\Delta_r := (\Delta \setminus \Delta'_l) \cup \tau_A^{-1} \Delta''_l$, gdzie Δ'_l jest podkołczanem w Δ składającym się z modułów X, dla których istnieje niesekcyjna droga $X \to \cdots \to P$ w C taka, że P jest modułem projektywnym oraz $\Delta''_l = \{X \in \Delta'_l | \tau_A^{-1} X \notin \Delta'_l\}$;
- i ostatecznie w odróżnieniu od podwójnej sekcji, w przypadku wielosekcji możemy rozważać także (wartościowany) podkołczan Δ_c, nazywany *rdzeniem wielosekcji* Δ, który określony jest jako część wspólna $\Delta_c := \Delta'_l \cap \Delta'_r$.

Uwaga · Odnotujmy tutaj [32, Proposition 2.11], że jeśli C jest składową w Γ_A zawierającą wielosekcję, to dowolne dwie wielosekcje Δ oraz Σ w C generują ten sam rdzeń $\Delta_c = \Sigma_c$. W tym sensie rdzeń $\Sigma(C) = \Delta_c$ wielosekcji w C nie zależy od jej wyboru, lecz jest zdeterminowany przez strukturę składowej C. Wspominamy, że jeżeli Δ jest podwójną sekcją, rdzeń Δ_c jest pusty i krotności przecięcia τ_A-orbit w C z Δ wynoszą co najwyżej dwa. Jest to dość spore ograniczenie w porównaniu z dowolnością jaką dysponujemy posługując się pojęciem wielosekcji ·

Przedstawimy teraz kilka podstawowych własności składowych w kołczanach Auslandera-Reiten zawierających wielosekcje. Zaczynamy od następującego lematu wraz ze sformułowanym bezpośrednio po nim wnioskiem.

Lemat 2.7.1. *Niech Δ będzie wielosekcją w składowej C kołczanu Γ_A algebry A. Załóżmy ponadto, że istnieje τ_A-orbita $\mathcal{O}$ w C, dla której $\Delta \cap \mathcal{O} = \{\tau_A^{m-1} X, \ldots, \tau_A X, X\}$, dla pewnego modułu $X \in \Delta$ oraz liczby naturalnej $m \geqslant 2$. Wtedy istnieją drogi w Δ postaci*

$$I \to \cdots \to \tau_A^{m-1} X \quad \textit{oraz} \quad X \to \cdots \to P,$$

gdzie I jest modułem injektywnym, zaś P modułem projektywnym w C.

dowód · Patrz [32, Lemma 2.2] □

Wniosek 2.7.2. *Jeśli Δ jest wielosekcją w składowej C kołczanu Γ_A, to poniższe warunki są równoważne.*

(i) *Δ jest sekcją w składowej C.*

(ii) $\Delta = \Delta_l$.

(iii) $\Delta = \Delta_r$.

dowód · Dowód można znaleźć w [32, Corollary 2.3]. □

Następne stwierdzenie opisuje ogólną postać składowych zawierających wielosekcje.

Stwierdzenie 2.7.3. *Niech C będzie składową w kołczanie Γ_A algebry A, oraz załóżmy, że C zawiera wielosekcję Δ. Wówczas*

(1) Część cykliczna ${}_cC$ składowej C zawarta jest w rdzeniu Δ_c wielosekcji Δ.

(2) Rdzeń Δ_c jest skończonym podkołczanem w Δ.

Co więcej, w tej sytuacji składowa C posiada rozkład na rozłączną sumę

$$C = C_l \cup \Delta_c \cup C_r$$

rdzenia $\Delta_c = \Sigma(C)$ oraz dwóch podkołczanów C_l oraz C_r w C zamkniętych, odpowiednio, na branie poprzedników oraz następników w C, gdzie C_l (odpowiednio C_r) składa się ze wszystkich poprzedników Δ_l (odpowiednio, następników Δ_r) w C. W szczególności, wtedy C jest prawie acykliczną składową w Γ_A.

DOWÓD · Po dowód odsyłamy do [32, Proposition 2.4]. □

Powyższe stwierdzenie prowadzi również do następującego wniosku.

WNIOSEK 2.7.4. *Niech C będzie składową w Γ_A zawierającą pewną skończoną wielosekcję Δ. Wówczas*

(1) Jeśli istnieje w C droga $\cdots \to Y_2 \to Y_1 \to Y_0 = Y$ przechodząca przez nieskończenie wiele parami nieizomorficznych modułów oraz Y należy do C_r, to istnieje $m \geqslant 1$ takie, że moduł Y_m należy do C_l.

(2) Podobnie, jeżeli mamy w C drogę $X = X_0 \to X_1 \to X_2 \to \ldots$ zawierającą nieskończenie wiele parami nieizomorficznych modułów oraz X należy do C_l, to istnieje $m \geqslant 1$ takie, że X_m należy do C_r.

DOWÓD · Teza jest konsekwencją własności składowej C opisanych w Stwierdzeniu 2.7.3 oraz pewnych elementarnych argumentów, które zostały przedstawione w 1.4, w krótkiej części poświęconej składowym prawie acyklicznym. W istocie, jeśli dana jest droga w C postaci $\cdots \to Y_2 \to Y_1 \to Y_0 = Y$ zawierająca nieskończenie wiele parami nieizomorficznych modułów, to na mocy poprzedniego stwierdzenia istnieje $n_0 \geqslant 0$ takie, że Y_{n_0} jest modułem w $C_l \cup C_r$, ponieważ rdzeń Δ_c jest skończony. Jeżeli Y_{n_0} należy do C_l, to nie ma czego dowodzić, zaś w przypadku, gdy Y_{n_0} jest modułem w C_r istnieje takie $n_1 \geqslant n_0 + 1$, że moduł Y_{n_1} należy do C_l, bowiem w przeciwnym razie moduł Y_{n_1} należący do C_r miałby nieskończenie wiele poprzedników w C należących również do C_r, co przeczy własności podkołczanu C_r omówionej w 1.4. To dowodzi (1). Dla (2) wystarczy użyć dualnych argumentów. □

Dalej, przytoczmy bardzo ważną strukturalną charakteryzację składowych zawierających wielosekcje, która została udowodniona w [32, Theorem 2.5].

TWIERDZENIE 2.7.5. *Niech A będzie algebrą, zaś C dowolną składową kołczanu Γ_A. Wówczas istnieje wielosekcja w C wtedy i tylko wtedy, gdy C jest składową prawie acykliczną.*

UWAGA · W szczególnym przypadku [32, Corollary 2.6], wnioskujemy z powyższego twierdzenia, że dowolna składowa C w kołczanie Γ_A zawiera acykliczną wielosekcję wtedy i tylko wtedy, gdy C jest składową acykliczną (bez zorientowanych cykli). Przypominamy także [32, Lemma 2.7], że każda składowa C z wielosekcją Δ jest dokładną składową w kołczanie Γ_A wtedy i tylko wtedy, gdy wielosekcja Δ jest dokładna ·

Poniżej formułujemy kluczowe twierdzenie prowadzące do definicji uogólnionej algebry podwójnie odwróconej, którego teza jest odpowiednią modyfikacją Twierdzenia 2.6.2 obowiązującego dla składowych z podwójną sekcją.

TWIERDZENIE 2.7.6. [REITEN-SKOWROŃSKI] *Niech A będzie algebrą, a C składową w Γ_A, która zawiera wielosekcję Δ. Wówczas następujące warunki są równoważne*

(i) C jest uogólnioną standardową składową w Γ_A.

(ii) Kołczan Δ jest skończony oraz $\operatorname{rad}_A^\infty(X, Y) = 0$, dla dowolnej pary modułów X i Y leżących na Δ.

(iii) $\operatorname{Hom}_A(\tau_A^{-1}X, Y) = 0$, dla dowolnych modułów X z Δ_r oraz Y z Δ_l.

(iv) $\operatorname{Hom}_A(X, \tau_A Y) = 0$, dla dowolnych modułów X z Δ_r oraz Y z Δ_l.

Jeśli ponadto C jest składową dokładną, to powyższe warunki można uzupełnić o następujący.

(v) Istnieją algebry ilorazowe $A^{(l)}$ oraz $A^{(r)}$ algebry A, dla których spełnione są warunki:

- *$A^{(l)}$ jest algebrą odwróconą (niekoniecznie spójną) taką, że kołczan Δ_l jest rozłączną sumą sekcji w składowych łączących spójnych bloków algebry $A^{(l)}$, oraz przy tym kategoria wszystkich poprzedników Δ_l w $\operatorname{ind} A$ pokrywa się z kategorią wszystkich poprzedników Δ_l w $\operatorname{ind} A^{(l)}$;*
- *$A^{(r)}$ jest algebrą odwróconą (również niekoniecznie spójną) i taką, że kołczan Δ_r jest rozłączną sumą sekcji w składowych łączących spójnych bloków algebry $A^{(r)}$, oraz przy tym kategoria wszystkich następników Δ_r w $\operatorname{ind} A$ pokrywa się z kategorią wszystkich następników Δ_r w $\operatorname{ind} A^{(r)}$.*

DOWÓD · Patrz [32, Theorem 3.1]. □

Algebrę A, której kołczan Γ_A zawiera składową $\mathcal{C}$ z dokładną wielosekcją Δ, spełniającą jeden z pięciu równoważnych warunków podanych w powyższym twierdzeniu, nazywamy *uogólnioną algebrą podwójnie odwróconą*. Składową $\mathcal{C}$ nazywa się wówczas *składową łączącą* w kołczanie Γ_A uogólnionej algebry odwróconej A. Odnotujmy następujący wniosek z dwóch poprzednich twierdzeń.

Wniosek 2.7.7. *Dla dowolnej K-algebry A następujące warunki są równoważne.*

(i) A jest uogólnioną algebrą podwójnie odwróconą.

(ii) Istnieje prawie acykliczna, uogólniona standardowa i dokładna składowa w Γ_A.

Zauważmy, że oczywiście skończona składowa kołczanu Auslandera-Reiten każdej spójnej algebry A jest prawie acykliczną, dokładną i uogólnioną standardową składową w Γ_A. Tak więc bezpośrednio z powyższej charakteryzacji otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 2.7.8. *Każda algebra skończonego reprezentacyjnego typu jest uogólniona podwójnie odwrócona.*

Zamykamy nasze rozważania o uogólnionych algebrach podwójnie odwróconych następującym twierdzeniem wraz z wnioskami po nim, w których opisujemy strukturę ich kategorii modułów oraz kołczanu Auslandera-Reiten.

Twierdzenie 2.7.9. *Niech A będzie spójną uogólnioną algebrą podwójnie odwróconą nieskończonego reprezentacyjnego typu, która nie jest algebrą odwróconą, oraz niech $\mathcal{C}$ będzie pewną składową łączącą w Γ_A. Wówczas istnieją algebry dziedziczne H^l i H^r oraz moduły odwracające T^l i T^r w $\operatorname{mod} H^l$ oraz $\operatorname{mod} H^r$, odpowiednio, przy czym T^l (odpowiednio, T^r) nie ma niezerowych preinjektywnych (odpowiednio, postprojektywnych) składników prostych, oraz zachodzą następujące stwierdzenia.*

(1) Algebra odwrócona $A^l = \operatorname{End}_{H^l}(T^l)$ (odpowiednio, $A^r = \operatorname{End}_{H^r}(T^r)$) jest algebrą ilorazową algebry A, dla której część beztorsyjna $\mathscr{Y}(T^l)$ kategorii $\operatorname{mod} A^l$ (odpowiednio, część torsyjna $\mathscr{X}(T^r)$ w $\operatorname{mod} A^r$) jest pełną i dokładną podkategorią w $\operatorname{mod} A$, zamkniętą na branie poprzedników (odpowiednio, następników) w $\operatorname{ind} A$. Co więcej, klasy $\mathscr{Y}(T^l)$ i $\mathscr{X}(T^r)$ nie mają niezerowych modułów w części wspólnej.

(2) Algebra A^l jest algebrą ilorazową algebry $A^{(l)}$ oraz część beztorsyjna $\mathcal{C}^l := \mathscr{Y}(T^l) \cap \mathcal{C}_{T^l}$ rodziny $\mathcal{C}_{T^l}$ wszystkich składowych łączących w Γ_{A^l} jest pełnym podkołczanem postaci $\mathscr{Y}(T^l) \cap \mathcal{C}$ w $\mathcal{C}$, zamkniętym na poprzedników.

(3) Algebra A^r jest algebrą ilorazową algebry $A^{(r)}$ i część torsyjna $\mathcal{C}^r := \mathscr{X}(T^r) \cap \mathcal{C}_{T^r}$ rodziny $\mathcal{C}_{T^r}$ wszystkich składowych łączących w Γ_{A^r} jest pełnym podkołczanem $\mathscr{X}(T^r) \cap \mathcal{C}$ w $\mathcal{C}$, zamkniętym branie na następników.

(4) Rodzina modułów nierozkładalnych w $\operatorname{ind} A$, które nie należą ani do klasy $\mathscr{Y}(T^l)$ ani do $\mathscr{X}(T^r)$, jest skończoną rodziną w $\operatorname{ind} A$, składającą się ze wszystkich modułów w $\mathcal{C} \setminus (\mathcal{C}^l \cup \mathcal{C}^r)$.

DOWÓD · Dowód można znaleźć w [32, Theorem 3.4]. □

Dla dowolnej uogólnionej algebry podwójnie odwróconej A nieskończonego typu reprezentacyjnego kołczan Γ_A ma postać rozłącznej sumy $\Gamma_A = \mathcal{Y}\Gamma_A \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{X}\Gamma_A$, gdzie $\mathcal{Y}\Gamma_A = \mathscr{Y}(T^l) \cap (\Gamma_A \setminus \{\mathcal{C}\})$ jest rodziną składowych w Γ_A zawartych wyłącznie w części beztorsyjnej kołczanu Γ_{A^l}, zaś $\mathcal{X}\Gamma_A = \mathscr{X}(T^r) \cap (\Gamma_A \setminus \{\mathcal{C}\})$ jest rodziną składowych w Γ_A zawartych wyłącznie w części torsyjnej kołczanu Γ_{A^r}. Odnotujmy jeszcze podsumowujący wniosek z powyższych rozważań.

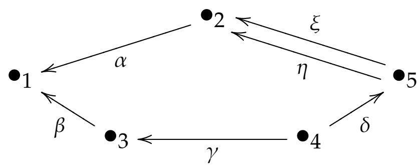
Wniosek 2.7.10. *Niech A będzie (spójną) uogólnioną algebrą podwójnie odwróconą nieskończonego reprezentacyjnego typu, która nie jest algebrą odwróconą. Wówczas rodzina $\mathcal{Y}\Gamma_A \cup \mathcal{C}$ zawiera wszystkie moduły projektywne, zaś rodzina $\mathcal{C} \cup \mathcal{X}\Gamma_A$ wszystkie moduły injektywne w* $\operatorname{ind} A$, *przy czym*

(1) dla każdego modułu Y w $\mathcal{Y}\Gamma_A$ zachodzi $\operatorname{pd}_A Y \leqslant 1$ *oraz wszystkie moduły X w $\mathcal{X}\Gamma_A$ spełniają* $\operatorname{id}_A X \leqslant 1$;

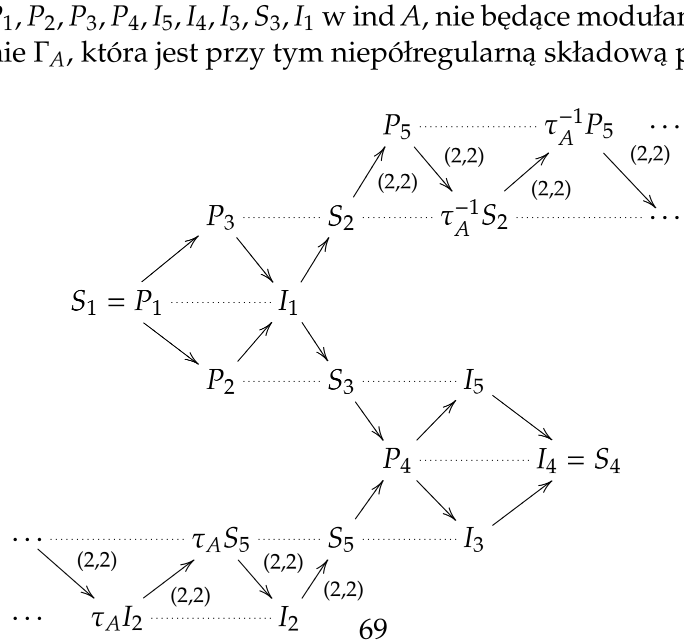
(2) prawie wszystkie moduły N w składowej łączącej $\mathcal{C}$ mają $\operatorname{pd}_A N \leqslant 1$ *lub* $\operatorname{id}_A N \leqslant 1$, *gdzie* $\operatorname{pd}_A N \geqslant 2$ *oraz* $\operatorname{id}_A N \geqslant 2$, *tylko dla skończenie wielu modułów N leżących w skończonym rdzeniu $\Sigma(\mathcal{C})$ składowej $\mathcal{C}$.*

Uwaga · Przy założeniu, że składowa $\mathcal{C}$ z wielosekcją Δ nie jest półregularna uogólnioną standardowość $\mathcal{C}$ można scharakteryzować w języku wymiarów projektywnych i injektywnych modułów w $\operatorname{ind} A$, co wyjaśniamy krótko poniżej. Przypomnijmy w tym celu, że dla składowej $\mathcal{C}$ z wielosekcją Δ możemy rozważać pełne podkołczany $\mathcal{L}_\mathcal{C}$ oraz $\mathcal{R}_\mathcal{C}$, gdzie $\mathcal{L}_\mathcal{C}$ (odpowiednio, $\mathcal{R}_\mathcal{C}$) jest pełnym podkołczanem z translacją w $\mathcal{C}$ składającym się ze wszystkich modułów X z $\mathcal{C}$, których dowolny poprzednik Y w $\mathcal{C}$ spełnia $\operatorname{pd}_A Y \leqslant 1$ (odpowiednio, których dowolny następnik Z w $\mathcal{C}$ spełnia $\operatorname{id}_A Z \leqslant 1$). W szczególności zatem $\operatorname{pd}_A X \leqslant 1$ (odpowiednio, $\operatorname{id}_A X \leqslant 1$) dla każdego modułu X w $\mathcal{L}_\mathcal{C}$ (odpowiednio, w $\mathcal{R}_\mathcal{C}$). Załóżmy również, że $\mathcal{C}$ jest pewną dokładną składową w Γ_A, zawierającą wielosekcję Δ oraz zarówno moduły projektywne, jak i injektywne. Wtedy na mocy [32, Theorem 5.1], składowa $\mathcal{C}$ jest uogólnioną standardową składową w kołczanie Γ_A wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi równość $\mathcal{C} = \mathcal{L}_\mathcal{C} \cup \Delta_c \cup \mathcal{R}_\mathcal{C}$ ·

Na koniec prezentujemy jeden przykład algebry, której kołczan Auslandera-Reitena zawiera składową prawie acykliczną i dokładną, jednak nie uogólnioną standardową, co pokazuje jednocześnie, że mogą istnieć algebry, które nie są uogólnione podwójnie odwrócone, ale ich kołczan ma składową dokładną i prawie acykliczną. Niech Q będzie kołczanem następującej postaci



Przypominamy, że *algebra dróg KQ* kołczanu Q jest wtedy skończenie wymiarową K-algebrą wymiaru $\dim_K KQ = 16$, zaś ideał I generowany przez wszystkie drogi długości 2 jest *ideałem dopuszczalnym* algebry dróg (po szczegóły odsyłamy do [49, I.1] i [50, Example VIII.7.11]). Ponadto wówczas algebra ilorazowa $A = KQ/I$ jest w tym przypadku K-algebrą wymiaru $\dim_K A = 11$ oraz A posiada wypukłą podkategorię H rozpiętą na wierzchołkach 2 i 5, przy czym stowarzyszona z H algebra nośnikowa jest izomorficzna z algebrą dróg $K\Delta$ pełnego podkołczanu Δ w Q powstałego z Q przez usunięcie wszystkich wierzchołków poza 2 i 5 oraz strzałek z nimi związanych. W tym przypadku wszystkie moduły nierozkładalne w $\operatorname{ind} H$ są nierozkładalne w $\operatorname{ind} A$. Dalej, nietrudna analiza ciągów prawie rozszczepialnych w $\operatorname{mod} A$ pokazuje, że wszystkie moduły $P_1, P_2, P_3, P_4, I_5, I_4, I_3, S_3, I_1$ w $\operatorname{ind} A$, nie będące modułami w $\operatorname{ind} H$, należą do jednej składowej $\mathcal{C}$ w kołczanie Γ_A, która jest przy tym niepółregularną składową postaci



zawierającą wszystkie postprojektywne i wszystkie preinjektywne moduły z Γ_H. Łatwo również zauważyć, że moduły te nie leżą na cyklach w C, i wyczerpują przy tym prawie wszystkie moduły w C, zatem C jest składową prawie acykliczną. W tym przypadku składowa C w ogóle nie zawiera zorientowanych cykli, więc jest nawet acykliczna. Dalej, C zawiera także wszystkie moduły projektywne oraz wszystkie moduły injektywne w $\operatorname{ind} A$, a więc pozostałe składowe w Γ_A muszą być regularne i składają się wyłącznie z modułów leżących w części regularnej $\mathcal{R}^H$ kołczanu Γ_H. To oczywiście implikuje dokładność składowej C oraz nietrudno stąd również wywnioskować, że wszystkie składowe w Γ_H należące do $\mathcal{R}^H$ są stabilnymi tubami rangi 1 w Γ_A, i w konsekwencji kołczan Γ_A algebry A ma następujący rozkład na rozłączną sumę $\Gamma_A = C \cup \bigcup_{\lambda \in \Lambda(K)} \mathcal{T}_\lambda^H$, gdzie $\mathcal{T}^H = (\mathcal{T}_\lambda^H)_{\lambda \in \Lambda(K)}$ jest rodziną wszystkich stabilnych tub w Γ_H; w przypadku, gdy ciało K jest algebraicznie domknięte zbiór $\Lambda(K)$ indeksujący tuby w Γ_H jest prostą rzutową $\Lambda(K) = \mathbb{P}_1(K)$ nad ciałem K. Podsumowując, C jest dokładną i acykliczną, a więc także prawie acykliczną składową w Γ_A. Trywialne sprawdzenie pokazuje również, że C nie jest uogólnioną standardową składową. W istocie, ponieważ $\operatorname{rad}_A(P_5, S_5) = \operatorname{Hom}_A(P_5, S_5) \neq 0$ oraz nie ma drogi w C z modułu P_5 do modułu S_5, wnioskujemy oczywiście, że wtedy $\operatorname{rad}_A^\infty(P_5, S_5) = \operatorname{Hom}_A(P_5, S_5) \neq 0$. Co więcej, C jest jedyną niepółregularną składową i nie jest uogólniona standardowa, zatem z Twierdzenia 2.7.7 wnioskujemy, że A nie jest uogólnioną algebrą podwójnie odwróconą.

Rozdział 3

· Drogi, cykle i krótkie łańcuchy ·

Rozważania kolejnego rozdziału niniejszej rozprawy skupione są wokół pojęcia drogi w kategorii modułów. Przypomnijmy za C. M. Ringelem [34], że *drogą w* $\operatorname{ind} A$ (lub krótko: *drogą*) przyjęto nazywać dowolny ciąg homomorfizmów w $\operatorname{mod} A$ postaci

$$M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} M_2 \xrightarrow{f_3} \cdots \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{f_n} M_n,$$

gdzie $n \geqslant 1$, wszystkie moduły $M_0, \ldots, M_n$ są nierozkładalne, zaś homomorfizmy $f_1, \ldots, f_n$ pomiędzy nimi są niezerowymi nieizomorfizmami, lub równoważnie, należą do $\operatorname{rad}_A(M_{i-1}, M_i)$, dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$; patrz 1.1. Odnotujmy również, że konkretne ograniczenia narzucone na drogi w $\operatorname{ind} A$ (lub drogi ustalonego typu, czy przechodzące przez ustalone moduły) istotnie determinują strukturę algebry A oraz często umożliwiają dobry opis jej kategorii modułów, co postaramy się tutaj zilustrować. Rozdział ten zorganizowany jest w następujący sposób. Najpierw wyróżniamy i wstępnie omawiamy w 3.1-3.2 dwa najważniejsze typy dróg, które odegrały poważną rolę w rozwoju teorii reprezentacji algebr, mianowicie: cykle i krótkie łańcuchy; zobaczymy między innymi jak te pojęcia funkcjonują w kilku charakteryzacjach znanych klas algebr, w tym algebr odwróconych. Pierwsze dwa podrozdziały wykorzystujemy również do sformułowania i udowodnienia różnych potrzebnych nam później pomocniczych lematów dotyczących modułów leżących na środkach co najwyżej skończenie wielu krótkich łańcuchów, które będą istotnie stosowane w 5.3, gdzie przeprowadzony zostanie dowód drugiego głównego twierdzenia rozprawy. W trzeciej zaś sekcji poruszamy krótko temat dróg pomiędzy modułami injektywnymi a projektywnymi. Przedstawiamy tam w szczególności przekrojowe zestawienie znanych twierdzeń charakteryzujących pewne klasy algebr poprzez własności tego typu dróg. Ostatni, zamykający podrozdział odbiega nieco od rozważań poruszonych w pierwszych trzech, jednak traktuje o pewnym problemie związanym z własnościami nieskończonych dróg w postprojektywnych i preinjektywnych składowych w kołczanach Auslandera-Reitena algebr dziedzicznych typu Euklidesa. Rozwiązanie tego problemu prowadzi do wyników, które zostaną skutecznie zastosowane w dowodach obu głównych twierdzeń rozprawy, gdzie odegrają kluczową rolę.

3.1 Cykle w kategoriach modułów ·

Analizujemy tutaj krótko ogólne własności cykli ilustrując rolę jaką pełnią w opisie struktury kategorii modułów. Przypomnijmy, że dla dowolnej algebry A, drogę w $\operatorname{ind} A$ postaci $X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_m$ nazywamy *cyklem (w* $\operatorname{ind} A$*)*, o ile $X_0 \simeq X_m$. Z pojęciem cyklu nierozerwalnie związane jest naturalnie pojawiające się w konsekwencji pojęcie *modułu kierującego*. Przypomnijmy za C. M. Ringelem [34], że *kierującym* nazywamy każdy moduł w $\operatorname{ind} A$, który nie leży na żadnym cyklu.

Rozpocznijmy od sformułowania następującego twierdzenia [2, patrz Corollary IX.3.4], które stanowi pierwszy przykład wykorzystania pojęcia cyklu do opisu struktury kategorii modułów.

Twierdzenie 3.1.1. *Niech A będzie algebrą, dla której wszystkie moduły w* $\operatorname{ind} A$ *są kierujące. Wówczas A jest algebrą skończonego reprezentacyjnego typu. W szczególności, kołczan Γ_A jest wtedy acykliczny.*

Podstawowe własności modułów kierujących zestawione zostały w twierdzeniu poniżej.

Twierdzenie 3.1.2. *Niech A będzie algebrą, zaś M modułem kierującym. Wówczas*

(1) Algebra endomorfizmów $\operatorname{End}_A(M)$ *jest algebrą z dzieleniem oraz* $\operatorname{Ext}_A^k(M,M) = 0$*, dla każdego* $k \in \mathbb{N}$.

(2) Nośnik $\operatorname{supp}(M)$ *jest pełną wypukłą podkategorią* $A = A^*$.

(3) Algebra nośnikowa $\operatorname{Supp} M$ *jest algebrą odwróconą.*

(4) Jeżeli moduł M jest wierny, to jest także dokładny.

dowód · Patrz [34]. □

Wniosek 3.1.3. *Niech A będzie algebrą. Jeżeli istnieje wierny moduł kierujący M w* $\operatorname{ind} A$*, to A jest algebrą odwróconą. Ponadto wówczas, moduł M leży na dokładnej sekcji w pewnej składowej łączącej kołczanu Γ_A.*

Następne twierdzenie jest jednym z klasycznych obecnie wyników dotyczących modułów kierujących, które zostało udowodnione niezależnie przez A. Skowrońskiego [40] oraz L. Peng i J. Xiao [30].

Twierdzenie 3.1.4. *Niech A będzie dowolną algebrą. Wówczas liczba τ_A-orbit w Γ_A zawierających moduły kierujące jest skończona.*

Podajemy ostatecznie dwa twierdzenia stanowiące przykłady charakteryzacji klas algebr odwróconych oraz podwójnie odwróconych poprzez własności homologiczne modułów kierujących.

Twierdzenie 3.1.5. *Niech A będzie algebrą. Wówczas A jest algebrą odwróconą wtedy i tylko wtedy, gdy* $\operatorname{ind} A = \mathscr{L}_A \cup \mathscr{R}_A$, $\operatorname{gl.dim} A \leqslant 2$ *oraz przekrój* $\mathscr{L}_A \cap \mathscr{R}_A$ *zawiera moduł kierujący.*

dowód · Odsyłamy do [45, Corollary B]. □

Twierdzenie 3.1.6. *Niech A będzie algebrą. Wówczas następujące warunki są równoważne.*

(i) A jest algebrą podwójnie odwróconą.

(ii) $\operatorname{ind} A = \mathscr{L}_A \cup \mathscr{R}_A$ *oraz* $\mathscr{L}_A \cap (\mathscr{R}_A \cup \tau_A \mathscr{R}_A)$ *zawiera moduł kierujący.*

(iii) $\operatorname{ind} A = \mathscr{L}_A \cup \mathscr{R}_A$ *oraz* $(\mathscr{L}_A \cup \tau_A^{-1} \mathscr{L}_A) \cap \mathscr{R}_A$ *zawiera moduł kierujący.*

(iv) $\operatorname{ind} A = \mathscr{L}_A \cup \mathscr{R}_A$ *oraz istnieje* $t \geqslant 0$ *takie, że* $\mathscr{L}_A \cap \tau_A^t \mathscr{R}_A$ *zawiera moduł kierujący.*

(v) $\operatorname{ind} A = \mathscr{L}_A \cup \mathscr{R}_A$ *oraz istnieje* $t \geqslant 0$ *takie, że* $\tau_A^{-t} \mathscr{L}_A \cap \mathscr{R}_A$ *zawiera moduł kierujący.*

dowód · Patrz [45, Theorem A]. □

Uwaga · Przypomnijmy, że jeżeli wszystkie cykle w $\operatorname{ind} A$ są skończone, to dowolny moduł nierozkładalny jest kierujący wtedy i tylko wtedy, gdy jest acykliczny, to znaczy nie leży na zorientowanym cyklu w Γ_A. W tej szczególnej sytuacji, opis cykli w kategorii modułów sprowadza się do opisu cykli odwzorowań nieprzywiedlnych ·

3.2 Krótkie łańcuchy ·

Podrozdział ten stanowi w pewnym sensie kontynuację rozważań poprzedniej sekcji. Ograniczając się jedynie do krótkich cykli, badano szerszą niż klasa modułów kierujących klasę modułów nierozkładalnych które nie leżą na krótkich cyklach. Okazało się, że moduły te mają ciekawą interpretację w języku tak zwanych krótkich łańcuchów, którą omawiamy po krótce poniżej. Co więcej, istnienie takich modułów niesie za sobą dość mocne konsekwencje o ich strukturze (wspominamy o tym w uwadze po Twierdzeniu 3.2.1). Badania nad omawianymi tutaj koncepcjami zostały oryginalnie zainicjowane w publikacji [33]. Przypomnijmy, że cykl $X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_n = X_0$ w $\operatorname{ind} A$ nazywamy *krótkim* wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 2$, to znaczy gdy jest to cykl postaci $X \to Y \to X$. Z pojęciem krótkiego cyklu ściśle związane jest pojęcie krótkiego łańcucha, które definiujemy za autorami poniżej.

Definicja · [Reiten-Smalø-Skowroński] · Niech A będzie dowolną algebrą. *Krótkim łańcuchem* w $\operatorname{mod} A$ nazywamy każdy ciąg niezerowych homomorfizmów w $\operatorname{mod} A$ postaci

$$X \to M \to \tau_A X,$$

gdzie X jest modułem z $\operatorname{ind} A$, zaś M jest dowolnym niezerowym modułem w $\operatorname{mod} A$. Moduł M nazywany jest wówczas *środkiem* tego krótkiego łańcucha.

Odnotujmy najpierw jeden z wyników ustanowionych przez I. Reiten, S. O. Smalø oraz A. Skowrońskiego we wspominanej pracy [33], który pokazuje szczególną zależność zachodzącą między pojęciami krótkiego łańcucha i krótkiego cyklu.

Twierdzenie 3.2.1. *Niech A będzie algebrą oraz M modułem w* $\operatorname{ind} A$. *Wówczas M nie leży na krótkim cyklu wtedy i tylko wtedy, gdy M nie jest środkiem krótkiego łańcucha w* $\operatorname{mod} A$.

Uwaga · Moduły nierozkładalne, które nie leżą na krótkich cyklach mają pewną bardzo szczególną własność. W istocie, autorzy cytowanej wyżej pracy [33], udowodnili również, że jeżeli moduł M w $\operatorname{ind} A$ nie leży na krótkim cyklu (w $\operatorname{ind} A$), to moduł ten jest wyznaczony z dokładnością do izomorfizmu przez swoje kompozycyjne faktory, to znaczy dla każdego modułu N w $\operatorname{ind} A$, zachodzi izomorfizm $M \simeq N$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi równość wektorów kompozycyjnych $c(M) = c(N)$ (lub równoważnie, równość $[M] = [N]$ klas w grupie $K_0(A)$) ·

Pozostałą część tej sekcji poświęcamy na przedstawienie różnych lematów technicznych związanych z krótkimi łańcuchami oraz omówienie pewnej istotnej charakteryzacji algebr odwróconych w języku krótkich łańcuchów [19]. Podajemy tu również wyniki istotnie wykorzystane w sekcji 5.3, w dowodzie drugiego głównego twierdzenia rozprawy, które dotyczą modułów leżących na środkach co najwyżej skończenie wielu krótkich łańcuchów, między innymi, w kategoriach modułów uogólnionych algebr podwójnie odwróconych. Rozpocznijmy od następującej elementarnej własności krótkich łańcuchów.

Lemat 3.2.2. *Rozważmy algebrę A, dowolny (dwustronny) ideał I w A oraz niech B będzie algebrą ilorazową $B = A/I$, zaś M modułem w* $\operatorname{mod} A$. *Jeżeli M jest środkiem krótkiego łańcucha w* $\operatorname{mod} B$, *to jest również środkiem krótkiego łańcucha w* $\operatorname{mod} A$. *W szczególności jeśli moduł M w* $\operatorname{mod} B$ *jest środkiem co najwyżej skończenie wielu krótkich łańcuchów w* $\operatorname{mod} A$, *to M jest także środkiem co najwyżej skończenie wielu krótkich łańcuchów w* $\operatorname{mod} B$.

dowód · Niech M będzie środkiem krótkiego łańcucha w $\operatorname{mod} B$ postaci $X \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} \tau_B X$, gdzie X jest modułem w $\operatorname{ind} B$. Wówczas oczywiście X jest niezerowym modułem w $\operatorname{ind} A$, zaś $M \neq 0$ jest środkiem krótkiego łańcucha w $\operatorname{mod} A$ postaci $X \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g'} \tau_A X$, ponieważ na mocy Lematu 1.4.6, $\tau_B X \neq 0$ jest podmodułem w $\tau_A X$, zatem X jest nieprojektywnym modułem w $\operatorname{ind} A$ oraz złożenie $g' = ug$ homomorfizmu g z kanoniczną inkluzją podmodułu $u : \tau_B X \hookrightarrow \tau_A X$ jest niezerowym homomorfizmem $g' : M \to \tau_A X$ w $\operatorname{mod} A$. To w istocie pokazuje już, że krótkie łańuchy w $\operatorname{mod} B$ indukują krótkie łańcuchy w $\operatorname{mod} A$, o tym samym środku. Pozostała część tezy jest oczywistym wnioskiem. □

Lemat 3.2.3. *Niech A będzie algebrą taką, że istnieje dokładny moduł M w* $\operatorname{mod} A$, *który jest środkiem co najwyżej skończenie wielu krótkich łańcuchów w* $\operatorname{mod} A$. *Wówczas zachodzą następujące stwierdzenia.*

(1) $\operatorname{Hom}_A(M, \mathcal{T}) = 0$, *dla każdej tuby promieniowej $\mathcal{T}$ w Γ_A zawierającej moduł projektywny.*

(2) $\operatorname{Hom}_A(\mathcal{T}, M) = 0$, *dla każdej tuby kopromieniowej $\mathcal{T}$ w Γ_A zawierającej moduł injektywny.*

dowód · Dowodzimy jedynie, że zachodzi stwierdzenie (1), gdyż dowód (2) jest konsekwencją dualnych argumentów. Niech zatem $\mathcal{T}$ będzie dowolną tubą promieniową w Γ_A, która zawiera co najmniej jeden moduł projektywny. Pokażemy poniżej, że $\operatorname{Hom}_A(M, \mathcal{T}) = 0$. Przypuśćmy w tym celu wbrew tezie, że $\mathrm{Hom}_A(M,X) \neq 0$ dla pewnego modułu nierozkładalnego X w $\mathcal{T}$. Wówczas ponieważ $\mathcal{T}$ jest z założenia nieregularną tubą promieniową w Γ_A wnioskujemy, że istnieją w $\mathcal{T}$ następujące nieskończone drogi sekcyjne:

$$\Sigma: \ \cdots \to Y_2 \to Y_1 \to Y_0 = P \quad \text{oraz} \quad \Omega: \ X = X_0 \to X_1 \to X_2 \to \dots,$$

gdzie P jest pewnym modułem projektywnym w $\mathcal{T}$, zaś homomorfizmy nieprzywiedlne odpowiadające strzałkom na drodze Ω są monomorfizmami. W tej sytuacji $\mathrm{Hom}_A(M,X) \neq 0$ implikuje, że $\mathrm{Hom}_A(M,X_n) \neq 0$, dla każdego $n \geqslant 0$. Ponadto $\mathcal{T}$ jest prawostronnie stabilną składową Γ_A, zatem $\tau_A^{-1}\Omega$ jest także nieskończoną drogą sekcyjną w $\mathcal{T}$, przy czym dowolny moduł $X'_n = \tau_A^{-1}X_n$, $n \geqslant 0$, leżący na drodze $\tau_A^{-1}\Omega$ spełnia $\mathrm{Hom}_A(M,\tau_A X'_n) = \mathrm{Hom}_A(M,X_n) \neq 0$. Z drugiej strony, droga Σ jest również nieskończoną drogą sekcyjną, więc korzystając z Twierdzenia 1.5.2 otrzymujemy, że $\mathrm{Hom}_A(Y_n,P) \neq 0$, dla dowolnego $n \geqslant 0$. Ponieważ jednak M jest modułem dokładnym w $\mathrm{mod}\,A$, istnieje monomorfizm w $\mathrm{mod}\,A$ postaci $P \to M^t$, dla pewnego $t \geqslant 1$, a stąd $\mathrm{Hom}_A(Y_n,M) \neq 0$, dla każdego modułu Y_n, $n \geqslant 0$, leżącego na drodze Σ. Zauważmy teraz, że droga $\tau_A^{-1}\Omega$ przecina drogę Σ nieskończenie wiele razy, skąd wnioskujemy ostatecznie, że istnieje nieskończenie wiele parami nieizomorficznych modułów $Z_s \in \Sigma \cap \tau_A^{-1}\Omega$, $s \geqslant 0$, w składowej $\mathcal{T}$, które spełniają $\mathrm{Hom}_A(Z_s,M) \neq 0$ oraz $\mathrm{Hom}_A(M,\tau_A Z_s) \neq 0$, dla każdego $s \geqslant 0$. To jednak oznacza, że moduł M jest środkiem nieskończenie wielu krótkich łańcuchów $Z_s \to M \to \tau_A Z_s$, $s \geqslant 0$, w $\mathrm{mod}\,A$, co jest niemożliwe na mocy założeń o M. Otrzymana sprzeczność pokazuje, że w istocie $\mathrm{Hom}_A(M,X) = 0$, dla każdego modułu X w $\mathcal{T}$, czego należało dowieść. □

Lemat 3.2.4. *Niech A będzie algebrą, $\mathcal{T}$ stabilną tubą w Γ_A, zaś M pewnym modułem w* $\mathrm{mod}\,A$*, który jest środkiem co najwyżej skończenie wielu krótkich łańcuchów w* $\mathrm{mod}\,A$*. Wówczas, dla dowolnych dwóch modułów N oraz N' w* $\mathrm{ind}\,A$*, dla których istnieją, monomorfizm $u : N' \to M$ oraz epimorfizm $v : M \to N$ w* $\mathrm{mod}\,A$*, zachodzi:* $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{T},N') = 0$ *lub* $\mathrm{Hom}_A(N,\mathcal{T}) = 0$.

dowód · Przypuśćmy wbrew tezie, że istnieje nierozkładalny podmoduł N' oraz nierozkładalny moduł ilorazowy N modułu M, dla których $\mathrm{Hom}_A(Y,N') \neq 0$ oraz $\mathrm{Hom}_A(N,X) \neq 0$, gdzie (nierozkładalne) moduły X oraz Y należą do $\mathcal{T}$. Ponieważ $\mathcal{T}$ jest stabilną tubą, to istnieją wtedy nieskończone drogi sekcyjne w $\mathcal{T}$ postaci

$$\Sigma: \ \cdots \to Y_2 \to Y_1 \to Y_0 = Y \quad \text{oraz} \quad \Omega: \ X = X_0 \to X_1 \to X_2 \to \dots$$

takie, że wszystkie homomorfizmy nieprzywiedlne $X_i \to X_{i+1}$ (odpowiednio, $Y_{i+1} \to Y_i$), dla $i \geqslant 0$, są monomorfizmami (odpowiednio, epimorfizmami) w $\mathrm{ind}\,A$. Wówczas jednak $\mathrm{Hom}_A(Y,N') \neq 0$ implikuje, że $\mathrm{Hom}_A(Y_n,N') \neq 0$, dla dowolnego $n \geqslant 0$. Podobnie, ponieważ $\mathrm{Hom}_A(N,X) \neq 0$ otrzymujemy, że $\mathrm{Hom}_A(N,X_n) \neq 0$, dla dowolnego $n \geqslant 0$. Wystarczy teraz wykorzystać stabilność $\mathcal{T}$, aby wywnioskować, że droga $\tau_A^{-1}\Omega$ jest nieskończoną drogą sekcyjną w $\mathcal{T}$ składającą się z modułów $X'_n = \tau_A^{-1}X_n$, które spełniają $\mathrm{Hom}_A(N,\tau_A X'_n) = \mathrm{Hom}_A(N,X_n) \neq 0$, dla każdego $n \geqslant 0$. Ostatecznie zauważmy, że nieskończone drogi sekcyjne Σ oraz $\tau_A^{-1}\Omega$ w stabilnej tubie $\mathcal{T}$ przecinają się w nieskończenie wielu wierzchołkach Z_s, $s \geqslant 0$, generując jak w poprzednim lemacie nieskończenie wiele krótkich łańcuchów $Z_s \longrightarrow M \longrightarrow \tau_A Z_s$, $s \geqslant 0$, w $\mathrm{mod}\,A$, których M jest środkiem, co jest z założenia niemożliwe. Podsumowując, początkowe przypuszczenie, że $\mathrm{Hom}_A(N,\mathcal{T}) \neq 0$ oraz $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{T},N') \neq 0$ doprowadziło nas do sprzeczności, tak więc dowód jest zakończony. □

Powyższy lemat prowadzi do następującego natychmiastowego wniosku.

Wniosek 3.2.5. *Niech A będzie algebrą, M modułem w* $\mathrm{mod}\,A$*, który jest środkiem co najwyżej skończenie wielu krótkich łańcuchów w* $\mathrm{mod}\,A$*, zaś $\mathcal{T}$ dowolną stabilną tubą w Γ_A. Wtedy dla każdego nierozkładalnego składnika prostego N modułu M zachodzi* $\mathrm{Hom}_A(N,\mathcal{T}) = 0$ *lub* $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{T},N) = 0$*; w szczególności, N nie należy do $\mathcal{T}$.*

Omawiamy dalej pewną szczególną charakteryzację klasy algebr odwróconych w języku krótkich łańcuchów, która przez długi czas stanowiła nietrywialną hipotezę. Odnotujmy najpierw następujące dobrze znane stwierdzenie dające warunek konieczny na to, aby algebra była odwrócona.

Stwierdzenie 3.2.6. *Załóżmy, że B jest algebrą odwróconą, przy czym niech $B = \mathrm{End}_A(T)$, dla pewnej algebry dziedzicznej A oraz modułu odwracającego T w $\mathrm{mod}\, A$. Niech ponadto $M = M_T$ będzie modułem w $\mathrm{mod}\, B$ będącym sumą prosta wszystkich (parami nieizomorficznych) modułów leżących na sekcji Δ_T w składowej łączącej $\mathcal{C}_T$ wyznaczonej przez T. Wtedy M jest wiernym modułem, który nie jest środkiem żadnego krótkiego łańcucha w $\mathrm{mod}\, B$.*

W cytowanej wcześniej pracy [33], autorzy postawili również pytanie, czy warunek konieczny sformułowany w powyższym stwierdzeniu jest także warunkiem dostatecznym na to, aby algebra była odwrócona? Pozytywna odpowiedź na to pytanie została podana po około 20 latach przez A. Jaworską, P. Malickiego oraz A. Skowrońskiego w publikacji [19]. Formułujemy tu jedynie jej główny wynik.

Twierdzenie 3.2.7. *Niech A będzie algebrą. Wówczas A jest algebrą odwróconą wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wierny moduł M w $\mathrm{mod}\, A$, który nie jest leży na środku żadnego krótkiego łańcucha.*

Warto również odnotować, że dla algebry odwróconej B (typu Euklidesa), moduły dokładne w $\mathrm{mod}\, B$ należące do kategorii addytywnych składowych łączących w Γ_B wyczerpują wszystkie możliwe moduły dokładne w $\mathrm{mod}\, B$, które są środkami co najwyżej skończenie wielu krótkich łańcuchów w $\mathrm{mod}\, B$. Własność ta stanowi treść kolejnego stwierdzenia prezentowanego poniżej.

Stwierdzenie 3.2.8. *Niech B będzie algebrą odwróconą typu Euklidesa. Załóżmy ponadto, że M jest modułem dokładnym w $\mathrm{mod}\, B$, który jest środkiem co najwyżej skończenie wielu krótkich łańcuchów w $\mathrm{mod}\, B$. Wówczas wszystkie nierozkładalne składniki proste modułu M należą do jednej składowej $\mathcal{C} = \mathcal{C}(M)$ w Γ_B, która jest przy tym składową łączącą $\mathcal{C} = \mathcal{C}_T$ wyznaczoną przez pewien moduł odwracający T w $\mathrm{mod}\, A$, gdzie A jest algebrą dziedziczną (typu Euklidesa) oraz $B \cong \mathrm{End}_A(T)$.*

Dowód · Odnotujmy na początek, że na podstawie Twierdzenia 2.2.8 kołczan Γ_B ma następujący rozkład $\Gamma_B = \mathcal{P}(B) \cup \mathcal{T}^B \cup \mathcal{Q}(B)$, gdzie $\mathcal{P}(B)$ (odpowiednio, $\mathcal{Q}(B)$) jest jedyną postprojektywną (odpowiednio, preinjektywną) składową w Γ_B, zaś $\mathcal{T}^B$ jest silnie separującą rodziną tub promieniowych lub kopromieniowych w Γ_B. Przypomnijmy, że wprost z Wniosku 3.2.5 otrzymujemy, że żaden składnik $N \Subset M$ w $\mathrm{ind}\, B$ nie może należeć do stabilnej tuby w Γ_B. Co więcej, na podstawie Lematu 3.2.3 każda tuba promieniowa bądź kopromieniowa w Γ_B również nie zawiera (nierozkładalnych) składników prostych modułu M. Tak więc dowolny nierozkładalny składnik prosty modułu M należy albo do $\mathcal{P}(B)$, albo do $\mathcal{Q}(B)$. W szczególności, wówczas moduł M posiada rozkład $M = M' \oplus M''$ w $\mathrm{mod}\, B$ na sumę prostą modułów $M' \in \mathrm{add}\, \mathcal{P}(B)$ oraz $M'' \in \mathrm{add}\, \mathcal{Q}(B)$.

Rozważmy najpierw przypadek, w którym rodzina $\mathcal{T}^B$ zawiera co najmniej jedną nieregularną tubę promieniową, powiedzmy $\mathcal{T}$. Twierdzimy, że wówczas $M' = 0$. W istocie, przypuśćmy wbrew tezie, że $M' \neq 0$. To oznacza, że istnieje nierozkładalny składnik $N \Subset M$ należący do postprojektywnej składowej $\mathcal{P}(B)$ w Γ_B. Wtedy jednak istnieje niezerowy monomorfizm $N \to I$, gdzie I jest B-modułem injektywnym w $\mathcal{Q}(B)$, który posiada faktoryzację postaci $N \to U \to I$, dla pewnego (niezerowego) modułu U w $\mathrm{add}\, \mathcal{T}$. Otrzymujemy stąd oczywistą sprzeczność, gdyż w tej sytuacji mamy $\mathrm{Hom}_B(N, U) \neq 0$, a więc $\mathrm{Hom}_B(M, \mathcal{T}) \neq 0$, co jest niemożliwe na mocy Lematu 3.2.3(1). Zatem faktycznie, mamy $M' = 0$, skąd wynika, że wszystkie nierozkładalne składniki proste modułu $M = M''$ należą do jednej składowej $\mathcal{Q}(B)$, będącej przy tym jedyną składową łączącą w Γ_B.

Używając dualnych argumentów łatwo pokazać, że $M'' = 0$, jeśli tylko rodzina $\mathcal{T}^B$ ma co najmniej jedną tubę kopromieniową zawierającą moduł injektywny. W tym przypadku również wszystkie nierozkładalne składniki proste modułu $M = M'$ należą do jednej składowej $\mathcal{P}(B)$ w Γ_B, która jest jedyną składową łączącą w Γ_B.

Ostatecznie załóżmy, że rodzina $\mathcal{T}^B$ składa się wyłącznie ze stabilnych. Wówczas B jest oswojoną algebrą utajoną, oraz dowolny moduł X w $\mathcal{P}(B)$ spełnia $\mathrm{Hom}_A(X, \mathcal{Q}(B)) \neq 0$, ponieważ wszystkie moduły injektywne w $\mathrm{ind}\, B$ należą do $\mathcal{Q}(B)$, skąd na mocy warunku separowania otrzymujemy $\mathrm{Hom}_A(X, \mathcal{T}) \neq 0$, dla każdej składowej $\mathcal{T}$ w $\mathcal{T}^B$. Analogicznie pokazujemy również, że jeśli moduł Z należy do $\mathcal{Q}(B)$, to zachodzi $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{T}, Z) \neq 0$, dla każdej tuby $\mathcal{T}$ w $\mathcal{T}^B$. To już implikuje, że $M'' = 0$ albo $M' =$

0. W przeciwnym bowiem razie istnieją nierozkładalne składniki $N \in M'$ oraz $N' \in M''$ takie, że $\mathrm{Hom}_A(N, \mathcal{T}) \neq 0$ oraz $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{T}, N') \neq 0$, dla dowolnej stabilnej tuby $\mathcal{T}$ w Γ_B, a to przeczy tezie Lematu 3.2.4. W konsekwencji, faktycznie mamy $M'' = 0$ albo $M' = 0$, co oznacza dokładnie tyle, że M jest albo modułem $M = M'$ w $\mathrm{add}\,\mathcal{P}(B)$, albo modułem $M = M''$ w $\mathrm{add}\,\mathcal{Q}(B)$. To ostatecznie dowodzi, że w istocie wszystkie składniki $N \in M$ w $\mathrm{ind}\,B$ należą do jednej składowej łączącej w Γ_B, gdyż zarówno $\mathcal{P}(B)$ jak i $\mathcal{Q}(B)$ są w tej sytuacji składowymi łączącymi kołczanu Γ_B oswojonej algebry utajonej B. □

Ostatecznie, podrozdział niniejszy zamykamy sformułowanym dalej lematem, który stanowi uogólnienie przedstawionego wyżej Stwierdzenia 3.2.6, pełniąc tym samym rolę analogicznego warunku koniecznego na to, aby algebra była uogólnioną algebrą podwójnie odwróconą.

Lemat 3.2.9. *Niech A będzie dowolną uogólnioną algebrą podwójnie odwróconą. Wówczas jeżeli $\mathcal{C}$ jest składową łączącą w Γ_A, to dla dowolnej wielosekcji Δ w $\mathcal{C}$ suma prosta $M = M_\Delta$ wszystkich modułów leżących na Δ jest modułem dokładnym, który jest środkiem co najwyżej skończenie wielu krótkich łańcuchów.*

Dowód · Przypomnijmy, że ponieważ algebra A jest uogólnioną algebrą podwójnie odwróconą, to istnieje uogólniona standardowa składowa $\mathcal{C}$ w Γ_A zawierająca pewną (dokładną) wielosekcję; po odpowiednie argumenty odsyłamy do podrozdziału 2.7. Udowodnimy, że dla dowolnej wielosekcji Δ określony w sformułowaniu moduł $M = M_\Delta$ jest dokładnym modułem leżącym na środku co najwyżej skończenie wielu krókich łańcuchów w $\mathrm{mod}\,A$.

Odnotujmy najpierw, że bezpośrednio z [32, Lemma 2.7] otrzymujemy dokładność modułu M, ponieważ składowa $\mathcal{C}$ jest dokładna, a więc dokładna jest i wielosekcja Δ. Przypomnijmy również, że na mocy Twierdzenia 2.7.9 kołczan Γ_A algebry A jest postaci następującej rozłącznej sumy

$$\Gamma_A = \mathcal{Y}\Gamma_A \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{X}\Gamma_A,$$

gdzie $\mathcal{Y}\Gamma_A = \mathcal{Y}\Gamma_{A^{(l)}}$ (odpowiednio, $\mathcal{X}\Gamma_A = \mathcal{X}\Gamma_{A^{(r)}}$) jest rodziną wszystkich składowych zawartych w beztorsyjnej części kołczanu $\Gamma_{A^{(l)}}$ algebry odwróconej $A^{(l)}$ (odpowiednio, w torsyjnej części kołczanu $\Gamma_{A^{(r)}}$ algebry odwróconej $A^{(r)}$). Dalej, uogólniona standardowość $\mathcal{C}$ implikuje, że jeśli $\mathrm{rad}_A^\infty(M, Z) \neq 0$, dla pewnego modułu Z w $\mathrm{ind}\,A$, to Z jest modułem w $\mathcal{X}\Gamma_A$, a więc wtedy również $\mathrm{Hom}_A(Z, M) = 0$. Dualnie otrzymujemy, że każdy moduł X w $\mathrm{ind}\,A$, dla którego $\mathrm{rad}_A^\infty(X, M) \neq 0$, jest modułem w $\mathcal{Y}\Gamma_A$ oraz spełnia warunek $\mathrm{Hom}_A(M, X) = 0$. Wynika stąd teraz, że M jest środkiem co najwyżej skończenie wielu krótkich łańcuchów w $\mathrm{mod}\,A$. W istocie, rozważmy dowolny krótki łańcuch $Y \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} \tau_A Y$ w $\mathrm{mod}\,A$. Wówczas Y oraz $\tau_A Y$ należą do składowej $\mathcal{C}$, ponieważ w przeciwnym razie mamy niezerowe homomorfizmy $f \in \mathrm{rad}_A^\infty(Y, M)$ oraz $g \in \mathrm{rad}_A^\infty(M, \tau_A Y)$, skąd wnosimy, że Y jest zawarty w $\mathcal{Y}\Gamma_A$, a $\tau_A Y$, w $\mathcal{X}\Gamma_A$, co jest oczywiście niemożliwe, gdyż Y i $\tau_A Y$ należą do jednej składowej kołczanu Γ_A, zaś rodziny $\mathcal{Y}\Gamma_A$ i $\mathcal{X}\Gamma_A$ nie mają wspólnych składowych. W rezultacie wnioskujemy teraz, że zarówno f jak i g są niezerowymi homomorfizmami w $\mathrm{mod}\,A$ nie należącymi do rad_A^∞. W szczególności implikuje to, że dla każdego krótkiego łańcucha $Y \to M \to \tau_A Y$ w $\mathrm{mod}\,A$ istnieje droga w składowej $\mathcal{C}$ postaci $N_1 \to \cdots \to \tau_A Y \to * \to Y \to \cdots \to N_2$, gdzie $N_1 \in M$ oraz $N_2 \in M$ są składnikami z $\mathrm{ind}\,B$. Na mocy wypukłości wielosekcji otrzymujemy więc, że wszystkie moduły leżące na tej drodze (a więc także moduły $\tau_A Y$ oraz Y) są modułami w Δ, ponieważ N_1 oraz N_2 należą do Δ, jako nierozkładalne składniki proste modułu $M = M_\Delta$. To oznacza, że jeśli istnieje krótki łańcuch w $\mathrm{mod}\,A$ postaci $Y \to M \to \tau_A Y$, to moduły Y oraz $\tau_A Y$ muszą należeć do wybranej wielosekcji Δ. Ostatecznie $\mathcal{C}$ jest uogólnioną standardową składową z wielosekcją Δ, a więc Δ jest skończonym podkołczanem w $\mathcal{C}$ na mocy równoważności warunków (i) oraz (ii) z Twierdzenia 2.7.6. Konsekwentnie wnioskujemy stąd, że M może być środkiem tylko co najwyżej skończenie wielu krótkich łańcuchów w $\mathrm{mod}\,A$, co należało pokazać. □

Odnotujmy tu tylko, że jeżeli A jest cyklowo skończoną uogólnioną algebrą podwójnie odwróconą, to moduły dokładne należące do kategorii addytywnych składowych łączących w Γ_A wyczerpują wszystkie (z dokładnością do izomorfizmu) moduły dokładne w $\mathrm{mod}\,A$ leżące na środkach co najwyżej skończenie wielu krótkich łańcuchów, co stanowi treść Wniosku 1, którego dowód przeprowadzimy w 5.4.

3.3 Drogi o injektywnym początku i projektywnym końcu ·

W tej sekcji zestawiamy różne znane wyniki związane z drogami szczególnego typu, mianowicie, drogami o injektywnym początku i projektywnym końcu. Drogi tego typu pojawiają się w wielu ciekawych charakteryzacjach rozmaitych klas algebr, co postaramy się tutaj krótko zaprezentować.

Przypomnijmy najpierw następujące, zapowiadane wcześniej w 2.5 twierdzenie udowodnione przez D. Happela, I. Reiten i S. O. Smalø w pracy [16, patrz Theorem II.1.14].

Twierdzenie 3.3.1. *Niech A będzie algebrą. Wówczas następujące warunki są równoważne.*

(i) *A jest algebrą quazi-odwróconą.*

(ii) *Dowolna droga w* $\operatorname{ind} A$ *o początku w module injektywnym i końcu w module projektywnym przedłuża się do drogi homomorfizmów nieprzywiedlnych oraz każde takie przedłużenie jest drogą sekcyjną.*

Wniosek 3.3.2. *Jeżeli A jest algebrą quazi-odwróconą ale nie jest algebrą odwróconą, to nie ma dróg w* $\operatorname{ind} A$ *z modułów injektywnych do modułów projektywnych.*

dowód · Dowolna droga w $\operatorname{ind} A$ postaci $I \to \cdots \to P$, gdzie I jest modułem injektywnym a P projektywnym, może być na mocy Twierdzenia 3.3.1, zastąpiona drogą w Γ_A postaci $I \to \cdots \to P$. Ale wówczas składowa Γ_A, która zawiera tę drogę nie jest składową półregularną, co przeczy tezie (3) z Twierdzenia 2.5.3. □

Sformułowane powyżej Twierdzenie 3.3.1 zostało niedługo później uogólnione przez F. U. Coelho i M. Lanzilottę w pracy [7, patrz (2.1)], dając analogiczną charakteryzację szerszej klasy, to jest klasy algebr o małych wymiarach homologicznych, omawianych w poprzednim rozdziale.

Twierdzenie 3.3.3. *Dla dowolnej algebry A poniższe warunki są równoważne.*

(i) *A jest algebrą o małych wymiarach homologicznych.*

(ii) *Dowolna droga w* $\operatorname{ind} A$ *o injektywnym początku i projektywnym końcu przedłuża się do drogi homomorfizmów nieprzywiedlnych oraz każde takie przedłużenie ma co najwyżej dwa haki, przy czym jeżeli dwa, to zawsze ze sobą sąsiadujące.*

Ostatecznie, najdalsze uogólnienie tego typu pojawiło się we wspominanej kluczowej dla naszych rozważań pracy A. Skowrońskiego [46], której główny wynik cytowany był we wstępie i stanowi ujednolicenie tez wcześniejszych Twierdzeń 3.3.1 i 3.3.3; patrz także uwaga poniżej. Udowodniono tam mianowicie następującą charakteryzację obu klas: zarówno uogólnionych algebr podwójnie odwróconych A, jak i quazi-odwróconych A, poprzez wspólną własność wszystkich dróg w $\operatorname{ind} A$ z modułów injektywnych do projektywnych.

Twierdzenie 3.3.4. [Skowroński] *Niech A będzie algebrą. Wówczas następujące warunki są równoważne.*

(i) *A jest uogólnioną algebrą podwójnie odwróconą lub algebrą quazi-odwróconą.*

(ii) *Podkategoria $\mathscr{L}_A \cup \mathscr{R}_A$ jest koskończona w* $\operatorname{ind} A$.

(iii) *Istnieje skończony zbiór $\mathscr{X} \subseteq \operatorname{ind} A$ taki, że każda droga w* $\operatorname{ind} A$ *o injektywnym początku i projektywnym końcu przechodzi tylko przez moduły izomorficzne z modułami z $\mathscr{X}$, lub inaczej, istnieje skończenie wiele klas izomorfzmu modułów na drogach w* $\operatorname{ind} A$ *o injektywnym początku i projektywnym końcu.*

Uwaga · Odnotujmy tylko, że algebra A spełnia jeden z powyższych równoważnych warunków (i)-(iii) wtedy i tylko wtedy, gdy *dowolna droga w* $\operatorname{ind} A$ *o injektywnym początku i projektywnym końcu ma przedłużenie do drogi homomorfizmów nieprzywiedlnych w* $\operatorname{ind} A$ ·

Na koniec wspominamy jedynie, że A. Skowroński wraz z autorem niniejszej rozprawy opublikowali krótki artykuł poświęcony dowodowi następującego twierdzenia, również bardzo blisko związanego z rozważanymi problemami homologicznymi.

Twierdzenie 3.3.5. *Dla dowolnej algebry A następujące warunki są równoważne.*

(i) Nie ma dróg niezerowych homomorfizmów w $\operatorname{ind} A$ *postaci* $X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_n$*, gdzie* $X_0 = I$ *jest modułem injektywnym, zaś* $X_n = P$ *projektywnym.*

(ii) Dla każdego modułu X w $\operatorname{ind} A$ *zachodzi* $\operatorname{Hom}_A(D(A), X) = 0$ *lub* $\operatorname{Hom}_A(X, A) = 0$*, lub równoważnie, nie ma krótkich dróg w* $\operatorname{ind} A$ *o injektywnym początku i projektywnym końcu.*

(iii) A jest albo quazi-odwróconą algebrą typu kanonicznego, albo algebrą odwróconą postaci $\operatorname{End}_H(T)$*, przy czym T jest takim modułem odwracającym w* $\operatorname{mod} H$*, że dla każdego modułu projektywnego P oraz injektywnego I w* $\operatorname{ind} H$*, gdzie* $\operatorname{soc}(I) = \operatorname{top}(P)$*, zachodzi poniższy warunek:*

jeśli $P \in T$, to żaden składnik prosty T w $\operatorname{ind} H$ *nie jest modułem ilorazowym modułu I.*

dowód · Odsyłamy do źródłowej pracy [47]. □

3.4 Nieskończone drogi w składowych postprojektywnych i preinjektywnych ·

W ostatnim podrozdziale niniejszego rozdziału przedstawiamy kluczowe wyniki związane z opisem przestrzeni homomorfizmów między modułami regularnymi a modułami leżącymi na pewnych nieskończonych drogach w postprojektywnych i preinjektywnych składowych w kołczanach Auslandera-Reiten algebr odwróconych typu Euklidesa. Załóżmy dla ustalenia uwagi, że dana jest reprezentacyjnie-nieskończona spójna algebra odwrócona B typu Euklidesa. Przypominamy, że kołczan Γ_B jest postaci $\Gamma_B = \mathcal{P}(B) \cup \mathcal{T}^B \cup \mathcal{Q}(B)$, gdzie $\mathcal{P}(B)$ jest składową postprojektywną w Γ_B, $\mathcal{Q}(B)$ jest składową preinjektywną, zaś $\mathcal{T}^B$ jest rodziną parami ortogonalnych uogólnionych standardowych półregularnych tub w Γ_B. Ustalmy ponadto dowolnie wybrany moduł E leżący na ustach pewnej stabilnej tuby $\mathcal{T}$ w $\mathcal{T}^B$. Będziemy później potrzebowali wiedzy o rozmieszczeniu modułów ze zbioru $\mathcal{Q}_E = \mathcal{Q}_E(B)$ (odpowiednio, zbioru $\mathcal{P}^E = \mathcal{P}^E(B)$) tych modułów Z w $\mathcal{Q}(B)$, dla których $\operatorname{Hom}_B(E, Z) \neq 0$ (odpowiednio, modułów X w $\mathcal{P}(B)$ z $\operatorname{Hom}_B(X, E) \neq 0$). Nie będzie dla nas jednak istotny szczegółowy opis tych zbiorów, lecz pewnych ich własności związanych z nieskończonymi drogami w preinjektywnej lub postprojektywnej składowej w Γ_B. Odnotujmy, że bardzo ważną rolę dowodach głównych twierdzeń rozprawy odegrało zbadanie pewnych zachowań takich dróg w kontekście problemu polegającego na rozstrzygnięciu, czy każda nieskończona droga w preinjektywnej składowej $\mathcal{Q}(B)$ (dualnie, postprojektywnej składowej $\mathcal{P}(B)$) postaci

$$\cdots \to Z_n \to \cdots \to Z_2 \to Z_1 \to Z_0 \qquad \text{(odpowiednio, postaci } X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_n \to \ldots)$$

przecina zbiór $\mathcal{Q}_E(B)$ (odpowiednio, zbiór $\mathcal{P}^E(B)$) nieskończenie wiele razy, dla każdego modułu E leżącego na ustach stabilnej tuby w Γ_B? Okazuje się, że drogi te zachowują się różnie, w zależności od typu Euklidesowego algebry B. Podajemy dalej częściową odpowiedź w postaci Lematu 3.4.4, który pokazuje, że w ogólności nie wszystkie drogi muszą spełniać powyższy warunek, ale dla każdego modułu R w $\mathcal{Q}(B)$ można wybrać pewne szczególne drogi o końcu w R, $\tau_B R$ i $\tau_B^2 R$ spełniające te ograniczenia, co w nieprzypadkowy sposób wiąże się z homologicznymi warunkami sformułowanymi w tezach głównych Twierdzeń A i B. W dowodzie kluczowego Lematu 3.4.4 wykorzystamy techniki teorii odwracania oraz wcześniej przygotowane Lematy 3.4.2 i 3.4.3, w których opisujemy odpowiednie zachowania się dróg w przypadku, gdy $B = H$ jest spójną algebrą dziedziczną typu Euklidesa z kołczanem Q_H zorientowanym kanonicznie.

Wprowadzamy najpierw krótko pomocnicze oznaczenia przydatne w redukcji opisu postaci zbiorów $\mathcal{Q}_E(H)$ dla algebr dziedzicznych H typu Euklidesa. Przypomnijmy, że w tej sytuacji $\mathcal{P}(H)$ posiada sekcję $\Gamma = \Gamma(H)$ składającą się ze wszystkich modułów projektywnych w $\operatorname{ind} H$ zaś $\mathcal{Q}(H)$ zawiera sekcję $\Sigma = \Sigma(H)$ składającą się ze wszystkich modułów injektywnych w $\operatorname{ind} H$. Dla uproszczenia, moduły ze zbioru $\mathcal{Q}_E$

(odpowiednio, ze zbioru $\mathcal{P}^E$) pozwolimy sobie czasami nazywać *preinjektywnymi nośnikami modułu E* (lub odpowiednio, *postprojektywnymi nośnikami modułu E*). Jeśli moduł E leży na ustach pewnej tuby z $\mathcal{T}^H$, to kładziemy $\mathcal{Q}_E := \mathcal{Q}_E(H)$ i $\mathcal{Q}_E^0 := \mathcal{Q}_E \cap \Sigma$, oraz dulanie, $\mathcal{P}^E := \mathcal{P}^E(H)$ i $\mathcal{P}_0^E := \mathcal{P}^E \cap \Gamma$. Będziemy ponadto oznaczać symbolem $\mathcal{Q}_E^{(0)}$ (odpowiednio, symbolem $\mathcal{P}_{(0)}^E$) zbiór $\mathcal{Q}_E \cap \bigcup_{s=0}^{r-1} \tau_H^s \Sigma = \bigcup_{s=0}^{r-1} \mathcal{Q}_E \cap \tau_H^s \Sigma$ (odpowiednio, zbiór $\mathcal{P}^E \cap \bigcup_{s=0}^{r-1} \tau_H^{-s}\Gamma = \bigcup_{s=0}^{r-1} \mathcal{P}^E \cap \tau_H^{-s}\Gamma$), gdzie r jest rangą tuby, na ustach której leży moduł E. Odnotujmy tylko następujący pomocny lemat techniczny, który istotnie ułatwia opis zbiorów $\mathcal{Q}_E$ oraz $\mathcal{P}^E$, redukując go do opisu ich skończonych podzbiorów odpowiednio postaci $\mathcal{Q}_E^{(0)}$ i $\mathcal{P}_{(0)}^E$.

Lemat 3.4.1. *Niech H będzie (spójną) algebrą dziedziczną typu Euklidesa, zaś $\mathcal{S}$ dowolną stabilną tubą w Γ_H rangi $r \geqslant 1$. Wówczas dla każdego modułu E leżącego na ustach $\mathcal{S}$, prawdziwe są następujące stwierdzenia.*

(1) Dla dowolnego $n \geqslant 0$ zachodzi $\tau_H^{nr}\mathcal{Q}_E \subset \mathcal{Q}_E$ i $\tau_H^{-nr}\mathcal{P}^E \subset \mathcal{P}^E$.

(2) $\mathcal{Q}_E^{(0)} = \bigcup_{s=0}^{r-1} \tau^s \mathcal{Q}_{\tau^{-s}E}^0$ oraz $\mathcal{P}_{(0)}^E = \bigcup_{s=0}^{r-1} \tau^{-s}\mathcal{P}_0^{\tau^s E}$.

(3) $\mathcal{Q}_E = \bigcup_{n\geqslant 0} \tau_H^{nr}\mathcal{Q}_E^{(0)}$ oraz $\mathcal{P}^E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tau^{-nr}\mathcal{P}_{(0)}^E$.

Uwaga · Przypominamy, że problem opisu kształtu zbiorów $\mathcal{Q}_E$, dla modułów E leżących na ustach stabilnych tub w kołcznach Γ_H algebr dziedzicznych typu Euklidesa z kołczanem Q_H zorientowanym kanonicznie pojawił się w nieco innym kontekście już w pracy C. M. Ringela [35], gdzie podano również pełen opis struktury podkołczanów rozpiętych na modułach z $\mathcal{Q}_E$ w języku tak zwanych *wzorców tubularnych* [35, patrz A.3]. Powyższy lemat, czy dalsze rozważania w tej kwestii, należą do klasycznych zagadnień oraz prezentowane fakty są ogólnie znane ·

W świetle powyższego, zbiór $\mathcal{Q}_E$ składa się z nieskończonej liczby rozłącznych kopii $\mathcal{Q}_E^{(0)}, \tau_H^r\mathcal{Q}_E^{(0)}, \tau_H^{2r}\mathcal{Q}_E^{(0)}, \ldots$, skończonego zbioru $\mathcal{Q}_E^{(0)}$, przy czym podkołczany rozpięte na każdej z tych kopii są izomorficzne. Ponadto, zbiór $\mathcal{Q}_E^{(0)}$ jest sumą r zbiorów postaci $\mathcal{Q}_{E'}^0$, gdzie E' przebiega wszystkie moduły leżące na ustach tuby zawierającej moduł E, zaś te są jednoznacznie wyznaczone przez ich nośniki, co daje na mocy tabel w A.5 pełną kontrolę nad postacią zbioru $\mathcal{Q}_E^{(0)}$, a więc i $\mathcal{Q}_E$, dla wszystkich algebr dziedzicznych H typu Euklidesa z kołczanem Q_H zorientowanym kanonicznie. Wystarczy także wyznaczyć zbiór $\mathcal{Q}_E$ dla jednego modułu E leżącego na ustach danej tuby $\mathcal{T}$, bowiem zbiór ten determinuje zbiory $\mathcal{Q}_{E'}$, dla pozostałych modułów E' z ust $\mathcal{T}$. Faktycznie, dla każdego $s \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$, zachodzi $\mathcal{Q}_{\tau_H^{-s}E} = \tau_H^{-s}\mathcal{Q}_E$, dzięki czemu dowolny zbiór postaci $\mathcal{Q}_{E'}$, gdzie $E' = \tau_H^{-s}E$ i $s \in \{1, \ldots, s-1\}$, składa się ze wszystkich modułów postaci $\tau_H^{-s}Z$, dla Z w $\mathcal{Q}_E$. W tym kontekście uznajemy opis preinjektywnych nośników modułów leżących na ustach tub w Γ_H za pełny, o ile dla każdej tuby $\mathcal{T}$ z $\mathcal{T}^H$ wyznaczona jest postać wszystkich modułów ze zbioru $\mathcal{Q}_E^{(0)}$, gdzie E jest dowolnie wybranym modułem z ust $\mathcal{T}$. Tabele podane w dodatku A.6 zawierają pełen opis preinjektywnych nośników modułów z ust stabilnych tub w $\mathcal{T}^H$, w przypadku gdy Q_H jest kanonicznie zorientowanym kołczanem każdego z typów Euklidesowych poza $\widetilde{\mathbb{A}}_{1,1}$ i $\widetilde{\mathbb{A}}_{1,2}$, gdzie z przyczyn wyjaśnionych w uwadze poniżej, opisujemy postać zbioru $\mathcal{Q}_E^{(0)}$ tylko dla wybranego modułu E leżącego na ustach każdej niejednoronej tuby w Γ_H; przy tym przyjmujemy zawsze, że E jest pierwszym modułem $E = E_0^{(i)}$ leżącym na ustach danej tuby $\mathcal{T} = \mathcal{T}^i$ w kolejności podanej w tabelach z A.5. Informacje podane w A.6 można wprost wywynioskować z powyższych uwag oraz tabel nośników w A.5. W dalszych rozważanich skupiamy się jedynie na opisie zbiorów $\mathcal{Q}_E$, gdyż postać zbioru $\mathcal{P}^E$ danego modułu regularnego E leżącego na ustach stabilnej tuby można bezpośrednio odtworzyć z odpowiadającego temu modułowi zbioru nośników preinjektywnych.

Uwaga · Opis zbiorów $\mathcal{Q}_E^{(0)}$ przedstawiony w tabelach A.5 oraz A.6 ograniczamy tylko do stabilnych tub rangi $r \geqslant 2$, bowiem jeśli E leży na ustach tuby jednorodnej $\mathcal{S}$, to $E = \tau_H E = \tau_H^{-1}E$ jest jedynym modułem na ustach (dokładnej) stabilnej tuby $\mathcal{S}$, przy czym $\operatorname{supp}_H(E) = H$ na mocy Lematu 2.1.8, a więc $\mathcal{Q}_E^{(0)} = \mathcal{Q}_E^0 = \Sigma$ oraz $\mathcal{P}_{(0)}^E = \mathcal{P}_0^E = \Gamma$, skąd otrzymujemy, że

$$\mathcal{Q}_E(H) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tau_H^{nr}\mathcal{Q}_E^0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tau_H^n\Sigma = \mathcal{Q}(H) \quad \text{oraz} \quad \mathcal{P}^E(H) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tau_H^{-n}\Gamma = \mathcal{P}(H).$$

Konsekwentnie, zbiór $\mathcal{Q}_E(H)$ (dualnie, zbiór $\mathcal{P}^E(H)$) składa się w tej sytuacji ze wszystkich modułów w składowej $\mathcal{Q}(H)$ (odpowiednio, składowej $\mathcal{P}(H)$), co stanowi skrajny i trywialny przypadek, który będziemy najczęściej pomijać w naszych dalszych rozważań. Dlatego też we wspominanych zestawieniach tabel nie uwzględniono typów $\widetilde{\mathbb{A}}_{11}$ oraz $\widetilde{\mathbb{A}}_{12}$, w przypadku których wszystkie stabilne tuby są jednorodne ·

Udowodnimy teraz dwa ważne dla nas lematy techniczne opisujące odpowiednie zachowania nieskończonych dróg w preinjektywnych składowych kołczanów Γ_H algebr dziedzicznych typu Euklidesa (z kołczanem zwyczajnym zorientowanym kanonicznie). Rozpoczynamy od przedstawienia pierwszego lematu obejmującego wszystkie przypadki, w których kołczan Q_H danej algebry H jest drzewem (zorientowanym kanonicznie). Kołczan Q_H nie jest drzewem tylko w jednym przypadku, to jest, gdy Q_H jest typu $\widetilde{\mathbb{A}}_{p,q}$, $p \geqslant q \geqslant 0$, $(p,q) \neq (0,0)$. Z uwagi na istotnie różne jakościowo tezy otrzymane w obydwu sytuacjach, przypadek ten traktujemy osobno w drugim lemacie. W obu dowodach przyjmujemy oznaczać wierzchołki kołczanu Q_H identycznymi symbolami co wierzchołki przedstawionych na Liście A.2 kanonicznie zorientowanych kołczanów odpowiednich typów Euklidesowych.

Lemat 3.4.2. *Niech H będzie dowolną algebrą dziedziczną typu Euklidesa, której kołczan Q_H jest kanonicznie zorientowanym drzewem. Ponadto załóżmy, że E jest ustalonym modułem na ustach pewnej stabilnej tuby $\mathcal{T}$ w Γ_H. Wówczas dla każdej nieskończonej drogi*

$$(*) \qquad \cdots \to Y_{n+1} \to Y_n \to \cdots \to Y_1 \to Y_0$$

w preinjektywnej składowej $\mathcal{Q}(H)$ kołczanu Γ_H istnieje nieskończony ciąg $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ taki, że wszystkie moduły $Y_{n_0}, Y_{n_1}, \ldots$ należą do $\mathcal{Q}_E(H)$, to znaczy $\operatorname{Hom}_H(E, Y_{n_k}) \neq 0$, dla dowolnego $k \geqslant 0$.

Dowód · Niech $r \geqslant 1$ oznacza rangę wybranej tuby $\mathcal{T}$, zaś Σ sekcję $\Sigma = \Sigma(H)$ w $\mathcal{Q}(H)$ składającą się ze wszystkich modułów injektywnych w $\operatorname{ind} H$. Jeśli $r = 1$, to oczywiście $\mathcal{Q}_E(H) = \mathcal{Q}(H)$ i nie ma czego dowodzić (patrz ostatnia uwaga), tak więc możemy dalej przyjąć, że $r \geqslant 2$. Ponadto będziemy także zakładać, że nie istnieje wierny moduł leżący na ustach tuby $\mathcal{T}$. W istocie bowiem, jeżeli istnieje taki moduł na ustach $\mathcal{T}$, to zbiór $\mathcal{Q}_E(H)$ zawiera pewną sekcję postaci $\tau_H^s\Sigma$, i w konsekwencji z Lematu 3.4.1 (1) wnosimy, że zachodzi również inkluzja $\bigcup_{n\geqslant 0} \tau_H^{nr+s}\Sigma \subset \mathcal{Q}_E$. W takiej sytuacji zbiór $\mathcal{Q}_E(H)$ zawiera nieskończenie wiele translacji sekcji Σ, skąd natychmiast wynika, że zawiera nieskończenie wiele modułów z dowolnej drogi w $\mathcal{Q}(H)$ postaci $(*)$.

Odnotujmy bezpośrednio z tabel w A.5, że w przypadku każdego z typów $\widetilde{\mathbb{B}}_n$, $\widetilde{\mathbb{C}}_n$, $\widetilde{\mathbb{BC}}_n$ oraz $\widetilde{\mathbb{G}}_{21}$ lub $\widetilde{\mathbb{G}}_{22}$ jedyna stabilna tuba rangi $r \geqslant 2$ w kołczanie Γ_H zawiera pewien wierny moduł na ustach. Przypominamy również, że jeżeli H jest typu $\widetilde{\mathbb{A}}_{11}$ lub $\widetilde{\mathbb{A}}_{12}$, to rodzina $\mathcal{T}^H$ składa się wyłącznie z tub jednorodnych. W rezultacie wnioskujemy, że teza lematu jest prawdziwa dla algebr H, których kołczan zwyczajny jest jednego z typów $\widetilde{\mathbb{A}}_{11}$, $\widetilde{\mathbb{A}}_{12}$, $\widetilde{\mathbb{B}}_n$, $\widetilde{\mathbb{C}}_n$, $\widetilde{\mathbb{BC}}_n$, $\widetilde{\mathbb{G}}_{21}$ lub $\widetilde{\mathbb{G}}_{22}$. Pozostałe typy poddajemy wyczerpującej analizie w czterech kolejnych krokach poniżej. W każdym z rozważanych przypadków udowodnimy prawdziwość naszej tezy, tylko dla tub $\mathcal{T}$ rangi $r \geqslant 2$ nie zawierających żadnego modułu wiernego na ustach. Co więcej, dla ustalonej tuby $\mathcal{T} = \mathcal{T}^i$ będziemy dowodzić, że zbiór $\mathcal{Q}_E(H)$ zawiera nieskończenie wiele modułów z każdej drogi postaci $(*)$, tylko w przypadku, gdy $E = E_0^{(i)}$. Teza dla pozostałych modułów z ust $\mathcal{T}$ będzie wówczas konsekwencją równości $\mathcal{Q}_{\tau_H^{-s}E} = \tau_H^{-s}\mathcal{Q}_E$ oraz pewnych elementarnych argumentów, które pozostawiamy bez wyjaśnień.

(1) Załóżmy najpierw, że H jest algebrą dziedziczną typu $\widetilde{\mathbb{D}}_n$, $n \geqslant 4$. W tej sytuacji kołczan Γ_H zawiera jedną (niejednorodną) stabilną tubę $\mathcal{T}^3$ rangi $n-2$ z wiernym modułem $E_1^{(3)}$ na ustach, oraz dwie tuby $\mathcal{T}^1$ oraz $\mathcal{T}^2$ rangi 2 (patrz A.5). W takim razie, należy przeprowadzić dowód w dwóch przypadkach, mianowicie, gdy $\mathcal{T} = \mathcal{T}^1$ oraz $\mathcal{T} = \mathcal{T}^2$.

- Niech $\mathcal{T} = \mathcal{T}^1$ oraz $E = E_0^{(1)}$. Wówczas zbiór $\mathcal{Q}_E = \mathcal{Q}_E(H)$ wszystkich preinjektywnych nośników modułu E jest postaci

$$\mathcal{Q}_E = \bigcup_{n\geqslant 0} \tau^{2n}\mathcal{Q}_E^{(0)}, \text{ gdzie } \mathcal{Q}_E^{(0)} = \Sigma \setminus \{a_1, b_1\} \cup \tau_H(\Sigma \setminus \{a_2, b_2\}).$$

Wnioskujemy zatem, że moduły Y w $\mathcal{Q}(H)$ nie należące do $\mathcal{Q}_E$ są postaci $Y \simeq \tau_H^{2n} I_a$, gdzie $a \in \{a_1, b_1\}$, lub postaci $Y \simeq \tau_H^{2n+1} I_a$, dla $a \in \{a_2, b_2\}$. Zauważmy ostatecznie, że $(\tau^{2n} I_{a_1})^- = \{\tau^{2n} I_{z_1}\}$ i $(\tau^{2n} I_{b_1})^- = \{\tau^{2n+1} I_{z_{n-3}}\}$ i oraz $(\tau^{2n+1} I_{a_2})^- = \{\tau^{2n+1} I_{z_1}\}$ i $(\tau^{2n+1} I_{b_2})^- = \{\tau^{2n+2} I_{z_{n-3}}\}$. W rezultacie, dla każdego modułu Y nie należącego do $\mathcal{Q}_E$ zachodzi $Y^- \subset \mathcal{Q}_E$. Stąd dla dowolnej drogi w $\mathcal{Q}(H)$ postaci $(*)$ istnieje ciąg $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ taki, że $Y_{n_k} \in \mathcal{Q}_E$, bowiem jeśli $Y_t \notin \mathcal{Q}_E$, dla pewnego $t \geqslant 0$, to $Y_{t+1} \in \mathcal{Q}_E$.

- Podobnie, jeżeli $\mathcal{T} = \mathcal{T}^2$ oraz $E_0^{(2)}$, to z tabeli A.6 nietrudno wywnioskować, że
$$\mathcal{Q}(H) \setminus \mathcal{Q}_E(H) = \bigcup_{n\geqslant 0} \{\tau^{2n} I_{a_1}, \tau^{2n} I_{b_2}, \tau^{2n+1} I_{a_2}, \tau^{2n+1} I_{b_1}\},$$
skąd analogicznie jak w poprzednim przypadku wnosimy, że dla każdego modułu Y w $\mathcal{Q}(H)$, który nie należy do $\mathcal{Q}_E$ spełniona jest inkluzja $Y^- \subset \mathcal{Q}_E$. To oczywiście implikuje, że każda droga w $\mathcal{Q}(H)$ postaci $(*)$ zawiera nieskończenie wiele modułów z $\mathcal{Q}_E$.

(2) Niech teraz H będzie typu $\widetilde{\mathbb{BD}}_n$ lub $\widetilde{\mathbb{CD}}_n$, dla $n \geqslant 3$. Wówczas kołczan Γ_H zawiera dokładnie dwie niejednorodne tuby: $\mathcal{T}^1$ rangi 2, oraz $\mathcal{T}^2$ rangi $n-1$. Ponadto, istnieje wierny moduł leżący na ustach tuby $\mathcal{T}^2$, zatem pozostaje rozważyć przypadek $\mathcal{T} = \mathcal{T}^1$. Przyjmując $E = E_0^{(1)}$ łatwo bezpośrednio z tabeli A.6 odczytać, że
$$\mathcal{Q}(H) \setminus \mathcal{Q}_E(H) = \bigcup_{n\geqslant 0} \{\tau^{2n} I_{a_1}, \tau^{2n+1} I_{a_2}\}.$$
Dalej wystarczy zauważyć, że $(\tau^{2n} I_{a_1})^- = \{\tau^{2n} I_{z_1}\}$ oraz $(\tau^{2n+1} I_{a_2})^- = \{\tau^{2n+1} I_{z_1}\}$. W konsekwencji, podobnie jak poprzednio, dla każdego modułu Y w $\mathcal{Q}(H)$ nie należącego do $\mathcal{Q}_E$ zachodzi $Y^- \subset \mathcal{Q}_E$, co pokazuje, że zbiór $\mathcal{Q}_E$ zawiera nieskończenie wiele modułów z każdej drogi postaci $(*)$ w $\mathcal{Q}(H)$.

(3) W kolejnym kroku przeprowadzamy argumentację w przypadku typów $\widetilde{\mathbb{E}}_6$, $\widetilde{\mathbb{E}}_7$ oraz $\widetilde{\mathbb{E}}_8$. Rozważmy najpierw algebrę H typu $\widetilde{\mathbb{E}}_6$. Wówczas $\mathcal{T}^H$ jest typu tubularnego $(2,3,3)$, przy czym tuba rangi 2 zawiera wierny moduł leżący na ustach. Pozostaje zatem podać odpowiednią argumentację dla dwóch pozostałych tub rangi 3. Przypomnijmy tylko, że w składowej $\mathcal{Q}(H)$ moduły mają co najwyżej trzech bezpośrednich poprzedników, przy czym $(\tau_H^s I_z)^- = \{\tau_H^{s+1} I_{a_2}, \tau_H^{s+1} I_{b_2}, \tau_H^{s+1} I_{c_2}\}$, zaś dla $x \in \{a, b, c\}$ zachodzą następujące zależności: $(\tau_H^s I_{x_1})^- = \{\tau_H^s I_{x_2}\}$ oraz $(\tau_H^s I_{x_2})^- = \{\tau_H^s I_z, \tau_H^{s+1} I_{x_1}\}$.

- Dla $\mathcal{T} = \mathcal{T}^2$ oraz modułu $E = E_0^{(2)}$ odczytujemy bezpośrednio z tabel A.6, że zachodzi następująca równość
$$\mathcal{Q}(H) \setminus \mathcal{Q}_E(H) = \bigcup_{n\geqslant 0} \{\tau_H^{3n} I_{a_1}, \tau_H^{3n} I_{c_1}, \tau_H^{3n} I_{c_2}, \tau_H^{3n+1} I_{c_1}, \tau_H^{3n+1} I_{b_1}, \tau_H^{3n+1} I_{b_2}, \tau_H^{3n+2} I_{b_1}, \tau_H^{3n+2} I_{a_1}, \tau_H^{3n+2} I_{a_2}\}.$$
Niech teraz Y będzie pewnym modułem w $\mathcal{Q}(H)$ nie należącym do $\mathcal{Q}_E(H)$, przy czym przyjmujemy $Y = \tau_H^{3n+r} I_a$, gdzie $n \geqslant 0$, $r \in \{0, 1, 2\}$, oraz $a \in (Q_H)_0$. Oczywiście ponieważ $Y \notin \mathcal{Q}_E(H)$, więc możemy założyć, że $a \neq z$, bowiem moduły $\tau_H^s I_z$ należą do $\mathcal{Q}_E(H)$, dla każdego $s \geqslant 0$.

  Rozważmy na początek sytuację, w której $r = 0$. Wtedy $a \in \{a_1, c_1, c_2\}$, ponieważ $Y = \tau_H^{3n} I_a$ nie należy do $\mathcal{Q}_E$. Oczywiście moduł $Y = \tau_H^{3n} I_a$ ma dokładnie jednego poprzednika $\tau_H^{3n} I_{a_2} \in \mathcal{Q}_E(H)$, gdy $a = a_1$. Co więcej, dla $a = c_2$ moduł $Y = \tau_H^{3n} I_a$ ma dokładnie dwóch poprzedników $\tau_H^{3n} I_z \in \mathcal{Q}_E(H)$ oraz $\tau_H^{3n+1} I_{c_1} \notin \mathcal{Q}_E(H)$. Jednak moduł $\tau_H^{3n+1} I_{c_1}$ ma tylko jednego poprzednika $\tau_H^{3n+1} I_{c_2}$, który z kolei już należy do zbioru $\mathcal{Q}_E(H)$. Tak więc wnioskujemy stąd, że dla każdej drogi w $\mathcal{Q}(H)$ postaci $Y_2 \to Y_1 \to Y_0$, dla której moduł $Y_0 = \tau_H^{3n} I_a$ nie należy do $\mathcal{Q}_E$ oraz $a \in \{a_1, c_2\}$, jeden z modułów Y_1 lub Y_2 musi należeć do $\mathcal{Q}_E$. Ostatecznie zauważmy, że jeśli $a = c_1$, to dla każdej drogi w $\mathcal{Q}(H)$ postaci $Y_3 \to Y_2 \to Y_1 \to Y_0 = Y$ mamy $Y_1 = \tau_H^{3n} I_{c_2}$, gdyż wtedy Y_0 ma dokładnie jednego poprzednika i wówczas $Y_1 \notin \mathcal{Q}_E(H)$, zatem na mocy poprzedniego przypadku $a = c_2$ otrzymujemy, że Y_2 lub Y_3 jest modułem w $\mathcal{Q}_E(H)$. W konsekwencji uzasadniliśmy, że dla dowolnej drogi $Y_3 \to Y_2 \to Y_1 \to Y_0 = \tau_H^{3n} I_a$ w $\mathcal{Q}(H)$, gdzie $a \in \{a_1, c_1, c_2\}$, co najmniej jeden z modułów Y_1, Y_2 lub Y_3 musi należeć do $\mathcal{Q}_E(H)$.

  Niech dalej $r = 1$. Wówczas $a \in \{c_1, b_1, b_2\}$ oraz moduł Y jest postaci $Y = \tau_H^{3n+1} I_a$, przy czym jeżeli $a = c_1$, to Y ma jedynego poprzednika $\tau_H^{3n+1} I_{c_2}$, który należy do $\mathcal{Q}_E(H)$, zaś w przypadku, gdy $a = b_2$ mamy $Y^- = \{\tau_H^{3n+1} I_z, \tau_H^{3n+2} I_{b_1}\}$ i wtedy moduł $\tau_H^{3n+2} I_{b_1}$ ma jedynego (bezpośredniego) poprzednika $\tau_H^{3n+2} I_{b_2} \in \mathcal{Q}_E(H)$. Stąd podobnie otrzymujemy, że każda droga $Y_3 \to Y_2 \to Y_1 \to Y_0$ o końcu w $Y_0 = \tau_H^{3n+1} I_{b_1}$ przechodzi przez moduł $Y_1 = \tau_H^{3n+1} I_{b_2} \notin \mathcal{Q}_E$, więc jeden z modułów Y_2 lub Y_3 musi należeć do $\mathcal{Q}_E$.

Pomijamy argumentację w pozostającym przypadku, gdy $r = 3$, gdzie wierzchołek a jest jednym z wierzchołków b_1, a_1 lub a_2, ponieważ przebiega w zupełnie analogiczny sposób. Podsumowując, zostało powyżej udowodnione, że dla każdej drogi w $\mathcal{Q}(H)$ postaci $Y_3 \to Y_2 \to Y_1 \to Y_0$, z modułem Y_0 nie należącym do $\mathcal{Q}_E(H)$, co najmniej jeden z modułów Y_1, Y_2, Y_3 musi należeć do $\mathcal{Q}_E(H)$. To już implikuje, że dowolna nieskończona droga w $\mathcal{Q}(H)$ postaci $(*)$ zawiera nieskończenie wiele modułów z $\mathcal{Q}_E(H)$, bowiem jeżeli istnieje $t_0 \geqslant 0$, dla którego moduł Y_{t_0} nie należy do $\mathcal{Q}_E(H)$, to istnieje również liczba $k \in \{1, 2, 3\}$ taka, że moduł Y_{t_0+k} należy do $\mathcal{Q}_E(H)$.

- Rozważmy teraz stabilną tubę $\mathcal{T} = \mathcal{T}^3$ oraz niech $E = E_0^{(3)}$. W tym przypadku tabele A.6 prowadzą do konkluzji, że zbiór $\mathcal{Q}(H) \setminus \mathcal{Q}_E(H)$ jest postaci
$$\bigcup_{n \geqslant 0} \{\tau_H^{3n} I_{c_1}, \tau_H^{3n} I_{a_1}, \tau_H^{3n} I_{a_2}, \tau_H^{3n+1} I_{a_1}, \tau_H^{3n+1} I_{b_1}, \tau_H^{3n+1} I_{b_2}, \tau_H^{3n+2} I_{b_1}, \tau_H^{3n+2} I_{c_1}, \tau_H^{3n+2} I_{c_2}\}.$$
Dalsze rozumowanie będzie przeprowadzone w podobny sposób co w przypadku tuby $\mathcal{T}^2$, z pominięciem częściowo pokrywającej się argumentacji. Ograniczymy się tylko do pokazania, że każda skończona droga w $\mathcal{Q}(H)$ postaci (ω): $Y_3 \to Y_2 \to Y_1 \to Y_0$, dla której moduł $Y = Y_0$ nie należy do $\mathcal{Q}_E(H)$, zawiera co najmniej jeden moduł $Y_k \in \mathcal{Q}_E(H)$, $k \in \{1, 2, 3\}$. Ustalmy zatem drogę postaci (ω) oraz niech $Y_0 = Y = \tau_H^{3n+r} I_a$, dla $n \geqslant 0$, $r \in \{0, 1, 2\}$ oraz wierzchołka a w Q_H. Tak jak poprzednio rozważamy trzy przypadki.

  Najpierw niech $r = 0$. Wtedy $a \in \{c_1, a_1, a_2\}$, ponieważ $Y = \tau_H^{3n} I_a$ z założenia nie należy do $\mathcal{Q}_E(H)$. Jeśli $a = c_1$, to $Y_1 = \tau_H^{3n} c_2$ należy do $\mathcal{Q}_E(H)$. Jeżeli $a = a_2$, to analogicznie $Y_1 = \tau_H^{3n} I_z$ lub $\tau_H^{3n+1} I_{a_1}$, skąd albo $Y_1 \in \mathcal{Q}_E(H)$, albo $Y_1 = \tau_H^{3n+1} I_{a_1}$, ale wtedy Y_2 musi być modułem postaci $Y_2 = \tau_H^{3n+1} I_{a_2}$ należącym do $\mathcal{Q}_E(H)$. Jeśli w końcu $a = a_1$, to mamy drogę $Y_3 \to Y_2 \to Y_1 = \tau_H^{3n} I_{a_2} \notin \mathcal{Q}_E(H)$, zatem otrzymujemy w tym przypadku, że Y_2 lub Y_3 należy do $\mathcal{Q}_E(H)$.

  Analogicznie, jeśli $r = 1$, to $a \in \{a_1, b_1, b_2\}$ oraz Y jest modułem postaci $Y = \tau_H^{3n+1} I_a$, przy czym tutaj $(\tau_H^{3n+1} I_{a_1})^- = \{\tau_H^{3n+1} I_{a_2}\} \subset \mathcal{Q}_E(H)$ oraz mamy następujące równości
$$(\tau_H^{3n+1} I_{b_2})^- \setminus \mathcal{Q}_E(H) = \{\tau_H^{3n+2} I_{b_1}\} \text{ i } (\tau_H^{3n+2} I_{b_1})^- = \{\tau_H^{3n+2} I_{b_2}\},$$
  skąd jasno wynika, że $Y_1 \in \mathcal{Q}_E(H)$ lub $Y_2 \in \mathcal{Q}_E(H)$, dla każdej drogi w $\mathcal{Q}(H)$ postaci $Y_2 \to Y_1 \to Y_0 = \tau_H^{3n+1} I_a$, gdzie $a = a_1$ lub b_2. Stąd oczywiście wynika również, że jeżeli $a = b_1$, to $Y = \tau_H^{3n+1} I_{b_1}$ ma dokładnie jednego poprzednika $Y_1 = \tau_H^{3n+1} I_{b_2}$ a więc $Y_2 \in \mathcal{Q}_E(H)$ lub $Y_3 \in \mathcal{Q}_E(H)$, ponieważ mamy wtedy drogę $Y_3 \to Y_2 \to Y_1 = \tau_H^{3n+1} I_{b_2}$.

  Ostatecznie, przy założeniu, że $r = 2$ otrzymujemy $a \in \{b_1, c_1, c_2\}$, czyli moduł Y jest postaci $Y = \tau_H^{3n+2} I_a$, i wówczas $Y_1 = \tau_H^{3n+2} I_{b_2} \in \mathcal{Q}_E(H)$, gdy $a = b_1$, oraz dla $a = c_2$, albo moduł Y_1 jest postaci $Y_1 = \tau_H^{3n+2} I_z$, czyli należy do $\mathcal{Q}_E(H)$, albo $Y_1 = \tau_H^{3(n+1)} I_{c_1}$ i wtedy $Y_2 = \tau_H^{3(n+1)} I_{c_2}$ jest modułem $\mathcal{Q}_E(H)$. Oczywiście analogicznie zachodzi $Y_2 \in \mathcal{Q}_E(H)$ lub $Y_3 \in \mathcal{Q}_E(H)$ w przypadku, gdy $a = c_1$, bo wtedy $Y_1 = \tau_H^{3n+2} I_{c_2}$.

Dalej załóżmy, że H jest algebrą dziedziczną typu $\widetilde{\mathbb{E}}_7$. Tutaj istnieje moduł wierny leżący na ustach (jedynej) stabilnej tuby $\mathcal{T}^2$ rangi 3, zatem pozostają do rozważania tuby $\mathcal{T}^1$ oraz $\mathcal{T}^3$.

- Niech najpierw $\mathcal{T}$ będzie tubą $\mathcal{T} = \mathcal{T}^1$ rangi 2 oraz przyjmijmy $E = E_0^{(1)}$. W tym przypadku zbiór $\mathcal{Q}(H) \setminus \mathcal{Q}_E(H)$ składa się z modułów postaci $\tau_H^{2n} I_{a_1}$, lub $\tau_H^{2n+1} I_{b_1}$, dla pewnego $n \geqslant 0$. Z założenia o kanonicznej orientacji kołczanu $Q_H \simeq \Sigma^{\mathrm{op}}$ łatwo wywnioskować równości $(\tau_H^{2n} I_{a_1})^- = \{\tau_H^{2n} I_{a_2}\}$ oraz $(\tau_H^{2n+1} I_{b_1})^- = \{\tau_H^{2n+1} I_{b_2}\}$. Stąd natychmiast otrzymujemy, że dla dowolnego modułu Y w $\mathcal{Q}(H)$ nie należącego do $\mathcal{Q}_E(H)$ zachodzi inkluzja $Y^- \subset \mathcal{Q}_E(H)$. To natomiast implikuje, że każda nieskończona droga w $\mathcal{Q}(H)$ postaci $(*)$ spełnia następujący warunek: *jeżeli dla pewnego $n \geqslant 0$ moduł Y_n nie należy do $\mathcal{Q}_E(H)$, to moduł Y_{n+1} należy do $\mathcal{Q}_E(H)$*. Dowodzi to w konsekwencji, że każda taka droga zawiera nieskończenie wiele modułów z $\mathcal{Q}_E(H)$.

- Rozważmy ostatecznie przypadek, gdy $\mathcal{T} = \mathcal{T}^3$ jest tubą rangi 4. Kładziemy $E = E_0^{(3)}$. Wówczas mamy następujący rozkład

$$Q(H) \setminus Q_E(H) = \bigcup_{n\geqslant 0} \tau_H^{4n}\{I_{a_1}, I_{a_2}, I_{a_3}, I_{b_1}\} \cup \tau_H^{4n+1}\{I_{a_1}, I_{a_2}, I_c\} \cup \tau_H^{4n+2}\{I_{b_1}, I_{b_2}, I_{b_3}, I_{a_1}\} \cup \tau_H^{4n+3}\{I_{b_1}, I_{b_2}, I_c\}$$

zbioru wszystkich modułów preinjektywnych nie należących do $Q_E(H)$. Twierdzimy, że *dla dowolnej skończonej drogi w $Q(H)$ postaci $(\omega) : Y_5 \to Y_4 \to Y_3 \to Y_2 \to Y_1 \to Y_0 = Y$ z modułem Y nie należącym do $Q_E(H)$, istnieje indeks $k \in \{1, \dots, 5\}$, dla którego moduł Y_k należy do $Q_E(H)$.* Ustalmy w tym celu dowolną skończoną drogę typu (ω) oraz załóżmy, że moduł $Y = Y_0$ jest modułem w $Q(H) \setminus Q_E(H)$ postaci $Y = \tau_H^{4n+r} I_a$, dla pewnych liczb naturalnych $n \geqslant 0$, $r \in \{0,1,2,3\}$, oraz ustalonego wierzchołka a w Q_H. Pokażemy poniżej, że w każdym z możliwych przypadków taka droga zawiera co najmniej jeden moduł z $Q_E(H)$. Odnotujmy najpierw, że dla każdego $s \geqslant 0$ spełnione są równości:

$$(\tau_H^s I_{a_1})^- = \{\tau_H^s I_{a_2}\}, \quad (\tau_H^s I_{a_2})^- = \{\tau_H^s I_{a_3}, \tau_H^{s+1} I_{a_1}\}, \quad (\tau_H^s I_{a_3})^- = \{\tau_H^s I_z, \tau_H^{s+1} I_{a_2}\},$$

$$(\tau_H^s I_{b_1})^- = \{\tau_H^s I_{b_2}\}, \quad (\tau_H^s I_{b_2})^- = \{\tau_H^s I_{b_3}, \tau_H^{s+1} I_{b_1}\}, \quad (\tau_H^s I_{b_3})^- = \{\tau_H^s I_z, \tau_H^{s+1} I_{b_2}\},$$

$$\text{oraz} \qquad (\tau_H^s I_c)^- = \{\tau_H^s I_z\} \quad \text{i} \quad (\tau_H^s I_z)^- = \{\tau_H^{s+1} I_{a_3}, \tau_H^{s+1} I_{b_3}, \tau_H^{s+1} I_c\}.$$

Niech na początek $a = c$. W takim przypadku $r = 1$ lub $r = 3$ oraz moduł $Y = \tau_H^{4n+r} I_c$ ma dokładnie jednego bezpośredniego poprzednika, który musi przy tym być postaci $\tau_H^{4n+r} I_z$. Wtedy oczywiście $Y_1 = \tau_H^{4n+r} I_z$ należy do $Q_E(H)$. Zauważmy również, że cała τ_H-orbita modułu I_z zawarta jest w $Q_E(H)$, toteż $a \neq z$. Możemy więc dalej zakładać, że $a = a_i$ lub $a = b_i$, dla pewnego $i \in \{1,2,3\}$.

Załóżmy, że $a \in \{a_1, a_2, a_3\}$ i rozważmy najpierw przypadek $a = a_3$. Wówczas $Y \notin Q_E$ implikuje, że $r = 0$, skąd $Y = \tau_H^{4n} I_{a_3}$, a więc $Y_1 \in Y^- = \{\tau_H^{4n} I_z, \tau_H^{4n+1} I_{a_2}\}$. Jeżeli $Y_1 = \tau_H^{4n} I_z$, to oczywiście Y_1 jest modułem w $Q_E(H)$, czyli żądana teza zachodzi dla $k = 1$. Przypuśćmy zatem, że $Y_1 = \tau_H^{4n+1} I_{a_2}$. Wtedy $Y_1^- = \{\tau_H^{4n+1} I_{a_3}, \tau_H^{4n+2} I_{a_1}\}$, skąd wnioskujemy, że moduł Y_2 jest albo modułem postaci $\tau_H^{4n+1} I_{a_3}$ albo postaci $\tau_H^{4n+2} I_{a_1}$. W pierwszym przypadku Y_2 jest modułem w $Q_E(H)$, zaś jeżeli $Y_2 = \tau_H^{4n+2} I_{a_1}$, to $Y_3 = \tau_H^{4n+2} I_{a_2}$ jest modułem należącym do $Q_E(H)$. Podsumowując pokazaliśmy, że jeśli moduł $Y = Y_0$ jest postaci $Y = \tau_H^{4n} I_{a_3}$, to istnieje $k \in \{1,2,3\}$, dla którego Y_k należy do $Q_E(H)$. Przypuśćmy teraz, że $a = a_2$. Wtedy $r = 0$ lub $r = 1$ i moduł $Y = Y_0 = \tau_H^{4n+r} I_{a_2}$ ma dokładnie dwóch bezpośrednich poprzedników $\tau_H^{4n+r} I_{a_3}$ i $\tau_H^{4n+r+1} I_{a_1}$. Niech $Y_1 = \tau_H^{4n+r} I_{a_3}$. Wówczas jeśli $r = 1$, to $Y_1 \in Q_E(H)$, zaś dla $r = 0$ moduł Y_1 nie należy do $Q_E(H)$ i wtedy jeden z modułów Y_2, Y_3 lub Y_4 musi należeć do $Q_E(H)$ na podstawie wcześniejszych rozważań dla $a = a_3$. Dalej przyjmijmy, że $Y_1 = \tau_H^{4n+r+1} I_{a_1}$. W tej sytuacji Y_2 jest jedynym bezpośrednim poprzednikiem Y_1 w Γ_H, i jest modułem postaci $Y_2 = \tau_H^{4n+r+1} I_{a_2}$, toteż Y_3 jest jednym z dwóch modułów $\tau_H^{4n+r+1} I_{a_3}$ lub $\tau_H^{4n+r+2} I_{a_1}$. Jeżeli $r = 1$, to wówczas $Y_2 = \tau_H^{4n+2} I_{a_2}$ jest modułem z $Q_E(H)$ i teza zachodzi; jeśli zaś $r = 0$, to albo $Y_3 = \tau_H^{4n+1} I_{a_3}$ należy do $Q_E(H)$ albo $Y_3 = \tau_H^{4n+2} I_{a_1}$ i wtedy Y_4 musi być modułem postaci $\tau_H^{4n+2} I_{a_2}$, który oczywiście należy do $Q_E(H)$. Zatem dla każdej drogi (ω) o końcu w module $Y = Y_0$ postaci $Y = \tau_H^{4n+r} I_{a_2}$ istnieje $k \in \{1,2,3,4\}$ takie, że Y_k jest modułem w $Q_E(H)$. Pozwólmy sobie na koniec krótko skomentować ostatni przypadek $a = a_1$. W istocie, dla każdej drogi (ω) o końcu w $Y_0 = \tau_H^{4n+r} I_{a_1}$ moduł Y_1 musi być modułem postaci $Y_1 = \tau_H^{4n+r} I_{a_2}$, skąd albo $Y_1 \in Q_E$ albo $Y_1 \notin Q_E$, a wtedy na mocy poprzednich rozważań dla $a = a_2$ istnieje takie $k \in \{1,2,3,4\}$, że Y_{1+k} należy do $Q_E(H)$. W konsekwencji udowodniliśmy, że postulowana teza zachodzi dla wszystkich dróg (ω) o końcu w module $Y_0 = \tau_H^s I_a$, z $a \in \{a_1, a_2, a_3\}$.

Pozostało rozważyć dualny przypadek, w którym wierzchołek a leży na symetrycznie położonym ramieniu kołczanu Q_H, to znaczy $a \in \{b_1, b_2, b_3\}$. Podobnie jak wyżej zakładamy najpierw, że $a = b_3$. Wtedy $Y \notin Q_E$ implikuje, że $r = 2$, skąd $Y = \tau_H^{4n+2} I_{b_3}$, a więc $Y_1 \in Y^- = \{\tau_H^{4n+2} I_z, \tau_H^{4n+3} I_{b_2}\}$. Jeżeli $Y_1 = \tau_H^{4n+2} I_z$, to oczywiście Y_1 jest modułem w $Q_E(H)$, czyli żądana teza zachodzi dla $k = 1$. Przypuśćmy zatem, że $Y_1 = \tau_H^{4n+3} I_{b_2}$. Wtedy $Y_1^- = \{\tau_H^{4n+3} I_{b_3}, \tau_H^{4n+4} I_{b_1}\}$, skąd wnioskujemy, że moduł Y_2 jest albo modułem postaci $\tau_H^{4n+3} I_{b_3}$ albo postaci $\tau_H^{4(n+1)} I_{b_1}$. W pierwszym przypadku

Y_2 jest modułem w $\mathcal{Q}_E(H)$, zaś w drugim $Y_2 = \tau_H^{4(n+1)} I_{b_1}$, a więc $Y_3 = \tau_H^{4(n+1)} I_{b_2}$ jest modułem należącym do $\mathcal{Q}_E(H)$. Pokazaliśmy zatem, że jeśli moduł $Y = Y_0$ jest postaci $Y = \tau_H^{4n+2} I_{b_3}$, to istnieje $k \in \{1, 2, 3\}$, dla którego Y_k należy do $\mathcal{Q}_E(H)$. Niech teraz, że $a = b_2$. Wtedy $r = 2$ lub $r = 3$ i moduł $Y = Y_0 = \tau_H^{4n+r} I_{b_2}$ ma dokładnie dwóch bezpośrednich poprzedników $\tau_H^{4n+r} I_{b_3}$ i $\tau_H^{4n+r+1} I_{b_1}$. Niech $Y_1 = \tau_H^{4n+r} I_{b_3}$. Jeśli $r = 3$, to $Y_1 \in \mathcal{Q}_E(H)$, zaś dla $r = 2$ moduł Y_1 nie należy do $\mathcal{Q}_E(H)$ i wtedy jeden z modułów Y_2, Y_3 lub Y_4 musi należeć do $\mathcal{Q}_E(H)$ na podstawie przypadku $a = b_3$. Dalej przyjmijmy, że $Y_1 = \tau_H^{4n+r+1} I_{b_1}$. W tej sytuacji Y_2 jest jedynym bezpośrednim poprzednikiem Y_1 w Γ_H, i jest modułem postaci $Y_2 = \tau_H^{4n+r+1} I_{b_2}$, czyli Y_3 musi być jednym z dwóch modułów $\tau_H^{4n+r+1} I_{b_3}$ lub $\tau_H^{4n+r+2} I_{b_1}$. Jeżeli $r = 3$, to wówczas $Y_2 = \tau_H^{4n+4} I_{b_2}$ jest modułem z $\mathcal{Q}_E(H)$ i teza zachodzi; jeśli zaś $r = 2$, to albo $Y_3 = \tau_H^{4n+3} I_{b_3}$ należy do $\mathcal{Q}_E(H)$ albo $Y_3 = \tau_H^{4n+4} I_{b_1}$ i wtedy Y_4 musi być modułem postaci $\tau_H^{4n+4} I_{b_2}$, który oczywiście należy do $\mathcal{Q}_E(H)$. Zatem dla każdej drogi (ω) o końcu w module $Y = Y_0$ postaci $Y = \tau_H^{4n+r} I_{b_2}$ istnieje $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ takie, że Y_k jest modułem w $\mathcal{Q}_E(H)$. Analogicznie jak wcześniej wystarczy zauważyć, że dla każdej drogi (ω) o końcu w $Y_0 = \tau_H^{4n+r} I_{b_1}$ moduł Y_1 musi być modułem postaci $Y_1 = \tau_H^{4n+r} I_{b_2}$, a stąd Y_1 należy do $\mathcal{Q}_E(H)$ lub nie, i wtedy na mocy przypadku $a = b_2$ istnieje takie $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, że Y_{1+k} należy do $\mathcal{Q}_E(H)$. W rezultacie teza jest również prawdziwa dla wszystkich dróg (ω) o końcu w module $Y_0 = \tau_H^s I_a$, z $a \in \{b_1, b_2, b_3\}$.

Ostatecznie przypuśćmy, że H jest typu $\widetilde{\mathbb{E}}_8$. Wtedy mamy wierne moduły leżące na ustach stabilnych tub $\mathcal{T}^1$ rangi 2 oraz $\mathcal{T}^3$ rangi 5. Wystarczy więc dowieść tezy w przypadku, gdy $\mathcal{T} = \mathcal{T}^2$ jest jedyną stabilną tubą rangi 3 w kołczanie Γ_H. Przypuśćmy również, że E jest modułem $E = E_0^{(2)}$. W tej sytuacji łatwe sprawdzenie pokazuje, że spełniona jest równość

$$\mathcal{Q}(H) \setminus \mathcal{Q}_E(H) = \bigcup_{n \geqslant 0} \{\tau_H^{3n} I_{a_1}, \tau_H^{3n} I_{a_2}, \tau_H^{3n+1} I_{a_1}, \tau_H^{3n+2} I_{b_1}\}.$$

Ponadto dla każdego $n \geqslant 0$ mamy $(\tau_H^{3n+2} I_{b_1})^- = \{\tau_H^{3n+2} I_{b_2}\}$ oraz $(\tau_H^{3n+1} I_{a_1})^- = \{\tau_H^{3n+1} I_{a_2}\}$, zatem dowolny moduł postaci $Y = \tau_H^{3n+1} I_{a_1}$ lub $\tau_H^{3n+2} I_{b_1}$, dla $n \geqslant 0$ spełnia warunek $Y^- \subset \mathcal{Q}_E(H)$. Pozostaje teraz zauważyć, że zachodzą także równości $(\tau_H^{3n} I_{a_1})^- = \{\tau_H^{3n} I_{a_2}\}$ oraz $(\tau_H^{3n} I_{a_2})^- = \{\tau_H^{3n} I_{a_3}, \tau_H^{3n+1} I_{a_1}\}$, dla każdego $n \geqslant 0$. To bowiem implikuje, że dla każdej drogi w $\mathcal{Q}(H)$ postaci $Y_3 \to Y_2 \to Y_1 \to Y_0 = Y$ z $Y \in \{\tau_H^{3n} I_{a_1}, \tau_H^{3n} I_{a_2}\}$ istnieje $k \in \{1, 2, 3\}$ takie, że $Y_k \in \mathcal{Q}_E(H)$. W istocie, niech najpierw $Y = \tau_H^{3n} I_{a_1}$. Wówczas Y_1 jest jedynym możliwym poprzednikiem $Y_1 = \tau_H^{3n} I_{a_2}$ modułu Y, skąd wynika, że $Y_2 = \tau_H^{3n} I_{a_3}$ lub $Y_2 = \tau_H^{3n+1} I_{a_1}$. Jeśli $Y_2 = \tau_H^{3n} I_{a_3}$, to Y_2 należy do $\mathcal{Q}_E(H)$. Jeżeli natomiast $Y_2 = \tau_H^{3n+1} I_{a_1}$, to wszystkie bezpośrednie poprzedniki modułu Y_2 należą do $\mathcal{Q}_E(H)$, zatem oczywiście $Y_3 \in \mathcal{Q}_E(H)$ i żądana własność zachodzi również w tym przypadku. Ostatecznie w przypadku, gdy $Y = \tau_H^{3n} I_{a_2}$ można przeprowadzić identyczne rozumowanie pokazujące, że wtedy $Y_1 \in \mathcal{Q}_E(H)$ lub $Y_2 \in \mathcal{Q}_E(H)$. Reasumując wykazaliśmy powyżej, że $\mathcal{Q}(H)$ nie zawiera ani jednej drogi postaci $Y_3 \to Y_2 \to Y_1 \to Y_0$ składającej się wyłącznie z modułów $Y_0, \ldots, Y_3 \in \mathcal{Q}(H) \setminus \mathcal{Q}_E(H)$. To oczywiście pokazuje, że dowolna nieskończona droga w $\mathcal{Q}(H)$ postaci $(*)$ zawiera wraz z każdym modułem nie należącym do $\mathcal{Q}_E(H)$ co najmniej jednego poprzednika z $\mathcal{Q}_E(H)$, a zatem zbiór $\{n \geqslant 0 |\ Y_n \in \mathcal{Q}_E(H)\}$ musi być nieskończony i dowód jest w tym przypadku zamknięty.

(4) W ostatnim kroku rozważamy pozostające typy $\widetilde{\mathbb{F}}_{41}$ oraz $\widetilde{\mathbb{F}}_{42}$.

Najpierw niech H będzie algebrą dziedziczną typu $\widetilde{\mathbb{F}}_{41}$. Wówczas kołczan Γ_H zawiera stabilną tubę $\mathcal{T}^1$ rangi 2 oraz stabilną tubę $\mathcal{T}^2$ rangi 3, która ma wierny moduł na ustach. W tej sytuacji pozostaje rozważyć przypadek $\mathcal{T} = \mathcal{T}^1$. Prosta analiza wykorzystująca tabele A.6 pokazuje, że dla modułu $E = E_0^{(1)}$ spełniona jest następująca równość

$$\mathcal{Q}(H) \setminus \mathcal{Q}_E(H) = \bigcup_{n \geqslant 0} \{\tau^{2n} I_{a_1}, \tau^{2n+1} I_b\}.$$

Co więcej, oczywiście $(\tau^{2n} I_{a_1})^- = \{\tau^{2n} I_{a_2}\}$ oraz $(\tau^{2n+1} I_b)^- = \{\tau^{2n+1} I_z\}$, ponieważ $\Sigma^{\mathrm{op}} \simeq Q_H$ jest z założenia zorientowany kanonicznie, skąd jasno widać, że zachodzi inkluzja $(\mathcal{Q}(H) \setminus \mathcal{Q}_E(H))^- \subset \mathcal{Q}_E(H)$.

Załóżmy teraz, że H jest typu $\widetilde{\mathbb{F}}_{42}$. W tym przypadku rodzina $\mathcal{T}^H$ jest typu tubularnego $(2,3)$, przy czym stabilna tuba $\mathcal{T}^1$ rangi 2 zawiera wierny moduł leżący na ustach. Niech więc $\mathcal{T} = \mathcal{T}^2$ będzie pozostałą do rozpatrzenia tubą rangi 3. Dla ustalonego $E = E_0^{(2)}$ wprost z tabeli A.6 można natychmiast wywnioskować, że

$$\mathcal{Q}(H) \setminus \mathcal{Q}_E(H) = \bigcup_{n\geqslant 0}\{\tau^{3n}I_{a_1}, \tau^{3n+1}I_{b_1}, \tau^{3n+2}I_{a_1}, \tau^{3n+2}I_{a_2}\}.$$

Dalej wystarczy zauważyć, że $(\tau^{3n}I_{a_1})^- = \{\tau^{3n}I_{a_2}\}$, $(\tau^{3n+1}I_{b_1})^- = \{\tau^{3n+1}I_{b_2}\}$ oraz $(\tau^{3n+2}I_{a_1})^- = \{\tau^{3n+2}I_{a_2}\}$ i $(\tau^{3n+2}I_{a_2})^- = \{\tau^{3n+2}I_z, \tau^{3n+3}I_{a_1}\}$. Otrzymujemy stąd bowiem inkluzje $\{\tau^{3n}I_{a_1}, \tau^{3n+1}I_{b_1}\}^- \subset \mathcal{Q}_E$, zaś ponieważ $(\tau^{3n+2}I_{a_2})^- = \{\tau^{3n+2}I_z, \tau^{3n+3}I_{a_1}\}$, dla $n \geqslant 0$, to dla każdy bezpośredni poprzednik Y_1 modułu $Y = Y_0 = \tau^{3n+2}I_{a_2}$ albo należy do $\mathcal{Q}_E$, albo $Y_1 = \tau^{3n+3}I_{a_1}$, i wówczas $Y_1^- = \{\tau^{3(n+1)}I_{a_2}\} \subset \mathcal{Q}_E$. To pokazuje, że dla dowolnej drogi w $\mathcal{Q}(H)$ postaci $Y_2 \to Y_1 \to Y_0 = \tau^{3n+2}I_{a_2}$ istnieje $k \in \{1,2\}$, dla którego $Y_k \in \mathcal{Q}_E$. Ponadto moduł $Y = \tau^{3n+2}I_{a_1}$ ma oczywiście dokładnie jednego bezpośredniego poprzednika w $\mathcal{Q}(H)$ postaci $\tau^{3n+2}I_{a_2}$, skąd wnioskujemy ostatecznie, że każda skończona droga $Y_3 \to Y_2 \to Y_1 \to Y_0 = Y$ w $\mathcal{Q}(H)$, dla której moduł Y nie należy do $\mathcal{Q}_E(H)$ musi zawierać co najmniej jeden moduł postaci Y_k, dla $k \in \{1,2,3\}$, który do $\mathcal{Q}_E(H)$ należy. Jest zatem jasne, że również każda nieskończona droga w $\mathcal{Q}(H)$ postaci $(*)$ musi zawierać nieskończenie wiele parami nieizomorficznych modułów z $\mathcal{Q}_E(H)$.

W konsekwencji, dowód jest teraz zakończony. □

W przypadku typu $\widetilde{\mathbb{A}}_{pq}$ otrzymujemy nieco słabszą tezę sformułowaną w poniższej postaci.

Lemat 3.4.3. *Przypuśćmy, że H jest algebrą dziedziczną typu Euklidesa $\widetilde{\mathbb{A}}_m$, $m \geqslant 3$, z kołczanem Q_H zorientowanym kanonicznie, to jest $Q_H = \widetilde{\mathbb{A}}_{p,q}$, gdzie $(p,q) \neq (0,0)$, $p \geqslant q \geqslant 0$ i $p+q+1 = m$. Niech ponadto E będzie pewnym modułem leżącym na ustach stabilnej tuby w Γ_H. Wówczas dla dowolnego modułu Y w preinjektywnej składowej $\mathcal{Q}(H)$ można dobrać nieskończoną drogę sekcyjną*

$$\cdots \to Y_{n+1} \to Y_n \to \cdots \to Y_1 \to Y_0 = Y$$

w $\mathcal{Q}(H)$ spełniającą następujące warunki.

(1) Istnieje nieskończony ciąg $n_0 < n_1 < \ldots$ taki, że $Y_{n_k} \in \mathcal{Q}_E(H)$, dla każdego $k \geqslant 0$.

(2) Dla każdej liczby naturalnej c, istnieje nieskończony ciąg $n_0^c < n_1^c < \ldots$ taki, że $\tau_H^c Y_{n_k^c} \in \mathcal{Q}_E(H)$, dla $k \geqslant 0$.

Dowód · Tezy (1) i (2) są trywialnie spełnione dla każdego modułu E leżącego na ustach jednorodnej stabilnej tuby w Γ_H, bowiem wtedy oczywiście $\mathcal{Q}_E(H) = \mathcal{Q}(H)$. Załóżmy więc, że E leży na ustach pewnej stabilnej tuby rangi $\geqslant 2$. Przypominamy, że w kołczanie Γ_H istnieją co najwyżej dwie niejednorodne stabilne tuby $\mathcal{T}^1$ i $\mathcal{T}^2$, o rangach $q+1$ (jeżeli $q \geqslant 1$) i $p+1$, odpowiednio.

Korzystając z tabel A.6 nietrudno jest zauważyć, że jeśli $q \geqslant 1$ i $V = E_0^{(1)}$, to składowa $\mathcal{Q}(H)$ jest rozłączną sumą:

$$\mathcal{Q}(H) = \mathcal{Q}_V \cup \mathcal{Q}_{\tau_H^{-1}V} \cup \cdots \cup \mathcal{Q}_{\tau_H^{-q}V},$$

gdzie dla każdego $s \in \{0,\ldots,q\}$, zbiór $\mathcal{Q}_{\tau_H^{-s}V}$ składa się z modułów leżących na pewnej nieskończonej drodze sekcyjnej w $\mathcal{Q}(H)$. Co więcej, $\mathcal{Q}_V$ składa się z modułów leżących na drodze postaci

$$\cdots \to \tau_H^{2(q+1)}Q_0 \to \tau_H^{q+1}Q_m \to \cdots \to Q_{m+1} = \tau_H^{q+1}Q_0 \to Q_m = \tau_H^q I_b \to$$

$$\to \tau_H^q I_{c_p} \to \cdots \to \tau_H^q I_{c_1} \to \tau_H^q I_a \to \tau_H^{q-1} I_{d_1} \to \cdots \to \tau_H I_{d_{q-1}} = Q_1 \to I_{d_q} = Q_0,$$

zaś dla $s \in \{0,\ldots,q\}$, droga $\mathcal{Q}_{\tau_H^{-s}V}$ jest $(-s)$-tą translacją $\mathcal{Q}_{\tau_H^{-s}V} = \tau_H^{-s}\mathcal{Q}_V$ powyższej drogi, zatem jest to nieskończona droga sekcyjna w $\mathcal{Q}(H)$ postaci $\cdots \to \tau_H^{-s}Q_n \to \cdots \to \tau_H^{-s}Q_{m+1} \to \tau_H^{-s}Q_m \to \cdots \to \tau_H^{-s}Q_{s+1} \to \tau_H^{-s}Q_s$. Dualnie, przyjmując $U = E_0^{(2)}$, otrzymujemy analogiczny rozkład

$$\mathcal{Q}(H) = \mathcal{Q}_U \cup \mathcal{Q}_{\tau_H^{-1}U} \cup \cdots \cup \mathcal{Q}_{\tau_H^{-p}U}$$

składowej $\mathcal{Q}(H)$ na sumę $p+1$ rozłącznych dróg, gdzie $\mathcal{Q}_U$ jest nieskończoną drogą sekcyjną postaci

$$\cdots \to \tau_H^{2(p+1)} R_0 \to \tau_H^{p+1} R_m \to \cdots \to R_{m+1} = \tau_H^{p+1} R_0 \to R_m = \tau_H^p I_b \to$$
$$\to \tau_H^p I_{d_q} \to \cdots \to \tau_H^p I_{d_1} \to \tau_H^p I_a \to \tau_H^{p-1} I_{c_1} \to \cdots \to \tau_H I_{c_{p-1}} = R_1 \to I_{c_p} = R_0,$$

podczas każda z dróg $\mathcal{Q}_{\tau_H^{-t}U}$, $t \in \{0,\dots p\}$, jest nieskończoną drogą sekcyjną $\cdots \to \tau_H^{-t} R_n \to \cdots \to \tau_H^{-t} R_{m+1} \to \tau_H^{-t} R_m \to \cdots \to \tau_H^{-t} R_{t+1} \to \tau_H^{-t} R_t$.

Pokażemy teraz, że dla dowolnych $s \in \{0,\dots,q\}$ oraz $t \in \{0,\dots,p\}$ przekrój $\mathcal{Q}_{\tau_H^{-s}V} \cap \mathcal{Q}_{\tau_H^{-t}U}$ zawiera nieskończenie wiele parami nieizomorficznych H-modułów. Oczywiście jeżeli $q = 0$, to $\mathcal{Q}_V = \mathcal{Q}(H)$ i nie ma czego dowodzić, zatem zakładamy dalej, że $q \geqslant 1$. Niech s oraz t będą dowolnymi ustalonymi indeksami $s \in \{0,\dots,q\}$, $t \in \{0,\dots,p\}$ oraz przyjmijmy oznaczenia $V^s := \tau_H^{-s} V$ i $U^t := \tau_H^{-t} U$. Zdefiniujemy poniżej nieskończoną rodzinę $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ parami nieizomorficznych modułów X_n należących do $\mathcal{Q}_{V^s} \cap \mathcal{Q}_{U^t}$. Wystarczy jedynie zauważyć, że dla dowolnej liczby naturalnej n istnieją liczby $\alpha_n \geqslant 0$ oraz $r_n \in \{0,\dots,q\}$, dla których $n(p+1)+p+s-t = \alpha_n(q+1)+r_n$. Twierdzimy, że wówczas dla każdego $n \geqslant 0$ moduł $X_n := \tau_H^{n(p+1)+p-t} I_{d_{q-r_n}}$ jest modułem w $\mathcal{Q}_{V^s} \cap \mathcal{Q}_{U^t}$, gdzie $d_0 := a$. W istocie zauważmy, że dla każdego $r \in \{0,1,\dots,q\}$ moduł $R_{p+r} = \tau_H^p I_{d_r}$ leży na drodze $\mathcal{Q}_U = \cdots \to R_2 \to R_1 \to R_0$. Ponadto dla każdego $n \geqslant 0$ droga $\mathcal{Q}_U$ zawiera również wszystkie moduły postaci $\tau_H^{n(p+1)} R_{p+r} = \tau_H^{n(p+1)+p} I_{d_r}$, dla $r \in \{0,\dots,q\}$. To implikuje, że $X_n = \tau_H^{-t}\tau_H^{n(p+1)+p} I_{d_{q-r_n}}$ należy do $\mathcal{Q}_{U^t}(H)$, dla każdego $n \geqslant 0$. Z drugiej strony, dla dowolnego $r \in \{0,\dots,q\}$ moduł $Q_r = \tau_H^r I_{d_{q-r}}$ leży na drodze $\mathcal{Q}_V$, tak więc droga Q_V zawiera również wszystkie moduły postaci $\tau_H^{\alpha(q+1)} Q_r$, dla $\alpha \geqslant 0$. Wystarczy teraz zauważyć, że dla każdego $n \geqslant 0$ zachodzi równość $n(p+1)+p-t = \alpha_n(q+1)+r_n-s$, skąd otrzymujemy, że $X_n = \tau_H^{-s}\tau_H^{\alpha_n(q+1)+r_n} I_{d_{q-r_n}}$, a więc moduł X_n należy również do $\mathcal{Q}_{V^s}(H)$, ponieważ moduł

$$\tau_H^{\alpha_n(q+1)+r_n} I_{d_{q-r_n}} = \tau_H^{\alpha_n(q+1)}(\tau_H^{r_n} I_{d_{q-r_n}}) = \tau_H^{\alpha_n(q+1)} Q_{r_n}$$

leży na drodze $\mathcal{Q}_V$. W konsekwencji, wykazaliśmy powyżej, że zbiór $\mathcal{Q}_{V^s}(H) \cap \mathcal{Q}_{U^t}(H)$ faktycznie zawiera nieskończenie wiele parami nieizomorficznych modułów postaci X_n, dla $n \geqslant 0$.

Ostatecznie łatwo już teraz wywnioskować, że spełnione są warunki (a) i (b) sformułowane w tezie lematu. Faktycznie, wystarczy założyć, że moduł E należy do jednej z tub $\mathcal{T}^1$ lub $\mathcal{T}^2$. Niech E należy do tuby $\mathcal{T}^1$ rangi $q+1$. Wówczas E jest postaci $E = \tau_H^{-s} V$, dla pewnego $s \in \{0,\dots,q\}$ oraz dowolny moduł Y w $\mathcal{Q}(H)$ leży na dokładnie jednej drodze postaci $\mathcal{Q}_{U'} = \mathcal{Q}_{\tau_H^{-t}U}(H)$, która zawiera na mocy powyższych rozważań nieskończenie wiele modułów z $\mathcal{Q}_E(H)$. To dowodzi, że zachodzi warunek (1). Co więcej, dla każdego $c \geqslant 0$, droga $\tau_H^c \mathcal{Q}_{U'}$ jest koskończoną poddrogą drogi $\mathcal{Q}_{\tau_H^{-t+c}U}(H)$, zatem również zawiera nieskończenie wiele modułów z drogi $\mathcal{Q}_E(H)$, co natomiast dowodzi prawdziwości (2). Analogicznie nietrudno pokazać, że jeżeli E należy do tuby $\mathcal{T}^2$ rangi $p+1$, to E jest postaci $E = \tau_H^{-t} U$, przy czym dowolny moduł Y w $\mathcal{Q}(H)$ leży na drodze postaci $\mathcal{Q}_{V'}(H)$, dla jednoznacznie wyznaczonego modułu V' leżącego na ustach $\mathcal{T}^1$, i wówczas szukana droga, która spełnia warunki (1)-(2) jest poddrogą drogi $\mathcal{Q}_{V'}(H)$ składającą się ze wszystkich poprzedników modułu Y. To kończy dowód. □

Powyższe dwa lematy posłużą nam teraz do udowodnienia kluczowego dla rozprawy lematu, stanowiącego przy tym częściową odpowiedź na pytanie postawione na początku niniejszej sekcji.

Lemat 3.4.4. *Niech B będzie algebrą odwróconą typu Euklidesa z nieskończoną preinjektywną składową łączącą $\mathcal{Q}(B)$, zaś M dowolnym modułem w* $\operatorname{ind} B$ *leżącym na ustach stabilnej tuby z Γ_B. Wtedy dla każdego modułu nierozkładalnego R w $\mathcal{Q}(B)$ prawdziwe są następujące stwierdzenia.*

(a) Istnieje nieskończenie wiele parami nieizomorficznych modułów Z_n w $\mathcal{Q}(B)$, $n \in \mathbb{N}$ takich, że $\operatorname{Hom}_B(M, \tau_B Z_n) \neq 0$ oraz $\operatorname{Hom}_B(\tau_B^{-1} Z_n, R) \neq 0$, dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

(b) Istnieje nieskończenie wiele parami nieizomorficznych modułów Z_n w $\mathcal{Q}(B)$, $n \in \mathbb{N}$ takich, że $\operatorname{Hom}_B(M, Z_n) \neq 0$ oraz $\operatorname{Hom}_B(Z_n, R) \neq 0$, dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

(c) Istnieje nieskończenie wiele parami nieizomorficznych modułów Z_n w $\mathcal{Q}(B)$, $n \in \mathbb{N}$ takich, że $\operatorname{Hom}_B(M, \tau_B Z_n) \neq 0$ oraz $\operatorname{Hom}_B(Z_n, R) \neq 0$, dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

(d) *Istnieje nieskończenie wiele parami nieizomorficznych modułów Z_n w $\mathcal{Q}(B)$, $n \in \mathbb{N}$ takich, że* $\mathrm{Hom}_B(M, Z_n) \neq 0$ *oraz* $\mathrm{Hom}_B(\tau_B^{-1} Z_n, R) \neq 0$, *dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.*

dowód · Odnotujmy najpierw kilka wstępnych uwag i ustalmy oznaczenia stosowane w dowodzie. Po pierwsze z założeń wynika, że B jest algebrą postaci $B \cong \mathrm{End}_H(T)$, dla pewnej (spójnej) algebry dziedzicznej H typu Euklidesa oraz modułu odwracającego T w $\mathrm{mod}\, H$ postaci $T = T^{pp} \oplus T^{rg}$, gdzie T^{pp} jest modułem w $\mathrm{add}\, \mathcal{P}(H)$, zaś T^{rg} modułem w $\mathrm{add}\, \mathcal{T}^H$. Ponadto, kołczan Γ_B jest jak wiadomo postaci $\Gamma_B = \mathcal{P}(B) \cup \mathcal{T}^B \cup \mathcal{Q}(B)$, gdzie $\mathcal{P}(B)$ jest składową postprojektywną, $\mathcal{T}^B$ rodziną tub promieniowych, zaś $\mathcal{Q}(B) = \mathcal{C}_T$ jest preinjektywną składową łączącą zawierającą sekcję Δ składającą się z modułów postaci $\mathrm{Hom}_H(T, I)$, dla których I jest modułem injektywnym w $\mathrm{ind}\, H$; patrz także Twierdzenie 2.2.2. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że kołczan $Q_H \simeq Q_B \simeq \Delta^{\mathrm{op}}$ jest zorientowany kanonicznie, gdyż niezależnie od orientacji sekcji Δ istnieje w $\mathcal{Q}(B)$ sekcja Δ' zorientowana kanonicznie, która jest tego samego typu Euklidesowego co Δ oraz $|\Delta_0| = |\Delta'_0|$. Wtedy zaś suma prosta U wszystkich modułów leżących na sekcji Δ' spełnia warunek $\mathrm{Hom}_B(U, \tau_B U) = 0$, zatem na mocy kryterium Liu-Skowrońskiego wnioskujemy, że U jet modułem odwracającym w $\mathrm{mod}\, B$, dla którego algebra $H' = \mathrm{End}_B(U)$ jest algebrą dziedziczną typu Euklidesa z $Q_{H'}^{\mathrm{op}} \simeq \Delta'$, przy czym również $B \cong \mathrm{End}_{H'}(T')$, gdzie $T' = D({}_{H'}U)$ jest modułem odwracającym w $\mathrm{mod}\, H'$. Zauważmy ostatecznie, że moduł M leży na ustach stabilnej tuby w $\mathcal{T}^B$, a więc z Twierdzenia 1.6.3 wynika, że $\mathrm{Hom}_H(T, E) \simeq M$, dla pewnego modułu E leżącego na ustach stabilnej tuby z $\mathcal{T}^H$ nie zawierającej składników prostych modułu T. Aby udowodnić tezy (a)-(d) wystarczy pokazać, że dowolny moduł R w $\mathcal{Q}(B)$ jest końcem pewnej nieskończonej drogi w $\mathcal{Q}(B)$ postaci

$$(\Omega): \qquad \cdots \to V_n \to V_{n-1} \to \cdots \to V_1 \to V_0 = R,$$

dla której $\mathrm{Hom}_A(V_k, R) \neq 0$, dla $k \geqslant 0$, oraz każda z dróg (Ω), $\tau_B(\Omega)$ i $\tau_B^2(\Omega)$ zawiera nieskończenie wiele modułów Z, dla których $\mathrm{Hom}_B(M, Z) \neq 0$. Wówczas bowiem istnieją ściśle rosnące ciągi liczb naturalnych $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(k'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $(k''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takie, że $\mathrm{Hom}_B(M, V_{k_n}) \neq 0$, $\mathrm{Hom}_B(M, \tau_B V_{k'_n}) \neq 0$ i $\mathrm{Hom}_B(M, \tau_B^2 V_{k''_n}) \neq 0$, dla wszystkich $k \geqslant 0$, co implikuje tezy (a)-(d). W istocie, nietrudno sprawdzić, że nieskończone rodziny modułów w $\mathcal{Q}(B)$ spełniające żądane warunki w (a)-(d), można wtedy określić jako $Z_n^a := \tau_B V_{k''_n}$, $Z_n^b := V_{k_n}$, $Z_n^c := V_{k'_n}$ i odpowiednio, $Z_n^d := \tau_B V_{k'_n}$. W dalszej części dowodu pokazujemy w dwóch przypadkach, że istnieje droga postaci (Ω) o postulowanych wyżej własnościach.

(1) W pierwszym przypadku załóżmy, że Q_H jest drzewem (zorientowanym w kanonicznie). Zauważmy na początek, że ponieważ R jest nierozkładalnym B-modułem w preinjektywnej składowej $\mathcal{Q}(B)$, zaś wszystkie moduły projektywne w $\mathrm{ind}\, B$ należą do $\mathcal{P}(B) \cup \mathcal{T}^B$, to $\mathrm{rad}_B^\infty(P, R) \neq 0$, dla pewnego modułu projektywnego P w $\mathrm{ind}\, B$. W konsekwencji, z Lematu 1.4.4 otrzymujemy, że istnieje nieskończona droga w $\mathcal{Q}(B)$ postaci

$$(\Omega): \qquad \cdots \to V_n \to V_{n-1} \to \cdots \to V_1 \to V_0 = R,$$

gdzie $\mathrm{Hom}_B(V_k, R) \neq 0$, dla każdego $k \geqslant 0$. Wtedy oczywiście istnieją nieskończone drogi w $\mathcal{Q}(B)$ postaci

$$\cdots \to \tau_B V_n \to \cdots \to \tau_B V_1 \to \tau_B V_0 \quad \text{oraz} \qquad \cdots \to \tau_B^2 V_n \to \cdots \to \tau_B^2 V_1 \to \tau_B^2 V_0,$$

zaś ponieważ każda z niech od pewnego miejsca, powiedzmy $n_0 \geqslant 0$, składa się wyłącznie z modułów beztorsyjnych w $\mathcal{Q}(B)$, to otrzymujemy teraz z Wniosku 1.6.4, że istnieją również następujące nieskończone drogi w składowej preinjektywnej $\mathcal{Q}(H)$ kołczanu Γ_H

$$(\alpha)\ \cdots \to Y_2 \to Y_1 \to Y_0, \quad (\alpha')\ \cdots \to Y'_2 \to Y'_1 \to Y'_0 \text{ oraz } (\alpha'')\ \cdots \to Y''_2 \to Y''_1 \to Y''_0,$$

gdzie $\mathrm{Hom}_H(T, Y_n) \simeq V_n$, $\mathrm{Hom}_H(T, Y'_n) \simeq \tau_B V_n$ oraz $\mathrm{Hom}_H(T, Y''_n) \simeq \tau_B^2 V_n$, dla wszystkich $n \geqslant n_0$. Stosując teraz tezę Lematu 3.4.2 dla modułu E, wnioskujemy, że każda z dróg (α), (α'), (α'') zawiera nieskończenie wiele modułów z $\mathcal{Q}_E(H)$. Na mocy Twierdzenia Brenner-Butler otrzymujemy stąd, że każda z dróg (Ω), $\tau_B(\Omega)$ oraz $\tau_B^2(\Omega)$ zawiera nieskończenie wiele modułów ze zbioru $\mathcal{Q}_M(B) := \{Z \in \mathcal{Q}(B) |\ \mathrm{Hom}_B(M, Z) \neq 0\}$, tak więc powyższa droga (Ω) jest drogą o żądanych własnościach.

(2) W pozostającym do rozważenia przypadku przyjmujemy oczywiście, że kołczan Q_H nie jest drzewem, to znaczy Q_H jest kołczanem typu Euklidesa $\widetilde{\mathbb{A}}_{p,q}$, dla pewnych $p \geqslant q \geqslant 0$, $(p,q) \neq (0,0)$; patrz Lista A.2. W tej sytuacji dowód wykorzystuje nieco słabszą tezę Lematu 3.4.3.

Przypuśćmy najpierw, że moduł R należy do beztorsyjnej części $\mathscr{Y}(T) \cap \mathcal{Q}(B)$ składowej łączącej $\mathcal{Q}(B) = C_T$ kołczanu Γ_B. Wówczas oczywiście istnieje nierozkładalny H-moduł Y w $\mathcal{Q}(H)$, dla którego $\operatorname{Hom}_H(T,Y) \simeq R$, zatem korzystając z Lematu 3.4.3 możemy wybrać nieskończoną drogę sekcyjną w $\mathcal{Q}(H)$ postaci

$$(\beta): \qquad \cdots \to Y_2 \to Y_1 \to Y_0 = Y,$$

której wszystkie translacje $\tau_H^c(\beta)$, dla $c \geqslant 0$, zawierają nieskończenie wiele preinjektywnych nośników z $\mathcal{Q}_E(H)$. Wtedy istnieje w $\mathcal{Q}(B)$ droga (Ω) postaci $\cdots \to V_1 \to V_0 = R$, gdzie $V_k = \operatorname{Hom}_H(T, Y_k)$, dla każdego $n \geqslant 0$, i ponownie z Twierdzenia Brenner-Butler wnioskujemy, że zarówno droga (Ω) jak i jej translacje $\tau_B(\Omega)$ oraz $\tau_B^2(\Omega)$ zawierają nieskończenie wiele modułów z $\mathcal{Q}_M(B)$, a więc spełnia postulowane warunki.

Załóżmy teraz, że R jest modułem ze skończonej części torsyjnej $\mathscr{X}(T) \cap \mathcal{Q}(B)$ składowej $\mathcal{Q}(B)$. W tym przypadku zachodzi izomorfizm $R \simeq \operatorname{Ext}_H^1(T,F)$, dla pewnego nierozkładalnego H-modułu beztorsyjnego F w $\mathcal{P}(H)$. Przypomnijmy również, że kołczan Γ_H zawiera co najwyżej dwie niejednorodne tuby rang $q+1$ i $p+1$, odpowiednio. Bez zmniejszenia ogólności zakładamy, że moduł E leży na ustach stabilnej tuby rangi $p+1$; w pozostałym przypadku dowód można przeprowadzić w analogiczny sposób. Niech ponadto V będzie modułem $V := E_0^{(1)}$ leżącym na ustach pozostającej tuby rangi $q+1$ oraz przyjmijmy $n := p+q+1$. Wówczas bezpośrednio z dowodu Lematu 3.4.3 wynika, że składowa $\mathcal{Q}(H)$ jest rozłączną sumą

$$\mathcal{Q}(H) = \mathcal{Q}_V(H) \cup \mathcal{Q}_{\tau_H^{-1}V}(H) \cup \cdots \cup \mathcal{Q}_{\tau_H^{-q}V}(H),$$

gdzie dla każdego $i \in \{0,\ldots,q\}$ zbiór $\mathcal{Q}_{\tau_H^{-i}V}(H) = \tau_H^{-i}\mathcal{Q}_V(H)$ składa się z modułów leżących na pewnej nieskończonej drodze sekcyjnej w $\mathcal{Q}(H)$ zawierającej nieskończenie wiele modułów z $\mathcal{Q}_E(H)$. Co więcej, wtedy zbiór $\mathcal{Q}_{\tau_H^{-q}V}(H)$ składa się z modułów leżących na nieskończonej drodze sekcyjnej postaci $\cdots \to Q_1 \to Q_0$, gdzie $Q_0 = I_a$, $Q_{p+1} = I_b$, zaś $Q_i = I_{c_i}$, dla $i \in \{1,\ldots,p\}$. Dla każdego $j \in \{0,\ldots,q-1\}$ droga $\mathcal{Q}_{\tau_H^{-j}V}(H)$ składa się wówczas ze wszystkich niezerowych modułów leżących na drodze postaci

$$\cdots \to \tau_H^{-j+q}Q_n \to \cdots \to \tau_H^{-j+q}Q_2 \to \tau_H^{-j+q}Q_0.$$

Wynika stąd również, że zachodzi dualny rozkład postprojektywnej składowej na mnogościową sumę $\mathcal{P}(H) = \mathcal{P}^V(H) \cup \mathcal{P}^{\tau_H V}(H) \cup \cdots \cup \mathcal{P}^{\tau_H^q V}(H)$ rozłącznych dróg, z których każda jest nieskończoną drogą sekcyjną zawierającą nieskończenie wiele modułów z $\mathcal{P}^E(H)$. Ponadto, wówczas droga $\mathcal{P}^{\tau_H^{-q}V}(H)$ jest postaci $\mathcal{P}^{\tau_H V}(H)$: $R_0 \to R_1 \to R_2 \to \ldots$, gdzie $R_0 = P_b$, $R_{p+1} = P_a$ i $R_i = I_{c_{p-i+1}}$, o ile $i \in \{1,\ldots,p\}$, przy czym jeśli $q \geqslant 1$, to dla $j \in \{2,\ldots,q+1\}$ droga $\mathcal{P}^{\tau_H^j V}(H)$ składa się ze wszystkich niezerowych modułów leżących na drodze

$$\tau_H^{j-1}R_0 \to \tau_H^{j-1}R_1 \to \cdots \to \tau_A^{j-1}R_m \to \ldots$$

W szczególności otrzymujemy, że dla każdego modułu V' leżącego na ustach stabilnej tuby $\mathcal{T}^1$ początek drogi $\mathcal{P}^{V'}(H)$ jest zawsze modułem projektywnym w $\operatorname{ind} H$ postaci P_j z $j = b$, dla $q = 0$ lub $j \in \{b, d_1, \ldots, d_q\}$, jeśli $q \geqslant 1$. Tak więc odpowiadający mu moduł injektywny I_j nie może być wówczas modułem prostym, lub równoważnie, $I_j/\operatorname{soc}(I_j) \neq 0$. Zauważmy teraz, że ponieważ moduł F należy do składowej $\mathcal{P}(H)$, to oczywiście F leży na nieskończonej drodze sekcyjnej $\mathcal{P}^{V'}(H)$ postaci

$$X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_t = F \to \ldots,$$

dla pewnego modułu $V' = \tau_H^u V$, $0 \leqslant u \leqslant q$, leżącego na ustach $\mathcal{T}^1$. W tym przypadku sekcyjność powyższej drogi implikuje, że $\operatorname{Hom}_H(X_j, F) \neq 0$, dla każdego $j \in \{0,\ldots,t\}$, tak więc żaden z modułów $X_0,\ldots,X_{t-1}$ nie należy do $\operatorname{add}(T)$, gdyż F jest modułem w $\mathscr{F}(T)$. Konsekwentnie wnosimy, że moduł X_0 jest modułem projektywnym $X_0 = P_j$ nie należącym do $\operatorname{add}(T)$, a więc z Twierdzenia 2.2.1 wnioskujemy istnienie ciągu prawie rozszczepialnego w $\operatorname{mod} B$ postaci:

$$(\sigma) \qquad 0 \to \operatorname{Hom}_H(T, I_j) \to \operatorname{Hom}_H(T, I_j/\operatorname{soc}(I_j)) \oplus \operatorname{Ext}^1_H(T, \operatorname{rad} P_j) \to \operatorname{Ext}^1_H(T, P_j) \to 0,$$

dla którego $I_j/\operatorname{soc}(I_j) \neq 0$. Teraz zauważmy, że odpowiednia droga $\mathcal{Q}_{V'}(H)$ w $\mathcal{Q}(H)$ jest postaci $\cdots \to Y_2 \to Y_1 \to Y_0$ oraz dla pewnego $n_0 \geqslant 0$ mamy $Y_{n_0} = I_j$, przy czym wszystkie moduły Y_n, dla $n \geqslant n_0 + 1$, nie są injektywne. W istocie $n_0 = 0$, jeśli $j \in \{d_1, \ldots, d_q\}$, zaś dla $j = b$, przyjmujemy $n_0 = p + 1$. Konkludujemy więc, że istnieje w $\mathcal{Q}(H)$ nieskończona droga sekcyjna następującej postaci

$$(\alpha): \qquad \cdots \to Y'_n = \tau_H^{-1} Y_{n_0+n+1} \to \cdots \to Y'_1 = \tau_H^{-1} Y_{n_0+2} \to Y'_0 = \tau_H^{-1} Y_{n_0+1},$$

która jest koskończoną poddrogą drogi $\mathcal{Q}_{\tau_H^{-1}V'}(H) = \tau_H^{-1}\mathcal{Q}_{V'}(H)$. Ostatecznie, ponieważ Y_{n_0+1} nie jest modułem injektywnym oraz istnieje strzałka $Y_{n_0+1} \to Y_{n_0} = I_j$ w Γ_H wnosimy, że istnieje także strzałka $Y_{n_0} = I_j \to \tau_H^{-1} Y_{n_0+1} = Y'_0$, zatem moduł Y'_0 jest wtedy modułem injektywnym $Y'_0 = I_i$, gdzie $I_i \in I_j/\operatorname{soc}(I_j)$. W szczególności z Lematu 3.4.3(b) otrzymujemy, że każda z dróg (α), $\tau_H(\alpha)$ oraz $\tau_H^2(\alpha)$ zawiera nieskończenie wiele modułów należących do $\mathcal{Q}_E(H)$, a więc ponieważ droga (α) oraz jej translacje są drogami sekcyjnymi w $\mathscr{T}(T)$, to istnieje w $\mathcal{Q}(B) \cap \mathscr{Y}(T)$ nieskończona droga sekcyjna

$$(\Sigma): \qquad \cdots \to V_n \to \cdots \to V_0$$

składająca się z modułów $V_n := \operatorname{Hom}_H(T, Y'_n)$, która zawiera, tak jak i jej translacje $\tau_B(\Sigma)$ oraz $\tau_B^2(\Sigma)$, nieskończenie wiele modułów z $\mathcal{Q}_M(B)$. Odnotujmy teraz, że dowolny moduł X_s, $s \in \{0, \ldots, t-1\}$, jest modułem w $\mathcal{P}(H) \cap \mathscr{F}(T)$, ponieważ jeśli $\operatorname{Hom}_H(T, X_s) \neq 0$, to istnieje w $\mathcal{P}(H)$ droga postaci $T_0 \to \cdots \to X_s \to X_{s+1} \to \cdots \to X_t = F$, gdzie $T_0 \in \operatorname{add}(T)$, a więc również $\operatorname{Hom}_H(T_0, F) \neq 0$, gdyż wszystkie nieprzywiedlne homomorfizmy w $\mathcal{P}(H)$ są monomorfizmami. To jest jednak niemożliwe, bowiem F jest modułem z $\mathscr{F}(T)$. Stąd wnioskujemy, że $P_j = X_0 \to \cdots \to X_t = F$ jest w istocie drogą sekcyjną w $\mathcal{P}(H) \cap \mathscr{F}(T)$, a więc wykorzystując funktor $\operatorname{Ext}^1_H(T, -)$, otrzymujemy drogę sekcyjną w $\mathcal{Q}(B)$ postaci

$$(\Pi) \qquad W_0 \to W_1 \to \cdots \to W_t,$$

gdzie $W_s = \operatorname{Ext}^1_H(T, X_s)$, dla $s \in \{0, \ldots, t\}$. Teraz, ponieważ $V_0 = \operatorname{Hom}_H(T, Y'_0) = \operatorname{Hom}_H(T, I_i) \in \operatorname{Hom}_H(T, I_j/\operatorname{soc}(I_j))$ jest składnikiem prostym środka ciągu prawie rozszczepialnego (σ), to istnieje w $\mathcal{Q}(B)$ strzałka $V_0 \to \operatorname{Ext}^1_H(T, P_j) = W_0$, i w konsekwencji również nieskończona droga postaci

$$(\Omega) \quad \cdots \to V_{n+1} \to V_n \to \cdots \to V_1 \to V_0 \to W_0 \to W_1 \to \cdots \to W_t = \operatorname{Ext}^1_H(T, F) = R.$$

Zauważmy ostatecznie, że powyższa droga jest również drogą sekcyjną. Faktycznie, ponieważ drogi (Σ) oraz (Π) są sekcyjne, wystarczy pokazać, że $V_1 \neq \tau_B W_0$ oraz $V_0 \neq \tau_B W_1$. Jeśli $V_1 = \tau_B W_0$, to zachodzi izomorfizm $\operatorname{Hom}_H(T, Y'_1) \simeq \operatorname{Hom}_H(T, I_j)$, i wówczas $I_j \simeq Y'_1 = \tau_H^{-1} Y_{n_0+2}$, skąd otrzymujemy $Y_{n_0+2} = \tau_H I_j = \tau_H Y_{n_0}$, co prowadzi do sprzeczności, gdyż droga $\cdots \to Y_1 \to Y_0$ jest sekcyjna. Zatem $V_1 \neq \tau_B W_0$. Podobnie, w przypadku gdy zachodzi izomorfizm $V_0 \simeq \tau_B W_1$ wnioskujemy, że $V_0 = \operatorname{Hom}_H(T, I_i)$ nie jest modułem injektywnym, zatem $\operatorname{Ext}^1_H(T, X_1) = W_1 = \tau_B^{-1} V_0 \simeq \operatorname{Ext}^1_H(T, P_i)$, a więc zachodzi izomorfizm $X_1 \simeq P_i$. Z drugiej strony, $X_0 = P_j$, dla pewnego $j \in \{b, d_1, \ldots, d_q\}$, przy czym jeśli $X_0 = P_{d_l}$, $l \in \{1, \ldots, q\}$, to $X_1 = \tau_H^{-1} P_{d_{l+1}}$, gdzie $d_{q+1} := b$, i wtedy X_1 nie jest modułem projektywnym, zatem $X_0 = P_b$. Wówczas jednak $X_1 = P_i = P_{c_p}$, czyli $Y_{p+2} = \tau_H Y'_0 = \tau_H I_i = \tau_H I_{c_p}$, co prowadzi do sprzeczności, bowiem $Y_{p+1} = Y_{n_0} = I_j = I_b$ leży na drodze $\mathcal{Q}_{V'}(H)$, a więc Y_{p+2} musi być modułem postaci $Y_{p+2} = \tau_H I_{d_q}$ (jeśli $q = 0$, to $d_q := a$). Otrzymana sprzeczność pokazuje, że faktycznie $V_0 \neq \tau_B W_1$, i w konsekwencji wnosimy, że droga (Ω) jest sekcyjna. Wynika stąd ostatecznie, że dla każdego $k \geqslant 0$ zachodzi również $\operatorname{Hom}_B(V_k, R) = \operatorname{Hom}_B(V_k, W_t) \neq 0$, na mocy Twierdzenia 1.5.2, zatem droga (Ω) spełnia żądane warunki.

Pokazaliśmy zatem, że w obu przypadkach istnieje droga (Ω) o odpowiednich własnościach, tak więc dowód możemy w tym momencie uznać za zakończony. $\square$

Rozdział 4

· Kategorie modułów ze skończonymi cyklami ·

Rozdział niniejszy zamyka zasadniczą część rozprawy, w której konsekwentnie przygotowywane są różne narzędzia i niezbędne koncepcje wykorzystane w istotny sposób w ostatnim rozdziale, gdzie prezentujemy dowody głównych twierdzeń. Poddana poniżej szczegółowej analizie klasa algebr nazywanych *algebrami cyklowo skończonymi* jest dla nas ważna przede wszystkim ponieważ jest to klasa algebr, dla której rozwiązujemy główne problemy rozprawy. Co więcej, kategorie modułów ze skończonymi cyklami stanowią same w sobie dość interesujący obiekt badań, któremu poświęcono wiele publikacji. Przedstawiamy tu przekrojowe zestawienie podstawowych własności tej klasy algebr, w tym między innymi, podajemy nieodzowny przy dowodzie Twierdzenia A opis struktury tak zwanych, algebr cyklowo skończonych *półregularnego typu*, które zostaną w pełni zdeterminowane przez ściśle określone ciągi oswojonych ilorazowych algebr quazi-odwróconych typu kanonicznego (patrz Twierdzenie 4.3.8). Rozdział ten składa się z trzech podrozdziałów, w których kolejno, omawiamy pojęcie modułu cyklowo skończonego 4.1 oraz następnie podajemy najważniejsze wyniki dotyczące struktury kategorii modułów ze skończonymi cyklami w 4.2, po czym zamykamy nasze rozważania sekcją 4.3 poświęconą opisowi klasy algebr cyklowo skończonych typu półregularnego.

4.1 Moduły cyklowo skończone ·

Pojęcie modułu cyklowo skończonego jest pojęciem pomocniczym wprowadzonym przez P. Malickiego, J. A. de la Penę i A. Skowrońskiego przy okazji badania skończonych cykli nierozkładalnych modułów, którym autorzy ci poświęcili przekrojową publikację [26]. Przypomnijmy jedynie, że cykl w $\operatorname{ind} A$ nazywa się *skończonym*, o ile wszystkie homomorfizmy na tym cyklu są skończone, to znaczy nie należą do nieskończonego radykału Jacobsona $\operatorname{rad}_A^\infty$ kategorii $\operatorname{ind} A$. Za cytowanym artykułem [26] moduł M w $\operatorname{ind} A$ przyjmujemy nazywać *modułem cyklowo skończonym*, o ile dowolny cykl w $\operatorname{ind} A$ przechodzący przez M jest skończony. W niniejszej sekcji prezentujemy najważniejsze wyniki związane z różnymi własnościami modułów cyklowo skończonych.

Rozpocznijmy od następującego stwierdzenia opisującego pewne szczególne własności półregularnych składowych w kołczanach Auslandera-Reiten algebr A, dla których wszystkie moduły w $\operatorname{ind} A$ są cyklowo skończone.

Stwierdzenie 4.1.1. *Niech A będzie algebrą, dla której wszystkie moduły w $\operatorname{ind} A$ są cyklowo skończone. Wówczas każda półregularna składowa kołczanu Γ_A jest uogólniona standardowa. Ponadto zachodzą następujące warunki.*

(1) Jeżeli $\mathcal{C}$ nie ma zorientowanych cykli, to $\mathcal{C}$ jest postprojektywną lub preinjektywną składową typu Euklidesa.

(2) Jeśli $\mathcal{C}$ zawiera zorientowany cykl, to $\mathcal{C}$ jest tubą promieniową lub kopromieniową.

dowód · Tezy niniejszego twierdzenia wynikają bezpośrednio z argumentów analogicznych do przedstawionych w dowodzie [43, Proposition 3.3]. □

Stwierdzenie sformułowane poniżej pochodzi ze wspominanej pracy [26, patrz Proposition 2.2] i stanowi ważną własność nośników półregularnych tub w kołczanach Auslandera-Reiten algebr cyklowo skończonych, która zostanie istotnie wykorzystana w dowodach pewnych wyników prezentowanych w podrozdziale 4.3.

Stwierdzenie 4.1.2. *Niech A będzie algebrą, zaś $\mathcal{C}$ dowolną półregularną tubą w Γ_A. Wówczas jeżeli wszystkie moduły w składowej $\mathcal{C}$ są cyklowo skończone, to nośnik* $\operatorname{supp}(\mathcal{C})$ *jest wypukłą podkategorią $A = A^*$.*

Przedstawiamy następnie pewną elementarną, lecz często wykorzystywaną własność kategorii modułów ze skończonymi cyklami, którą formułujemy w postaci następującego technicznego lematu.

Lemat 4.1.3. *Niech A będzie algebrą, B dowolną algebrą ilorazową $B = A/I$ algebry A, zaś $\mathcal{D}$ ustaloną składową cykliczną kołczanu Γ_B. Załóżmy również, że wszystkie moduły w $\mathcal{D}$ są cyklowo skończone w* $\operatorname{ind} A$. *Wówczas istnieje składowa $\mathcal{D}(\Gamma_A)$ kołczanu Γ_A zawierająca wszystkie moduły z $\mathcal{D}$. W szczególności, wtedy wszystkie moduły z $\mathcal{D}$ zawierają się w jednej spójnej składowej $\mathcal{D}({}_c\Gamma_A)$ części cyklicznej ${}_c\mathcal{D}(\Gamma_A)$ składowej $\mathcal{D}(\Gamma_A)$.*

Dowód · Teza wynika z faktu, że dowolne dwa moduły X, Y w $\operatorname{ind} B$ leżą w jednej składowej cyklicznej $\mathcal{D}$ wtedy i tylko wtedy, gdy leżą na wspólnym cyklu w Γ_B na mocy Lematu 1.4.10, a więc istnieje wtedy również cykl $X \to \cdots \to Y \to \cdots \to X$ odwzorowań nieprzywiedlnych w $\operatorname{ind} B$, który składa się oczywiście z odwzorowań należących do $\operatorname{rad}_A \setminus \operatorname{rad}_A^\infty$, ponieważ przechodzi przez moduły z $\mathcal{D}$, a te są cyklowo skończone w $\operatorname{ind} A$. Zatem jasne jest, że cykl ten indukuje cykl w Γ_A. □

Jeśli mamy do czynienia z rodziną $\mathcal{T}^B = (\mathcal{T}^B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ półregularnych tub w Γ_A oraz $\mathcal{D}$ jest cykliczną składową w Γ_B postaci $\mathcal{D} = {}_c\mathcal{T}^B_\lambda$, gdzie $\lambda \in \Lambda$, to składową $\mathcal{D}(\Gamma_A)$ opisaną w powyższym lemacie oznaczać będziemy symbolem $\mathcal{T}^A_\lambda(B)$ lub czasem po prostu $\mathcal{T}^A_\lambda$. W tej sytuacji będziemy także często stosować oznaczenia $\mathcal{T}^A(B)$ lub $\mathcal{T}^A$ dla rodziny składowych $\mathcal{T}^A(B) = (\mathcal{T}^A_\lambda(B))_{\lambda\in\Lambda}$ kołczanu Γ_A. Ponadto wtedy odpowiednią składową spójności $\mathcal{D}({}_c\Gamma_A)$ kołczanu ${}_c\mathcal{T}^A_\lambda(B)$ zawierającą wszystkie moduły z $\mathcal{D}$ oznaczamy czasami symbolem $\mathcal{C}^A_\lambda(B)$.

Poniższe stwierdzenie jest konsekwencją dalece nietrywialnych wyników opublikowanych we wspominanym artykule [26].

Stwierdzenie 4.1.4. *Niech A będzie algebrą, zaś Γ dowolną cykliczną składową kołczanu Γ_A. Załóżmy ponadto, że wszystkie moduły w Γ są cyklowo skończone. Wówczas* $\operatorname{Supp}_A(\Gamma) = A(\Gamma)$.

Dowód · Patrz [26, Theorem 1.1 oraz 1.2]. □

Odnotujmy dalej następujący lemat opisujący pewne istotne własności wyróżniające nieskończone składowe cykliczne składające się z modułów cyklowo skończonych.

Lemat 4.1.5. *Niech A będzie algebrą, zaś Γ nieskończoną cykliczną składową w Γ_A taką, że wszystkie moduły w Γ są cyklowo skończone w* $\operatorname{ind} A$. *Ponadto przypuśćmy, że C jest pewną oswojoną utajoną algebrą ilorazową algebry A oraz oznaczmy przez $(\mathcal{T}^C_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ rodzinę wszystkich stabilnych tub w kołczanie Γ_C. Wówczas istnieje co najwyżej skończenie wiele $\lambda \in \Lambda$, dla których $\mathcal{C}^A_\lambda(C) = \Gamma$.*

Dowód · Teza jest konsekwencją wyników cytowanego wyżej artykułu [26]. □

Wykorzystując dodatkowo pewne nietrywialne wyniki z [26] dotyczące struktury kategorii modułów algebr cyklowo skończonych można z powyższego wywieść również następujący przydatny wniosek.

Wniosek 4.1.6. *Niech A będzie algebrą cyklowo skończoną, zaś $\mathcal{C}$ dowolną składową w Γ_A. Wówczas dla każdej oswojonej utajonej algebry ilorazowej C algebry A istnieje co najwyżej skończenie wiele stabilnych tub $\mathcal{T}^C_\lambda$ w Γ_C takich, że stowarzyszona cykliczna składowa $\mathcal{C}^A_\lambda(C)$ kołczanu Γ_A jest składową spójności części cyklicznej ${}_c\mathcal{C}$.*

Ostatecznie odnotujmy jeszcze następujące stwierdzenie pochodzące z pracy [26], które daje pewną nietrywialną wiedzę o rozmieszczeniu nieskończonych rodzin modułów cyklowo skończonych w spójnych składowych kołczanów ${}_l\Gamma_A$ oraz ${}_r\Gamma_A$.

Stwierdzenie 4.1.7. *Niech A będzie algebrą, zaś $\mathcal{C}$ dowolną składową w Γ_A. Załóżmy ponadto, że $\mathscr{D}$ jest pewną nieskończoną rodziną modułów cyklowo skończonych z $\mathcal{C}$. Wówczas zachodzi jeden z poniższych warunków.*

(a) *Stabilna część* $_sC$ *składowej* C *zawiera stabilną tubę* Γ *zawierającą nieskończenie wiele modułów z* $\mathscr{D}$*.*

(b) *Istnieje spójna składowa* Γ *w* $_lC$*, która zawiera zorientowany cykl oraz nieskończenie wiele modułów z* $\mathscr{D}$ *należących do części cyklicznej* $_c\Gamma$*.*

(c) *Istnieje spójna składowa* Γ *w* $_rC$*, która zawiera zorientowany cykl oraz nieskończenie wiele modułów z* $\mathscr{D}$ *należących do części cyklicznej* $_c\Gamma$*.*

DOWÓD · Po dowód odsyłamy do źródłowego artykułu [26, patrz Proposition 2.7]. □

4.2 Algebry cyklowo skończone ·

W niniejszej sekcji omawiamy różne własności kategorii modułów algebr cyklowo skończonych oraz jej związki z innymi znanymi klasami algebr. Przypominamy, że algebra A nazywana jest *cyklowo skończoną*, o ile wszystkie moduły w $\operatorname{ind} A$ są cyklowo skończone. Odnotujmy, że oczywiście dowolna algebra ilorazowa algebry cyklowo skończonej jest również cyklowo skończona.

Rozpocznijmy od następującego bezpośredniego wniosku z ostatniego stwierdzenia poprzedniego podrozdziału.

Wniosek 4.2.1. *Niech* A *będzie algebrą cyklowo skończoną,* C *składową w* Γ_A*, a* $\mathcal{D}$ *jest nieskończoną spójną składową części cyklicznej* $_cC$*. Wówczas istnieje spójna składowa* Γ *w* $_lC$*, bądź w* $_rC$*, której część cykliczna* $_c\Gamma$ *zawiera nieskończenie wiele modułów z* $\mathcal{D}$*. Ponadto, wówczas wiadomo również, że* Γ *jest jest lewostronnie lub prawostronnie stabilnym podkołczanem* C *zawierającym zorientowany cykl.*

DOWÓD · Zauważmy jedynie, że ponieważ A jest z założenia algebrą cyklowo skończoną, to wnosimy, że wszystkie moduły w $\operatorname{ind} A$ są cyklowo skończone, zatem w szczególności, jeśli $\mathcal{D}$ jest nieskończoną składową w $_cC$, to rodzina $\mathscr{D}$ wszystkich modułów z $\mathcal{D}$ jest nieskończoną rodziną cyklowo skończonych modułów w C, i teza wynika natychmiast ze Stwierdzenia 4.1.7. □

Poniższe twierdzenie pokazuje, że oswojone algebry utajone oraz algebry tubularne to dokładnie wszystkie algebry cyklowo skończone, których kołczan Auslandera-Reiten zawiera wierną stabilną tubę.

Twierdzenie 4.2.2. *Dla dowolnej algebry* A *następujące warunki są równoważne.*

(i) *A jest cyklowo skończona oraz istnieje wierna stabilna tuba w* Γ_A*.*

(ii) *A jest albo oswojoną algebrą utajoną albo algebrą tubularną.*

DOWÓD · Dowód tego twierdzenia można znaleźć w [43, Theorem 4.1]. □

Następne twierdzenie przedstawia natomiast nieco inną charakteryzację klasy oswojonych algebr utajonych wśród algebr cyklowo skończonych, i pochodzi również z pracy [43].

Twierdzenie 4.2.3. *Niech* A *będzie algebrą. Następujące stwierdzenia są równoważne.*

(i) *A jest algebrą cyklowo skończoną minimalnego nieskończonego reprezentacyjnego typu.*

(ii) *A jest oswojoną algebrą utajoną.*

DOWÓD · Teza wynika natychmiast z dowodu przeprowadzonego w [43, Corollary 4.4]. □

Uwaga · Wspominamy jedynie, że jeśli K-algebra A nad dowolnym ciałem algebraicznie domkniętym K jest cyklowo skończona, to A jest algebrą oswojonego typu reprezentacyjnego (patrz [1]) ·

Przypomnijmy także poniższą charakteryzację cyklowo skończonych algebr quazi-odwróconych, która jest bezpośrednią konsekwencją Twierdzenia 2.5.4 oraz charakteryzacji oswojonych algebr quazi-odwróconych udowodnionej przez A. Skowrońskiego w pracy [44].

Twierdzenie 4.2.4. *Niech A będzie dowolną K-algebrą. Wówczas następujące warunki są równoważne.*

(i) A jest oswojoną algebrą quazi-odwróconą kanonicznego typu.

(ii) A jest cyklowo skończoną algebrą quazi-odwróconą typu kanonicznego.

(iii) A jest algebrą cyklowo skończoną oraz kołczan Γ_A zawiera separującą rodzinę półregularnych tub.

(iv) A jest algebrą cyklowo skończoną oraz Γ_A zawiera silnie separującą rodzinę półregularnych tub.

Odnotujmy jeszcze następujące stwierdzenie opisujące pewne szczególne własności oswojonych utajonych algebr ilorazowych algebr cyklowo skończonych, które jest konsekwencją kilku nietrywialnych wyników uzyskanych w pracy [26]. Dowód można znaleźć w artykule [4, patrz Proposition 2.9].

Stwierdzenie 4.2.5. *Niech A będzie algebrą cyklowo skończoną, zaś C dowolną oswojoną utajoną algebrą ilorazową algebry A. Wówczas*

(1) Prawie wszystkie stabilne tuby w Γ_C są stabilnymi tubami w Γ_A.

(2) Jeśli $\mathcal{T}$ jest stabilną tubą z Γ_C, która jest również składową Γ_A, to $C = A(\mathcal{T}) = \mathrm{Supp}_A(\mathcal{T})$.

(3) Istnieje wypukły idempotent e_C w A taki, że C jest izomorficzna z algebrą e_CAe_C.

Odnotujmy ostatecznie następujący ważny wynik dotyczący ilorazowych algebr odwróconych $B = A/I$ dowolnej algebry cyklowo skończonej A, które pochodzą od pewnych ściśle określonych podkołczanów z translacją w składowych kołczanu Γ_A. To twierdzenie zostało udowodnione w interesującej pracy [25], gdzie wykorzystano je do otrzymania dość mocnych oszacowań na liczbę parami nieizomorficznych nierozkładalnych składników prostych w środkach ciągów prawie rozszczepialnych w kategoriach modułów algebr cyklowo skończonych.

Twierdzenie 4.2.6. *Niech A będzie algebrą cyklowo skończoną, zaś $\mathcal{C}$ dowolną składową w Γ_A. Niech ponadto $\mathcal{D}$ będzie pewnym (spójnym) acyklicznym lewostronnie stabilnym podkołczanem z translacją w $\mathcal{C}$ zamkniętym na branie poprzedników w Γ_A. Wówczas istnieje algebra dziedziczna H typu Euklidesa oraz moduł odwracający T w $\mathrm{mod}\, H$ bez niezerowych preinjektywnych składników prostych, dla których spełnione są następujące warunki.*

(1) Algebra odwrócona typu Euklidesa $B := \mathrm{End}_H(T)$ jest algebrą ilorazową $B = A/\operatorname{Ann}\mathcal{D}$ algebry A.

(2) Część beztorsyjna $\mathcal{Y}(T) \cap \mathcal{C}_T$ składowej łączącej $\mathcal{C}_T$ w Γ_B, wyznaczonej przez T, jest pełnym podkołczanem z translacją kołczanu $\mathcal{D}$ zamkniętym na branie poprzedników.

Dowód · Po dowód tego twierdzenia odsyłamy do wspominanej pracy [25, patrz Theorem 2.2]. □

4.3 Algebry cyklowo skończone typu półregularnego ·

W zamykającej niniejszy rozdział sekcji opisujemy niezbędną dla dalszych rozważań szczególną klasę algebr cyklowo skończonych, których kołczan Auslandera-Reiten zawiera jedynie składowe półregularne, i które nazywane są z tego względu algebrami cyklowo skończonymi *półregularnego typu*. Pierwsza część tego podrozdziału poświęcona jest omówieniu szerokiej klasy przykładów takich algebr, stowarzyszonych ze ściśle określonymi ciągami oswojonych algebr quazi-odwróconych kanonicznego typu. Dopełniamy nasze rozważania pokazując dalej, że algebry tej postaci w istocie wyczerpują wszystkie algebry cyklowo skończone półregularnego typu z dokładnością do izomorfizmu algebr.

Rozpoczynamy od omówienia niezbędnego dalej pojęcia zgodnego ciągu oswojonych algebr quazi-odwróconych kanonicznego typu. Niech $\mathbb{B} = (B_1, \dots, B_n)$ będzie ciągiem oswojonych algebr quazi-odwróconych kanonicznego typu. Przypomnijmy, iż każda algebra B_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, jest wtedy oswojonym półregularnym gałęziowym powiększeniem pewnej oswojonej algebry utajonej, co oznacza, że zarówno algebra $B_i^{(l)}$ jak i algebra $B_i^{(r)}$ jest albo algebrą odwróconą typu Euklidesa albo algebrą tubularną (patrz Twierdzenia 2.5.4 oraz 4.2.4). Powiemy, że ciąg $\mathbb{B}$ jest *zgodny* wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 1$ lub $n \geqslant 2$ i spełnione są następujące warunki.

1) Dla dowolnego $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, zachodzi równość $B_i^{(r)} = B_{i+1}^{(l)}$.

2) Jeśli $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, to algebra $B_i^{(r)} = B_{i+1}^{(l)}$ jest algebrą tubularną.

Każdemu ciągowi zgodnemu $\mathbb{B}$ oswojonych algebr quazi-odwróconych typu kanonicznego można jednoznacznie przyporządkować algebrę $A(\mathbb{B})$, którą konstruujemy przy użyciu iteracji operacji sumy włóknistej algebr, zdefiniowanej i omówionej w 1.2. W istocie, jeśli $\mathbb{B} = (B_1)$, to przyjmujemy $A(\mathbb{B}) := B_1$, zaś dla $n \geqslant 2$, algebra $A(\mathbb{B})$ stowarzyszona z ciągiem $\mathbb{B}$ jest zdefiniowana jako następująca (iterowana) suma włóknista algebr

$$B_1 \underset{B_1^{(r)}}{\sqcup} B_2 \underset{B_2^{(r)}}{\sqcup} \ldots \underset{B_{n-2}^{(r)}}{\sqcup} B_{n-1} \underset{B_{n-1}^{(r)}}{\sqcup} B_n = B_1 \underset{B_2^{(l)}}{\sqcup} B_2 \underset{B_3^{(l)}}{\sqcup} \ldots \underset{B_{n-1}^{(l)}}{\sqcup} B_{n-1} \underset{B_n^{(l)}}{\sqcup} B_n.$$

Będziemy czasami również rozważać częściowe sumy włókniste postaci

$$A(\mathbb{B})^{(j)} = B_1 \underset{B_1^{(r)}}{\sqcup} B_2 \underset{B_2^{(r)}}{\sqcup} \ldots \underset{B_{j-1}^{(r)}}{\sqcup} B_j = B_1 \underset{B_2^{(l)}}{\sqcup} \ldots \underset{B_j^{(l)}}{\sqcup} B_j,$$

oraz dualnie, postaci

$$A(\mathbb{B})_{(j)} = B_j \underset{B_j^{(r)}}{\sqcup} B_{j+1} \underset{B_{j+1}^{(r)}}{\sqcup} \ldots \underset{B_{n-1}^{(r)}}{\sqcup} B_n = B_j \underset{B_{j+1}^{(l)}}{\sqcup} \ldots \underset{B_n^{(l)}}{\sqcup} B_n,$$

dla $j \in \{1, \ldots, n\}$. W szczególności, $A(\mathbb{B})^{(1)} = B_1$, $A(\mathbb{B})_{(n)} = B_n$ oraz $A(\mathbb{B})^{(n)} = A(\mathbb{B})_{(1)} = A(\mathbb{B})$.

Udowodnijmy teraz następujący wstępny techniczny lemat.

Lemat 4.3.1. *Niech $\mathbb{B}$ będzie zgodnym ciągiem $(B_1, \ldots, B_n)$ oswojonych algebr quazi-odwróconych typu kanonicznego, $n \geqslant 2$, zaś $A = A(\mathbb{B})$ algebrą stowarzyszoną z $\mathbb{B}$. Wówczas zachodzą następujące stwierdzenia.*

(1) Dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$, algebra B_i jest wypukłą podkategorią w $A(\mathbb{B})$.

(2) Dla dowolnego $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, algebra $A(\mathbb{B})^{(j+1)}$ jest ${}_s(\mathcal{T}_\infty^{B_j^{(r)}})$-tubularnym rozszerzeniem algebry $A(\mathbb{B})^{(j)}$.

(3) Dualnie, dla $j \in \{2, \ldots, n\}$ algebra $A(\mathbb{B})_{(j-1)}$ jest ${}_s(\mathcal{T}_0^{B_j^{(l)}})$-tubularnym korozszerzeniem algebry $A(\mathbb{B})_{(j)}$.

Dowód · Oczywiście na mocy Lematu 1.2.2, dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$, algebra B_i jest wypukłą podkategorią w $A(\mathbb{B})_{(i)} = B_i \sqcup A(\mathbb{B})_{(i+1)}$, a więc również wypukłą podkategorią w $A = A(\mathbb{B})^{(i-1)} \sqcup A(\mathbb{B})_{(i)}$, co dowodzi (1). Dalszą część dowodu przeprowadzimy indukcyjnie ze względu na $n \geqslant 2$. Zauważmy, że dla $n = 2$ warunki (2)-(3) są spełnione na mocy Lematu 2.5.7. Załóżmy dalej, że $n \geqslant 3$ oraz oznaczmy przez B' algebrę $A(\mathbb{B})^{(n-1)}$, zaś przez B'' algebrę $A(\mathbb{B})_{(2)}$. Ponadto mamy wówczas również zgodny ciąg $\bar{\mathbb{B}} = (B_2, \ldots, B_{n-1})$ długości $n-2 \geqslant 1$, którego algebrę $A(\bar{\mathbb{B}})$ oznaczać będziemy przez B. Korzystając teraz założenia indukcyjnego dla algebr B' oraz B'' otrzymujemy, że:

- dla każdego $j \in \{1, \ldots, n-2\}$ algebra $A(\mathbb{B})^{(j+1)}$ jest $({}_s\mathcal{T}_\infty^{B_j^{(r)}})$-tubularnym rozszerzeniem algebry $A(\mathbb{B})^{(j)}$ oraz algebra B' jest $({}_s\mathcal{T}_0^{B_2^{(l)}})$-tubularnym korozszerzeniem algebry $B = A(\bar{\mathbb{B}})$;
- dla dowolnego $j \in \{3, \ldots, n\}$ algebra $A(\mathbb{B})_{(j-1)}$ jest $({}_s\mathcal{T}_0^{B_j^{(l)}})$-tubularnym korozszerzeniem algebry $A(\mathbb{B})_{(j)}$ oraz algebra B'' jest $({}_s\mathcal{T}_\infty^{B_{n-1}^{(r)}})$-tubularnym rozszerzeniem algebry B.

Wystarczy teraz zauważyć, w tej sytuacji kołczan Γ_B posiada rodzinę $\mathcal{T}_0^B := \mathcal{T}_0^{B_2^{(l)}}$ tub promieniowych oraz rodzinę $\mathcal{T}_\infty^B := \mathcal{T}_\infty^{B_{n-1}^{(r)}}$ tub kopromieniowych, przy czym rodzina $\mathcal{T}_\infty^B$ jest rodziną składowych w $\Gamma_{B'}$ oraz $\mathcal{T}_0^B$ rodziną składowych w $\Gamma_{B''}$. W konsekwencji, stosując teraz Lemat 2.5.8 wnioskujemy, że algebra $B' \sqcup_B B''$ jest $({}_s\mathcal{T}_\infty^B)$-tubularnym rozszerzeniem algebry $B' = A(\mathbb{B})^{(n-1)}$ i jednocześnie $(\mathcal{T}_0^B)$-tubularnym korozszerzeniem algebry $B'' = A(\mathbb{B})_{(2)}$. Ostatecznie nietrudno wykazać, że zachodzi naturalny izomorfizm algebr $B' \sqcup_B B'' = (B_1 \sqcup_{B_1^{(r)}} A(\bar{\mathbb{B}})) \sqcup_{A(\bar{\mathbb{B}})} (A(\bar{\mathbb{B}}) \sqcup_{B_n^{(l)}} B_n) \cong B_1 \sqcup_{B_1^{(r)}} A(\bar{\mathbb{B}}) \sqcup_{B_{n-1}^{(r)}} B_n = A(\mathbb{B}) = A$, co dowodzi prawdziwości tez (2) oraz (3) w pozostałych przypadkach $j = n - 1$ oraz $j = 2$, odpowiednio. □

Poniższe twierdzenie daje pełen opis kształtu wszystkich składowych kołczanu Auslandera-Reiten $\Gamma_{A(\mathbb{B})}$ algebr $A(\mathbb{B})$ stowarzyszonych ze zgodnymi ciągami $\mathbb{B}$ oswojonych algebr quazi-odwróconych typu kanonicznego. W szczególności otrzymujemy, że wszystkie algebry tej postaci są algebrami cyklowo skończonymi półregularnego typu. W poniższym sformułowaniu, w odniesieniu do algebr quazi-odwróconych oraz tubularnych, będziemy swobodnie posługiwać się oznaczeniami wprowadzonymi w 2.5 oraz 2.4.

Twierdzenie 4.3.2. *Niech $\mathbb{B}$ będzie zgodnym ciągiem $(B_1, \dots, B_n)$ oswojonych algebr quazi-odwróconych typu kanonicznego, zaś $A = A(\mathbb{B})$ stowarzyszoną sumą włóknistą. Wówczas $A(\mathbb{B})$ jest algebrą cyklowo skończoną półregularnego typu oraz kołczan Γ_A algebry A jest postaci*

$$\Gamma_A = \mathcal{P}^{\mathbb{B}} \cup \Big(\bigcup_{q \in \bar{\mathbb{Q}}_1^n} \mathcal{T}_q^{\mathbb{B}}\Big) \cup \mathcal{Q}^{\mathbb{B}},$$

gdzie $\bar{\mathbb{Q}}_1^n = \mathbb{Q} \cap [1, n]$ oraz

(1) $\mathcal{P}^{\mathbb{B}} = \mathcal{P}^{B_1^{(l)}}$ jest jedyną składową postprojektywną $\mathcal{P}^{\mathbb{B}} = \mathcal{P}(B_1^{(l)})$ w Γ_A, gdy $B_1^{(l)}$ jest algebrą odwróconą (typu Euklidesa), zaś jeśli $B_1^{(l)}$ jest algebrą tubularną, to

$$\mathcal{P}^{\mathbb{B}} = \mathcal{P}^{B_1^{(l)}} = \mathcal{P}(B_1^{(l)}) \cup \mathcal{T}_0^{B_1^{(l)}} \cup \Big(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}^+} \mathcal{T}_q^{B_1^{(l)}}\Big)$$

oraz $\mathcal{P}(B_1^{(l)})$ jest jedyną postprojektywną składową w Γ_A.

(2) $\mathcal{Q}^{\mathbb{B}} = \mathcal{Q}^{B_n^{(r)}}$ jest jedyną składową preinjektywną $\mathcal{Q}(B_n^{(r)})$ w Γ_A, gdy $B_n^{(r)}$ jest algebrą odwróconą, zaś jeżeli $B_n^{(r)}$ jest algebrą tubularną, to

$$\mathcal{Q}^{\mathbb{B}} = \mathcal{Q}^{B_n^{(r)}} = \Big(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}^+} \mathcal{T}_q^{B_n^{(r)}}\Big) \cup \mathcal{T}_\infty^{B_n^{(r)}} \cup \mathcal{Q}(B_n^{(r)}),$$

przy czym $\mathcal{Q}(B_n^{(r)})$ to jedyna preinjektywna składowa w Γ_A.

(3) Dla każdego $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}_1^n$, rodzina $\mathcal{T}_\alpha^{\mathbb{B}}$ jest rodziną $(\mathcal{T}_{\alpha,\lambda}^{\mathbb{B}})_{\lambda \in \Lambda_\alpha}$ parami ortogonalnych uogólnionych standardowych półregularnych tub w Γ_A. Dla $\alpha \notin \{1, \dots, n\}$ rodzina $\mathcal{T}_\alpha^{\mathbb{B}}$ składa się wyłącznie ze stabilnych tub, natomiast jeśli $\alpha = r \in \{1, \dots, n\}$, to $\mathcal{T}_\alpha^{\mathbb{B}}$ jest rodziną $\mathcal{T}_\alpha^{\mathbb{B}} = \mathcal{T}^{B_r}$ półregularnych tub w Γ_{B_r}.

(4) Dla każdego $q \in \bar{\mathbb{Q}}_1^n$, rodzina $\mathcal{T}_q^{\mathbb{B}}$ jest rodziną składowych Γ_A prawie silnie separującą $\mathcal{P}^{\mathbb{B}} \cup \Big(\bigcup_{1 \leqslant p < q} \mathcal{T}_p^{\mathbb{B}}\Big)$ od $\Big(\bigcup_{q < p \leqslant n} \mathcal{T}_p^{\mathbb{B}}\Big) \cup \mathcal{Q}^{\mathbb{B}}$ w $\operatorname{mod} A$.

Dowód · Ustalmy najpierw dla uproszczenia notacji pewne pomocnicze oznaczenia. Dla dowolnych dodatnich liczb naturalnych $i < j \leqslant \infty$, przez $\bar{\mathbb{Q}}_i^j$ oraz odpowiednio $\mathbb{Q}_i^j$, oznaczać będziemy domknięty przedział $\mathbb{Q} \cap [i, j]$, i odpowiednio otwarty przedział $\mathbb{Q} \cap (i, j)$, liczb wymiernych. Dalej, dla każdego $i \in \{1, \dots, n\}$, symbolem $\mathcal{P}^{\mathbb{B}}(i)$ lub $\mathcal{Q}^{\mathbb{B}}(i)$ oznaczamy rodzinę składowych $\mathcal{P}^{B_i} = \mathcal{P}^{B_i^{(l)}}$ lub $\mathcal{Q}^{B_i} = \mathcal{Q}^{B_i^{(r)}}$ w Γ_{B_i}, odpowiednio. Ponadto $\mathcal{T}_i^{\mathbb{B}}$ oznaczać będzie zawsze rodzinę $\mathcal{T}_i^{\mathbb{B}} = \mathcal{T}^{B_i}$ półregularnych tub w Γ_{B_i} silnie separującą $\mathcal{P}_i^{\mathbb{B}}$ od $\mathcal{Q}_i^{\mathbb{B}}$ w $\operatorname{mod} B_i$. Kładziemy również $\mathcal{P}^{\mathbb{B}} := \mathcal{P}^{\mathbb{B}}(1)$, i dualnie $\mathcal{Q}^{\mathbb{B}} := \mathcal{Q}^{\mathbb{B}}(n)$. Co więcej, rozważamy ustalone bijekcje zbiorów liniowo uporządkowanych

$$\mathbb{Q}_i^{i+1} \to \mathbb{Q}^+, \quad \text{dla wszystkich } i \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Ponadto zauważmy, że jeżeli $n \geqslant 2$, to dla dowolnego $i \in \{1, \dots, n-1\}$, algebra $B_i^{(r)} = B_{i+1}^{(l)}$ jest algebrą tubularną na mocy zgodności ciągu $\mathbb{B}$, zatem wykorzystując powyższe bijekcje możemy dla dowolnego $q \in \mathbb{Q}_i^{i+1}$ poprawnie określić rodzinę $\mathcal{T}_q^{\mathbb{B}}$ stabilnych tub $\mathcal{T}_q^{\mathbb{B}} := \mathcal{T}_q^{B_i^{(r)}} = \mathcal{T}_q^{B_{i+1}^{(l)}}$, która jest rodziną składowych zarówno w Γ_{B_i}, jak i w $\Gamma_{B_{i+1}}$. Przypominamy ostatecznie, że dla każdego podzbioru $O \subset [1, n]$ symbolem $\mathcal{T}_O^{\mathbb{B}}$ oznaczać będziemy rozłączną sumę rodzin $\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap O} \mathcal{T}_q^{\mathbb{B}}$ indeksowanych liczbami wymiernymi z O. Niech dalej $\mathcal{T}^{\mathbb{B}}$ oznacza rodzinę $\mathcal{T}_{[1,n]}^{\mathbb{B}}$. Udowodnimy poniżej stosując indukcję ze względu na długość n zgodnego ciągu $\mathbb{B}$, że algebra $A = A(\mathbb{B})$ jest algebrą cyklowo skończoną oraz $\Gamma_A = \mathcal{P}^{\mathbb{B}} \cup \mathcal{T}^{\mathbb{B}} \cup \mathcal{Q}^{\mathbb{B}}$

spełnia warunki (1)-(4). Dla $n = 1$ algebra $A = A(\mathbb{B})$ jest oswojoną algebrą quazi-odwróconą $A = B_1$ kanonicznego typu, zatem teza jest w tym przypadku oczywistą konsekwencją Twierdzenia 2.5.5.

Załóżmy dalej, że $n \geqslant 2$. Wprost z definicji zgodności wnosimy, że $\mathbb{B}' := (B_1, \dots, B_{n-1})$ jest zgodnym ciągiem oswojonych algebr quazi-odwróconych kanonicznego typu długości $n-1$, zatem na mocy założenia indukcyjnego algebra $A' := A(\mathbb{B}')$ jest cyklowo skończoną algebrą z kołczanem Auslandera-Reiten postaci

$$\Gamma_{A'} = \mathcal{P}^{\mathbb{B}'} \cup \mathcal{T}^{\mathbb{B}'} \cup \mathcal{Q}^{\mathbb{B}'} = \mathcal{P}^{\mathbb{B}} \cup \mathcal{T}^{\mathbb{B}}_{[1,n-1]} \cup \mathcal{Q}^{\mathbb{B}}(n-1)$$

spełniającym odpowiednie warunki (1)-(4). Co więcej, z Lematu 4.3.1(2) otrzymujemy również, że algebra $A = A(\mathbb{B})^{(n)}$ jest $({}_s\mathcal{T}_\infty^{B_{n-1}^{(r)}})$-tubularnym rozszerzeniem algebry $A' = A(\mathbb{B})^{(n-1)}$. W szczególności, wówczas wnioskujemy, że $A = A_A$ ma rozkład na sumę prostą modułów projektywnych w $\operatorname{mod} A$ postaci $A = P \oplus P'$, gdzie P' (odpowiednio, P) jest sumą prostą wszystkich modułów projektywnych w $\operatorname{ind} A$, które należą do $\operatorname{ind} A'$ (odpowiednio, do $\mathcal{T}_n^{\mathbb{B}}$). To implikuje także, że $\operatorname{Hom}_A(P, P') = 0$, a więc A jest izomorficzna z algebrą macierzową postaci

$$\begin{bmatrix} F & M \\ 0 & A' \end{bmatrix},$$

gdzie $F = \operatorname{End}_A(P)$ oraz M jest $(F\text{-}A')$-bimodułem $M = \operatorname{Hom}_A(P', P)$, który jako moduł w $\operatorname{mod} A'$ należy do $\operatorname{add} {}_s\mathcal{T}_\infty^{B_{n-1}^{(r)}}$. Ponadto rodzina składowych $\mathcal{P}^{\mathbb{B}'} \cup \mathcal{T}^{\mathbb{B}'} \cup \mathcal{T}^{\mathbb{B}}_{(n-1,n)} = \mathcal{P}^{\mathbb{B}} \cup \mathcal{T}^{\mathbb{B}}_{[1,n)}$ w $\Gamma_{A'}$ spełnia warunek $\operatorname{Hom}_{A'}(M, \mathcal{P}^{\mathbb{B}} \cup \mathcal{T}^{\mathbb{B}}_{[1,n)}) = 0$, gdyż składniki proste modułu M leżą w stabilnych tubach z $\mathcal{T}_\infty^{B_{n-1}^{(r)}} = \mathcal{T}_\infty^{B_n^{(l)}}$, a zatem na mocy Lematu 1.4.7 jest to także rodzina składowych w Γ_A. Analogicznie stosując Lemat 4.3.1(3) wnioskujemy, że algebra $A = A(\mathbb{B})_{(1)}$ jest $({}_s\mathcal{T}_0^{B_2^{(l)}})$-tubularnym korozszerzeniem algebry $A'' = A(\mathbb{B})_{(2)}$, która (ponownie z założenia indukcyjnego) jest cyklowo skończoną algebrą $A'' = A(\mathbb{B}'')$ (stowarzyszoną ze zgodnym ciągiem $\mathbb{B}'' := (B_2, \dots, B_n)$ długości $n-1$) spełniającą własności (1)-(3). Przyjmijmy także, że A jest korozszerzeniem algebry A'' o pewien bimoduł $N = {}_G N_{A''}$, dla którego moduł $N_{A''}$ należy do $\operatorname{add} {}_s\mathcal{T}_0^{B_2^{(l)}}$. Wykorzystując dualne argumenty nietrudno jest podobnie pokazać, że również rodzina $\mathcal{T}^{\mathbb{B}}_{(1,2)} \cup \mathcal{T}^{\mathbb{B}''} \cup \mathcal{Q}^{\mathbb{B}''} = \mathcal{T}^{\mathbb{B}}_{(1,n]} \cup \mathcal{Q}^{\mathbb{B}}$ składowych w $\Gamma_{A''}$ jest rodziną składowych w Γ_A. W konsekwencji wnosimy, że $\mathcal{P}^{\mathbb{B}} \cup \mathcal{T}^{\mathbb{B}} \cup \mathcal{Q}^{\mathbb{B}}$ jest w istocie rodziną składowych w Γ_A. Wystarczy teraz zauważyć, że na mocy Wniosku 1.7.11 oraz założenia indukcyjnego zachodzi równość $\Gamma_A = \mathcal{P}^{\mathbb{B}} \cup \mathcal{T}^{\mathbb{B}} \cup \mathcal{Q}^{\mathbb{B}}$ oraz spełnione są warunki (1)-(4).

Odnotujmy na koniec, że z własności (1)-(4) oraz skończoności cykli w $\operatorname{ind} A'$ i $\operatorname{ind} A''$, którą możemy przyjąć na mocy założenia indukcyjnego, nietrudno teraz wywnioskować skończoność wszystkich cykli w $\operatorname{ind} A$. W konsekwencji A jest również algebrą cyklowo skończoną, co kończy dowód. □

Wyprowadzimy stąd jeszcze następujący wniosek przedstawiający pewne istotne ograniczenia, które musi spełniać kołczan Auslandera-Reiten algebry zgodnego ciągu nie będącej oswojoną algebrą quazi-odwróconą typu kanonicznego.

Wniosek 4.3.3. *Niech A będzie algebrą postaci $A = A(\mathbb{B})$, dla pewnego zgodnego ciągu $\mathbb{B} = (B_1, \dots, B_n)$ oswojonych algebr quazi-odwróconych $B_1, \dots, B_n$ kanonicznego typu. Załóżmy ponadto, że A nie jest oswojoną algebrą quazi-odwróconą kanonicznego typu. Wówczas $n \geqslant 2$ oraz istnieje $i \in \{1, \dots, n-1\}$ takie, że rodzina $\mathcal{T}_i^{\mathbb{B}}$ zawiera moduły injektywne, zaś rodzina $\mathcal{T}_{i+1}^{\mathbb{B}}$ zawiera moduły projektywne.*

Dowód · Przypuśćmy więc, że algebra $A = A(\mathbb{B})$ nie jest izomorficzna z oswojoną algebrą quazi-odwróconą typu kanonicznego. Wtedy oczywiście $n \geqslant 2$. Przypomnijmy, że dla każdego $i \in \{1, \dots, n-1\}$ algebra $B_i^{(r)} = B_{i+1}^{(l)}$ jest tubularna, a więc rodzina $\mathcal{T}_\infty^{B_{i+1}^{(l)}}$ zawiera moduły injektywne oraz rodzina $\mathcal{T}_0^{B_i^{(r)}}$ moduły projektywne, które są modułami injektywnymi w $\mathcal{T}_{i+1}^{\mathbb{B}}$, oraz odpowiednio, projektywnymi w $\mathcal{T}_i^{\mathbb{B}}$. W szczególności wnioskujemy stąd, że każda z rodzin $\mathcal{T}_1^{\mathbb{B}}, \dots \mathcal{T}_{n-1}^{\mathbb{B}}$ zawiera nieregularną tubę promieniową, zaś każda z rodzin $\mathcal{T}_2^{\mathbb{B}}, \dots, \mathcal{T}_n^{\mathbb{B}}$, nieregularną tubę kopromieniową. Stąd teza jest trywialnie spełniona dla każdego $i \in \{2, \dots, n-2\}$, jeśli tylko $n \geqslant 4$. Załóżmy zatem, że $n \leqslant 3$. Jeżeli $n = 2$, to wówczas $B_1 \neq B_1^{(r)}$ oraz $B_2 \neq B_2^{(l)}$, ponieważ A nie jest oswojoną algebrą quazi-odwróconą kanonicznego typu (patrz także Lemat 2.5.7). Ale wtedy na mocy Twierdzenia 4.2.4(5) oraz (6) otrzymujemy, że rodzina $\mathcal{T}_1^{\mathbb{B}} = \mathcal{T}^{B_1}$ zawiera co najmniej jeden moduł injektywny, podczas gdy rodzina $\mathcal{T}_2^{\mathbb{B}} = \mathcal{T}^{B_2}$ zawiera co najmniej jeden moduł projektywny i postulowana teza zachodzi dla $i = 1$. Przypuśćmy ostatecznie, że $n = 3$. W tym przypadku wiadomo, że rodzina $\mathcal{T}_2^{\mathbb{B}} = \mathcal{T}^{B_2}$ zawiera zarówno moduły projektywne jak i injektywne. Twierdzimy, że wtedy $B_1 \neq B_1^{(r)}$ lub $B_3 \neq B_3^{(l)}$. W istocie, w przeciwnym bowiem razie mamy $B_1 = B_1^{(r)} = B_2^{(l)}$ oraz $B_3 = B_3^{(l)} = B_2^{(r)}$, skąd $A = B_1 \sqcup_{B_1^{(r)}} B_2 \sqcup B_3 = B_2^{(l)} \sqcup_{B_2^{(l)}} B_2 \sqcup_{B_2^{(r)}} B_2^{(r)} \cong B_2$ jest algebrą quazi-odwróconą kanonicznego typu, i otrzymujemy sprzeczność. W rezultacie wnioskujemy, że faktycznie $B_1 \neq B_1^{(r)}$ lub $B_3 \neq B_3^{(l)}$. Wówczas jeżeli $B_1 \neq B_1^{(r)}$, to rodzina $\mathcal{T}_1^{\mathbb{B}} = \mathcal{T}^{B_1}$ zawiera moduły injektywne i teza zachodzi dla $i = 1$. Jeśli natomiast $B_3 \neq B_3^{(l)}$, to rodzina $\mathcal{T}_3^{\mathbb{B}} = \mathcal{T}^{B_3}$ zawiera moduły projektywne i wtedy przyjmujemy $i = 2$. To kończy dowód. □

Algebry postaci $A(\mathbb{B})$ stowarzyszone ze zgodnymi ciągami $\mathbb{B}$ oswojonych quazi-odwróconych algebr typu kanonicznego dostarczają bardzo szerokiej klasy przykładów algebr cyklowo skończonych półregularnego typu. Z dalszych rozważań wynika, że algebry tej postaci wyczerpują wszystkie algebry cyklowo skończone półregularnego typu (z dokładnością do izomorfizmu algebr). Opisowi tej klasy poświęcona została publikacja [5], w której można również znaleźć wiele różnych przykładów algebr $A(\mathbb{B})$, dla konkretnych ciągów zgodnych $\mathbb{B}$; patrz w tym celu [5, 7. Examples].

Pozostałą część niniejszej sekcji poświęcamy na przedstawienie ważnej strukturalnej charakteryzacji algebr cyklowo skończonych półregularnego typu, która stanowi główny wynik pracy [5]. Na początek przypomnijmy [43] następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 4.3.4. *Niech A będzie algebrą cyklowo skończoną półregularnego typu. Wówczas A jest algebrą trójkątną.*

dowód · Patrz [43, Corollary 3.4]. □

Następne dwa twierdzenia odegrają kluczową rolę w dowodzie Twierdzenia 4.3.8 sformułowanego dalej, które stanowi główny wynik pracy [5]. Pierwsze z nich jest nieco ogólniejszą wersją twierdzenia udowodnionego w [5, patrz Theorem 4.1].

Twierdzenie 4.3.5. *Niech A będzie algebrą cyklowo skończoną, zaś C oswojoną ilorazową algebrą utajoną algebry A z rodziną $\mathcal{T}^C = (\mathcal{T}_\lambda^C)_{\lambda\in\Lambda}$ wszystkich stabilnych tub w Γ_C. Wówczas dla każdego $\lambda \in \Lambda$ istnieje składowa $\mathcal{T}_\lambda^A(C)$ w Γ_A zawierająca wszystkie moduły z $\mathcal{T}_\lambda^C$. Jeśli przy tym $\mathcal{T}^A(C) = (\mathcal{T}_\lambda^A(C))_{\lambda\in\Lambda}$ jest rodziną składowych półregularnych, to zachodzą następujące stwierdzenia.*

(1) $\mathcal{T}^A(C)$ jest rodziną półregularnych tub w Γ_A.

(2) Tuby z $\mathcal{T}^A(C)$ są parami ortogonalne; w szczególności, dla $\lambda \neq \mu$ w Λ zachodzi $\mathcal{T}_\lambda^A(C) \neq \mathcal{T}_\mu^A(C)$.

(3) $\mathcal{T}_\lambda^A(C) = \mathcal{T}_\lambda^C$, dla prawie wszystkich $\lambda \in \Lambda$.

(4) C jest wypukłą podkategorią w A.

dowód · Oczywiście na mocy Lematu 4.1.3, dla dowolnego indeksu $\lambda \in \Lambda$, istnieje składowa $\mathcal{T}_\lambda^A = \mathcal{T}_\lambda^A(C)$ w Γ_A zawierająca wszystkie moduły leżące w stabilnej tubie $\mathcal{T}_\lambda^C = {}_c\mathcal{T}_\lambda^C$. Załóżmy, że rodzina $\mathcal{T}^A(C)$ zawiera wyłącznie składowe półregularne. Ma to w szczególności miejsce na przykład, gdy A jest cyklowo skończoną algebrą półregularnego typu.

(1) Odnotujmy, że każda składowa $\mathcal{T}_\lambda^A(C)$, dla $\lambda \in \Lambda$, jest z założenia półregularną składową w Γ_A zawierającą zorientowany cykl. Teza (1) jest zatem oczywistą konsekwencją Twierdzenia 1.5.12.

(2) Aby dowieść żądanej własności, pokażemy najpierw, że dla dowolnych $\lambda \neq \mu$ w Λ zachodzi $\mathcal{T}_\lambda^A(C) \neq \mathcal{T}_\mu^A(C)$ w Γ_A. Załóżmy zatem, że jest przeciwnie, to znaczy, że zachodzi równość składowych $\mathcal{T}_\lambda^A(C) = \mathcal{T}_\mu^A(C)$, dla pewnych $\lambda \neq \mu$ w Λ. Wówczas oczywiście składowa $\mathcal{C} = \mathcal{T}_\lambda^A(C) = \mathcal{T}_\mu^A(C)$ jest półregularną składową oraz jej część cykliczna ${}_c\mathcal{C}$ zawiera wszystkie moduły z $\mathcal{T}_\lambda^C$ oraz wszystkie moduły z $\mathcal{T}_\mu^C$. Ponieważ $\mathcal{C}$ jest półregularną tubą, wnosimy teraz na mocy Lematu 1.5.5, że $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{T}_\lambda^C, \mathcal{T}_\mu^C) = \mathrm{Hom}_C(\mathcal{T}_\lambda^C, \mathcal{T}_\mu^C) \neq 0$, co przeczy ortogonalności tub $\mathcal{T}_\lambda^C$ i $\mathcal{T}_\mu^C$ w Γ_C, dla $\lambda \neq \mu$. Tak więc dowodzi to, że dla $\lambda \neq \mu$ w Λ, mamy również $\mathcal{T}_\lambda^A(C) \neq \mathcal{T}_\mu^A(C)$ w Γ_A. Ostatecznie, łatwo pokazać, że jeżeli $\mathrm{Hom}_A(X, Y) \neq 0$,

dla pewnych modułów $X \in \mathcal{T}_\lambda^A(C)$ oraz $Y \in \mathcal{T}_\mu^A(C)$, gdzie $\lambda \neq \mu$ w Λ, to istnieją nierozkładalne C-moduły $U \in \mathcal{T}_\lambda^C$ oraz $W \in \mathcal{T}_\mu^C$, dla których $\mathrm{Hom}_C(U, W) = \mathrm{Hom}_A(U, W) \neq 0$, co znowu prowadzi do sprzeczności, ponieważ tuby $\mathcal{T}_\lambda^C$ i $\mathcal{T}_\mu^C$ są ortogonalne, dla $\lambda \neq \mu$. To w istocie dowodzi, że dla dowolnych $\lambda \neq \mu$ w Λ, półregularne tuby $\mathcal{T}_\lambda^A(C)$ oraz $\mathcal{T}_\mu^A(C)$ są ortogonalne, i dowód (2) jest zakończony.

(3) Ponieważ istnieje tylko skończenie wiele modułów projektywnych oraz skończenie wiele modułów injektywnych w Γ_A, wnosimy, że istnieje skończony podzbiór Λ_0 zbioru Λ taki, że dla każdego $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_0$, $\mathcal{T}_\lambda^A(C)$ jest stabilną tubą w Γ_A. Wówczas $\mathcal{T}_\lambda^A(C) = \mathcal{T}_\lambda^C$ na mocy Lematu 1.7.2.

(4) Dla dowodu ostatniej własności, zauważmy, że ponieważ Λ jest zbiorem nieskończonym, to możemy na mocy (3) wybrać takie $\lambda \in \Lambda$, że $\mathcal{T}_\lambda^C$ jest stabilną tubą $\mathcal{T}_\lambda^C = \mathcal{T}_\lambda^A(C)$ w Γ_A. W szczególności wtedy otrzymujemy, że $C = \mathrm{supp}(\mathcal{T}_\lambda^C)$, bowiem $\mathcal{T}^C$ stanowi silnie separującą rodzinę (dokładnych) stabilnych tub w Γ_C. Teraz żądana wypukłość podkategorii $C = \mathrm{supp}(\mathcal{T}_\lambda^C)$ jest konsekwencją Stwierdzenia 4.1.2. □

Odnotujmy również następujący bezpośredni wniosek z powyższego twierdzenia.

Wniosek 4.3.6. *Niech A będzie algebrą cyklowo skończoną półregularnego typu. Wówczas istnieje (pełna) wypukła podkategoria C w A taka, że C jest oswojoną algebrą utajoną (jako algebra ilorazowa A) oraz prawie wszystkie stabilne tuby w Γ_C są również stabilnymi tubami w Γ_A.*

dowód · Wystarczy zauważyć, że istnieje co najmniej jedna oswojona utajona algebra ilorazowa C algebry A, i wówczas teza wynika natychmiast z Twierdzenia 4.3.5. W istocie, ponieważ A jest półregularnego typu, to A jest algebrą nieskończonego typu reprezentacyjnego, a więc istnieje wówczas dwustronny ideał I w A, dla którego algebra A/I jest nieskończonego reprezentacyjnego typu, zaś dla każdego ideału $J \supsetneq I$, algebra A/J jest skończonego typu. Zatem wprost z definicji algebra $C = A/I$ jest minimalną algebrą nieskończonego reprezentacyjnego typu, przy czym C jest również cyklowo skończona jako algebra ilorazowa cyklowo skończonej algebry A. To natomiast implikuje, że C jest oswojoną algebrą utajoną na mocy charakteryzacji podanej w Twierdzeniu 4.2.3. □

Uwaga · Odnotujmy tylko, że na mocy Stwierdzenia 4.2.5 istnienie oswojonej utajonej algebry ilorazowej implikuje jej wypukłość oraz żądane własności stabilnych tub również w przypadku, gdy A jest dowolną algebrą cyklowo skończoną (niekoniecznie półregularnego typu). Ponadto, na mocy pewnych wyników otrzymanych przez A. Skowrońskiego w [41, patrz Corollaray 4.3] dowolna algebra cyklowo skończona A jest algebrą nieskończonego reprezentacyjnego typu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje idempotent e w A taki, że algebra ilorazowa A/AeA jest oswojoną algebrą utajoną ·

Drugie ze wspominanych twierdzeń pracy [5] pozwólmy sobie sformułować w poniższej postaci.

Twierdzenie 4.3.7. *Niech A będzie algebrą cyklowo skończoną, C oswojoną utajoną wypukłą podkategorią A, oraz niech $\mathcal{T}^C = (\mathcal{T}_\lambda^C)_{\lambda\in\Lambda}$ oznacza rozdzinę wszystkich stabilnych tub w Γ_C. Załóżmy ponadto, że $\mathcal{T}^A(C) = (\mathcal{T}_\lambda^A(C))_{\lambda\in\Lambda}$ jest rodziną składowych półregularnych w Γ_A. Wówczas zachodzą następujące warunki.*

(1) Nośnik $B(C) = \mathrm{supp}(\mathcal{T}^A(C))$ rodziny $\mathcal{T}^A(C) = (\mathcal{T}_\lambda^A(C))_{\lambda\in\Lambda}$ jest pełną wypukłą podkategorią A.

(2) Algebra $B(C)$ jest oswojonym półregularnym gałęziowym powiększeniem algebry C, to znaczy jest oswojoną algebrą quazi-odwróconą kanonicznego typu.

dowód · Po argumenty odsyłamy do dowodu [5, Theorem 1.5]. □

Główny wynik [5, Theorem 1.1] wspominanego artykułu sformułowany poniżej jest zapowiadaną strukturalną charakteryzacją algebr cyklowo skończonych półregularnego typu.

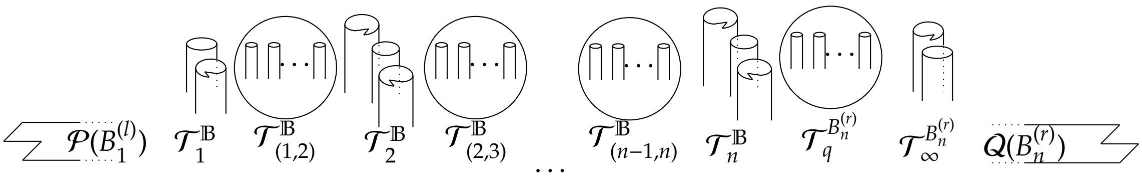
Twierdzenie 4.3.8. *Niech A będzie dowolną K-algebrą. Wówczas następujące warunki są równoważne.*

(i) A jest algebrą cyklowo skończoną półregularnego typu.

(ii) A jest izomorficzna z algebrą postaci $A(\mathbb{B})$ stowarzyszoną z pewnym zgodnym ciągiem $\mathbb{B}$ oswojonych algebr quazi-odwróconych kanonicznego typu.

DOWÓD · Dowód tego twierdzenia można znaleźć w [5, Section 6.]. □

W konsekwencji struktura dowolnej cyklowo skończonej algebry A typu półregularnego jest wyznaczona przez pewien skończony zgodny ciąg $\mathbb{B} = (B_1, \ldots, B_n)$ oswojonych algebr quazi-odwróconych kanonicznego typu, przy czym z kołczanów $\Gamma_{B_1}, \ldots, \Gamma_{B_n}$ tychże algebr możemy wówczas odtworzyć również kołczan Γ_A algebry $A = A(\mathbb{B})$, który przy oznaczeniach z Twierdzenia 4.3.2 jest następującej schematycznej postaci, gdzie zakładamy dla urozmaicenia rysunku, że $n \geqslant 3$ oraz algebra $B_1^{(l)}$ jest algebrą odwróconą, zaś algebra $B_n^{(r)}$, algebrą tubularną:



Rozdział 5

· Dowody głównych twierdzeń rozprawy ·

W niniejszym ostatnim rozdziale podajemy pełne dowody dwóch głównych twierdzeń, to znaczy Twierdzeń A oraz B, sformułowanych we wstępie, po czym w zamykającej rozprawie sekcji 5.5 krótko odnosimy się do dalszych perspektyw badaczych. Dowodom dwóch głównych twierdzeń poświęcone są, kolejno sekcje 5.2 i 5.3, zaś w 5.4 zamieszczamy krótkie dowody Wniosków 1 i 2. Ponadto, w pierwszym podrozdziale podajemy dowody kilku istotnych wyników pomocniczych, które zostaną wykorzystane w dalszych rozważaniach.

5.1 Wyniki pomocnicze ·

Celem większej przejrzystości dalszych rozumowań zamieszczamy tutaj pewne pomocnicze wyniki, które realizują techniczną część dowodów obu głównych twierdzeń. Dzięki ogólności poniższych sformułowań możemy później uniknąć powielania analogicznej argumentacji pojawiającej się w dowodach obu wyników. Rozpoczynamy od udowodnienia następującego poniżej stwierdzenia, którego teza jest konsekwencją trzech podobnych wyników pochodzących kolejno z prac [51, Proposition 3.1], [52, Proposition 3.4] oraz [53, Proposition 3.1].

Stwierdzenie 5.1.1. *Niech A będzie algebrą cyklowo skończoną, dla której spełniony jest jeden z następujących trzech warunków.*

(a) Prawie wszystkie klasy izomorfizmu modułów X w $\operatorname{ind} A$ spełniają $\operatorname{pd}_A X \leqslant 1$ lub $\operatorname{id}_A X \leqslant 1$.

(b) Dla prawie wszystkich klas izomorfizmu nierozkładalnych modułów X w $\operatorname{mod} A$ zachodzi $\operatorname{Hom}_A(D(A), X) = 0$ lub $Hom_A(X, A) = 0$.

(c) Istnieje dokładny moduł M w $\operatorname{mod} A$, który jest środkiem co najwyżej skończenie wielu krótkich łańcuchów.

Wówczas dowolna nieskończona składowa cykliczna $\mathcal{D}$ kołczanu Γ_A jest częścią cykliczną $\mathcal{D} = {}_c\mathcal{C}$ pewnej półregularnej tuby $\mathcal{C}$ w Γ_A. W szczególności, każda składowa $\mathcal{C}$ w Γ_A, która zawiera moduły projektywne oraz injektywne, jest składową prawie acykliczną.

Dowód · Załóżmy, że A jest algebrą cyklowo skończoną, dla której zachodzi jeden z warunków (a), (b) lub (c). Niech $\mathcal{D}$ będzie dowolną nieskończoną składową cykliczną w Γ_A oraz ustalmy składową $\mathcal{C}$ w Γ_A taką, że $\mathcal{D}$ jest składową spójności części cyklicznej ${}_c\mathcal{C}$. Wykażemy poniżej w trzech przypadkach, że wtedy $\mathcal{C}$ jest półregularną tubą. Zauważmy najpierw, że $\mathcal{D}$ jest nieskończoną składową cykliczną w $\mathcal{C}$, więc na mocy Wniosku 4.2.1, istnieje spójna składowa Γ w ${}_l\mathcal{C}$ lub w ${}_r\mathcal{C}$, której część cykliczna ${}_c\Gamma$ jest niepusta oraz zawiera nieskończenie wiele modułów z $\mathcal{D}$.

(1) Przypuśćmy najpierw, że Γ jest spójną składową stabilnej części ${}_s\mathcal{C} = {}_l\mathcal{C} \cap {}_r\mathcal{C}$ składowej $\mathcal{C}$. Wtedy Γ jest nieskończonym stabilnym kołczanem z translacją zawierającym zorientowany cykl, zatem wprost z Twierdzenia 1.5.8 wnioskujemy, że Γ jest stabilną tubą $\Gamma = \mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty/(\tau_A^r)$, gdzie r oznacza rangę Γ.

Uzasadnimy teraz, że zachodzi równość $\mathcal{C} = \Gamma$, co będzie natychmiast implikowało, iż $\mathcal{D} = {}_c\mathcal{C} = \mathcal{C}$ jest rzeczywiście częścią cykliczną stabilnej tuby $\mathcal{C} = \Gamma$. W istocie, załóżmy, że $\mathcal{C} \neq \Gamma$. Wtedy otrzymujemy, że istnieje co najmniej jedna strzałka w $\mathcal{C}$ postaci $Z \to V$, gdzie Z należy do Γ, podczas gdy V nie należy do Γ. Wówczas oczywiście orbita $\mathscr{O} = \mathscr{O}_V$ modułu V nie może być stabilna, ponieważ Γ jest składową spójności kołczanu ${}_s\mathcal{C}$, zaś z założenia, V nie należy do Γ. W takim razie τ_A-orbita $\mathscr{O}$ zawiera moduł projektywny lub moduł injektywny. Pokażemy, że τ_A-orbita $\mathscr{O}$ zawiera zarówno moduł projektywny jak i injektywny, to znaczy, jest skończoną τ_A-orbitą. Faktycznie, Γ jest stabilną tubą rangi r, a więc τ_A-orbita modułu Z jest okresowa o okresie r, skąd wynika, że dla dowolnej liczby całkowitej n, istnieje w $\mathcal{C}$ strzałka postaci $Z = \tau_A^{nr}Z \to \tau_A^{nr}V$, jeśli tylko moduł $\tau_A^{nr}V$ jest poprawnie zdefiniowany. Ponieważ kołczan Auslandera-Reiten Γ_A algebry A jest lokalnie skończony wnioskujemy teraz, że istnieje tylko skończenie wiele (niezerowych) modułów postaci $\tau_A^{nr}V$, dla $n \geqslant 0$ oraz dla $n \leqslant 0$. To pokazuje, że $\mathscr{O}$ faktycznie jest skończoną τ_A-orbitą postaci $\mathscr{O} = \{P, \tau_A^{-1}P, \ldots, \tau_A^{-s+1}P, \tau_A^{-s}P = I\}$, dla pewnego $s \geqslant 0$. Teraz już na mocy stabilności Γ wnosimy, że istnieją strzałki w $\mathcal{C}$ postaci $X \to P$ oraz $I \to Y$, gdzie obydwa moduły X oraz Y są zawarte w Γ. Odnotujmy również, że ponieważ Γ jest stabilną tubą, to istnieją w Γ dwie nieskończone drogi sekcyjne postaci

$$\Sigma\colon\ \cdots \to X_2 \to X_1 \to X_0 = X \quad \text{oraz} \quad \Omega\colon Y = Y_0 \to Y_1 \to Y_2 \to \ldots$$

Oczywiście na mocy Twierdzenia 1.5.2, $\mathrm{Hom}_A(X_k, X) \neq 0$ oraz $\mathrm{Hom}_A(Y, Y_k) \neq 0$, dla każdego $k \in \mathbb{N}$, ponieważ drogi Σ oraz Ω są sekcyjne. Co więcej zauważmy, że drogi Σ oraz Ω przecinają się nieskończenie wiele razy, co implikuje, że istnieje nieskończenie wiele parami nieizomorficznych modułów Z_n, $n \in \mathbb{N}$, które spełniają $\mathrm{Hom}_A(Z_n, X) \neq 0$ oraz $\mathrm{Hom}_A(Y, Z_n) \neq 0$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ jednak X jest bezpośrednim poprzednikiem modułu projektywnego w $\mathcal{C}$, zaś Y jest bezpośrednim następnikiem modułu injektywnego w $\mathcal{C}$, wnioskujemy teraz, że istnieje nieprzywiedlny monomorfizm $X \to P$ oraz nieprzywiedlny epimorfizm $I \to Y$ w $\mathrm{mod}\, A$. Ale wtedy otrzymujemy $\mathrm{Hom}_A(Z_n, P) \neq 0$ oraz $\mathrm{Hom}_A(I, Z_n) \neq 0$, dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, co prowadzi do sprzeczności z warunkiem (b). Dalej, odnotujmy, że również drogi $\tau_A\Sigma$ oraz $\tau_A^{-1}\Omega$ przecinają się nieskończenie wiele razy, skąd podobnie jak wyżej wnioskujemy z Twierdzenia 1.5.2, że istnieje niekończenie wiele parami nieizomorficznych modułów Z_n, $n \in \mathbb{N}$, które spełniają $\mathrm{Hom}_A(\tau_A^{-1}Z_n, P) \neq 0$ oraz $\mathrm{Hom}_A(I, \tau_A Z_n) \neq 0$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$. To natomiast prowadzi na mocy Lematu 1.4.5, do sprzeczności z warunkiem (a). Ostatecznie zauważmy, że gdyby spełniony był warunek (c), to ponieważ drogi Σ oraz $\tau_A^{-1}\Omega$ także przecinają się nieskończenie wiele razy, otrzymalibyśmy, że istnieje nieskończenie wiele parami nieizomorficznych modułów Z_n, $n \in \mathbb{N}$, które spełniają $\mathrm{Hom}_A(Z_n, X) \neq 0$ oraz $\mathrm{Hom}_A(Y, \tau_A Z_n) \neq 0$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Jednak wówczas z dokładności modułu M wnioskujemy, że istnieją monomorfizmy $X \to P \to M^s$ oraz epimorfizmy $M^t \to I \to Y$ w $\mathrm{mod}\, A$, $s, t \geqslant 1$, skąd mamy $\mathrm{Hom}_A(Z_n, M) \neq 0$ oraz $\mathrm{Hom}_A(M, \tau_A Z_n) \neq 0$, dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Ale to oznacza, że moduł M jest środkiem nieskończenie wielu krótkich łańcuchów w $\mathrm{mod}\, A$, co jest sprzeczne z założeniem. W rezultacie, otrzymane sprzeczności pokazują, że $\mathcal{C} = \Gamma$ jest stabilną tubą, co kończy dowód w tym przypadku.

(2) Zakładamy następnie, że Γ jest spójną składową lewostronnie stabilnej części ${}_l\mathcal{C}$ składowej $\mathcal{C}$ zawierającą co najmniej jeden moduł injektywny. Na mocy Lematu 1.5.9 kołczan Γ zawiera wówczas nieskończoną drogę sekcyjną postaci

$$\cdots \to \tau_A^{2r}X_1 \to \tau_A^{r}X_s \to \cdots \to \tau_A^{r}X_1 \to X_s \to \cdots \to X_1,$$

gdzie $r > s \geqslant 1$ oraz każdy moduł w Γ leży w jednej z (parami rozłącznych) τ_A-orbit $\mathscr{O}_{X_1}, \ldots, \mathscr{O}_{X_s}$, z których co najmniej jedna nie jest stabilna. Ponadto wszystkie strzałki w Γ mają trywialne wartościowania oraz każdy moduł w Γ ma co najwyżej dwóch bezpośrednich poprzedników w Γ. Wtedy istnieje w Γ również następująca nieskończona droga sekcyjna

$$\Omega: \quad I = Y_0 \to Y_1 \to \cdots \to Y_n \to \ldots,$$

gdzie I jest modułem injektywnym w Γ, który można dobrać tak, aby $I = \tau_A^{-t}X_s$, dla pewnego $t \geqslant 0$. Przypomnijmy dalej, że na mocy Lematu 1.4.9 podkołczan Γ^* składający się ze wszystkich modułów w

Γ, które są końcami nieskończonych dróg sekcyjnych w Γ jest spójnym podkołczanem z translacją w Γ, zamkniętym na branie poprzedników.

Pokażemy dalej, że Γ^* nie zawiera żadnego bezpośredniego poprzednika modułu projektywnego w $\mathcal{C}$. Rzeczywiście, gdyby moduł R należący do Γ^* był bezpośrednim poprzednikiem $R \to P$ modułu projektywnego P w $\mathcal{C}$, to z określenia Γ^* wynika, że istnieje w Γ następująca nieskończona droga sekcyjna

$$\Sigma : \quad \cdots \to U_1 \to U_0 = R.$$

Ale wtedy drogi Ω oraz Σ przecinają się nieskończenie wiele razy, co pozwala wywnioskować, że istnieje nieskończenie wiele modułów Z_n w Γ, $n \in \mathbb{N}$, które spełniają $\mathrm{Hom}_A(I, Z_n) \neq 0$ oraz $\mathrm{Hom}_A(Z_n, R) \neq 0$, a więc $\mathrm{Hom}_A(Z_n, P) \neq 0$, dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Prowadzi to do sprzeczności z warunkiem (b). Analogicznie jak w (1), otrzymujemy również sprzeczność z (a), wykorzystując Lemat 1.4.5 oraz fakt, że droga $\tau_A\Sigma$ zawiera nieskończenie wiele modułów Z, dla których moduł $\tau_A Z$ leży na drodze Ω. Podobnie także, ponieważ istnieje nieskończenie wiele modułów U_k, $k \in \mathbb{N}$, spełniających $\tau_A U_k \in \Omega$, wnioskujemy ostatecznie, że $\mathrm{Hom}_A(I, \tau_A U_k) \neq 0$ oraz $\mathrm{Hom}_A(U_k, P) \neq 0$ dla nieskończenie wielu $k \in \mathbb{N}$. Wykorzystując analogiczne argumenty do tych przedstawionych w (1), pokazujemy także tutaj, że każdy dokładny moduł w $\mathrm{mod}\, A$ jest środkiem nieskończenie wielu krótkich łańcuchów, co daje sprzeczność z (c). Tak więc w istocie, Γ^* nie zawiera żadnego modułu R, który byłby bezpośrednim poprzednikiem pewnego modułu projektywnego z $\mathcal{C}$. Teraz już z Lematu 1.7.9 wynika, że $\Gamma^* = \mathcal{C}$ jest kołczanem z translacją otrzymanym ze stabilnej tuby poprzez iterację skończonej liczby operacji typu (ad 1*). W szczególności otrzymujemy więc że $\mathcal{C} = \Gamma = \Gamma^*$ jest tubą kopromieniową w Γ_A, tak więc jej część cykliczna ${}_c\mathcal{C}$ jest spójna, skąd oczywiście $\mathcal{D} = {}_c\mathcal{C}$, ponieważ $\mathcal{D}$ jest z założenia składową spójności kołczanu ${}_c\mathcal{C}$.

(3) Ostatecznie przypuśćmy, że Γ jest składową w ${}_r\mathcal{C}$ zawierającą co najmniej jeden moduł projektywny. Wówczas stosując argumenty dualne do przedstawionych powyżej w (2), wnioskujemy konsekwentnie, że $\mathcal{C} = \Gamma_* = \Gamma$ jest w tym przypadku (nieregularną) tubą promieniową w Γ_A oraz $\mathcal{D} = {}_c\mathcal{C}$.

W szczególności, jeśli część cykliczna ${}_c\mathcal{C}$ składowej $\mathcal{C}$ w Γ_A jest nieskończona, to jest spójna, lub innymi słowy, ${}_c\mathcal{C}$ jest wtedy składową cykliczną Γ_A. Jest również jasne, że każda składowa, która zawiera moduły projektywne i injektywne musi być w tym przypadku składową prawie acykliczną, ponieważ w przeciwnym razie byłaby tubą promieniową bądź kopromieniową, a te są oczywiście przykładami składowych półregularnych. □

Uwaga · Przypomnijmy, że przy założeniach powyższego stwierdzenia każda niepółregularna składowa $\mathcal{C}$ w Γ_A jest prawie acykliczna, a więc na mocy Twierdzenia 2.7.5 musi zawierać pewną wielosekcję Δ. Odnotujmy także, że taka składowa ma wówczas rozkład $\mathcal{C} = \mathcal{C}_l \cup \Delta_c \cup \mathcal{C}_r$, gdzie Δ_c jest skończonym rdzeniem składowej $\mathcal{C}$; w szczególności, jeśli przy tym $\mathcal{C}$ jest nieskończoną składową to jeden z podkołczanów $\mathcal{C}_l$ lub $\mathcal{C}_r$ jest nieskończony; patrz Stwierdzenie 2.7.3 ·

Założenia poprzedniego stwierdzenia prowadzą również do istotnych wniosków dających wgląd w strukturę nieskończonych i niepółregularnych składowych w kołczanach Auslandera-Reiten algebr cyklowo skończonych, co pokazuje następny lemat.

Lemat 5.1.2. *Niech A będzie cyklowo skończoną algebrą nieskończonego reprezentacyjnego typu taką, że zachodzi jeden z warunków (a), (b) lub (c) sformułowanych w poprzednim stwierdzeniu. Załóżmy również, że $\mathcal{C}$ jest pewną niepółregularną prawie acykliczną składową w Γ_A zawierającą wielosekcję Δ, dla której podkołczan $\mathcal{C}_l = \mathcal{C}_l(\Delta)$ jest nieskończony. Wtedy istnieje pełny wartościowany podkołczan $\mathcal{C}_{ll}(\Delta)$ kołczanu $\mathcal{C}_l$, spełniający następujące warunki.*

(1) $\mathcal{C}_{ll}(\Delta)$ jest nieskończonym acyklicznym i lewostronnie stabilnym podkołczanem z translacją w $\mathcal{C}_l$ zawierającym prawie wszystkie moduły z $\mathcal{C}_l$ oraz zamkniętym na branie poprzedników w $\mathcal{C}$.

(2) Jeśli $\mathcal{D}^1, \ldots, \mathcal{D}^p$ są składowymi spójności kołczanu $\mathcal{C}_{ll}(\Delta)$, $p \geqslant 1$, to algebra ilorazowa $B_l(\Delta) := A(\mathcal{C}_{ll}(\Delta))$ jest produktem $B_l(\Delta) \cong B_1 \times \cdots \times B_p$ spójnych algebr odwróconych $B_i = A(\mathcal{D}^i) \cong \mathrm{End}_{H_i}(T_i)$, $i \in \{1, \ldots, p\}$, typu Euklidesa, przy czym T_i nie ma niezerowych preinjektywnych składników prostych, dla każdego $i \in \{1, \ldots, p\}$.

(3) *Część beztorsyjna $\mathscr{Y}(T_i) \cap \mathcal{C}_{T_i}$ każdej składowej łączącej $\mathcal{C}_{T_i}$ w Γ_{B_i}, dla $1 \leqslant i \leqslant p$, jest pełnym podkołczanem z translacją w $\mathcal{D}^i$, zamkniętym na branie poprzedników.*

(4) *Rodzina $\mathcal{T}^{B_i}$ wszystkich tub promieniowych w Γ_{B_i} jest rodziną $\mathcal{T}^{B_i} = \mathcal{T}^A(B_i)$ parami ortogonalnych uogólnionych standardowych tub promieniowych w kołczanie Γ_A, dla każdego $i \in \{1, \ldots, p\}$.*

DOWÓD · Przypomnijmy na wstępie, że $\mathcal{C}$ ma rozkład $\mathcal{C} = \mathcal{C}_l \cup \Delta_c \cup \mathcal{C}_r$ na rozłączną sumę podkołczanów z translacją, opisany w Stwierdzeniu 2.7.3. Zdefiniujemy teraz podkołczan $\mathcal{C}_{ll}(\Delta)$, po czym pokażemy dalej, że spełnione są żądane własności (1)-(4). Zauważmy w tym celu, że lewostronnie stabilna część ${}_l\mathcal{C}_l$ podkołczanu $\mathcal{C}_l$ jest niepusta, ponieważ z założenia $\mathcal{C}_l$ jest nieskończonym podkołczanem w $\mathcal{C}$. W szczególności, wtedy ${}_l\mathcal{C}_l$ jest również nieskończonym lewostronnie stabilnym podkołczanem z translacją w $\mathcal{C}_l$. Jeżeli ${}_l\mathcal{C}_l = \mathcal{C}_l$, to kładziemy $\mathcal{C}_{ll}(\Delta) := {}_l\mathcal{C}_l$, zaś w przypadku, gdy ${}_l\mathcal{C}_l \neq \mathcal{C}_l$ (to znaczy: $\mathcal{C}_l$ zawiera moduły projektywne), określamy $\mathcal{C}_{ll}(\Delta)$ jako pełny podkołczan w ${}_l\mathcal{C}_l$, składający się ze wszystkich modułów X takich, że X ma co najmniej jednego następnika projektywnego w $\mathcal{C}$, zaś każdy poprzednik X w $\mathcal{C}$ leży w ${}_l\mathcal{C}_l$.

Oczywiście wprost z określenia wynika, że $\mathcal{D} := \mathcal{C}_{ll}(\Delta)$ jest w obu przypadkach (niepustym) lewostronnie stabilnym podkołczanem z translacją w $\mathcal{C}_l$, zamkniętym na branie poprzedników w $\mathcal{C}$. W szczególności więc, $\mathcal{D}$ jest nieskończony. Zauważmy także, że kołczan $\mathcal{D}$ musi być acykliczny, gdyż na podstawie Twierdzenia 2.7.3, wszystkie zorientowane cykle w składowej $\mathcal{C}$ leżą w jej rdzeniu $\Sigma(\mathcal{C}) = \Delta_c$, zaś podkołczan $\mathcal{D}$ zawarty jest w $\mathcal{C}_l$. To dowodzi (1). Wynika stąd również, że wszystkie moduły z $\mathcal{D}$ są kierujące, z założenia o skończoności cykli w $\operatorname{ind} A$. Odnotujmy także, że na mocy Twierdzenia 3.1.4, podkołczan $\mathcal{D}$ składa się ze skończonej liczby τ_A-orbit.

Załóżmy teraz, że mamy ustalony rozkład $\mathcal{D} = \mathcal{D}^1 \cup \cdots \cup \mathcal{D}^p$ kołczanu (z translacją) $\mathcal{D} = \mathcal{C}_{ll}(\Delta)$ na rozłączną sumę $p \geqslant 1$ składowych spójności $\mathcal{D}^1, \ldots, \mathcal{D}^p$. Wtedy na podstawie Twierdzenia 4.2.6, wnosimy, że dla każdego $i \in \{1, \ldots, p\}$, istnieje (spójna) algebra dziedziczna H_i typu Euklidesa oraz moduł odwracający T_i w $\operatorname{mod} H_i$ bez niezerowych preinjektywnych składników prostych, dla których algebra odwrócona $B_i := \operatorname{End}_{H_i}(T_i)$ typu Euklidesa jest (spójną, bazową) algebrą ilorazową $B_i = A(\mathcal{D}^i)$ algebry A oraz część beztorsyjna składowej łączącej w Γ_{H_i} jest pełnym podkołczanem w $\mathcal{D}^i$ zamkniętym na branie poprzedników. Dalej, zauważmy, że wszystkie A-moduły leżące w $\mathcal{D}^i$, $i \in \{1, \ldots, p\}$, są modułami w $\operatorname{ind} B_i$, należącymi do preinjektywnej składowej łączącej $\mathcal{Q}(B_i) = \mathcal{C}_{T_i}$ kołczanu Γ_{B_i}. Odnotujmy również, że wtedy algebra $B := A(\mathcal{D}) = A(\mathcal{D}^1 \cup \cdots \cup \mathcal{D}^p)$ jest izomorficzna z produktem $B_1 \times \cdots \times B_p$ ilorazowych algebr odwróconych $B_i = A(\mathcal{D}^i)$, $i \in \{1, \ldots, p\}$, typu Euklidesa. Zatem zachodzą także warunki (2) i (3).

Dla dowodu (4) pokazujemy w kilku krokach poniżej, że dla każdego $i \in \{1, \ldots, p\}$ rodzina $\mathcal{T}^{B_i}$ wszystkich tub promieniowych w Γ_{B_i} jest także rodziną (uogólnionych standardowych) składowych kołczanu Γ_A. Udowodnimy najpierw, że dla każdego $i \in \{1, \ldots, p\}$ istnieje moduł R_i w $\mathcal{D}^i$ oraz monomorfizm nieprzywiedlny w $\operatorname{mod} A$ postaci $R_i \to P_{(i)}$, gdzie $P_{(i)}$ jest pewnym nierozkładalnym modułem projektywnym w $\mathcal{C}$. Ustalmy zatem indeks $i \in \{1, \ldots, p\}$ oraz niech $\mathscr{E} := \mathcal{D}_i$. Zauważmy, że dla każdego modułu X w lewostronnie stabilnej części ${}_l\mathcal{C}$ składowej $\mathcal{C}$ istnieje $s \geqslant 0$ takie, że moduł $\tau_A^s X$ ma projektywnego następnika w $\mathcal{C}$. Rzeczywiście, ponieważ $\mathcal{C}$ jest składową w Γ_A zawierającą moduł projektywny (z założenia $\mathcal{C}$ nie jest półregularna), więc istnieje niezorientowana droga w grafie $\bar{\mathcal{C}}$ (powstałym z $\mathcal{C}$ poprzez usunięcie orientacji strzałek) postaci

$$X_0 \longrule X_1 \longrule \cdots \longrule X_n \,,$$

gdzie $n \geqslant 1$, $X_0 = X$ należy do ${}_l\mathcal{C}$ oraz X_n jest modułem projektywnym. Stosując indukcję ze względu na długość n powyższej drogi łatwo można wykazać, że dla pewnego $s \geqslant 0$ moduł $\tau_A^s X_0$ ma projektywnego następnika w $\mathcal{C}$. Dla $n = 1$ moduł X_1 jest projektywny i mamy albo strzałkę w $\mathcal{C}$ postaci $X_0 \to X_1$, albo postaci $X_1 \to X_0$ i wówczas istnieje również strzałka $\tau_A X_0 \to X_1$, gdyż $X_0 \in {}_l\mathcal{C}$. Zatem jeden z modułów $X_0 = \tau_A^0 X_0$ albo $\tau_A X_0$ jest poprzednikiem modułu projektywnego X_1, co dowodzi tezy dla $n = 1$. Załóżmy dalej, że $n \geqslant 2$. Jeśli X_1 należy do ${}_l\mathcal{C}$, to z założenia indukcyjnego wnioskujemy, że $\tau_A^{s_1} X_1$ ma projektywnego następnika w $\mathcal{C}$ dla pewnego $s_1 \geqslant 0$. Jeżeli przy tym mamy strzałkę $X_0 \to X_1$, to oczywiście istnieje strzałka $\tau_A^{s_1} X_0 \to \tau_A^{s_1} X_1$, a więc $\tau_A^{s_1} X_0$ również ma projektywnego następnika w $\mathcal{C}$. W przypadku, gdy istnieje w $\mathcal{C}$ strzałka $X_1 \to X_0$, to mamy strzałkę $\tau_A^{s_1} X_1 \to \tau_A^{s_1} X_0$, zatem również strzałkę $\tau_A^{s_1+1} X_0 \to \tau_A^{s_1} X_1$, co z kolei implikuje, że moduł $\tau_A^{s_1+1} X_0$ ma projektywnego następnika. Przypuśćmy ostatecznie, że X_1 nie należy do ${}_l\mathcal{C}$. Wynika stąd, że τ_A-orbita X_1 nie jest lewostronnie stabilna, zatem $\tau_A^{s_1} X_1 = P$ jest modułem projektywnym dla pewnego $s_1 \geqslant 0$. Ale wówczas mamy w $\mathcal{C}$ albo strzałkę postaci $\tau_A^{s_1} X_0 \to \tau_A^{s_1} X_1 = P$, albo postaci $\tau_A^{s_1+1} X_0 \to \tau_A^{s_1} X_1 = P$, a więc teza jest prawdziwa również w tym przypadku. To pokazuje, że w istocie, dla każdego modułu X w ${}_l\mathcal{C}$ istnieje $s \geqslant 0$, dla którego moduł $\tau_A^s X$ ma projektywnego następnika w $\mathcal{C}$. Ustalmy teraz dowolny moduł X należący do podkołczanu $\mathcal{E} \subset {}_l\mathcal{C}$ oraz niech $Y_0 \to Y_1 \to \cdots \to Y_m$ będzie taką drogą w $\mathcal{C}$, że Y_m jest projektywny oraz $Y_0 = \tau_A^s X$ dla pewnego $s \geqslant 0$. Oczywiście $Y_0 = \tau_A^s X$ należy do $\mathcal{E}$, bo $X \in \mathcal{E}$. Załóżmy również, że m jest minimalną liczbą $m \geqslant 1$, dla której istnieje taka droga z $Y_0 \in \mathcal{E}$. Jeśli $m = 1$, to kładziemy $R_i := Y_0$ oraz $P_{(i)} := Y_1$. Jeżeli natomiast $m \geqslant 2$, to moduły $Y_1, \ldots, Y_{m-1}$ są lewostronnie stabilne, bowiem w przeciwnym razie istniałaby w $\mathcal{C}$ droga postaci $\tau_A^t Y_0 \to \cdots \to \tau_A^t Y_n$, dla pewnego $n < m$ oraz $t \geqslant 0$ takiego, że $\tau_A^t Y_n$ jest modułem projektywnym, a to przeczy minimalności m. W konsekwencji wszystkie moduły $Y_1, \ldots, Y_{m-1}$ należą do ${}_l\mathcal{C}$. Ponadto τ_A-orbita modułu Y_m w $\mathcal{C}$ zawiera co najmniej jeden moduł z Δ_l, który musi być przy tym postaci $\tau_A^{-r} Y_m$, dla $r \geqslant 0$, bo Y_m jest modułem projektywnym. W rezultecie moduł Y_m, a więc i moduły $Y_1, \ldots, Y_{m-1}$ są poprzednikami pewnego modułu z Δ_l, czyli należą do $\mathcal{C}_l$. Oznacza to, że $Y_1, \ldots, Y_{m-1}$ są modułami w lewostronnie stabilnej części ${}_l\mathcal{C}_l$ podkołczanu $\mathcal{C}_l$. Dalej, ponieważ Y_m nie należy do $\mathcal{E}$, zaś Y_0 należy do $\mathcal{E}$ wnosimy, że istnieje liczba $n \in \{0, \ldots, m-1\}$, dla której moduły $Y_0, \ldots, Y_n$ należą do $\mathcal{E}$, zaś $Y_{n+1}, \ldots, Y_m \notin \mathcal{E}$. Wówczas albo $t = m-1$ i wtedy przyjmujemy $R_i := Y_n$ oraz $P_{(i)} := Y_{n+1} = Y_m$, albo $t < m-1$ i w tej sytuacji $Y_{t+1} \in {}_l\mathcal{C}_l$ nie należy do $\mathcal{E}$, a więc na mocy definicji, musi mieć co najmniej jednego poprzednika Z w $\mathcal{C}$, który nie należy do ${}_l\mathcal{C}$. W szczególności, istnieje wtedy droga w $\mathcal{C}$ postaci $Z = Z_0 \to Z_1 \to \cdots \to Z_k$, gdzie $Z_k = Y_{t+1}$ i Z_0 jest projektywny, przy czym możemy zakładać, że $k \geqslant 1$ i moduły $Z_1, \ldots, Z_k$ nie są projektywne. Wtedy jednak mamy w $\mathcal{C}$ również drogę postaci

$$\tau_A Z_1 \to \cdots \to \tau_A Z_k = \tau_A Y_{t+1} \to Y_t,$$

ponieważ istnieje strzałka $Y_t \to Y_{t+1}$, a to implikuje, że moduł $R_i := \tau_A Z_1$ należy do $\mathcal{E}$, gdyż jest poprzednikiem modułu Y_t należącego do podkołczanu $\mathcal{E}$ zamkniętego na poprzedniki. Ostatecznie zauważmy, że wówczas mamy strzałkę $Z = Z_0 \to Z_1$, a więc i strzałkę $\tau_A Z_1 = R_i \to Z$, czyli wystarczy teraz za $P_{(i)}$ przyjąć moduł Z.

Oczywiście wiadomo, że każda z rodzin $\mathcal{T}^{B_i} = (\mathcal{T}_\lambda^{B_i})_{\lambda \in \Lambda_i}$, dla $i \in \{1, \ldots, p\}$, jest rodziną wszystkich (parami ortogonalnych) tub promieniowych w kołczanie Γ_{B_i} algebry odwróconej B_i, przy czym każda algebra B_i jest tubularnym rozszerzeniem pewnej (ilorazowej) oswojonej algebry utajonej C_i. Wtedy kołczan Γ_B algebry B zawiera rozłączną sumę $\mathcal{T}^B = (\mathcal{T}_\lambda^B)_{\lambda \in \Lambda = \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_p}$ rodzin $\mathcal{T}^{B_i}$, $i \in \{1, \ldots, p\}$, gdzie $\mathcal{T}_\lambda^B = \mathcal{T}_\lambda^{B_i}$, o ile $\lambda \in \Lambda_i$. Zauważmy dalej, że oczywiście na mocy Lematu 4.1.3 dla każdej tuby $\mathcal{T}_\lambda^{B_i}$ w $\mathcal{T}^{B_i}$, $\lambda \in \Lambda_i$, istnieje dokładnie jedna składowa $\mathcal{T}_\lambda^A := \mathcal{T}_\lambda^A(B_i)$ w Γ_A, zawierająca wszystkie moduły z (nieskończonej) części cyklicznej ${}_c\mathcal{T}_\lambda^{B_i}$ tuby promieniowej $\mathcal{T}_\lambda^{B_i}$ w Γ_{B_i}. Co więcej, bezpośrednio ze Stwierdzenia 5.1.1 wynika, że wówczas dla dowolnego $\lambda \in \Lambda_i$, składowa $\mathcal{T}_\lambda^A$ jest półregularną tubą w Γ_A, ponieważ ${}_c\mathcal{T}_\lambda^A$ posiada nieskończoną (spójną) składową zawierającą wszystkie moduły należące do ${}_c\mathcal{T}_\lambda^B$. To pokazuje, że rodzina $\mathcal{T}^A(B_i) = (\mathcal{T}_\lambda^A)_{\lambda \in \Lambda_i}$ jest rodziną półregularnych tub w Γ_A zawierającą wszystkie moduły z ${}_c\mathcal{T}^{B_i}$. Dalej, mamy $\mathcal{T}_\lambda^A(B_i) = \mathcal{T}_\lambda^A(C_i)$, dla każdego $\lambda \in \Lambda_i$, zatem korzystając z Twierdzenia 4.3.5, wnioskujemy, że $\mathcal{T}_\lambda^A \neq \mathcal{T}_\mu^A$ dla dowolnych $\lambda \neq \mu$ w Λ_i, oraz dla prawie wszystkich $\lambda \in \Lambda_i$, zachodzi równość $\mathcal{T}_\lambda^A = \mathcal{T}_\lambda^{B_i}$. Łatwo także zauważyć, że składowe w $\mathcal{T}^A$ są parami ortogonalne; ponadto, wszystkie tuby w $\mathcal{T}_\lambda^A$, $\lambda \in \Lambda_i$, są uogólnionymi standardowymi składowymi, na podstawie Twierdzenia 4.1.1.

Pokażemy teraz, że $\mathcal{T}^A(B_i)$ składa się wyłącznie z tub promieniowych w Γ_A. Załóżmy zatem że jest przeciwnie, to znaczy, że istnieje λ_0 z Λ_i, dla którego tuba $\mathcal{T}_{\lambda_0}^A$ jest tubą kopromieniową zawierającą pewien moduł injektywny. Wówczas tuba promieniowa $\mathcal{T}_{\lambda_0}^B$ jest stabilną tubą w Γ_{B_i} na mocy Stwierdzenia 1.7.4, a więc istnieje moduł nierozkładalny V leżący na ustach $\mathcal{T}_{\lambda_0}^B$, który jest składnikiem prostym modułu $I/\operatorname{soc} I$, dla pewnego (nierozkładalnego) modułu injektywnego I w $\mathcal{T}_{\lambda_0}^A$. Wykorzystując teraz Lemat 3.4.4(a) wnosimy, że istnieje nieskończenie wiele parami nieizomorficznych modułów nierozkładalnych

X_n, $n \in \mathbb{N}_0$, w $\mathcal{Q}(B_i)$, które spełniają

$$\operatorname{Hom}_B(V, \tau_B X_n) \neq 0 \quad \text{oraz} \quad \operatorname{Hom}_B(\tau_B^{-1} X_n, R_i) \neq 0,$$

dla wszystkich $n \geqslant 0$. Wtedy jednak $\operatorname{Hom}_A(I, \tau_A X_n) \neq 0$ oraz $\operatorname{Hom}_A(\tau_A^{-1} Y_n, P_{(i)}) \neq 0$, dla wszystkich $n \geqslant 0$, gdyż istnieje nieprzywiedlny epimorfizm $I \to V$ oraz nieprzywiedlny monomorfizm $R_i \to P_{(i)}$ (w $\operatorname{mod} A$). W tej sytuacji na mocy Lematu 1.4.5 wnioskujemy, że nieskończenie wiele parami nieizomorficznych modułów nierozkładalnych X_n, $n \geqslant 0$, w składowej $\mathcal{C}$ ma $\operatorname{pd}_A X_n \geqslant 2$ oraz $\operatorname{id}_A Y_n \geqslant 2$, co przeczy warunkowi (*a*). Dalej analogicznie na mocy Lematu 3.4.4(b) wnioskujemy, że istnieje nieskończenie wiele parami nieizomorficznych modułów nierozkładalnych Y_n w $\mathcal{Q}(B_i)$, które spełniają $\operatorname{Hom}_A(I, Y_n) \neq 0$ oraz $\operatorname{Hom}_A(Y_n, P_{(i)})$, dla wszystkich $n \geqslant 0$. To natomiast prowadzi do sprzeczności z warunkiem (*b*). Stosując ostatecznie podpunkt (*c*) z Lematu 3.4.4 wnosimy, że składowa $\mathcal{Q}(B_i)$ zawiera również nieskończenie wiele parami nieizomorficznych modułów nierozkładalnych Z_n, $n \geqslant 0$, spełniających

$$\operatorname{Hom}_B(I, \tau_B Z_n) \neq 0 \quad \text{oraz} \quad \operatorname{Hom}_B(Z_n, R_i) \neq 0,$$

dla $n \geqslant 0$. Wówczas jednak, jeśli M jest modułem dokładnym M w $\operatorname{mod} A$, to mamy epimorfizm $M^s \to I$ oraz monomorfizm $R_i \to M^t$, skąd wnosimy, że $\operatorname{Hom}_A(M, \tau_A Z_n) \neq 0$ oraz $\operatorname{Hom}_A(Z_n, M) \neq 0$, dla każdego $n \geqslant 0$. W rezultacie, każdy moduł dokładny M w $\operatorname{mod} A$ jest w tej sytuacji środkiem nieskończenie wielu krótkich łańcuchów w $\operatorname{mod} A$ postaci $Z_n \to M \to \tau_A Z_n$, co z kolei przeczy warunkowi (*c*). Tym samym pokazaliśmy, że dla każdego $i \in \{1, \ldots, p\}$, rodzina $\mathcal{T}^A(B_i)$ faktycznie nie zawiera żadnej nieregularnej tuby kopromieniowej, to znaczy, składa się wyłącznie z tub promieniowych. W szczególności $\mathcal{T}^A := \mathcal{T}^A(B) = \mathcal{T}^A(B_1) \cup \cdots \cup \mathcal{T}^A(B_p)$ jest rodziną składowych w Γ_A zawierającą wszystkie moduły z $\mathcal{T}^B$.

Ostatnim krokiem będzie pokazanie, że w istocie mamy $\mathcal{T}^A = \mathcal{T}^B$. Zauważmy na początek, że dowolna tuba $\mathcal{T}_\lambda^A$ z $\mathcal{T}^A = {}_r\mathcal{T}^A$, $\lambda \in \Lambda_i$, jest uogólnioną standardową tubą promieniową w Γ_A na mocy Twierdzenia 4.1.1 oraz wszystkie promienie w $\mathcal{T}_\lambda^B$ są również promieniami w $\mathcal{T}_\lambda^A$, zatem w konsekwencji, $\mathcal{T}_\lambda^A$ jest wtedy otrzymana z $\mathcal{T}_\lambda^B$ przez skończoną liczbę (być może równą zero) operacji wstawień promieniowych; patrz również Stwierdzenie 1.7.5. Dalej, $\mathcal{T}^A$ jest dokładną rodziną składowych w $\Gamma_{A'}$, gdzie $A' = A/\operatorname{Ann}(\mathcal{T}^A)$, a więc ze Stwierdzenia 1.7.5 wynika, że A' jest $\mathcal{T}^B$-tubularnym rozszerzeniem algebry B, oraz, że B jest wypukłą podkategorią w $A' = (A')^*$. Przypuśćmy wbrew naszej tezie, że $\mathcal{T}^B \neq \mathcal{T}^A$. Wtedy można rozłożyć A' w $\operatorname{mod} A'$ na sumę prostą A'-modułów projektywnych postaci $A' = P \oplus Q$, w taki sposób, że P jest sumą prostą wszystkich modułów projektywnych w $\operatorname{ind} B$ oraz $\operatorname{End}_{A'}(P) = \operatorname{End}_B(P) \cong B$ i $\operatorname{Hom}_{A'}(Q, P) = 0$, zaś $Q \neq 0$ jest sumą prostą wszystkich modułów projektywnych w $\mathcal{T}^A$, które nie są modułami w $\operatorname{ind} B$, to znaczy leżą na promieniach w $\mathcal{T}_\lambda^A$, które nie są promieniami w $\mathcal{T}_\lambda^B$. W szczególności zachodzi również izomorfizm algebr

$$A' \cong \begin{bmatrix} F & U \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

gdzie $F = \operatorname{End}_{A'}(Q)$ oraz U jest (niezerowym) (F-B)-bimodułem $U = \operatorname{Hom}_{A'}(P, Q)$ takim, że moduł U_B należy do $\operatorname{add} \mathcal{T}^B$. Niech U' będzie dowolnym nierozkładalnym składnikiem prostym modułu $U = U_B$ w $\operatorname{ind} B$ oraz przyjmijmy, że U' należy do tuby z $\mathcal{T}^{B_i}$, dla ustalonego $i \in \{1, \ldots, p\}$. Wówczas oczywiście istnieje nieskończenie wiele modułów Y_n, $n \geqslant 0$, leżących w części beztorsyjnej $\mathcal{Y}_i := \mathcal{Y}(T_i) \cap \mathcal{C}_{T_i}$ składowej łączącej $\mathcal{C}_{T_i}$ w Γ_{B_i} takich, że $\operatorname{Hom}_B(U', Y_n) \neq 0$, dla każdego $n \geqslant 0$. Ponieważ $\mathcal{Y}_i$ jest zamknięta na branie poprzedników w preinjektywnej składowej łączącej kołczanu Γ_{B_i}, wnosimy, że istnieje liczba całkowita $n_0 \geqslant 0$, dla której moduł $Z_0 := \tau_{B_i}^{-1} Y_{n_0}$ należy do $\mathcal{Y}_i$. Z drugiej strony, ponieważ $\mathcal{Y}_i$ jest zamknięta na branie poprzedników w $\mathcal{D}^i$ (oraz w $\mathcal{C}$), otrzymujemy teraz, że dowolny ciąg prawie rozszczepialny $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ w $\operatorname{mod} A$ z modułem Z w $\mathcal{Y}_i$ jest jednocześnie ciągiem prawie rozszczepialnym w $\operatorname{mod} B_i$, a więc zachodzi również $\tau_A Z = \tau_{B_i} Z$. W konsekwencji wnioskujemy, że istnieje ciąg prawie rozszczepialny w $\operatorname{mod} A$ postaci $0 \to Y_{n_0} \to E \to Z_0 \to 0$, który jest ciągiem prawie rozszczepialnym w $\operatorname{mod} B$. Zauważmy ostatecznie, że B jest algebrą ilorazową algebry A', zatem B-moduły są A'-modułami, skąd powyższy ciąg jest również prawie rozszczepialny w $\operatorname{mod} A'$. To jest jednak niemożliwe, gdyż $\operatorname{Hom}_B(U', Y_{n_0}) \neq 0$, więc $\operatorname{Hom}_B(U, Y_{n_0}) \neq 0$, a stąd na mocy Lematu 1.4.7 prawie rozszczepialny ciąg $0 \to Y_{n_0} \to E \to Z_0 \to 0$ w $\operatorname{mod} B$ nie może być prawie rozszczepialny w $\operatorname{mod} A'$. Otrzymana sprzeczność dowodzi ostatecznie, że $\mathcal{T}^B = \mathcal{T}^A$ jest rodziną tub promieniowych w Γ_A, co kończy dowód (4). □

5.2 Dowód Twierdzenia A ·

Ze względu na istotną złożoność problemu, dowód zostanie dalej przeprowadzony w dwóch podprzypadkach, w każdym z których przyjmujemy naturalne (wykluczające się) założenia o strukturze kołczanu Auslandera-Reiten wyjściowej algebry A, a ściślej: o typach składowych występujących w Γ_A. W pierwszym omawianym poniżej przypadku półregularnym, kluczowa okazuje się pełna wiedza o strukturze kołczanu Auslandera-Reiten algebr cyklowo skończonych półregularnego typu, którą przygotowaliśmy w tym celu w sekcji 4.3. W dalszej części zajmujemy się pozostałym obszerniejszym przypadkiem, gdzie istotnie wykorzystywane będą wyniki prezentowane w poprzedniej sekcji.

Przypadek półregularny · Wykorzystując znany opis struktury algebr cyklowo skończonych półregularnego typu (patrz Twiedzenie 4.3.8), udowodnimy poniżej następujący pierwszy częściowy wynik, który dowodzi prawdziwości Twierdzenia A w przypadku półregularnym.

Twierdzenie 5.2.1. *Niech A będzie algebrą cyklowo skończoną półregularnego typu. Następujące warunki są wówczas równoważne.*

(i) A jest oswojoną algebrą quazi-odwróconą kanonicznego typu.

(ii) Dla prawie wszystkich klas izomorfizmu modułów X w $\operatorname{ind} A$ *mamy* $\operatorname{pd}_A X \leqslant 1$ *lub* $\operatorname{id}_A X \leqslant 1$.

(iii) Dla prawie wszystkich klas izomorfizmu modułów X w $\operatorname{ind} A$, *zachodzi*

$$\operatorname{Hom}_A(D(A), X) = 0 \quad \textit{lub} \quad \operatorname{Hom}_A(X, A) = 0.$$

Dowód · Oczywiście, implikacje (i)⇒(ii) oraz (i)⇒(iii) jasno wynikają ze znanych własności homologicznych algebr quazi-odwróconych (patrz Twierdzenie 2.5.1, Twierdzenie 3.3.1 oraz Wniosek 3.3.2). Załóżmy teraz, że zachodzi jeden z warunków (ii) lub (iii). Wykażemy dalej, że A jest oswojoną algebrą quazi-odwróconą kanonicznego typu. Ponieważ A jest algebrą cyklowo skończoną półregularnego typu, wnioskujemy z Twierdzenia 4.3.8, że A jest algebrą postaci $A = A(\mathbb{B})$ stowarzyszoną z pewnym zgodnym ciągiem $\mathbb{B} = (B_1, \ldots, B_n)$ oswojonych algebr quazi-odwróconych $B_1, \ldots, B_n$ typu kanonicznego. W szczególności, z definicji każda algebra B_i, dla $i \in \{1, \ldots, n\}$, jest oswojonym półregularnym powiększeniem pewnej oswojonej ilorazowej algebry utajonej C_i, to znaczy algebry $B_i^{(l)}$ oraz $B_i^{(r)}$ są odwrócone typu Euklidesa albo tubularne. Będziemy poniżej swobodnie korzystać z oznaczeń wprowadzonych w sformułowaniu Twierdzenia 4.3.2.

Przypuśćmy wbrew tezie, że A nie jest oswojoną algebrą quazi-odwróconą typu kanonicznego. Wtedy na mocy Wniosku 4.3.3 istnieje $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ takie, że kołczan Γ_A jest postaci

$$\Gamma_A = \mathcal{P}_i^{\mathbb{B}} \cup \mathcal{T}_i^{\mathbb{B}} \cup \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap (i, i+1)} \mathcal{T}_q^{\mathbb{B}} \cup \mathcal{T}_{i+1}^{\mathbb{B}} \cup \mathcal{Q}_{i+1}^{\mathbb{B}},$$

gdzie $\mathcal{P}_i^{\mathbb{B}} = \mathcal{P}^{\mathbb{B}} \cup \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [1,i)} \mathcal{T}_q^{\mathbb{B}}$, $\mathcal{Q}_{i+1}^{\mathbb{B}} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap (i+1, n]} \mathcal{T}_q^{\mathbb{B}} \cup \mathcal{Q}^{\mathbb{B}}$ oraz

- $\mathcal{T}_i^{\mathbb{B}}$ zawiera co najmniej jedną nieregularną tubę kopromieniową, zaś rodzina $\mathcal{T}_{i+1}^{\mathbb{B}}$ co najmniej jedną nieregularną tubę promieniową.
- Dla każdego $q \in \mathbb{Q} \cap (i, i+1)$, $\mathcal{T}_q^{\mathbb{B}}$ jest rodziną $(\mathcal{T}_{q,\lambda}^{\mathbb{B}})_{\lambda \in \Lambda_q}$ stabilnych tub w kołczanie Auslandera-Reiten algebry tubularnej $B_i^{(r)} = B_{i+1}^{(l)}$.

Weźmy teraz dowolną tubę kopromieniową $\mathcal{T}_{i,\xi}^{\mathbb{B}}$ z $\xi \in \Lambda_i$, zawierającą co najmniej jeden moduł injektywny. Dualnie, niech $\mathcal{T}_{i+1,\mu}^{\mathbb{B}}$, gdzie $\mu \in \Lambda_{i+1}$, będzie dowolną tubą promieniową z $\mathcal{T}_{i+1}^{\mathbb{B}}$ zawierającą co najmniej jeden moduł projektywny. Ustalamy również indeks $q \in \mathbb{Q} \cap (i, i+1)$, oraz rozważmy dowolną stabilną tubę $\mathcal{T}_{q,\eta}^{\mathbb{B}}$ z $\mathcal{T}_q^{\mathbb{B}}$, $\eta \in \Lambda_q$.

Zauważmy, że tuba kopromieniowa $\mathcal{T}_{i,\xi}^{\mathbb{B}}$ jest otrzymana z jedynej stabilnej tuby $\mathcal{T}_{\xi}^{C_i}$ należącej do separującej rodziny stabilnych tub $\mathcal{T}^{C_i}$ kołczanu Γ_{C_i}, poprzez skończoną liczbę operacji wstawień kopromieniowych. Analogicznie tuba promieniowa $\mathcal{T}^{\mathbb{B}}_{i+1,\mu}$ otrzymana jest z jedynej stabilnej tuby $\mathcal{T}^{C_{i+1}}_{\mu}$ należącej do separującej rodziny stabilnych tub $\mathcal{T}^{C_{i+1}}$ kołczanu $\Gamma_{C_{i+1}}$, poprzez skończoną liczbę operacji wstawień promieniowych. W tej sytuacji

- Istnieje nierozkładalny moduł injektywny I w $\mathcal{T}^{\mathbb{B}}_{i,\xi}$ oraz nierozkładalny składnik prosty M modułu $I/\operatorname{soc}(I)$, który należy do tuby stabilnej $\mathcal{T}^{C_i}_{\xi}$; w szczególności więc istnieje nieprzywiedlny epimorfizm w $\operatorname{mod} A$ postaci $I \to M$.

- Istnieje nierozkładalny moduł projektywny P w $\mathcal{T}^{\mathbb{B}}_{i+1,\mu}$ oraz nierozkładalny składnik prosty N radykału $\operatorname{rad} P$ taki, że N należy do stabilnej tuby $\mathcal{T}^{C_{i+1}}_{\mu}$; mamy w konsekwencji nieprzywiedlny monomorfizm w $\operatorname{mod} A$ postaci $N \to P$.

Ostatecznie, rozważmy dowolną injektywną powłokę $f : M \to I(M)$ modułu M w $\operatorname{mod} A$. Ponieważ M jest modułem w $\operatorname{ind} C_i$ otrzymujemy, że moduł injektywny $I(M)$ w $\operatorname{mod} A$ nie ma żadnego nierozkładalnego składnika prostego należącego do $\mathcal{T}^{\mathbb{B}}_{i}$. W konsekwencji więc $I(M)$ jest zawarty w $\operatorname{add}(\mathcal{T}^{\mathbb{B}}_{i+1} \cup \mathcal{Q}^{\mathbb{B}}_{i+1})$. Stosując teraz własność faktoryzacji z Twierdzenia 4.3.2(4) wnioskujemy, że f faktoryzuje się przez moduł z $\operatorname{add}(\mathcal{T}^{\mathbb{B}}_{q,\eta})$. Zatem w takim razie $\operatorname{Hom}_A(M, U) \neq 0$, dla pewnego modułu nierozkładalnego U leżącego w tubie $\mathcal{T}^{\mathbb{B}}_{q,\eta}$. Jest oczywiście jasne, że wtedy zachodzi także $\operatorname{Hom}_A(I, U) \neq 0$, ponieważ mamy epimorfizm $I \to M$. Teraz na mocy Lematu 1.7.7 konkludujemy, że $\operatorname{Hom}_A(I, X) \neq 0$, dla prawie wszystkich modułów nierozkładalnych X z $\mathcal{T}^{\mathbb{B}}_{q,\eta}$.

Dualnie, rozważmy dowolne nakrycie projektywne $g : P(N) \to N$ modułu N w $\operatorname{mod} A$. Ponieważ N jest nierozkładalnym modułem w $\operatorname{mod} C_{i+1}$ otrzymujemy, że moduł $P(N)$ w $\operatorname{mod} A$ nie ma żadnego nierozkładalnego składnika prostego należącego do $\mathcal{T}^{\mathbb{B}}_{i+1}$. W rezultacie dowolny składnik prosty $P(N)$ należy do $\mathcal{P}^{\mathbb{B}}_{i} \cup \mathcal{T}^{\mathbb{B}}_{i}$. Stosując ponownie Twierdzenie 4.3.2(4) wnioskujemy, że homomorfizm $g : P(N) \to N$ również faktoryzuje się przez moduł z $\operatorname{add}(\mathcal{T}^{\mathbb{B}}_{q,\eta})$. Tak więc $\operatorname{Hom}_A(V, N) \neq 0$, dla pewnego nierozkładalnego modułu V z $\mathcal{T}^{\mathbb{B}}_{q,\eta}$. Wówczas, mamy trywialnie także $\operatorname{Hom}_A(V, P) \neq 0$, ponieważ istnieje monomorfizm $N \to P$. Stąd ponownie na mocy Lematu 1.7.7 otrzymujemy teraz, że $\operatorname{Hom}_A(X, P) \neq 0$, dla prawie wszystkich modułów nierozkładalnych X z $\mathcal{T}^{\mathbb{B}}_{q,\eta}$.

Podsumowując pokazaliśmy powyżej, że jeżeli A nie jest oswojoną algebrą quazi-odwróconą kanonicznego typu, to dla prawie wszystkich modułów X leżących w stabilnej tubie $\mathcal{T}^{\mathbb{B}}_{q,\eta}$ zachodzi $\operatorname{Hom}_A(I, X) \neq 0$ oraz $\operatorname{Hom}_A(X, P) \neq 0$. W szczególności implikuje to, że istnieje nieskończenie wiele modułów leżących na środkach krótkich dróg w $\operatorname{ind} A$ postaci $I \to * \to P$, co natomiast przeczy warunkowi (iii). Z drugiej jednak strony, implikuje to również, że tylko skończenie wiele τ_A-orbit w $\mathcal{T}^{\mathbb{B}}_{q,\eta}$ zawiera moduły X, dla których $\operatorname{Hom}_A(I, X) = \operatorname{Hom}_A(X, P) = 0$, zatem $\operatorname{Hom}_A(I, \tau_A X) \neq 0$ oraz $\operatorname{Hom}_A(\tau_A^{-1} X, P) \neq 0$, dla nieskończenie wielu modułów X w $\mathcal{T}^{\mathbb{B}}_{q,\eta}$, co zaś prowadzi do sprzeczności z warunkiem (ii) na mocy Lematu 1.4.5. Otrzymane sprzeczności pokazują konsekwentnie, że A musi być wówczas oswojoną algebrą quazi-odwróconą kanonicznego typu. To kończy dowód. □

Przypadek niepółregularny · W tej części rozważamy pozostający przypadek, gdzie zakładamy oczywiście, że Γ_A zawiera co najmniej jedną niepółregularną składową. Udowodnione dalej Twierdzenie 5.2.2 stanowi kolejny częściowy wynik dopełniający dowód pierwszego głównego twierdzenia rozprawy.

Twierdzenie 5.2.2. *Niech A będzie algebrą cyklowo skończoną, dla której kołczan Γ_A zawiera co najmniej jedną składową niepółregularną. Wtedy następujące warunki są równoważne.*

(i) A jest uogólnioną algebrą podwójnie odwróconą.

(ii) Dla prawie wszystkich klas izomorfizmu modułów X w $\operatorname{ind} A$ mamy $\operatorname{pd}_A X \leqslant 1$ lub $\operatorname{id}_A X \leqslant 1$.

(iii) Dla prawie wszystkich klas izomorfizmu modułów X w $\operatorname{ind} A$, zachodzi

$$\operatorname{Hom}_A(D(A), X) = 0 \quad \textit{lub} \quad \operatorname{Hom}_A(X, A) = 0.$$

Dowód · Odnotujmy na początku, że ze znanych homologicznych własności kategorii modułów uogólnionych algebr podwójnie odwróconych (patrz Twierdzenie 3.3.4 oraz Wniosek 2.7.10), natychmiast jasno wynika prawdziwość obu implikacji (i)⇒(ii) oraz (i)⇒(iii). Pokażemy, że prawdziwe są również implikacje odwrotne (iii)⇒(i) oraz (ii)⇒(i), których dowody przeprowadzamy wspólnie poniżej. Załóżmy zatem, że zachodzi jeden z warunków (ii) lub (iii). Będziemy dowodzić, że A jest uogólnioną algebrą podwójnie odwróconą. Zauważmy, że gdy A jest algebrą skończonego reprezentacyjnego typu, to oczywiście A jest wtedy uogólnioną algebrą podwójnie odwróconą (patrz Wniosek 2.7.8), a więc nie ma czego dowodzić. Toteż zakładamy odtąd, że A jest nieskończonego reprezentacyjnego typu; wtedy oczywiście każda składowa kołczanu Γ_A jest nieskończona na mocy Twierdzenia Auslandera [49, patrz Theorem III.10.2] oraz spójności algebry A.

Niech $\mathcal{C}$ będzie dowolną niepółregularną składową w Γ_A. Na mocy Lematu 5.1.1 składowa $\mathcal{C}$ jest prawie acykliczna, a więc zawiera pewną wielosekcję, którą oznaczmy symbolem Δ; patrz także Twierdzenie 2.7.5. Oczywiście mamy wtedy rozkład nieskończonej składowej $\mathcal{C}$ na rozłączną sumę $\mathcal{C} = \mathcal{C}_l \cup \Sigma(\mathcal{C}) \cup \mathcal{C}_r$, gdzie $\Sigma(\mathcal{C})$ jest skończonym rdzeniem Δ_c wielosekcji Δ (patrz Stwierdzenie 2.7.3), i w konsekwencji otrzymujemy, że jeden z podkołczanów $\mathcal{C}_l = \mathcal{C}_l(\Delta)$ lub $\mathcal{C}_r = \mathcal{C}_r(\Delta)$ musi być nieskończony.

Załóżmy, że podkołczan $\mathcal{C}_l$ jest nieskończony. Przez $\mathcal{D}$ oznaczać będziemy podkołczan $\mathcal{C}_{ll}(\Delta)$ kołczanu $\mathcal{C}_l$, zaś przez B stowarzyszoną algebrę ilorazową $B = B_l(\Delta) = B_1 \times \cdots \times B_p$, $p \geqslant 1$, algebry A, które zostały opisane w Lemacie 5.1.2. Przypominamy również, że kołczan Γ_B algebry B jest postaci $\mathcal{P}^B \cup \mathcal{T}^B \cup \mathcal{Q}^B$, gdzie $\mathcal{P}^B$ jest rodziną postprojektywnych składowych w Γ_B, $\mathcal{T}^B$ jest rodziną parami ortogonalnych tub promieniowych w Γ_B, które tworzą również rodzinę $\mathcal{T}^B = \mathcal{T}^A$ składowych w Γ_A, zaś $\mathcal{Q}^B$ jest rodziną preinjektywnych składowych łączących w odpowiednich spójnych blokach algebry B. Co więcej, wszystkie moduły należące do $\mathcal{D}$ są B-modułami w $\mathcal{Q}^B$ oraz części beztorsyjne składowych łączących z $\mathcal{Q}^B$ są podkołczanami spójnych składowych $\mathcal{D}$ zamkniętymi na branie poprzedników w $\mathcal{C}$.

(1) Rozpoczynamy od udowodnienia, że $\mathcal{C}$ jest dokładną składową w kołczanie Γ_A algebry A. Rozważmy w tym celu algebrę ilorazową $A(\mathcal{C}) = A/I$ algebry A, gdzie I jest ideałem anihilującym $I = \operatorname{Ann}_A(\mathcal{C}) \lhd A$. Nietrudno zauważyć, że $I = \operatorname{Ann}_A(\mathcal{T}^A \cup \mathcal{C})$, toteż $\mathcal{T}^A \cup \mathcal{C}$ jest również dokładną rodziną składowych w $\Gamma_{A(\mathcal{C})}$. Twierdzimy, że wszystkie moduły projektywne w $\operatorname{ind} A(\mathcal{C})$ są również modułami projektywnymi w $\operatorname{ind} A$. Oczywiście, moduły projektywne w $\operatorname{ind} A(\mathcal{C})$ należą albo do składowej $\mathcal{C}$, albo są projektywne w $\operatorname{ind} B$, a więc należą do $\mathcal{P}^B \cup \mathcal{T}^B$. Z drugiej strony $\mathcal{T}^B$ jest rodziną $\mathcal{T}^B = \mathcal{T}^A(B)$ tub promieniowych w Γ_A, a więc moduły projektywne w $\operatorname{ind} A(\mathcal{C})$ należące do $\mathcal{T}^A \cup \mathcal{C}$ są projektywne w $\operatorname{ind} A$, zatem należy jedynie pokazać, że moduły projektywne w $\operatorname{ind} A(\mathcal{C})$ zawarte w składowych z $\mathcal{P}^B$ są również projektywne w $\operatorname{ind} A$. Wystarczy w tym celu zauważyć, że każda z algebr B_i, dla $i \in \{1, \ldots, p\}$, jest tubularnym rozszerzeniem pewnej oswojonej utajonej algebry ilorazowej C_i algebry B, skąd wnosimy, że moduły projektywne w $\operatorname{ind} B$ należące do $\mathcal{P}^B$ są projektywne w $\operatorname{ind} C_i$, dla pewnego $i \in \{1, \ldots, p\}$. Odnotujmy teraz tylko, że każda algebra C_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, jest oswojoną utajoną algebrą ilorazową cyklowo skończonej algebry A, zatem na mocy Stwierdzenia 4.2.5(3), C_i jest izomorficzna z algebrą postaci e^iAe^i, dla pewnego wypukłego idempotenta e^i algebry A. W szczególności więc, kategoria $\operatorname{mod} C_i$ zanurza się jako pełna i dokładna podkategoria w $\operatorname{mod} A$ składająca się ze wszystkich modułów X w $\operatorname{mod} A$, dla których $Xf^i = 0$, gdzie $f^i = 1_A - e^i$. To natomiast implikuje, że $\operatorname{Hom}_A(f^iA, e^iA) = 0$, a więc $C_i \cong e^iAe^i \cong \operatorname{Hom}_A(e^iA, e^iA) \cong \operatorname{Hom}_A(A, e^iA) \cong e^iA$, skąd otrzymujemy, że wszystkie moduły projektywne w $\operatorname{ind} C_i$ są także projektywne w $\operatorname{ind} A$. W konsekwencji, wszystkie moduły projektywne w $\operatorname{ind} A(\mathcal{C})$ są projektywne w $\operatorname{ind} A$. Wykorzystując dualne argumenty łatwo udowodnić, że jeżeli podkołczan $\mathcal{C}_r$ jest nieskończony, to również wszystkie moduły injektywne w $\operatorname{ind} A(\mathcal{C})$ są injektywne w $\operatorname{ind} A$. Jeśli natomiast prawa część $\mathcal{C}_r$ składowej $\mathcal{C}$ jest skończona, to wszystkie moduły injektywne w $\operatorname{ind} A(\mathcal{C})$ należą do $\mathcal{C}$, a zatem również w tym przypadku są injektywne w $\operatorname{ind} A$. Reasumując, pokazaliśmy powyżej, że wszystkie nierozkładalne $A(\mathcal{C})$-moduły projektywne i injektywne są odpowiednio, projektywne i injektywne w $\operatorname{ind} A$. Dokładność składowej $\mathcal{C}$ w Γ jest teraz konsekwencją Lematu 1.3.5.

(2) Ostatecznie dowiedziemy, że składowa $\mathcal{C}$ jest uogólnioną standardową składową w Γ_A. Na mocy argumentacji przedstawionej w (1) wnioskujemy, że $A = A(\mathcal{C}) = P \oplus P'$ jest izomorficzna z algebrą

macierzową postaci

$$\begin{bmatrix} \Gamma & V \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

gdzie P' jest sumą prostą wszystkich modułów projektywnych w $\operatorname{ind} A$ należących do $\mathcal{C}$ oraz $\Gamma = \operatorname{End}_A(P')$, zaś V jest $(\Gamma\text{-}B)$-bimodułem $V = \operatorname{Hom}_A(P, P')$ z V_B w $\operatorname{add} \mathcal{Q}^B$. W tej sytuacji kategorię modułów $\operatorname{mod} A$ możemy utożsamiać z kategorią opisaną w 1.2, której obiektami są trójki postaci (Y_0, Y_1, φ), gdzie Y_0 jest modułem w $\operatorname{mod}\Gamma$, Y_1 modułem w $\operatorname{mod} B$, zaś $\varphi : Y_0 \to \operatorname{Hom}_B(V, Y_1)$ jest pewnym homomorfizmem w $\operatorname{mod}\Gamma$.

Pokażemy najpierw, że istnieje podkołczan $\mathcal{E}$ kołczanu $\mathcal{D}$ zawierający prawie wszystkie moduły z $\mathcal{D}$ oraz spełniający następujący warunek: *każdy poprzednik w* $\operatorname{ind} A$ *modułu należącego do* $\mathcal{E}$ *jest modułem w* $\operatorname{ind} B$. W istocie, niech $\mathcal{I}$ będzie pełnym podkołczanem w $\mathcal{D}$ składających się ze wszystkich modułów, które nie mają injektywnych poprzedników w Γ_A oraz przyjmijmy $\mathcal{E} := \tau_A \mathcal{I}$. Ponieważ $\mathcal{D}$ zawiera co najwyżej skończenie wiele modułów injektywnych, wnosimy, że $\mathcal{I}$, a więc również $\mathcal{E}$, jest koskończonym podkołczanem w $\mathcal{D}$ zamkniętym na branie poprzedników. Uzasadnimy teraz, że $\mathcal{E}$ spełnia powyżej sformułowany warunek. Rozważmy w tym celu ustalony moduł X należący do $\mathcal{E}$. W szczególności, wówczas moduł X nie jest modułem injektywnym w $\operatorname{ind} A$ oraz $\tau_A^{-1} X \neq 0$ należy do $\mathcal{I}$; przypominamy również, że X jest B-modułem, a więc jako moduł w $\operatorname{ind} A$ identyfikowany będzie z trójką $(X_0, X_1; \psi) = (0, X; 0)$. Dalej, niech $Y = (Y_0, Y_1; \varphi)$ będzie dowolnym modułem w $\operatorname{ind} A$, zaś $h : Y \to X$ pewnym niezerowym nieizomorfizmem, który przy powyższym utożsamieniu kategorii $\operatorname{mod} A$ z kategorią trójek, odpowiada parze (h_0, h_1) homomorfizmów $h_0 \in \operatorname{Hom}_\Gamma(Y_0, X_0)$ oraz $h_1 \in \operatorname{Hom}_B(Y_1, X_1)$ takiej, że $\operatorname{Hom}_B(V, h_1)\varphi = \psi h_0$. Ponieważ $X_0 = 0$, wnioskujemy stąd, że $h_0 = 0$, zatem $h = (0, h_1)$ oraz istnieje niezerowy homomorfizm $h_1 : Y_1 \to X_1$ w $\operatorname{mod} B$. Oznacza to, że $\operatorname{Hom}_B(Y', X) \neq 0$, dla pewnego nierozkładalnego składnika prostego Y' modułu Y_1. Twierdzimy, że wówczas $\varphi = 0$. Zauważmy bowiem, że gdyby $\varphi \neq 0$, to Lemat 1.2.4 implikuje $\operatorname{Hom}_B(V, Y') \neq 0$. Z drugiej strony, przypominamy, że nierozkładalne składniki proste modułu V_B należą do $\operatorname{add}(\mathcal{Q}^B)$, skąd oczywiście $\operatorname{Hom}_B(V, \mathcal{P}^B \cup \mathcal{T}^B) = 0$, zatem moduł Y' nie należy do $\mathcal{P}^B \cup \mathcal{T}^B$, a więc musi należeć do pewnej składowej łączącej $\mathcal{Q}^{B_i}$ w Γ_{B_i}, $i \in \{1, \dots p\}$. Ale wtedy $\operatorname{Hom}_B(Y', X) \neq 0$ implikuje, że Y' jest poprzednikiem modułu X w Γ_B, ponieważ składowa $\mathcal{Q}^{B_i}$ jest uogólnioną standardową składową w Γ_{B_i}. W takim razie Y' musi być modułem z $\mathcal{E}$, jako poprzednik modułu X należącego do $\mathcal{E}$. Co więcej, wówczas moduł $\tau_A^{-1} Y'$ należy do $\mathcal{I}$, skąd ostatecznie wynika, że ciąg prawie rozszczepialny w $\operatorname{mod} A$ o prawym końcu w module $\tau_A^{-1} Y'$ z $\operatorname{ind} B$ jest ciągiem dokładnym B-modułów należących do $\operatorname{add}(\mathcal{D})$, a więc jest również ciągiem prawie rozszczepialnym w $\operatorname{mod} B$. To zaś przeczy tezie Lematu 1.4.7, gdyż $\operatorname{Hom}_B(V, Y') \neq 0$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że w istocie $\varphi = 0$. Wtedy jednak zachodzi izomorfizm w $\operatorname{mod} A$ postaci $Y \simeq Y_0 \oplus Y_1$. Ponieważ oczywiście Y jest modułem w $\operatorname{ind} A$, otrzymujemy ostatecznie, że $Y \simeq Y_0$ lub $Y \simeq Y_1$. W pierwszym przypadku mamy $Y_1 = 0$, co daje sprzeczność, gdyż wtedy $h_1 = 0$, czyli $h = (0, h_1) = 0$, a z założenia mamy $h \neq 0$. Konkludujemy w konsekwencji, że faktycznie $Y \simeq Y_1$, czyli Y jest modułem w $\operatorname{ind} B$. To już implikuje postulowaną własność podkołczanu $\mathcal{E}$.

Wynika stąd bezpośrednio, że $\mathcal{C}$ jest uogólnioną standardową składową kołczanu Γ_A. W istocie załóżmy, że $\operatorname{rad}_A^\infty(X, Y) \neq 0$, dla pewnych modułów X oraz Y z $\mathcal{C}$. Wtedy na mocy Lematu 1.4.4(2), otrzymujemy, że istnieje nieskończona droga w $\mathcal{C}$ postaci $\cdots \to Y_1 \to Y_0$, gdzie $\operatorname{rad}_A^\infty(X, Y_k) \neq 0$, dla każdego $k \geqslant 0$. Ponieważ jednak $\mathcal{C}$ jest składową prawie acykliczną oraz $\mathcal{E}$ jest koskończonym podkołczanem $\mathcal{C}_l$, to na mocy Wniosku 2.7.4(1) istnieje liczba całkowita $k_0 \geqslant 0$, dla której moduł $Y_{(0)} = Y_{k_0}$ należy do $\mathcal{E}$. Wówczas jednak X jest modułem w $\operatorname{ind} B$, jako poprzednik modułu $Y_{(0)} \in \mathcal{E}$. To natomiast prowadzi do sprzeczności, bowiem otrzymujemy stąd, że $\operatorname{rad}_B^\infty(X, Y_{(0)}) \neq 0$, dla B-modułów X oraz $Y_{(0)}$ leżących w jednej składowej preinjektywnej kołczanu Γ_B, która jest uogólnioną standardową składową łączącą pewnej spójnej algebry odwróconej. W konsekwencji, $\mathcal{C}$ faktycznie jest uogólnioną standardową składową w Γ_A. Podsumowując, $\mathcal{C}$ jest prawie acykliczną, dokładną i uogólnioną standardową składową kołczanu Γ_A, skąd otrzymujemy, że A jest uogólnioną algebrą podwójnie odwróconą, na podstawie Wniosku 2.7.7. To kończy dowód. □

Łącząc otrzymane częściowe tezy Twierdzeń 5.2.1 oraz 5.2.2, możemy niniejszym uznać dowód pierwszego głównego twierdzenia rozprawy za zakończony.

5.3 Dowód Twierdzenia B ·

Przedstawiamy poniżej dowód drugiego głównego wyniku, to jest Twierdzenia B. Rozpocznijmy tutaj od przypadku niepółregularnego, w którym dowód wykorzystuje argumentację analogiczną do tej użytej w dowodzie Twierdzenia A. Odnotujmy bowiem następujący bezpośredni wniosek z dowodu Twierdzenia 5.2.2.

Wniosek 5.3.1. *Niech A będzie algebrą cyklowo skończoną, której kołczan Γ_A zawiera co najmniej jedną składową niepółregularną. Wówczas, jeżeli istnieje moduł dokładny w* mod A *będący środkiem co najwyżej skończenie wielu krótkich łańcuchów, to A jest uogólnioną algebrą podwójnie odwróconą. W szczególności, w tym przypadku A nie jest izomorficzna z algebrą odwróconą.*

Dowód · W istocie, w dowodzie implikacji (iii)⇒(i) oraz (ii)⇒(i) Twierdzenia 5.2.2 pokazaliśmy, że dana niepółregularna składowa C jest prawie acykliczna, dokładna i uogólniona standardowa korzystając z założeń (ii) lub (iii) jedynie w przypadku, gdy odwoływano się do lematów pomocniczych sformułowanych w 5.1. Ponieważ wszystkie pomocnicze tezy wykorzystywane w dowodzie Twierdzenia 5.2.2 są także prawdziwe przy założeniu, że istnieje moduł dokładny w mod A leżący na środku co najwyżej skończenie wielu krótkich łańcuchów, więc możemy powtórzyć te argumenty również tutaj wykazując, że C jest prawie acykliczną, dokładną i uogólnioną standardową składową kołczanu Γ_A. To dowodzi, że A jest w istocie uogólnioną algebrą podwójnie odwróconą, na mocy znanej charakteryzacji podanej we Wniosku 2.7.7. Pozostała część tezy wynika bezpośrednio z faktu, że każda algebra odwrócona jest algebrą półregularnego typu. □

Następny lemat dopełnia dowód o brakujące argumenty w przypadku półregularnym.

Lemat 5.3.2. *Niech A będzie algebrą cyklowo skończoną, dla której istnieje moduł dokładny M w* mod A*, leżący na środku co najwyżej skończenie wielu krótkich łańcuchów w* mod A*. Załóżmy ponadto, że C jest składową Γ_A zawierającą pewien nierozkładalny składnik prosty modułu M. Wówczas*

(1) C jest prawie acykliczną składową w Γ_A.

(2) Jeśli C jest półregularna, to C jest dokładną i uogólnioną standardową składową łączącą w Γ_A. W szczególności, wtedy A jest algebrą odwróconą typu Euklidesa.

Dowód · Dla dowodu (1) zauważmy, że jeśli część cykliczna składowej C jest nieskończona, to C jest półregularną tubą na mocy Stwierdzenia 5.1.1. Co więcej, z Wniosku 3.2.5 wynika również, że w tej sytuacji C nie może być stabilną tubą. Wówczas jednak C jest nieregularną tubą promieniową bądź kopromieniową, dla której zachodzi $\mathrm{Hom}_A(M,C) \neq 0$ oraz $\mathrm{Hom}_A(C,M) \neq 0$ ponieważ C zawiera pewien składnik prosty modułu M. To natomiast przeczy tezie Lematu 3.2.3. W konsekwencji otrzymujemy, że część cykliczna składowej C musi być skończona, czyli faktycznie C jest składową prawie acykliczną.

Pokażemy poniżej, że zachodzi także warunek (2). Załóżmy, że C jest składową półregularną. Po pierwsze, uogólniona standardowość składowej C jest w tym przypadku natychmiastową konsekwencją Stwierdzenia 4.1.1, z którego wynika również, że C jest wtedy preinjektywną albo postprojektywną składową typu Euklidesa, bowiem C nie może być półregularną tubą na mocy powyższych uwag. Pozostaje zatem udowodnić, że C jest w obu przypadkach dokładną składową w kołczanie Γ_A. Dowód przeprowadzamy jedynie w przypadku gdy C jest składową preinjektywną, gdyż w pozostałym przypadku wystarczy zastosować dualne argumenty. Zakładamy odtąd, że C jest preinjektywną składową typu Euklidesa. Jest jasne, że wówczas C jest acykliczną składową bez modułów projektywnych zawierającą pewną sekcję Δ typu Euklidesowego. W takim razie C jest dokładną i uogólnioną standandardową składową w kołczanie $\Gamma_{A(C)}$ algebry $A(C) = A/\mathrm{Ann}_A(C)$, która na podstawie kryterium Liu-Skowrońskiego jest algebrą odwróconą (typu Euklidesa), zaś C jest składową łączącą w $\Gamma_{A(C)}$. Ponadto wtedy $B = A(C)$ jest reprezentacyjnie-nieskończoną algebrą odwróconą postaci $B = \mathrm{End}_H(T)$, gdzie H jest algebrą dziedziczną typu Eukildesa, zaś T jest pewnym modułem odwracającym w mod H bez niezerowych preinjektywnych składników prostych. W szczególności, B jest tubularnym rozszerzeniem pewnej oswojonej utajonej algebry ilorazowej C (patrz także Twierdzenia 2.2.6 oraz 2.2.8).

Wykażemy teraz, że $A = B$ i dowód będzie zakończony. Odnotujmy najpierw, że wszystkie moduły injektywne w $\operatorname{ind} B$ są zawarte w składowej $\mathcal{C}$, a zatem są modułami injektywnymi w $\operatorname{ind} A$. Twierdzimy, że również wszystkie moduły projektywne w $\operatorname{ind} B$ są projektywne w $\operatorname{ind} A$. Przypomnijmy, że każdy moduł projektywny w $\operatorname{ind} B$ należy albo do postprojektywnej składowej $\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(C)$ w Γ_B, albo do rodziny tub promieniowych $\mathcal{T}^B$ w Γ_B otrzymanej z rodziny $\mathcal{T}^C$ stabilnych tub w Γ_C poprzez skończoną liczbę (być może równą zero) operacji wstawień promieniowych. Zauważmy ponadto, że algebra C jest oswojoną utajoną algebrą ilorazową cyklowo skończonej algebry A, zatem na mocy Stwierdzenia 4.2.5, C jest izomorficzna z algebrą postaci eAe, dla pewnego wypukłego idempotenta e algebry A. Wykorzystując dokładne zanurzenie kategorii $\operatorname{mod} C$ w $\operatorname{mod} A$ łatwo można wywnioskować że $\operatorname{Hom}_A(fA, eA) = 0$, a więc $C \cong eAe \cong \operatorname{Hom}_A(eA, eA) \cong \operatorname{Hom}_A(A, eA) \cong eA$, skąd otrzymujemy, że wszystkie moduły projektywne w $\operatorname{ind} C$ są także projektywne w $\operatorname{ind} A$. Wynika stąd, że wszystkie moduły projektywne w $\operatorname{ind} B$ należące do postprojektywnej składowej w Γ_B są projektywne w $\operatorname{ind} A$. Ostatecznie twierdzimy, że projektywne w $\operatorname{ind} A$ są również wszystkie moduły projektywne w $\operatorname{ind} B$ należące do tub promieniowych z rodziny $\mathcal{T}^B$. Udowodnimy w tym celu, że $\mathcal{T}^B$ jest rodziną składowych w Γ_A. Dla dowodu zauważmy, że dla każdej tuby $\mathcal{T}^B_\lambda$ należącej do $\mathcal{T}^B$ istnieje tuba półregularna $\mathcal{T}^A_\lambda$ zawierająca wszystkie moduły z części cyklicznej ${}_c\mathcal{T}^B_\lambda$(patrz Lemat 4.1.3 oraz Stwierdzenie 5.1.1). Pokażemy, że $\mathcal{T}^B_\lambda = \mathcal{T}^A_\lambda$, dla każdego $\lambda \in \Lambda$.

Dowodzimy najpierw, że rodzina $\mathcal{T}^A = (\mathcal{T}^A_\lambda)$ składa się wyłącznie z tub promieniowych. Jeśli $\mathcal{T} = \mathcal{T}^A_\lambda$ jest tubą kopromieniową zawierającą pewien moduł injektywny, to na mocy Stwierdzenia 1.7.3, $\mathcal{T}^B_\lambda$ musi być stabilną tubą, a więc istnieje moduł injektywny I z $\mathcal{T}$ oraz nieprzywiedlny epimorfizm $I \to V$, gdzie V jest pewnym modułem leżącym na ustach tuby $\mathcal{T}^B_\lambda$. Ponieważ jednak składowa $\mathcal{C}$ jest preinjektywną składową w Γ_B zawierającą nierozkładalny składnik prosty N modułu M, to wnosimy teraz z Lematu 3.4.4(c), że $\mathcal{C}$ zawiera nieskończenie wiele parami nieizomorficznych modułów Z_k, $k \in \mathbb{N}$, które spełniają

$$\operatorname{Hom}_B(V, \tau_B Z_k) \neq 0 \quad \text{oraz} \quad \operatorname{Hom}_B(Z_k, N) \neq 0,$$

dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Wtedy oczywiście również $\operatorname{Hom}_A(Z_k, M) \neq 0$, dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$, gdyż N jest (nierozkładalnym) składnikiem prostym modułu M. Teraz dokładność modułu M implikuje istnienie epimorfizmu $M^r \to I \to V$, skąd również $\operatorname{Hom}_A(M, \tau_A Z_k) \neq 0$. Ale to jest niemożliwe, bowiem otrzymujemy wtedy nieskończenie wiele krótkich łańcuchów $Z_k \to M \to \tau_A Z_k$ w $\operatorname{mod} A$ o środku w module M. W rezultacie, wnosimy, że rodzina $\mathcal{T}^A$ faktycznie jest rodziną tub promieniowych. Ostatecznie równość $\mathcal{T}^B = \mathcal{T}^A$ wynika bezpośrednio z argumentów przedstawionych w dowodzie Lematu 5.1.2 podpunkt (4). Tak więc w istocie, wszystkie nierozkładalne B-moduły projektywne w $\mathcal{T}^B$ są projektywne w $\operatorname{ind} A$. Reasumując: pokazaliśmy, że wszystkie moduły projektywne (odpowiednio, injektywne) w $\operatorname{ind} B$ są projektywne (odpowiednio, injektywne) w $\operatorname{ind} A$. To już na mocy Lematu 1.3.5 implikuje, że składowa $\mathcal{C}$ jest dokładną składową w Γ_A, a więc $A = B = A(\mathcal{C})$ jest w istocie algebrą odwróconą. Dowód jest więc zakończony. □

Ostatecznie, otrzymujemy stąd łatwo następujący wynik, który zamyka kwestię dowodu drugiego głównego twierdzenia niniejszej rozprawy.

Twierdzenie 5.3.3. *Niech A będzie dowolną algebrą cyklowo skończoną. Wówczas następujące warunki są równoważne.*

(i) Istnieje moduł dokładny M w $\operatorname{mod} A$, *który jest środkiem co najwyżej skończenie wielu krótkich łańcuchów.*

(ii) A jest uogólnioną algebrą podwójnie odwróconą.

Ponadto, jeśli zachodzi jeden z nich, to wszystkie nierozkładalne składniki proste modułu M należą do jednej składowej, która jest przy tym pewną składową łączącą w Γ_A.

DOWÓD · Zauważmy, że oczywiście implikacja (ii)⇒(i) wynika z udowodnionego wcześniej Lematu 3.2.9. Implikacja przeciwna jest natomiast natychmiastową konsekwencją Wniosku 5.3.1 oraz Lematu 5.3.2. W istocie załóżmy, że zachodzi warunek (i) oraz niech C będzie dowolną składową Γ_A, która zawiera co najmniej jeden nierozkładalny składnik prosty modułu M. Jeżeli C jest niepółregularną składową, to A jest wtedy (na mocy Wniosku 5.3.1) pewną uogólnioną algebrą podwójnie odwróconą, która nie jest izomorficzna z algebrą odwróconą. W szczególności, wówczas żaden nierozkładalny składnik prosty modułu M nie może należeć do półregularnej składowej Γ_A, bowiem w takiej sytuacji z Lematu 5.3.2(2) otrzymalibyśmy, że A jest algebrą odwróconą. Zatem jeśli składowa C zawiera moduły projektywne i injektywne, to A jest uogólnioną algebrą podwójnie odwróconą (która nie jest odwrócona) oraz wszystkie nierozkładalne składniki proste modułu M należą do składowej C, ponieważ jest to jedyna niepółregularna składowa (oczywiście C jest wtedy również jedyną składową łączącą kołczanu Γ_A). Ostatecznie, jeśli C jest składową półregularną, to A jest algebrą odwróconą ponownie na mocy Lematu 5.3.2(2). Pozostała część tezy wynika ze Stwierdzenia 3.2.8. □

5.4 Dowody wniosków ·

Teza pierwszego z wniosków sformułowanych we wstępie wynika natychmiast z Twierdzenia 5.3.3 oraz Stwierdzenia 3.2.8. Dla dowodu Wniosku 2 przyjmijmy, że A jest K-algebrą oraz M modułem w $\operatorname{mod} A$ spełniającymi odpowiednie założenia, podane w sformułowaniu tezy wniosku. Jasne jest, że M jest modułem dokładnym w $\operatorname{mod} B$, gdzie B jest algebrą ilorazową $B = A(M) = A/\operatorname{Ann}_A(M)$. Wtedy oczywiście M jest B-modułem leżącym na środku co najwyżej skończenie wielu krótkich łańcuchów w $\operatorname{mod} A$, toteż stosując Lemat 3.2.2, wnosimy teraz, że M jest także środkiem co najwyżej skończenie wielu krótkich łańcuchów w $\operatorname{mod} B$. Co więcej, jeżeli $B = B_1 \times \cdots \times B_m$, $m \geqslant 1$, jest rozkładem algebry B na produkt spójnych algebr $B_1, \ldots, B_m$, zaś $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_m$, odpowiadającym temu rozkładowi rozkładem modułu M w $\operatorname{mod} B$, gdzie M_j jest modułem w $\operatorname{mod} B_j$, dla $j \in \{1, \ldots, m\}$, to wówczas moduł M_j jest modułem leżącym na środku co najwyżej skończenie wielu krótkich łańcuchów w $\operatorname{mod} B_j$, dla każdego $j \in \{1, \ldots, m\}$. Ponadto ponieważ M jest dokładny w $\operatorname{mod} B$, to każdy z modułów M_j, $j \in \{1, \ldots, m\}$, jest dokładny w $\operatorname{mod} B_j$. W rezultacie, na mocy Twierdzenia B, otrzymujemy, że każda algebra B_i, dla $i \in \{1, \ldots, m\}$, jest cyklowo skończoną uogólnioną algebrą podwójnie odwróconą, co dowodzi (a). Pozostała część tezy w (b) wynika natomiast z Wniosku 1.

5.5 Kierunek dalszych badań ·

Na koniec komentujemy krótko jeden z możliwych kierunków dalszych badań nad rozwiązaniami postawionych w rozprawie problemów homologicznych, przy nieco innym założeniu o wyjściowej algebrze. Wspominamy mianowicie, że autor podjął próbę rozwiązania Problemów 1 oraz 2 dla klasy algebr A spełniających warunek $(\operatorname{rad}_A^\infty)^3 = 0$, to znaczy każde złożenie trzech homomorfizmów z nieskończonego radykału Jacobsona $\operatorname{rad}_A^\infty$ kategorii $\operatorname{mod} A$ jest zerowe. Algebry te tworzą dość szeroką klasę algebr, w której znajdziemy zarówno przykłady algebr cyklowo skończonych, jak i algebr z nieskończonymi cyklami w kategoriach modułów. W szczególności, klasa ta zawiera wszystkie reprezentacyjnie-nieskończone algebry odwrócone typu Euklidesa oraz zostało pokazane w [8], że algebra A spełnia $(\operatorname{rad}_A^\infty)^2 = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest algebrą skończonego reprezentacyjnego typu. Ponadto odnotujmy, że na mocy głównego wyniku pracy [10], dowolna algebra artinowska A jest algebrą półregularnego typu oraz $(\operatorname{rad}_A^\infty)^3 = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest półregularnym gałęziowym powiększeniem pewnej oswojonej algebry utajonej oraz jest tak zwaną algebrą *domowego typu*, czego pozwólmy sobie w pełni nie wyjaśniać. Przypominamy tylko, że algebry typu domowego (lub krótko, algebry domowe) są szczególnym przypadkiem algebr oswojonego typu reprezentacyjnego, tak więc wszystkie algebry półregularnego typu z $(\operatorname{rad}_A^\infty)^3 = 0$ są oswojonymi algebrami quazi-odwróconymi kanonicznego typu.

Ponieważ dysponujemy całkiem dobrym opisem struktury kategorii modułów algebr A z $(\operatorname{rad}_A^\infty)^3 = 0$ (patrz na przykład [9, 10]), autorowi udało się zaadaptować pewne metody stosowane w rozprawie i otrzymał dzięki temu częściowe rozwiązanie Problemu 1, przy dodatkowym założeniu. Wyniki tych badań nie zostały jeszcze opublikowane, jednakże pozwólmy sobie tutaj wspomnieć główne twierdzenie, które orzeka, że algebra A z $(\operatorname{rad}_A^\infty)^3 = 0$ oraz co najmniej jedną regularną składową w Γ_A jest domową algebrą quazi-odwróconą typu kanonicznego lub domową uogólnioną algebrą podwójnie odwróconą wtedy i tylko wtedy, gdy prawie wszystkie klasy izomorfizmu modułów X w $\operatorname{ind} A$ spełniają $\operatorname{pd}_A X \leqslant 1$ lub $\operatorname{id}_A X \leqslant 1$. Pozostały do rozważenia przypadek okazuje się dość trudny i wymaga nieco innego podejścia. Dowód w tym przypadku wiąże się z pewnym subtelnym problemem postawionym przez S. Liu, który polega na rozstrzygnięciu, czy algebra A z kołczanem Γ_A nie zawierającym żadnej składowej regularnej jest algebrą skończonego reprezentacyjnego typu?

Dodatek A

· Listy grafów i tabele ·

W niniejszym dodatku przedstawiamy cztery ważne listy grafów (oraz kołczanów) do których odwołujemy się w kilku miejscach pracy i pewne zestawienia tabel nośników istotnie wykorzystane w dowodach szczególnie ważnych dla rozprawy wyników omawianych w rozdziale 3. W pierwszych dwóch sekcjach prezentujemy odpowiednio, listę A.1 spójnych grafów typów Dynkina oraz listę A.2 grafów typu Euklidesa wraz z kanonicznymi orientacjami. Kolejne dwie listy grafów, którym poświęcono A.3 oraz A.4 zawierają wszystkie grafy nazywane kanonicznymi grafami typu Euklidesa oraz typu tubularnego; te dwie listy traktujemy czysto informacyjnie i nie będą wykorzystywane (odniesienia do tych list pojawiają się tylko w jednym miejscu 2.3). Ostatecznie zamykamy rozprawę dwoma zestawieniami tabel A.5 i A.6, przy czym w A.5 podajemy pełne informacje o nośnikach modułów leżących na ustach stabilnych tub w przypadku algebr dziedzicznych typu Euklidesa, zaś w tabelach z A.6 znajdują niezbędne informację preinjektywnych nośnikach takich modułów (patrz 3.4).

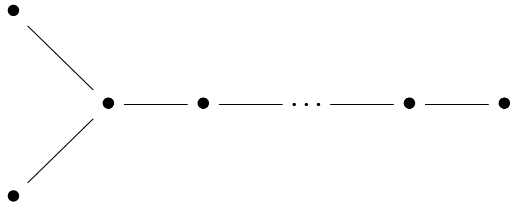
A.1 Grafy typu Dynkina ·

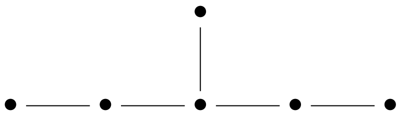
Wartościowanym grafem typu Dynkina nazywamy dowolny graf, który jest rozłączną sumą spójnych grafów z wartościowaniem jednego z dziewięciu typów grafów nazywanych również (spójnymi) grafami Dynkina. Każdy spójny graf Dynkina jest albo grafem należącym do jednej z czterech nieskończonych rodzin grafów oznaczanych symbolami $\mathbb{A}_n, \mathbb{B}_n, \mathbb{C}_n$ oraz $\mathbb{D}_n$, odpowiednio, albo jest jednym z pięciu grafów oznaczanych jako $\mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8, \mathbb{F}_4$ i $\mathbb{G}_2$. Odpowiednie ilustracje zostały przedstawione poniżej.

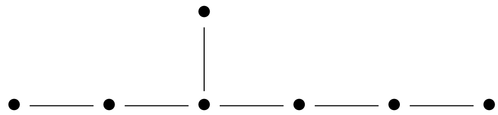
$\mathbb{A}_n$: $\bullet \text{ —— } \bullet \text{ —— } \bullet \text{ —— } \cdots \text{ —— } \bullet$ (n wierzchołków), $n \geqslant 1$

$\mathbb{B}_n$: $\bullet \overset{(1,2)}{\text{——}} \bullet \text{ —— } \bullet \text{ —— } \cdots \text{ —— } \bullet$ (n wierzchołków), $n \geqslant 2$

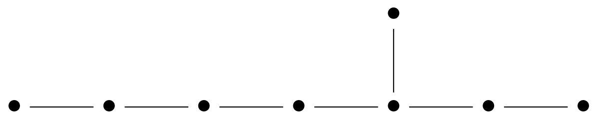
$\mathbb{C}_n$: $\bullet \overset{(2,1)}{\text{——}} \bullet \text{ —— } \bullet \text{ —— } \cdots \text{ —— } \bullet$ (n wierzchołków), $n \geqslant 3$

$\mathbb{D}_n$:  (n wierzchołków), $n \geqslant 4$

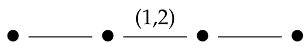
$\mathbb{E}_6$: 

$\mathbb{E}_7$: 

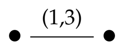
$\mathbb{E}_8$:



$\mathbb{F}_4$:



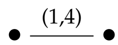
$\mathbb{G}_2$:



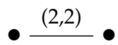
A.2 Grafy typu Euklidesa i kanoniczne orientacje ·

Rozszerzając grafy każdego z typów Dynkina o jeden dodatkowy wierzchołek, bądź łącząc w odpowiedni sposób grafy dwóch typów Dynkina, otrzymujemy tak zwane (wartościowane) grafy typu Euklidesa (lub typu Euklidesowego) przedstawione na rysunkach poniżej. Są to spójne grafy należące do jednej z sześciu nieskończonych rodzin grafów $\widetilde{\mathbb{A}_m}$, $\widetilde{\mathbb{B}_n}$, $\widetilde{\mathbb{C}_n}$, $\widetilde{\mathbb{BC}_n}$, $\widetilde{\mathbb{D}_n}$, $\widetilde{\mathbb{BD}_n}$ oraz $\widetilde{\mathbb{CD}_n}$, lub grafy jednej z dziewięciu postaci $\widetilde{\mathbb{A}_{11}}$, $\widetilde{\mathbb{A}_{12}}$, $\widetilde{\mathbb{E}_6}$, $\widetilde{\mathbb{E}_7}$, $\widetilde{\mathbb{E}_8}$, $\widetilde{\mathbb{F}_{41}}$, $\widetilde{\mathbb{F}_{42}}$, bądź $\widetilde{\mathbb{G}_{21}}$ lub $\widetilde{\mathbb{G}_{22}}$.

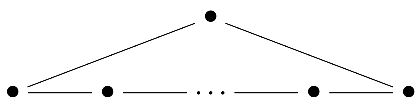
$\widetilde{\mathbb{A}_{11}}$:



$\widetilde{\mathbb{A}_{12}}$:

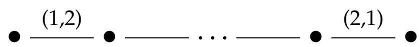


$\widetilde{\mathbb{A}_m}$:



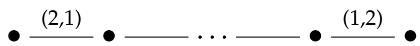
$(m + 1$ wierzchołków), $m \geqslant 2$

$\widetilde{\mathbb{B}_n}$:



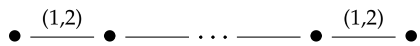
$(n + 1$ wierzchołków), $n \geqslant 2$

$\widetilde{\mathbb{C}_n}$:



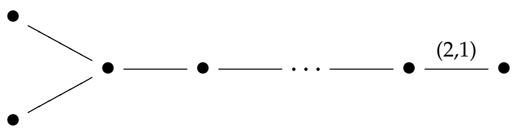
$(n + 1$ wierzchołków), $n \geqslant 2$

$\widetilde{\mathbb{BC}_n}$:



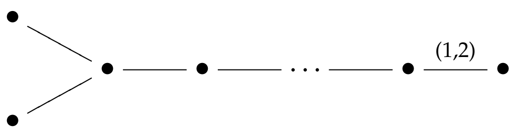
$(n + 1$ wierzchołków), $n \geqslant 2$

$\widetilde{\mathbb{BD}_n}$:



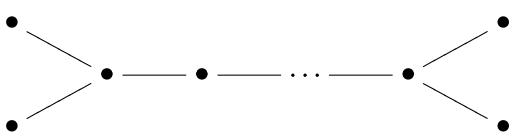
$(n + 1$ wierzchołków), $n \geqslant 3$

$\widetilde{\mathbb{CD}_n}$:

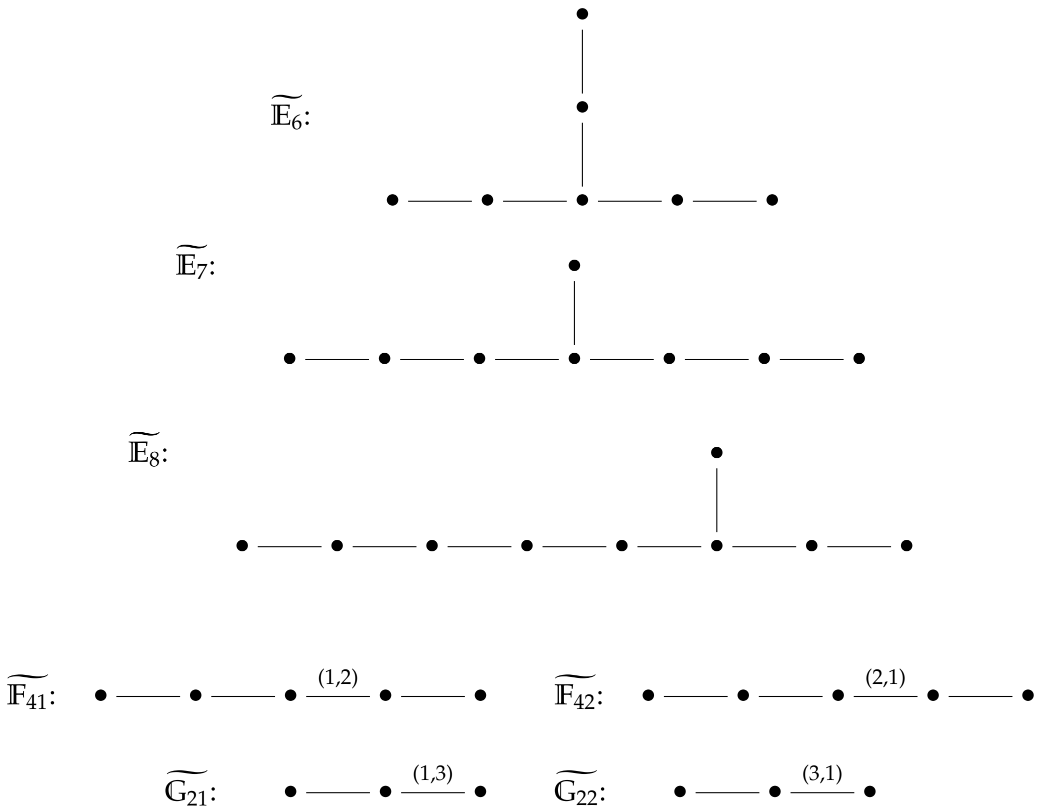


$(n + 1$ wierzchołków), $n \geqslant 3$

$\widetilde{\mathbb{D}_n}$:



$(n + 1$ wierzchołków), $n \geqslant 4$



Grafom typu Euklidesa przyporządkowuje się pewne szczególne orientacje nazywane *orientacjami kanonicznymi*, które nadają im strukturę kołczanu wartościowanego, nazywanego czasami kołczanem danego typu Euklidesowego. Dla dowolnego grafu każdego z typów Euklidesowych, za wyjątkiem typu $\widetilde{\mathbb{A}}_m$, kanoniczna orientacja jest wyznaczona jednoznacznie, i wtedy odpowiedni kołczan oznaczamy tym samym symbolem co rozważany graf. W przypadku grafu G typu $\widetilde{\mathbb{A}}_m$ o $m+1$ wierzchołkach możemy rozważać kanoniczną orientację na G wyznaczoną przez dowolną parę liczb naturalnych $(p, q) \neq (0, 0)$, gdzie $p \geqslant q \geqslant 0$ oraz $p + q + 1 = m$, i wówczas zorientowany kołczan typu Euklidesa oznaczamy przez $\widetilde{\mathbb{A}}_{p,q}$. Następująca lista zawiera wszystkie grafy typu Euklidesa z kanonicznymi orientacjami, gdzie w odróżnieniu od poprzednich list, pomijamy na rysunkach wierzchołki zastępując je odpowiednimi symbolami, analogicznie do oznaczeń stosowanych w [13].

$\widetilde{\mathbb{A}}_{11}$: $\quad a \xrightarrow{(1,4)} b \qquad\qquad \widetilde{\mathbb{A}}_{12}$: $\quad a \xrightarrow{(2,2)} b$

$$\widetilde{\mathbb{A}}_{p,q}: \quad \begin{tikzcd}[row sep=small] & c_1 \arrow[r] & c_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & c_p \arrow[dr] & \\ a \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & b, \\ & d_1 \arrow[r] & d_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & d_q \arrow[ur] & \end{tikzcd} \quad (p,q) \neq (0,0),\ p \geqslant q \geqslant 0$$

$$\widetilde{\mathbb{B}}_n: \quad a \xrightarrow{(1,2)} z_1 \longrightarrow z_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow z_{n-1} \xrightarrow{(2,1)} b, \quad n \geqslant 2$$

$$\widetilde{\mathbb{C}}_n: \quad a \xrightarrow{(2,1)} z_1 \longrightarrow z_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow z_{n-1} \xrightarrow{(1,2)} b, \quad n \geqslant 2$$

$$\widetilde{\mathbb{BC}}_n: \quad a \xrightarrow{(1,2)} z_1 \longrightarrow z_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow z_{n-1} \xrightarrow{(1,2)} b, \quad n \geqslant 2$$

$$\widetilde{\mathbb{BD}}_n: \quad \begin{tikzcd}[row sep=small] a_1 \arrow[dr] & & & & & \\ & z_1 \arrow[r] & z_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & z_{n-2} \arrow[r, "{(2,1)}"] & b \\ a_2 \arrow[ur] & & & & & \end{tikzcd} \qquad (n \geqslant 3)$$

$$\widetilde{\mathbb{CD}}_n: \quad \begin{tikzcd}[row sep=small] a_1 \arrow[dr] & & & & & \\ & z_1 \arrow[r] & z_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & z_{n-2} \arrow[r, "{(1,2)}"] & b \\ a_2 \arrow[ur] & & & & & \end{tikzcd} \qquad (n \geqslant 3)$$

$$\widetilde{\mathbb{D}}_n: \quad \begin{tikzcd}[row sep=small] a_1 \arrow[dr] & & & & & b_1 \\ & z_1 \arrow[r] & z_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & z_{n-3} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ a_2 \arrow[ur] & & & & & b_2 \end{tikzcd} \qquad (n \geqslant 4)$$

$$\widetilde{\mathbb{E}}_6: \quad \begin{tikzcd} & & c_1 \arrow[d] & & \\ & & c_2 \arrow[d] & & \\ a_1 \arrow[r] & a_2 \arrow[r] & z & b_2 \arrow[l] & b_1 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$$\widetilde{\mathbb{E}}_7: \quad \begin{tikzcd} & & & c \arrow[d] & & & \\ a_1 \arrow[r] & a_2 \arrow[r] & a_3 \arrow[r] & z & b_3 \arrow[l] & b_2 \arrow[l] & b_1 \arrow[l] \end{tikzcd}.$$

$$\widetilde{\mathbb{E}}_8: \quad \begin{tikzcd} & & & & & c \arrow[d] & & \\ a_1 \arrow[r] & a_2 \arrow[r] & a_3 \arrow[r] & a_4 \arrow[r] & a_5 \arrow[r] & z & b_2 \arrow[l] & b_1 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

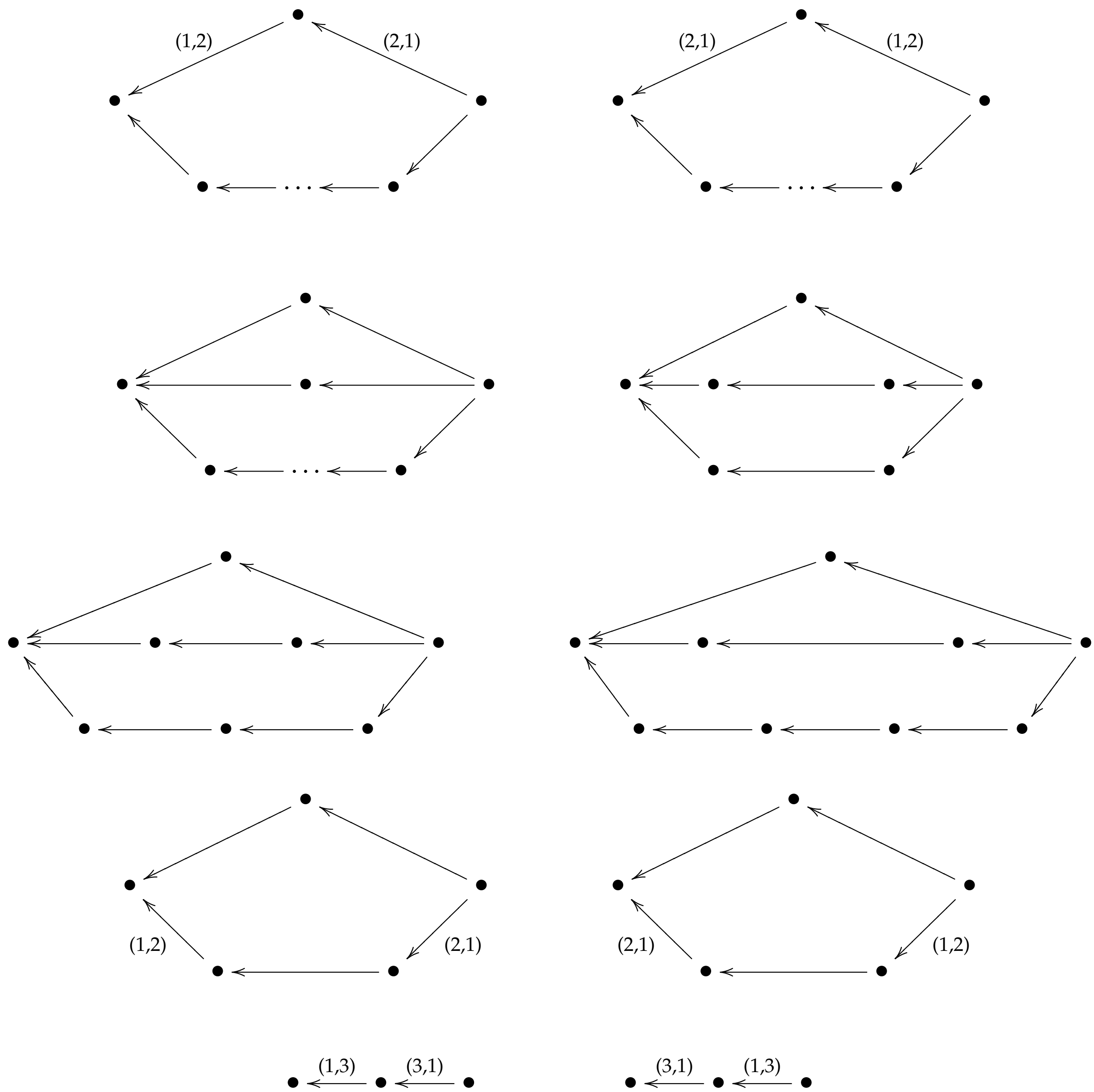
$$\widetilde{\mathbb{F}}_{41}: \quad \begin{tikzcd} a_1 \arrow[r] & a_2 \arrow[r] & a_3 \arrow[r, "{(1,2)}"] & z & b \arrow[l] \end{tikzcd} \qquad \widetilde{\mathbb{F}}_{42}: \quad \begin{tikzcd} a_1 \arrow[r] & a_2 \arrow[r] & z & b_2 \arrow[l, "{(2,1)}"'] & b \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$$\widetilde{\mathbb{G}}_{21}: \quad \begin{tikzcd} a_1 \arrow[r] & a_2 \arrow[r, "{(1,3)}"] & z \end{tikzcd} \qquad \widetilde{\mathbb{G}}_{22}: \quad \begin{tikzcd} a_1 \arrow[r] & z & b \arrow[l, "{(3,1)}"'] \end{tikzcd}$$

A.3 Kołczany kanoniczne typu Euklidesa ·

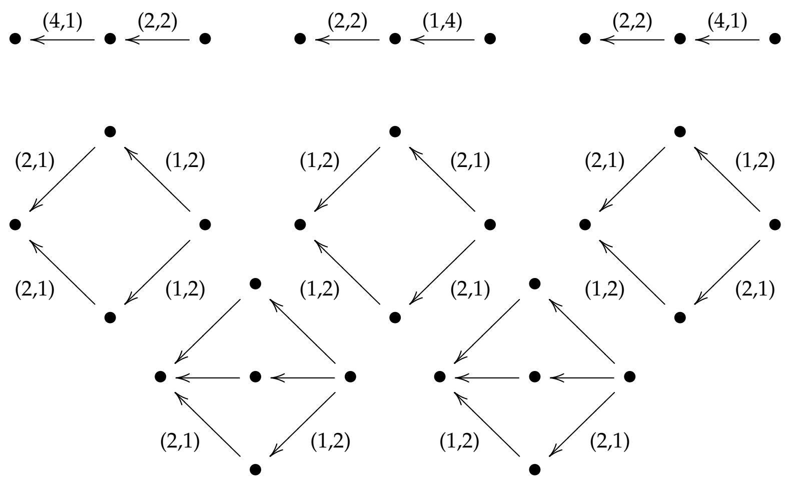
Poniżej przedstawiamy listę wartościowanych kołczanów nazywanych *kołczanami kanonicznymi typu Euklidesa*, ponieważ są kołczanami zwyczajnymi algebr kanonicznych typu Euklidesowego (patrz 2.3).

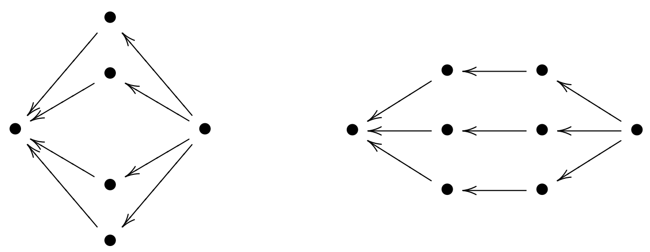
$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & \bullet \arrow[dl] & \cdots \arrow[l] & \bullet \arrow[l] & \\ \bullet & & & & \bullet \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & \bullet \arrow[ul] & \cdots \arrow[l] & \bullet \arrow[l] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[row sep=small] \bullet & \bullet \arrow[l, "{(1,2)}"'] & \cdots \arrow[l] & \bullet \arrow[l] & \bullet \arrow[l, "{(2,1)}"'] \\ \bullet & \bullet \arrow[l, "{(2,1)}"'] & \cdots \arrow[l] & \bullet \arrow[l] & \bullet \arrow[l, "{(1,2)}"'] \end{tikzcd}$$

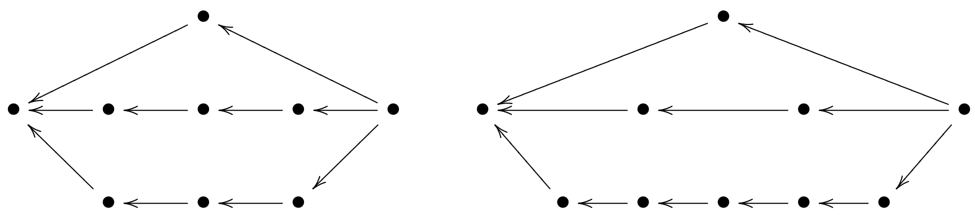


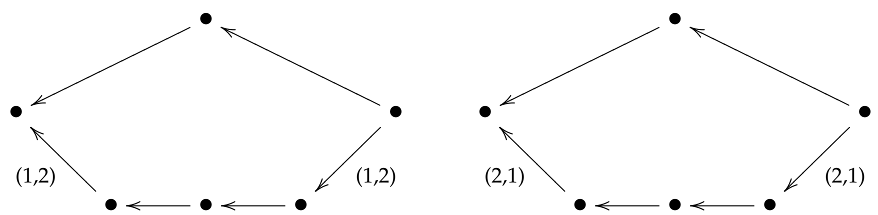
A.4 Kanoniczne kołczany typu tubularnego ·

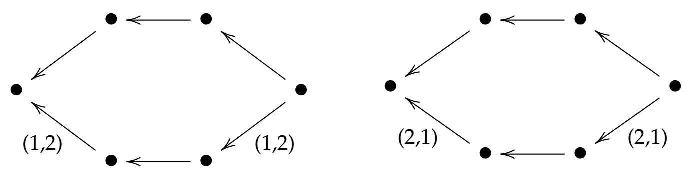
Ostatnia z prezentowanych list kołczanów zawiera kołczany zwyczajne wszystkich możliwych spójnych algebr kanonicznych typu tubularnego.


(4,1) (2,2)
(2,2) (1,4)
(2,2) (4,1)
(2,1) (1,2) (2,1) (1,2)
(1,2) (2,1) (1,2) (2,1)
(2,1) (1,2) (1,2) (2,1)
(2,1) (1,2)
(1,2) (2,1)

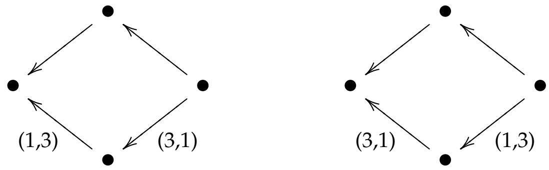





(1,2) (1,2)
(2,1) (2,1)


(1,2) (1,2)
(2,1) (2,1)


(3,1) (1,3)
(1,3) (3,1)



A.5 Tabela nośników modułów regularnych ·

Przedstawiamy poniżej tabelę zawierającą pełne informacje o nośnikach modułów regularnych leżących na ustach niejednorodnych stabilnych tub w kołczanach Γ_A algebr dziedzicznych A typu Euklidesa, z kołczanem Q_A zorientowanym kanonicznie. Pomijamy typy $\widetilde{\mathbb{A}_{11}}$ oraz $\widetilde{\mathbb{A}_{12}}$, ze względu na degenerację nośników w tych przypadkach; patrz Lemat 2.1.8. Prezentowana dalej tabela składa się z części odpowiadających poszczególnym typom Euklidesowym, gdzie każda z nich zorganizowana następująco: w pierwszym wierszu podajemy typ Q_A oraz typ tubularny $r^A = (r_1, \ldots, r^n)$, zaś drugi podzielony jest na n kolumn odpowiadających stabilnym tubom $\mathcal{T}^1, \ldots, \mathcal{T}^n$, w taki sposób, że i-ta kolumna, dla $i \in \{1, \ldots, n\}$, zawiera w wierszach kolejno nośniki $\mathrm{supp}(E_0^{(i)}), \ldots, \mathrm{supp}(E_{r_i-1}^{(i)})$ wszystkich modułów $E_0^{(i)}, \ldots, E_{r_i-1}^{(i)}$ leżących na ustach danej tuby $\mathcal{T}^i$. Ponadto w każdej z tub kolejność modułów $E_0^{(i)}, \ldots, E_{r_i-1}^{(i)}$ jest zgodna z translacją Auslandera-Reiten, to znaczy $E_k^{(i)} = \tau_A^k E_0^{(i)}$, dla $k \in \{0, 1, \ldots, r_i - 1\}$, gdzie r_i jest rangą tuby $\mathcal{T}^i$. Co więcej, w każdym z przypadków, za moduł $E_0^{(i)}$ przyjmujemy zawsze pierwszy moduł E_0, E_0' lub E_0'' z odpowiedniej tabeli w notacji z [13, Tables 6].

<table>
<tr><td colspan="2">$\widetilde{\mathbb{A}}_{p,0}$, $p \geqslant 1$; $r^A = (p+1)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\{c_p\}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\{a, b\}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\{c_1\}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\ldots$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\{c_{p-2}\}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\{c_{p-1}\}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\widetilde{\mathbb{A}}_{p,q}$, $p \geqslant q \geqslant 1$; $r^A = (q+1, p+1)$</td></tr>
<tr><td>$\{d_q\}$</td><td>$\{c_p\}$</td></tr>
<tr><td>$\{a, c_1, c_2, \ldots, c_p, b\}$</td><td>$\{a, d_1, d_2, \ldots, d_q, b\}$</td></tr>
<tr><td>$\{d_1\}$</td><td>$\{c_1\}$</td></tr>
<tr><td>$\ldots$</td><td>$\ldots$</td></tr>
<tr><td>$\{d_{q-2}\}$</td><td>$\{c_{p-2}\}$</td></tr>
<tr><td>$\{d_{q-1}\}$</td><td>$\{c_{p-1}\}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\widetilde{\mathbb{B}}_n$ lub $\widetilde{\mathbb{C}}_n$, albo $\widetilde{\mathbb{BC}}_n$, $n \geqslant 2$; $r^A = (n)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\{z_{n-1}\}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$Q_A = \{a, z_1, \ldots, z_{n-1}, b\}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\{z_1\}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\ldots$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\{z_{n-3}\}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\{z_{n-2}\}$</td></tr>
</table>

$\widetilde{\mathbb{BD}}_n$ albo $\widetilde{\mathbb{CD}}_n$, $n \geqslant 3$; $r^A = (2, n-1)$		
$Q_A \setminus \{a_1\}$	$\{z_{n-2}\}$	
$Q_A \setminus \{a_2\}$	$Q_A = \{a_1, a_2, z_1, \ldots, z_{n-2}, b\}$	
	$\{z_1\}$	
	$\ldots$	
	$\{z_{n-3}\}$	
$\widetilde{\mathbb{D}}_n$, $n \geqslant 4$; $r^A = (2, 2, n-2)$		
$Q_A \setminus \{a_1, b_1\}$	$Q_A \setminus \{a_1, b_2\}$	$\{z_{n-3}\}$
$Q_A \setminus \{a_2, b_2\}$	$Q_A \setminus \{a_2, b_1\}$	$\{a_1, a_2, z_1, \ldots, z_{n-3}, b_1, b_2\}$
		$\{z_1\}$
		$\ldots$
		$\{z_{n-4}\}$
$\widetilde{\mathbb{E}}_6$; $r^A = (2, 3, 3)$		
$\{z, a_2, b_2, c_2\}$	$\{z, a_2, b_2, b_1\}$	$\{z, c_2, b_1, b_2\}$
Q_A	$\{z, c_1, c_2, b_2\}$	$\{z, b_2, a_1, a_2\}$
	$\{z, c_2, a_1, a_2\}$	$\{z, a_2, c_1, c_2\}$
$\widetilde{\mathbb{E}}_7$; $r^A = (2, 3, 4)$		
$Q_A \setminus \{a_1\}$	$\{z, a_3, b_3, c\}$	$\{z, c, b_3, b_2\}$
$Q_A \setminus \{b_1\}$	Q_A	$\{z, b_3, a_3, a_2, a_1\}$
	$\{z, a_3, a_2, b_3, b_2\}$	$\{z, c, a_3, a_2\}$
		$\{z, a_3, b_3, b_2, b_1\}$
$\widetilde{\mathbb{E}}_8$; $r^A = (2, 3, 5)$		
$Q_A \setminus \{a_1\}$	$Q_A \setminus \{a_1, a_2\}$	$\{z, c, a_5, b_2\}$
Q_A	$Q_A \setminus \{b_1\}$	Q_A
	$Q_A \setminus \{a_1\}$	$\{z, b_2, a_5, a_4, a_3, a_2\}$
		$\{z, c, a_5, a_4, a_3\}$
		$\{z, a_5, a_4, b_2, b_1\}$
$\widetilde{\mathbb{F}}_{41}$; $r^A = (2, 3)$		
$Q_A \setminus \{a_1\}$		$Q_A \setminus \{a_1, a_2\}$
$Q_A \setminus \{b\}$		Q_A
		$Q_A \setminus \{a_1, b\}$
$\widetilde{\mathbb{F}}_{42}$; $r^A = (2, 3)$		
$Q_A \setminus \{a_1, b_1\}$		$Q_A \setminus \{a_1\}$
Q_A		$Q_A \setminus \{a_1, a_2\}$
		$Q_A \setminus \{b_1\}$
$\widetilde{\mathbb{G}}_{21}, \widetilde{\mathbb{G}}_{22}$; $r^A = (2)$		
$Q_A \setminus \{a_1\}$		
Q_A		

A.6 Tabela nośników preinjektywnych ·

W przedstawionej poniżej tabeli podajemy informacje o preinjektywnych nośnikach dla wybranych modułów z każdej niejednorodnej stabilnej tuby w kołczanie Γ_A, dla wszystkich algebr dziedzicznych A typu Euklidesa z kołczanem Q_A zorientowanym kanonicznie. Podobnie jak w poprzedniej sekcji wyróżniamy dwa podprzypadki dla algebr typu $\widetilde{A_{p,q}}$. Tabela jest zaaranżowana w analogiczny sposób co tabela A.5, z tą różnicą, że tutaj każdej z niejednorodnych stabilnych tub w Γ_A odpowiada jeden wiersz, podzielony na dwie kolumny, przy czym w pierwszej wyszczególniamy konkretny moduł E z danej tuby, zaś w drugiej podajemy postać zbioru $\mathcal{Q}_E^{(0)} = \mathcal{Q}_E^{(0)}(A)$. Wszystkie zawarte tu informacje można bezpośrednio wywnioskować z poprzedniej tabeli A.5 oraz własności omówionych w 3.4. Przypominamy, że w poniższej tabeli przez Σ_A oznaczamy sekcję w preinjektywnej składowej $\mathcal{Q}(A)$ kołczanu Γ_A algebry dziedzicznej A danego typu Euklidesowego.

$\widetilde{\mathbb{A}}_{p,0}$, $p \geqslant 1$; $r^A = (p+1)$	
$E = E_0^{(1)}$	$\{I_{c_p}, \tau I_{c_{p-1}}, \tau^2 I_{c_{p-2}}, \ldots, \tau^{p-1} I_{c_1}\} \cup \tau^p\{a, b\}$
$\widetilde{\mathbb{A}}_{p,q}$, $p \geqslant q \geqslant 1$; $r^A = (q+1, p+1)$	
$E = E_0^{(1)}$	$\{I_{d_q}, \tau I_{d_{q-1}}, \tau^2 I_{d_{q-2}}, \ldots, \tau^{q-1} I_{d_1}\} \cup \tau^q\{a, c_1, \ldots, c_p, b\}$
$E = E_0^{(2)}$	$\{I_{c_p}, \tau I_{c_{p-1}}, \tau^2 I_{c_{p-2}}, \ldots, \tau^{p-1} I_{c_1}\} \cup \tau^p\{a, d_1, \ldots, d_q, b\}$
$\widetilde{\mathbb{B}}_n$, $\widetilde{\mathbb{C}}_n$, lub $\widetilde{\mathbb{BC}}_n$, $n \geqslant 2$; $r^A = (n)$	
$E = E_0^{(1)}$	$\{I_{z_{n-1}}, \tau I_{z_{n-2}}, \tau^2 I_{z_{n-3}}, \ldots, \tau^{n-2} I_{z_1}\} \cup \tau^{n-1}\Sigma_A$
$\widetilde{\mathbb{D}}_n$, $n \geqslant 4$; $r^A = (2, 2, n-2)$	
$E = E_0^{(1)}$	$\{I_{z_1}, I_{z_2}, \ldots, I_{z_{n-3}}, I_{a_2}, I_{b_2}\} \cup \{\tau I_{z_1}, \tau I_{z_2}, \ldots, \tau I_{z_{n-3}}, \tau I_{a_1}, \tau I_{b_1}\}$
$E = E_0^{(2)}$	$\{I_{z_1}, I_{z_2}, \ldots, I_{z_{n-3}}, I_{a_2}, I_{b_1}\} \cup \{\tau I_{z_1}, \tau I_{z_2}, \ldots, \tau I_{z_{n-3}}, \tau I_{a_1}, \tau I_{b_2}\}$
$E = E_0^{(3)}$	$\{I_{z_{n-3}}, \tau I_{z_{n-4}}, \ldots, \tau^{n-4} I_{z_1}\} \cup \tau^{n-3}\Sigma_A$
$\widetilde{\mathbb{BD}}_n$ albo $\widetilde{\mathbb{CD}}_n$, $n \geqslant 3$; $r^A = (2, n-1)$	
$E = E_0^{(1)}$	$\{I_{z_1}, I_{z_2}, \ldots, I_{z_{n-2}}, I_{a_2}, I_b\} \cup \{\tau I_{z_1}, \tau I_{z_2}, \ldots, \tau I_{z_{n-2}}, \tau I_{a_1}, \tau I_b\}$
$E = E_0^{(2)}$	$\{I_{z_{n-2}}, \tau I_{z_{n-3}}, \tau^2 I_{z_{n-4}}, \ldots, \tau^{n-3} I_{z_1}\} \cup \tau^{n-2}\Sigma_A$
$\widetilde{\mathbb{E}}_6$; $r^A = (2, 3, 3)$	
$E = E_0^{(1)}$	$\{I_z, I_{a_2}, I_{b_2}, I_{c_2}\} \cup \tau\Sigma_A$
$E = E_0^{(2)}$	$\{I_z, I_{a_2}, I_{b_2}, I_{b_1}\} \cup \{\tau I_z, \tau I_{c_2}, \tau I_{a_2}, \tau I_{a_1}\} \cup \{\tau^2 I_z, \tau^2 I_{b_2}, \tau^2 I_{c_2}, \tau^2 I_{c_1}\}$
$E = E_0^{(3)}$	$\{I_z, I_{c_2}, I_{b_2}, I_{b_1}\} \cup \{\tau I_z, \tau I_{a_2}, \tau I_{c_2}, \tau I_{c_1}\} \cup \{\tau^2 I_z, \tau^2 I_{b_2}, \tau^2 I_{a_2}, \tau^2 I_{a_1}\}$
$\widetilde{\mathbb{E}}_7$; $r^A = (2, 3, 4)$	
$E = E_0^{(1)}$	$\{I_z, I_c, I_{a_2}, I_{a_3}, I_{b_1}, I_{b_2}, I_{b_3}\} \cup \{\tau I_z, \tau I_c, \tau I_{a_1}, \tau I_{a_2}, \tau I_{a_3}, \tau I_{b_2}, \tau I_{b_3}\}$
$E = E_0^{(2)}$	$\{I_z, I_c, I_{a_3}, I_{b_3}\} \cup \{\tau I_z, \tau I_c, \tau I_{a_2}, \tau I_{a_3}, \tau I_{b_2}, \tau I_{b_3}\} \cup \tau^2\Sigma_A$
$E = E_0^{(3)}$	$\{I_z, I_c, I_{b_2}, I_{b_3}\} \cup \{\tau I_z, \tau I_{a_3}, \tau I_{b_1}, \tau I_{b_2}, \tau I_{b_3}\} \cup \{\tau^2 I_z, \tau^2 I_c, \tau^2 I_{a_2}, \tau^2 I_{a_3}\} \cup \{\tau^3 I_z, \tau^3 I_{a_1}, \tau^3 I_{a_2}, \tau^3 I_{a_3}, \tau^3 I_{b_3}\}$

$\widetilde{\mathbb{E}}_8$; $r^A = (2,3,5)$	
$E = E_0^{(1)}$	$\{I_{a_2}, I_{a_3}, I_{a_4}, I_{a_5}, I_c, I_z, I_{b_2}, I_{b_1}\} \cup \tau\Sigma_A$
$E = E_0^{(2)}$	$\{I_{a_3}, I_{a_4}, I_{a_5}, I_c, I_z, I_{b_2}, I_{b_1}\} \cup \{\tau I_{a_2}, \tau I_{a_3}, \tau I_{a_4}, \tau I_{a_5}, \tau I_c, \tau I_z, \tau I_{b_2}, \tau I_{b_1}\}$ $\cup \{\tau^2 I_{a_1}, \tau^2 I_{a_2}, \tau^2 I_{a_3}, \tau^2 I_{a_4}, \tau^2 I_{a_5}, \tau^2 I_c, \tau^2 I_z, \tau^2 I_{b_2}\}$
$E = E_0^{(3)}$	$\{I_{a_5}, I_c, I_z, I_{b_2},\} \cup \{\tau I_{a_4}, \tau I_{a_5}, \tau I_z, \tau I_{b_2}, \tau I_{b_1}\} \cup$ $\{\tau^2 I_{a_3}, \tau^2 I_{a_4}, \tau^2 I_{a_5}, \tau^2 I_c, \tau^2 I_z\} \cup \{\tau^3 I_{a_2}, \tau^3 I_{a_3}, \tau^3 I_{a_4}, \tau^3 I_{a_5}, \tau^3 I_z, \tau^3 I_{b_2}\} \cup \tau^4\Sigma_A$

$\widetilde{\mathbb{F}}_{41}$; $r^A = (2,3)$	
$E = E_0^{(1)}$	$\{I_{a_2}, I_{a_3}, I_z, I_b\} \cup \{\tau I_{a_1}, \tau I_{a_2}, \tau I_{a_3}, \tau I_z\}$
$E = E_0^{(2)}$	$\{I_{a_3}, I_z, I_b\} \cup \{\tau I_{a_2}, \tau I_{a_3}, \tau I_z\} \cup \tau^2\Sigma_A$

$\widetilde{\mathbb{F}}_{42}$; $r^A = (2,3)$	
$E = E_0^{(1)}$	$\{I_{a_2}, I_z, I_{b_2}\} \cup \tau\Sigma_A$
$E = E_0^{(2)}$	$\{I_{a_2}, I_z, I_{b_2}, I_{b_1}\} \cup \{\tau I_{a_1}, \tau I_{a_2}, \tau I_z, \tau I_{b_2}\} \cup \{\tau^2 I_{b_1}, \tau^2 I_{b_2}, \tau^2 I_z\}$

$\widetilde{\mathbb{G}}_{11}$ lub $\widetilde{\mathbb{G}}_{12}$; $r^A = (2)$	
$E = E_0^{(1)}$	$(\Sigma_A \setminus \{a_1\}) \cup \tau\Sigma_A$

Bibliografia

[1] I. Assem, A. Skowroński, *Minimal representation-infinite coil algebras*, Manuscr. Math. 67 (1990), 305–331.

[2] I. Assem, D. Simson, A. Skowroński, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras 1: Techniques of Representation Theory*, London Math. Soc. Student Texts 65, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006.

[3] M. Auslander, I. Reiten, S. O. Smalø, *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge Studies in Advanced Math. 36, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[4] J. Białkowski, A. Skowroński, *Cycles of modules and finite representation type*, Bull. London Math. Soc. 48 (2016), 589–600.

[5] J. Białkowski, A. Skowroński, A. Skowyrski, P. Wiśniewski, *Cycle-finite algebras of semiregular type*, Colloq. Math. 129 (2012), 211–247.

[6] S. Brenner, M. C. R. Butler, *Generalizations of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors*, in: Representation Theory II. Lecture Notes in Math. 832, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1980, 103–169.

[7] F.U. Coelho, M. Lanzilotta, *Algebras with small homological dimensions*, Manuscr. Math. 100 (1999), 1–11.

[8] F. U. Coelho, E.N. Marcos, H. Merklen, A. Skowroński, *Module categories with infinite radical square zero are of finite type*, Comm. Algebra 22 (1994), 4511–4517.

[9] F. U. Coelho, E.N. Marcos, H. Merklen, A. Skowroński, *Module categories with infinite radical cube zero*, J. Algebra 183 (1996), 1–23.

[10] F. U. Coelho, E.N. Marcos, H. Merklen, A. Skowroński, *Domestic semiregular branch enlargements of tame concealed algebras*, in: Representation Theory of Algebras, Canad. Math. Soc. Conf. Proc. 18, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, 141–154.

[11] F.U. Coelho, A. Skowroński, *On Auslander-Reiten components for quasitilted algebras*, Fund. Math. 149 (1996), 67–82.

[12] W. Crawley-Boevey, *Tame algebras and generic modules*, Proc. London Math. Soc. 63 (1991), 241–265.

[13] V. Dlab, C.M. Ringel, *Indecomposable representations of graphs and algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. 173 (1976), no. 173.

[14] D. Happel, U. Preiser, C. M. Ringel, *Vinberg's characterization of Dynkin diagrams using subadditive functions with applications to $D\operatorname{Tr}$-periodic modules*, in: Representation Theory II. Lecture Notes in Math. 832, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1980, 280–294.

[15] D. Happel, I. Reiten, S. O. Smalø, *Short cycles and sincere modules*, in: Representations of Algebras, Canad. Math. Soc. Conf. Proc. 14, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, 233–236.

[16] D. Happel, I. Reiten, S. O. Smalø, *Tilting in abelian categories and quasitilted algebras*, Mem. Amer. Soc. 120 (1996), no. 575.

[17] D. Happel, C. M. Ringel, *Tilted algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 274 (1982), 399–443.

[18] K. Igusa, G. Todorov, *A characterization of finite Auslander-Reiten quivers*, J. Algebra 89 (1984), 148–177.

[19] A. Jaworska, P. Malicki, A. Skowroński, *Tilted algebras and short chains of modules*, Math. Z. 273 (2013), 19–27.

[20] H. Lenzing, J. A. de la Peña, *Concealed-canonical algebras and separating tubular families*, Proc. London Math. Soc. 78 (1999), 513–540.

[21] H. Lenzing, A. Skowroński, *Quasi-tilted algebras of canonical type*, Coll. Math. 71 (1996), 161–181.

[22] S. Liu, *Degrees of irreducible maps and the shape of Auslander-Reiten quivers*, J. London Math. Soc. 45 (1992), 32–54.

[23] S. Liu, *Semi-stable components of an Auslander-Reiten quiver*, J. London Math. Soc. 47 (1993), 405–416.

[24] S. Liu, *Tilted algebras and generalized standard Auslander-Reiten components*, Arch. Math. (Basel) 61 (1993), 12–19.

[25] P. Malicki, J. A. de la Peña, A. Skowroński, *On the number of terms in the middle of almost split sequences over cycle-finite artin algebras*, Centr. Eur. J. Math. 12 (2014), 39–45.

[26] P. Malicki, J. A. de la Peña, A. Skowroński, *Finite cycles of indecomposable modules*, J. Pure Appl. Algebra 219 (2015), 1761–1799.

[27] P. Malicki, A. Skowroński, *Almost cyclic coherent components of an Auslander-Reiten quiver*, J. Algebra 229 (2000), 695–749.

[28] P. Malicki, A. Skowroński, *Algebras with separating almost cyclic coherent Auslander-Reiten components*, J. Algebra 291 (2005), 208–237.

[29] P. Malicki, A. Skowroński, *Algebras with separating Auslander–Reiten components*, in: Representations of Algebras and Related Topics, Eur. Math. Soc. Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2011, 251–353.

[30] L. Peng, J. Xiao, *On the number of DTr-orbits containing directing modules*, Proc. Amer. Math. Soc. 118 (1993), 753–756.

[31] I. Reiten, A. Skowroński, *Characterizataions of algebras with small homological dimensions*, Adv. Math. 179 (2003), 122–154.

[32] I. Reiten, A. Skowroński, *Generalized double tilted algebras*, J. Math. Soc. Japan 56 (2004), 269–288.

[33] I. Reiten, A. Skowroński, S. O. Smalø, *Short chains and short cycles of modules*, Proc. Amer. Math. Soc. 117 (1993), 343–354.

[34] C. M. Ringel, *Tame Algebras and Integral Quadratic Forms*, Lecture Notes in Math. 1099, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1984.

[35] C. M. Ringel, *The canonical algebras*, with an appendix by W. Crawley-Boevey, in: Topics in Algebra, Part 1: Rings and Representations of Algebras, Banach Center Publ. 26, PWN, Warszawa, 1980, 407–432.

[36] D. Simson, A. Skowroński, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras 2: Tubes and Concealed Algebras of Euclidean Type*, London Math. Soc. Student Texts 71, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.

[37] D. Simson, A. Skowroński, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras 3: Representation-Infinite Tilted Algebras*, London Math. Soc. Student Texts 72, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.

[38] A. Skowroński, *Generalized standard Auslander-Reiten components without oriented cycles*, Osaka J. Math. 30 (1993), 515–527.

[39] A. Skowroński, *Generalized standard Auslander-Reiten components*, J. Math. Soc. Japan 46 (1994), 517–543.

[40] A. Skowroński, *Regular Auslander–Reiten components containing directing modules*, Proc. Amer. Math. Soc. 120 (1994), 19–26.

[41] A. Skowroński, *Minimal representation-infinite artin algebras*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 116 (1994), 229–243.

[42] A. Skowroński, *On the composition factors of periodic modules*, J. London Math. Soc. 49 (1994), 477–492.

[43] A. Skowroński, *Cycle-finite algebras*, J. Pure Appl. Algebra 103 (1995), 105–116.

[44] A. Skowroński, *Tame quasi-tilted algebras*, J. Algebra 203 (1998), 470–490.

[45] A. Skowroński, *Directing modules and double tilted algebras*, Bull. Polish Acad. Sci. Ser. Math. 50 (2002), 77–81.

[46] A. Skowroński, *On artin algebras with almost all indecomposable modules of projective or injective dimension at most one*, Centr. Eur. J. Math 1 (2003), 108–122.

[47] A. Skowroński, A. Skowyrski, *A note on quasitilted algebras*, Coll. Math. 134 (2014), 281–286.

[48] A. Skowroński, S. O. Smalø, D. Zacharia, *On the finiteness of the global dimension of Artin rings*, J. Algebra 251 (2002), 475–478.

[49] A. Skowroński, K. Yamagata, *Frobenius Algebras I. Basic Representation Theory*, Eur. Math. Soc. Textbooks in Math., Eur. Math. Soc., Zürich, 2011.

[50] A. Skowroński, K. Yamagata, *Frobenius Algebras II. Tilted and Hochschild Extension Algebras*, Eur. Math. Soc. Textbooks in Math., Eur. Math. Soc., Zürich, 2017.

[51] A. Skowyrski, *Cycle-finite algebras with almost all indecomposable modules of projective or injective dimension at most one*, Coll. Math. 132 (2013), 239–270.

[52] A. Skowyrski, *A characterization of cycle-finite generalized double tilted algebras*, J. Algebra 416 (2014), 1–24.

[53] A. Skowyrski, *Cycle-finite algebras having finitely many indecomposable modules lying on short paths with injective source and projective target*, J. Pure Appl. Algebra 220 (2016), 364–381.

[54] J. H. M. Wedderburn, *On hypercomplex numbers*, Proc. London Math. Soc. 6 (1908), 77–118.

[55] Y. Zhang, *The structure of stable components*, Canad. J. Math. 43 (1991), 652–672.