

Roman S. Ingarden

ELEKTRODYNAMIKA STATYSTYCZNA

Część I

Klasyczna i kwantowa teoria koherencji

Na podstawie wykładów opracowali

Gerard Z. Czajkowski i Andrzej E. Jamiołkowski

Toruń 1975

Bydgoszcz 2026

Redaktor  
dr Andrzej Kossakowski

---

UMK zam. 114, nakł. 250 egz., ark.wyd. 21, cena zł 26,- E-17 9 1 72

---

# Spis treści

|                                                                                  |           |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Przedmowa</b>                                                                 | <b>7</b>  |
| <b>Wstęp</b>                                                                     | <b>9</b>  |
| <b>1 Dystrybucje</b>                                                             | <b>13</b> |
| 1.1 Wprowadzenie historyczne . . . . .                                           | 13        |
| 1.2 Określenie dystrybucji . . . . .                                             | 18        |
| 1.3 Działania algebraiczne na dystrybucjach . . . . .                            | 21        |
| 1.4 Różniczkowanie i całkowanie.<br>Ciągi i szeregi dystrybucji . . . . .        | 23        |
| 1.5 Własności lokalne i ogólna postać dystrybucji . . . . .                      | 26        |
| 1.6 Iloczyn prosty i splot dystrybucji . . . . .                                 | 29        |
| 1.7 Regularyzacja funkcji i całek rozbieżnych . . . . .                          | 32        |
| 1.8 Przekształcenia Fouriera dla dystrybucji . . . . .                           | 39        |
| <b>2 Metoda termodynamiki informacyjnej</b>                                      | <b>45</b> |
| 2.1 Momenty statystyczne . . . . .                                               | 45        |
| 2.2 Zasada maksimum informacji . . . . .                                         | 48        |
| 2.3 Rozkład geometryczny . . . . .                                               | 49        |
| 2.4 Rozkład prostokątny . . . . .                                                | 51        |
| 2.5 Rozkład wykładniczy . . . . .                                                | 52        |
| 2.6 Rozkład Poissona . . . . .                                                   | 53        |
| <b>3 Klasyczna teoria koherencji światła</b>                                     | <b>55</b> |
| 3.1 Wprowadzenie . . . . .                                                       | 55        |
| 3.2 Skalarna teoria koherencji. Opis przy użyciu sygnału analitycznego . . . . . | 56        |
| 3.3 Własności propagacyjne funkcji wzajemnej<br>koherencji . . . . .             | 62        |
| Uzupełnienia. Pewne własności funkcji Bessela . . . . .                          | 65        |

|          |                                                                                      |            |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>4</b> | <b>Statystyka fotonów</b>                                                            | <b>67</b>  |
| 4.1      | Pole o ustalonym natężeniu . . . . .                                                 | 67         |
| 4.2      | Promieniowanie o stochastycznym natężeniu . . . . .                                  | 69         |
| 4.3      | Określanie rozkładu natężenia na podstawie rozkładu $P(n, T + t, t)$ . . . . .       | 73         |
| 4.4      | Rozkłady łączne i rozkłady dla sum składników niezależnych . . . . .                 | 76         |
| 4.5      | Podstawowe własności rozkładów gaussowskich . . . . .                                | 81         |
| 4.6      | Stochastyczne pole $V(\mathbf{r}, t)$ . . . . .                                      | 87         |
| 4.7      | Gaussowskie procesy stochastyczne . . . . .                                          | 87         |
| 4.8      | Zastosowanie do teorii częściowej koherencji światła . . . . .                       | 93         |
| 4.9      | Interferometria gwiazdowa (natężeniowa) . . . . .                                    | 97         |
| 4.10     | Liczniki o skończonej czułości . . . . .                                             | 98         |
| <b>5</b> | <b>Procesy Markowa i d.c. termodynamiki informacyjnej</b>                            | <b>101</b> |
| 5.1      | Przejście od opisu dynamicznego do statystycznego . . . . .                          | 101        |
| 5.2      | Metoda funkcjonalna. Równania dla średnich . . . . .                                 | 103        |
| 5.3      | Elementy teorii procesów Markowa . . . . .                                           | 107        |
| 5.4      | Pewne pojęcia termodynamiki informacyjnej . . . . .                                  | 112        |
| <b>6</b> | <b>Operatory i stany mieszane</b>                                                    |            |
|          | <b>w teorii kwantowej</b>                                                            | <b>119</b> |
|          | Wstęp . . . . .                                                                      | 119        |
| 6.1      | Pewne własności przestrzeni Hilberta . . . . .                                       | 119        |
| 6.2      | Operatory liniowe w przestrzeni Hilberta . . . . .                                   | 121        |
| 6.3      | Stany czyste i stany mieszane . . . . .                                              | 125        |
| 6.4      | Stany polaryzacji fali monochromatycznej . . . . .                                   | 128        |
| 6.5      | Oscylator harmoniczny. Operatory tworzenia i niszczenia . . . . .                    | 131        |
|          | 6.5.1 Operatory gęstości dla układu oscylatorów . . . . .                            | 138        |
|          | 6.5.2 Nieskończony układ oscylatorów . . . . .                                       | 140        |
| <b>7</b> | <b>Równania ruchu dla skwantowanego pola elektromagnetycznego</b>                    | <b>143</b> |
| 7.1      | Ewolucja w czasie w mechanice kwantowej . . . . .                                    | 143        |
| 7.2      | Równania pola elektromagnetycznego. Podejście nierelatywistyczne . . . . .           | 145        |
| 7.3      | Relacje komutacji dla wielkości charakteryzujących pole elektromagnetyczne . . . . . | 149        |
| 7.4      | Ewolucja w czasie operatorów pola . . . . .                                          | 152        |
| <b>8</b> | <b>Stany koherentne</b>                                                              | <b>157</b> |
| 8.1      | Podstawowe własności stanów koherentnych . . . . .                                   | 157        |
| 8.2      | Dalsze własności stanów koherentnych . . . . .                                       | 161        |

|           |                                                                                   |            |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 8.3       | Reprezentacje ciągle . . . . .                                                    | 164        |
| 8.4       | Przykłady reprezentacji wektorów i operatorów<br>w stanach koherentnych . . . . . | 167        |
| 8.5       | Stany koherentne układu o wielu stopniach swobody . . . . .                       | 171        |
| 8.6       | Zastosowanie stanów koherentnych dla opisu pola elektromagnetycznego . . . . .    | 175        |
| <b>9</b>  | <b>Funkcje korelacyjne</b>                                                        | <b>181</b> |
| 9.1       | Funkcje korelacyjne pola kwantowego . . . . .                                     | 181        |
| 9.2       | Koherencja pola kwantowego . . . . .                                              | 189        |
| 9.3       | Rozkład prawdopodobieństwa rejestracji dla 1 modu . . . . .                       | 199        |
| <b>10</b> | <b>Teoria laserów gazowych</b>                                                    | <b>203</b> |
| 10.1      | Wstęp . . . . .                                                                   | 203        |
| 10.2      | Wstępne uwagi o oscylatorach . . . . .                                            | 205        |
| 10.3      | Teoria laserów. Pierwszy rząd rachunku zaburzeń . . . . .                         | 210        |
| 10.3.1    | Równania pola elektromagnetycznego . . . . .                                      | 211        |
| 10.3.2    | Polaryzacja ośrodka . . . . .                                                     | 212        |
| 10.3.3    | Całkowanie równań ruchu . . . . .                                                 | 214        |
| 10.4      | Pierwszy rząd rachunku zaburzeń . . . . .                                         | 215        |
| 10.5      | Trzeci rząd rachunku zaburzeń . . . . .                                           | 222        |
| 10.5.1    | Obliczenie polaryzacji w trzecim rzędzie rachunku zaburzeń . . . . .              | 222        |
| 10.5.2    | Przypadek 1-modowy . . . . .                                                      | 225        |
| 10.5.3    | Przypadek wielomodowy . . . . .                                                   | 229        |
| 10.5.4    | Przypadek 2-modowy . . . . .                                                      | 236        |
| 10.5.5    | Wyliczenie faz i amplitud dla sera 2-modowego . . . . .                           | 239        |
| 10.5.6    | Laser 3-modowy . . . . .                                                          | 240        |
| 10.5.7    | Zjawisko synchronizacji modów . . . . .                                           | 241        |
| 10.5.8    | Zagadnienie zmian i pulsacji populacji . . . . .                                  | 243        |
| 10.5.9    | Prostsza wersja teorii Lamba . . . . .                                            | 244        |
| 10.5.10   | Rozszerzenie dopplerowskie . . . . .                                              | 246        |
| 10.5.11   | “Wypalanie dziur ” . . . . .                                                      | 247        |
| 10.6      | Teoria Lamba w wersji zmodyfikowanej . . . . .                                    | 247        |
| <b>11</b> | <b>Teoria laserów gazowych</b>                                                    | <b>255</b> |
| 11.1      | Wstęp . . . . .                                                                   | 255        |
| 11.2      | Kwantowa mechanika statystyczna układów<br>niehamiltonowskich . . . . .           | 255        |
| 11.3      | Nieodwracalna termodynamika statystyczna . . . . .                                | 260        |

|                                                  |            |
|--------------------------------------------------|------------|
| 11.4 Operatory dyssypacji i pompowania . . . . . | 262        |
| 11.5 Model lasera na ciele stałym . . . . .      | 268        |
| <b>Literatura</b>                                | <b>273</b> |
| <b>Spis rysunków</b>                             | <b>275</b> |
| <b>Spis tablic</b>                               | <b>277</b> |
| <b>Skorowidz</b>                                 | <b>279</b> |

# Przedmowa

Skrypt niniejszy odpowiada wykładowi specjalistycznemu, który prowadziłem dla studentów fizyki teoretycznej Uniwersytetu M. Kopernika w Toruniu w latach akad. 1969/70 i 1970/71. Stanowi on samodzielną całość, jakkolwiek nawiązuje do poprzednio wydanego skryptu "Elektrodynamika klasyczna i kwantowa". Z drugiej strony przewiduje się w przyszłości kontynuację niniejszego skryptu jako część II "Elektrodynamiki statystycznej", która będzie poświęcona zaawansowanej teorii laserów, światłu laserowemu i jego działaniu na materię (optyka nieliniowa) oraz elektrodynamice nadprzewodników.

W części wykładów dotyczących klasycznej i kwantowej teorii koherencji światła korzystałem z pomocy znakomitego podręcznika J.R. Klaudera i E.C.G. Sudarshana, *Fundamentals of Quantum Optics*, Benjamin, New York, 1968 (tłum. ros. Mir, Moskwa 1970), który właśnie wtedy się ukazał. Wpływ tej książki jest wyraźny w rozdziałach III, IV, VII, VIII, IX oraz części rozdz. V i VI. Ponieważ jednak w zasadzie opieram się na nieco innych metodach statystycznych niż autorzy książki, wiele dowodów przeprowadzonych jest inaczej, korzystam też z nieco innych oznaczeń oraz z innego układu jednostek. W sumie ten mniej lub więcej tradycyjny już materiał obejmuje ok. 40 % skryptu, w pozostałej części natomiast opiera się w głównej mierze na badaniach własnych naszego toruńskiego zespołu, uwzględniając oczywiście także aktualny stan badań innych ośrodków. Co do bibliografii, to obejmuje ona jedynie najważniejsze pozycje, gdyż nie było możliwe podać wyczerpującej bibliografii w takiej objętości wobec ogromnego rozwoju badań w tej dziedzinie w ostatnich latach. Sądząc, że w obecnej postaci, choć z pewnością niekoskonalej, skrypt będzie stanowić pożyteczne wprowadzenie do tego niezwykle ważnego, nowego i bardzo dynamicznie rozwijającego się działu fizyki. Jeśli chodzi o materiał matematyczny skryptu, to część wyłożonych metod (przede wszystkim teoria dystrybucji przedstawiona w rozdz. I) będzie głównie potrzebna w II części skryptu, ich znajomość jest jednak pożyteczna także przy lekturze obecnej części, szczególnie rozdziału VI.

Autorzy pragną serdecznie podziękować recenzentom skryptu, doc. dr hab. Z. Białynickiej-Birula i doc. dr hab. S. Dembińskiemu, za wnikliwe uwagi krytyczne, które bardzo przyczyniły się do ulepszenia skryptu.

R.S. Ingarden      Toruń, wrzesień 1972 r.



# Wstęp

Elektrodynamika statystyczna, lub inaczej mówiąc, statystyczna teoria pola elektromagnetycznego, jest teorią powstałą na styku elektrodynamiki i termodynamiki. Mówiąc "termodynamika", mamy na myśli termodynamikę statystyczną w ujęciu teorii informacyjnym, opartą na zasadzie maksimum niepewności, (p. Jaynes<sup>1</sup>, Ingarden<sup>2</sup>, obszerną literaturę podaje R.S. Ingarden w cytowanej poniżej pracy).

Przeniesienie metod statystycznych termodynamiki na grunt teorii pola nie jest sprawą prostą ze względu na fakt, że pole elektromagnetyczne stanowi układ o nieskończonej ilości stopni swobody. Pojawiają się przy tym przejściu skomplikowane problemy matematyczne.

Termodynamikę statystyczną pola elektromagnetycznego konstruować więc będziemy opierając się z jednej strony na pojęciu entropii i temperatur uogólnionych (dowolnego rzędu i względem dowolnej wielkości fizycznej), a z drugiej strony - na elektrodynamice klasycznej i kwantowej, której podstawy naszkicowaliśmy w skrypcie "Elektrodynamika klasyczna i kwantowa", Wydawnictwa Uniwersytetu M. Kopernika, Toruń 1970. Ze względu na to, że teoria w wyżej określonym sensie dopiero powstaje i rozwija się, nie ma w literaturze monografii na ten temat. Podejmujemy więc próbę wykładu teorii, ukazując ją "in statu nascendi", ze wskazaniem całego ogromu problemów, które czekają na rozwiązanie.

Jedną z podstawowych metod tworzenia teorii naukowych jest szukanie analogii między różnymi, często na pozór odległymi dziedzinami wiedzy i przenoszenie poprzez abstrahowanie, wyników jednej dziedziny na drugą. Często bowiem teoria w pierwotnej postaci jest skomplikowana i zawiła i upraszcza się dopiero poprzez uogólnienie. Na przykład pojęcie entropii, wprowadzone do termodynamiki w sposób sztuczny i niezrozumiały na gruncie klasycznej termodynamiki fenomenologicznej, zyskuje głęboki sens poprzez zastosowanie pojęcia informacji, wprowadzonego w dziedzinie na pozór odległej od termodynamiki i fizyki w ogóle, jaką jest teoria informacji.

Wykład nasz obejmuje dwie grupy zagadnień zawarte kolejno w części I i II niniejszego skryptu. Będą to: **teoria koherencji** i **teoria laserów**. Ze względu na wieloznaczność terminu "laser" zwrócimy uwagę na pewne kwestie terminologiczne. Słowo "laser" ma bowiem dwa znaczenia:

---

<sup>1</sup>E.T. Jaynes, Phys. Rev. **106**, 620 (1957).

<sup>2</sup>R.S. Ingarden, Fortschr. Phys. **12**, 567 (1964); ibid. **13**, 755 (1965).

ogólniejsze i węższe. W węższym oznacza kwantowy wzmacniacz fal optycznych, lub używając terminologii stosowanej w ZSRR: optyczny generator kwantowy (OGK). Stąd wzięta jest etymologia słowa utworzonego na wzór terminu "maser"<sup>3</sup> (z pierwszych liter angielskiego określenia microwave amplification by stimulated emission of radiation). Dla innych długości fal powstały odpowiednio terminy - iraser (od infrared - podczerwony), raser (od radio). Obecnie przyjął się jednakże termin "laser" w sensie ogólniejszym, gdy przez światło (*light*) rozumiemy szeroką dziedzinę promieniowania elektromagnetycznego. W tym ogólniejszym sensie używać będziemy terminu "laser" lub inaczej generator kwantowy (G.K).

O ile pierwsza dziedzina, tzn. teoria koherencji, jest już dość dobrze opracowana i istnieją monografie na ten temat, o tyle w dziedzinie teorii laserów sytuacja jest o wiele trudniejsza. To, co stwierdziliśmy odnośnie do elektrodynamiki statystycznej, szczególnie odnosi się do teorii laserów. Ukazały się tysiące prac oryginalnych i wiele podręczników na temat laserów, lecz są to prace o nstawieniu raczej doświadczalnym. Prac teoretycznych o znaczeniu podstawowym na temat teorii laserów jest co najwyżej kilkadziesiąt. Poza grono radziecką w Instytucie Lebediewa w Moskwie poszczególnymi badaczami istnieją dwie główne grupy fizyków zajmujące się teorią laserów i mające istotne wyniki w tej dziedzinie - grupa M. Laxa i W.H. Louisella w Bell Telephone Laboratories oraz grupa pracująca w Stuttgarcie pod kierunkiem H. Hakena (H. Haken, H. Risken i inni).

Do pierwszej części wykładu będą potrzebne pewne uzupełnienia matematyczne, a mianowicie teoria dystrybucji, całkowanie funkcjonalne, pewne pojęcia i metody termodynamiki informacyjnej i elementy teorii procesów stochastycznych. Dla potrzeb teorii laserów będziemy musieli rozbudować poznany aparat elektrodynamiki kwantowej

Oto kilka pozycji z literatury, będących uzupełnieniem i rozszerzeniem materiału wykładowego.  
TEORIA DYSTRYBUCJI:

1. A.H. Zemanian, *Teoria dystrybucji i analiza transformat*, Warszawa, PWN, 1969.
2. I. Halperin, *Introduction to the theory of distributions*, Toronto, Canada, 1952.
3. H. Bremermann, *Distributions, Complex Variables, and Fourier Transforms*, Reading, Mass. 1965 (tłum. ros, 1968).
4. I.M. Gelfand, G.E. Shilov, *Funkcje uogólnione* (ros.), tom 1,2, Moskwa, 1958.
5. I.M. Gelfand, N.J. Wilenkin, *Funkcje uogólnione* (ros.), tom 4, Moskwa, 1961.
6. S.G. Krejn, *Analiza funkcjonalna*, PWN, Warszawa, 1967.
7. K. Maurin, *Analiza matematyczna*, PWN, Warszawa, 1964 (tom IV, rozdz. XVIII, skrypt).
8. M.J. Lighthill, *Wstęp do analizy Fouriera i teorii dystrybucji*, PWN, Warszawa, 1963.

---

<sup>3</sup>Nazwę tę zaproponował C.H. Townes.

9. J. Mikusiński i R. Sikorski, *Elementarna teoria dystrybucji*, PWN, Warszawa, 1964.

#### CAŁKOWANIE FUNKCJONALNE:

1. K.O. Friedrichs and H.N. Shapiro, *Integration of functionals*, N. York University (skrypt), N. York, 1957.
2. J. Rzewuski, *Field Theory*, vol. II, PWN, Warszawa, 1969.

#### TERMODYNAMIKA INFORMACYJNA:

1. R.S. Ingarden, Fortschr. Phys. **12**, 567 (1964); ibid. **13**, 755 (1965).

#### PROCESY STOCHASTYCZNE:

1. P. Billingsley, *Ergodic Theory and Information*, Wiley, N. York, 1965.
2. M. Rosenblatt, *Random processes*, Oxford Univ. Press, N. York, 1962 (tłum. polskie PWN, Warszawa, 1967).
3. A.A. Swiesznikow, *Podstawowe metody funkcji losowych*, PWN, Warszawa, 1965.

#### TEORIA KOHERENCJI: - klasycznej

1. H.J. Beran and G.B. Parrent, *Theory of Partial Coherence*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1964.

#### - kwantowej

1. R.J. Glauber, *Quantum Optics and Electronics*, Gordon and Breach, N. York, 1965.
2. J.R. Klauder and E.C.G. Sudarshan, *Fundamentals of Quantum Optics*, Benjamin, New York, 1968.

#### TEORIA LASERÓW:

1. W. Louisell, *Radiation and Noise in Quantum Electronics*, McGraw-Hill, N. York, 1964.
2. H. Risken, Fortschr. Phys. **16**, 261 (1968).
3. H. Haken, *Laser Theory*, Handbuch d. Physik Bd. XXV/2c, Springer, Berlin, Heidelberg, N. York, 1970.



# Rozdział 1

## Dystrybucje

### 1.1 Wprowadzenie historyczne

Pojęcie dystrybucji ma swoją prehistorię, sięgającą XIX w., kiedy to O. Heaviside<sup>1</sup> stworzył rachunek operatorowy oraz zdefiniował funkcję  $\Theta$ . W latach 30-tych XX w. P. Dirac wprowadził pojęcie funkcji "delta". Wprowadzone jednak przez Heaviside'a i Diraca dystrybucje zdefiniowane były nieściśle, w oparciu o pewne intuicje. Niezależnie dystrybucje pojawiają się w pracach matematycznych, a mianowicie w pracach matematyków radzieckich, C.Ł. Giuntera<sup>2</sup> który nazywa dystrybucje "funkcjami obszarów" (function de domain), i L.S. Sobolewa<sup>3</sup> który podał ogólną definicję dystrybucji. Prawdziwy przełom w rozwoju teorii dystrybucji stanowią prace L. Schwartza<sup>4</sup>, a w szczególności jego dwutomowa monografia "Théorie des distributions", t.I, 1950, t.II, 1951. Schwartz formułuje ściśle definicje dystrybucji przy użyciu teorii funkcjonałów. Czyniono również próby sformułowania teorii dystrybucji bez użycia funkcjonałów, p. np. prace Mikusińskiego<sup>5</sup>, Sikorskiego,<sup>6</sup> Temple'a<sup>7</sup> i innych.

W naszym wykładzie opierać się będziemy na ujęciu funkcjonalnym Schwartza. Zgodnie z definicją zawartą w par. 35<sup>8</sup>, funkcjonałem nazywamy odwzorowanie przestrzeni liniowej  $L$  w przestrzeń  $C^1$  (lub  $R^1$ ). Dziedzina  $D$  funkcjonału w ogólności nie musi pokrywać się z całą przestrzenią  $L$ . Funkcjonał o wartościach w przestrzeni  $C^1$  nazywamy **zespółonym**, a o wartościach w  $R^1$  - **rzeczywistym**.

Funkcjonał  $F$  jest liniowy, gdy jego dziedzina jest podprzestrzenią liniową przestrzeni  $L$  i spełnia

---

<sup>1</sup>O. Heaviside, 1850-1925,

<sup>2</sup>C.Ł. Giunter, Prace matematyczno-fizyczne **35** (1935) 33.

<sup>3</sup>L.S. Sobolew, Matem. sb. **1** (1936) 39.

<sup>4</sup>L. Schwartz, Ann, Univ. Grenoble **21** (1945) 510.

<sup>5</sup>J. Mikusiński, Fund. Math. **35** (1948) 235.

<sup>6</sup>R. Sikorski, Rozprawy Mat. **12**(1957)1; 25(1961)1, p. również J. Mikusiński i R. Sikorski, Elementarna teoria dystrybucji, PWN, Warszawa, 1964.

<sup>7</sup>S. Temple, J. Cond. Math. 28(1953)134.

<sup>8</sup>R.S. Ingarden, Elektrodynamika klasyczna i kwantowa, Toruń 1970.

dwa warunki:

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \forall \alpha \in C^1(\text{lub } R^1) \quad \text{i} \quad \forall x \in D \\
 & F(\alpha x) = \alpha F(x) \quad \text{jednorodność} \\
 \text{b)} \quad & \forall x, y \in D \\
 & F(x + y) = F(x) + F(y) \quad \text{addytywność.}
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Funkcjonały, które będą występowały w dalszych rozważaniach, będą z reguły funkcjonalami liniowymi.

Niech  $F$  będzie funkcjonalem określonym na pewnym zbiorze funkcji, który oznaczymy przez  $K$ . Działanie operatora  $F$  (funkcjonał jest szczególnym przypadkiem operatora) na element  $\varphi \in M$  zapisuje się

$$F\varphi \equiv F(\varphi) \equiv F[\varphi(x)] \equiv F[\varphi(\cdot)]; \tag{1.2}$$

ten ostatni zapis ma podkreślać, że argumentem jest cała funkcja, a nie wartość funkcji w punkcie  $x$ .

W przypadku, gdy funkcjonal  $F$  jest liniowy, stosuje się jeszcze jedno oznaczenie

$$F(\varphi) \equiv (F, \varphi) \tag{1.3}$$

i tego właśnie zapisu będziemy najczęściej używali. Wprowadzenie trafnych oznaczeń niejednokrotnie ułatwiło rozwój teorii, dlatego wybór właściwego zapisu nie jest sprawą bez znaczenia.

Przyjmijmy, że  $K = C(a, b)$ , to znaczy, że

$$K := \{\varphi(x); \quad \varphi(x) \text{ jest funkcją ciągłą na } [a, b]\} \tag{1.4}$$

(symbol  $:=$  oznacza "równy z definicji").

Jeżeli działania w  $K$  określimy w zwykły sposób, to  $K$  stanie się przestrzenią liniową. Niech  $f(x)$  będzie funkcją ciągłą na odcinku  $[a, b]$ ; wprowadzając oznaczenie

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx \stackrel{\text{ozn}}{=} (F, \varphi), \quad \text{gdzie } \varphi \in K, \tag{1.5}$$

łatwo sprawdzić, że zachodzi równość

$$(F, c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1(F, \varphi_1) + c_2(F, \varphi_2) \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in K. \tag{1.6}$$

Widzimy, że wzór (1.5) określa przyporządkowanie

$$f(\cdot) \longrightarrow F,$$

gdzie  $f(\cdot)$  jest dowolną funkcją z  $C(a, b)$ , a  $F$  funkcjonalem liniowym na przestrzeni  $K$ .

Zmieńmy teraz własności funkcji należących do przestrzeni  $K$  - niech  $K$  będzie zbiorem postaci

$$K := \{\varphi(x); \quad \varphi \in C_1(a, b) \quad \text{ i } \quad \varphi(a) = \varphi(b) = 0\}, \quad (1.7)$$

gdzie  $C_1(a, b)$  oznacza zbiór funkcji ciągłych wraz z pochodnymi na odcinku  $[a, b]$ . Jeżeli  $f(x) \in C_1(a, b)$ , to utrzymując oznaczenie (1.5) możemy napisać

$$(F', \varphi) = \int_a^b f'(x)\varphi(x) dx = - \int_a^b f(x)\varphi'(x) dx = -(F, \varphi'). \quad (1.8)$$

Z ostatniego wzoru widać, że dowolnej funkcji  $f(x)$  lokalnie całkownej (tzn. całkownej w każdej kuli  $|x| \leq a$ ) można przypisać "pochodną" przyjmując równość

$$(F', \varphi) := -(F, \varphi') \quad (1.9)$$

jako definicję funkcjonału  $F'$ .

Widzimy, że zmieniając własności funkcji należących do zbioru  $K$ , możemy otrzymywać coraz to nowe własności funkcjonałów określonych na tym zbiorze. Jest rzeczą charakterystyczną, że zawężając zbiór  $K$ , otrzymujemy coraz obszerniejszą klasę funkcjonałów liniowych określonych na  $K$ .

Dokonyjmy następnego zawężenia zbioru  $K$  do postaci

$$K := \left\{ \varphi(x); \quad \varphi \in C_\infty(a, b) \quad \text{ i } \quad \varphi^{(n)}(a) = \varphi^{(n)}(b) = 0 \quad \text{ dla } \quad n = 0, 1, 2, \dots \right\}, \quad (1.10)$$

gdzie  $C_\infty(a, b)$  oznacza zbiór funkcji niekończąc wielokrotnie różniczkowalnych w sposób ciągły na  $[a, b]$ . Przykładem funkcji ze zbioru  $K$  jest

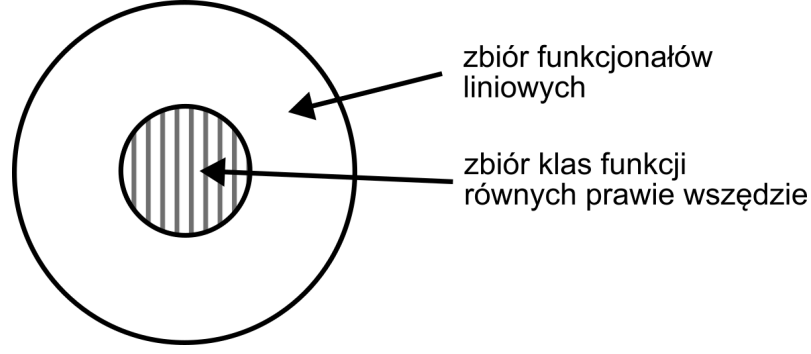
$$\varphi_{c,d} := \begin{cases} \exp \left[ - \left( \frac{1}{x-c} + \frac{1}{d-x} \right) \right] & \text{ dla } c < x < d, \quad a \leq c < d \leq b, \\ 0 & \text{ dla } x \leq 0 \quad \text{ i } \quad x \geq d. \end{cases} \quad (1.11)$$

Niech teraz  $f(x)$  i  $g(x)$  będą dwiema ciągłymi funkcjami, różnymi na pewnym zbiorze - jeżeli tak jest, to liczby  $(F, \varphi) = \int_a^b f(x)\varphi(x) dx$  i  $(G, \varphi) = \int_a^b g(x)\varphi(x) dx$  muszą się różnić dla co najmniej jednej funkcji  $\varphi \in K$ . Można bowiem znaleźć przedział  $c < x < d$ , w którym różnica  $f(x) - g(x)$  jest zawsze dodatnia lub zawsze ujemna i przyjmując funkcje postaci (1.11) otrzymujemy

$$(F, \varphi) - (G, \varphi) \neq 0.$$

Z drugiej strony, jeżeli  $f(x)$  i  $g(x)$  są jedynie funkcjami lokalnie całkownymi i jeżeli zachodzi równość  $(F, \varphi) = (G, \varphi)$  dla wszystkich  $\varphi \in K$ , to funkcje  $f(x)$  i  $g(x)$  różnią się co najwyżej na zbiorze miary zero. Rzeczywiście, ponieważ dla każdego  $n$   $(\varphi_{c,d})^{1/n} \in K$ , więc

$$0 = (F, \sqrt[n]{\varphi_{c,d}}) - (G, \sqrt[n]{\varphi_{c,d}}) = \int_c^d [f(x) - g(x)] \sqrt[n]{\varphi_{c,d}(x)} dx. \quad (1.12)$$



Rysunek 1.1: Funkcjonały liniowe i funkcje równe prawie wszędzie

Również dla każdego  $n$  zachodzi

$$[f(x) - g(x)] \sqrt[n]{\varphi_{c,d}(x)} < M|f(x) - g(x)|,$$

gdzie  $M$  jest pewną stałą, więc możemy na podstawie twierdzenia Lebesgue'a przestawić przejście do granicy względem  $n \rightarrow \infty$  z całkowaniem we wzorze (1.12) i napisać

$$\int_c^d [f(x) - g(x)] dx = 0. \quad (1.13)$$

bo dla  $x \in [c, d]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\varphi_{c,d}(x)]^{1/n} \rightarrow 1.$$

Ze względu na to, że równość (1.13) zachodzi dla wszystkich  $c$  i  $d$ , wynika stąd, że  $f(x) = g(x)$  prawie wszędzie (tzn. z wyjątkiem zbioru miary zero). Wykazaliśmy zatem, że funkcjonal dany wzorem postaci  $(F, \varphi) = \int_a^b f(x)\varphi(x) dx$  określa prawie wszędzie funkcję, która go wyznacza. W związku z tym, że wartości funkcji na zbiorze miary zero są nieistotne tak dalece, jak dotyczy ich twierdzenie Lebesgue'a, wszystkie funkcje lokalnie całkowne, które różnią się co najwyżej na zbiorze miary zero, wyznaczają klasę funkcji równoważnych - wszystkie funkcje tej klasy określają ten sam funkcjonal liniowy poprzez wzór  $(F, \varphi) = \int_a^b f(x)\varphi(x) dx$ , gdzie  $\varphi(x) \in K$ . Uważając za równe funkcje należące do tej samej klasy, to znaczy różniące się co najwyżej na zbiorze miary zero, możemy ustalić odpowiedniość wzajemnie jednoznaczną

$$f(\cdot) \rightleftharpoons F$$

między funkcjami reprezentującymi poszczególne klasy a funkcjonalami liniowymi na przestrzeni  $K$ . Graficznie sytuację można przedstawić jak na rys. 1.1. Załóżmy teraz, że przestrzeń  $K$  składa się ze wszystkich funkcji  $\varphi(x)$  (określonych na  $R^1$ ) o wartościach zespolonych, które należą do  $C_\infty(R^1)$  (i  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ ). Będziemy tę przestrzeń oznaczali przez  $K_{[a,b]}$ . Aby badać ciągłość funkcjonałów, musimy wprowadzić zbieżność w przestrzeni  $K_{[a,b]}$ . Ciąg funkcji  $\varphi_m(x) \in K_{[a,b]}$  nazywamy zbieżnym w przestrzeni  $K_{[a,b]}$ , jeżeli wszystkie funkcje ciągu  $\{\varphi_m(x)\}$  równają się zeru

poza pewnym ustalonym przedziałem skończonym i jeżeli dla  $k = 0, a, 2, \dots$  ciąg  $\{\varphi_m(x)\}$  jest zbieżny jednostajnie na  $R^1$ . Można pokazać, że granica każdego ciągu zbieżnego w przestrzeni  $K_{[a,b]}$  należy również do przestrzeni  $K_{[a,b]}$ . Teraz możemy podać definicję funkcjonału ciągłego na przestrzeni  $K_{[a,b]}$ .

Funkcjonał  $F$  określony na przestrzeni  $K_{[a,b]}$  jest ciągły, jeżeli dla dowolnego ciągu funkcji  $\{\varphi_m(x)\}$ , który dąży w przestrzeni  $K_{[a,b]}$  do funkcji  $\varphi(x)$ , ciąg liczb  $\{(F, \varphi_m)\}$  dąży do liczby  $(F, \varphi)$  w zwykłym sensie.

Niech  $I$  będzie dowolnym przedziałem skończonym lub nieskończonym (np. całą osią rzeczywistą). **Dystrybucją (funkcją uogólnioną)** na  $I$  nazywamy funkcjonał  $F$  taki, że dla dowolnego odcinka (skończonego przedziału)  $[a, b] \subset I$ ,  $F$  jest liniowym funkcjonałem ciągłym na  $K_{[a,b]}$ . Gdy  $f(x)$  jest funkcją lokalnie sumowalną (całkowalną), to, jak łatwo sprawdzić, funkcjonał określony wzorem

$$(F, \varphi) = \int_a^b f(x)\varphi(x) dx, \quad \varphi(x) \in K_{[a,b]} \quad (1.14)$$

jest dystrybucją. Dystrybucje zadane powyższym wzorem nazywamy **dystrybucjami regularnymi** (lub dystrybucjami typu funkcji).

Teraz identyfikację  $f(\cdot) \Rightarrow F$  możemy sformułować nieco inaczej. Otóż możemy powiedzieć, że dystrybucja określa prawie wszędzie funkcję ją wyznaczającą i odwrotnie - wszystkie funkcje lokalnie całkowalne, które różnią się co najwyżej na zbiorze miary zero, wyznaczają klasę funkcji równoważnych, które określają tę samą dystrybucję regularną. Zatem bez powstania niejasności możemy uważać równoważną klasę funkcji oraz odpowiadającą jej regularną dystrybucję jako tę samą wielkość.

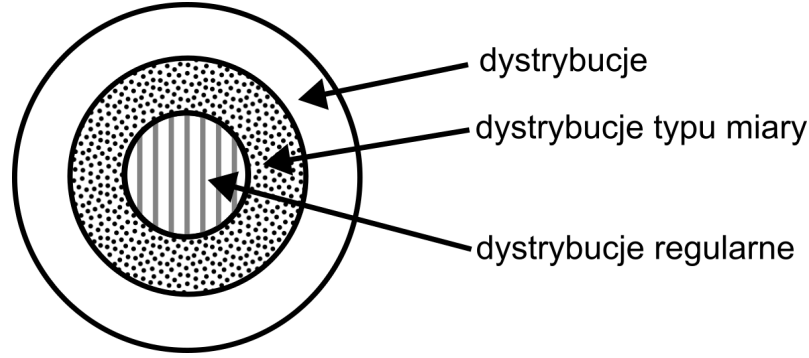
Dystrybucje regularne stanowią dość wąską klasę wewnątrz zbioru wszystkich dystrybucji. Dystrybucje, które nie dają się przedstawić w postaci całkowej z lokalnie sumowalną funkcją  $f(s)$ , nazywamy dystrybucjami **osobliwymi**. Obszerna klasa spośród dystrybucji osobliwych dana jest wzorami postaci

$$(F, \varphi) = \int_a^b \varphi(x) df(x) \quad \text{dla} \quad \forall \varphi \in K_{[a,b]}, \quad (1.15)$$

gdzie  $f$  jest miarą w przestrzeni  $R^1$  o skończonym wahanu  $|x| \leq a$ , a całkę rozumiemy w sensie Stieltjesa. Gdy funkcja ma pochodną, wzór (1.15) określa dystrybucję regularną. Graficznie sytuację można przedstawić następująco (Rys.1.2). Dystrybucje postaci (1.15) nazywamy **dystrybucjami typu miary**. Przykładem dystrybucji typu miary jest funkcja  $\delta$ . Odpowiedni funkcjonał dany jest wzorem

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0). \quad (1.16)$$

Odpowiada on mierze jednostkowej skupionej w punkcie  $x = 0$ . Dystrybucje osobliwe opisuje się



Rysunek 1.2: Dystrybucje

często w ten sam sposób jak dystrybucje regularne. Stąd właśnie pochodzi zapis

$$(\delta, \varphi) = \int_{R^1} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0). \quad (1.17)$$

Powyższe rozważania miały charakter heurystyczny i miały stanowić wprowadzenie do ścisłej teorii dystrybucji, przedstawionej w dalszym ciągu tego rozdziału. Na zakończenie chcielibyśmy podać pewne względy natury fizycznej przemawiające za jak najszerszym stosowaniem dystrybucji w fizyce i technice. Wielkości fizyczne zwykle traktuje się jak funkcje zadające prawo, które przyporządkowuje liczby wartościom pewnych zmiennych przyjmowanych jako parametry. Ten sposób opisu nie jest jednak zbyt przyjazny dla potrzeb fizyki - nie można mierzyć wielkościfizycznych w każdej chwili, gdyż przyrządy mają skończoną zdolność rozdzielczą. Instrumenty pomiarowe opisują jedynie mierzone wielkości w pewnych różnych od zera przedziałach czasowych, będących funkcjami przyrządu. Okazuje się, że pojęcie dystrybucji stanowi lepszy mechanizm analizowania pewnych problemów fizycznych niż pojęcie funkcji - dystrybucjom nie przypisuje się wartości chwilowych, w związku z czym nie ma problemu fizycznego zinterpretowania ich, a dowolna wielkość fizyczna, która może być przedstawiona jako funkcja, może być również scharakteryzowana jako dystrybucja i w rzeczywistości ostatnie przedstawienie jest dokładniejsze.

## 1.2 Określenie dystrybucji

Ponieważ w dalszym ciągu rozważać będziemy funkcje zarówno jednej, jak i wielu zmiennych, więc dla skrócenia zapisu przyjmujemy następujące oznaczenia

$$\begin{aligned} 1) \quad & x = (x_1, \dots, x_n) \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \dots; \\ 1') \quad & dx = dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n; \\ 2) \quad & |x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \quad \{x\} = R^n \\ 3) \quad & q = (q_1, \dots, q_n), \quad q_k \geq 0, \quad q_k \text{ są liczbami całkowitymi;} \end{aligned} \quad (1.18)$$

- 4)  $|q| = q_1 + \dots + q_n;$
- 5)  $q! = q_1! \cdot \dots \cdot q_n!;$
- 6)  $x^q = x_1^{q_1} \cdot \dots \cdot x_n^{q_n};$
- 7)  $\varphi(x) = \varphi(x_1, \dots, x_n);$
- 8)  $\varphi^{(q)}(x) = \frac{\partial^{q_1 + \dots + q_n} \varphi(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1^{q_1} \dots \partial x_n^{q_n}}.$

Przy tych oznaczeniach szereg Taylora dla funkcji wielu zmiennych ma taką samą postać jak dla funkcji jednej zmiennej

$$\varphi(x+h) = \sum |q| = 0^\infty \frac{\varphi^{(q)}(x) h^q}{q!},$$

gdzie  $h = (h_1, \dots, h_n)$ .

Dla uproszczenia zapisu wprowadzimy jeszcze jedno oznaczenie związane z całkowaniem po całej przestrzeni  $R^n$ :

$$\int_{R^n} \varphi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdot \dots \cdot x_n = \int \varphi(x) dx. \quad (1.19)$$

Teraz możemy podać ogólną definicję dystrybucji w sensie Schwartza.

Dystrybucją lub funkcją uogólnioną nazywamy ciągły funkcjonal liniowy  $(F, \varphi)$ , określony na przestrzeni  $\mathcal{D}$ . Przestrzeń  $\mathcal{D}$  składa się ze wszystkich funkcji należących do  $C_\infty(R^n)$ , o zwartym nośniku<sup>9</sup> przyjmujących wartości zespolone, tzn.

$$\mathcal{D} := \left\{ \varphi(x) : \begin{array}{l} \varphi(x) \in C_\infty(R^n), \quad \text{supp } \varphi \text{ jest zwarty} \\ \text{i } \varphi(x) \text{ przyjmuje wartości z } C^1 \end{array} \right\}.$$

Dodajmy tu kilka wyjaśnień. Podzbiór  $A$  przestrzeni metrycznej  $x$  jest zwarty, jeżeli z każdego ciągu punktów należących do  $A$  można wyjąć podciąg zbieżny do pewnego punktu należącego do  $A$ . Każdy zbiór zwarty jest domknięty i ograniczony. W przestrzeni  $R^n$  prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne. Mianowicie na to, by zbiór  $A \subset R^n$  był zwarty, potrzeba i wystarcza, by zbiór  $A$  był domknięty i ograniczony. Ponieważ nośnik funkcji z definicji jest zbiorem domkniętym, więc w  $R^n$  funkcja  $\varphi(x)$  jest funkcją o nośniku zwartym, jeżeli istnieje takie  $a$ , że  $\varphi(x) = 0$  przy  $|x| \geq a$ . Funkcje tej postaci będziemy również nazywali **funkcjami finitnymi**. W poprzednim podrozdziale podaliśmy przykład funkcji o zwartym nośniku (funkcje  $\varphi_{c,d}$ ).

Przestrzeń  $\mathcal{D}$  jest często nazywana przestrzenią funkcji próbnych. Jeżeli w zwykły sposób określimy w  $\mathcal{D}$  dodawanie funkcji i mnożenie przez elementy z  $C^1$ , to  $\mathcal{D}$  stanie się przestrzenią liniową nad ciałem liczb zespolonych. Zbiór  $\mathcal{D}'$  wszystkich funkcjonałów liniowych i ciągłych (dystrybucji!) określonych na przestrzeni  $\mathcal{D}$  nazywamy przestrzenią sprzężoną (dualną) z przestrzenią  $\mathcal{D}$ .

<sup>9</sup>Nośnikiem funkcji  $f(x)$  nazywamy domknięcie zbioru punktów należących do  $R^n$ , w których  $f(x) \neq 0$  i oznaczamy go przez  $\text{supp } f$ .

Topologię w przestrzeni  $\mathcal{D}$  określamy następująco: ciąg funkcji  $\varphi_m(x) \in \mathcal{D}$  nazywamy **ciągim zbieżnym do zera**, jeżeli:

- a) wszystkie funkcje  $\varphi_m(x)$  są równe zero na zewnątrz tej samej kuli  $|x| \leq a$ , ( $a$  jest niezależne od  $m$ ),
- b) dla dowolnego  $q$  zachodzi
$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_x |\varphi_m^{(q)}(x)| = 0.$$

Wobec powyższych określeń, jeżeli  $F$  jest dystrybucją, to  $(F, \varphi) \in C^1$ , ( $\varphi \in \mathcal{D}$ ) oraz zachodzą związki:

- a)  $(F, \varphi_1 + \varphi_2) = (F, \varphi_1) + (F, \varphi_2);$
- b)  $(F, \alpha \varphi) = \alpha(F, \varphi)$  dla dowolnego  $\alpha \in C^1;$
- c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (F, \varphi_n) = 0$  gdy  $\varphi_n \rightarrow 0$  w  $\mathcal{D}.$

Dystrybucję  $F$  nazywamy rzeczywistą, gdy  $(F, \varphi) \in R^1$  dla wszystkich rzeczywistych  $\varphi \in \mathcal{D}$ .

Rozpatrzmy kilka przypadków szczególnych. Niech  $f(x)$  będzie funkcją określoną na  $R^n$ . Funkcji tej można przyporządkować dystrybucję  $F$  poprzez równość

$$(F, \varphi) = \int f(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi(x) \in \mathcal{D}. \quad (1.20)$$

Rzeczywiście, całka po prawej stronie wzoru (1.20) określa ciągły funkcjonal liniowy na przestrzeni  $\mathcal{D}$ . Analogicznie, dla każdej funkcji  $f(x)$  lokalnie sumowalnej (całkowalnej na każdej kuli  $|x| \leq a$ ) i  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$  całka

$$\int_R^n f(x) \varphi(x) dx$$

jest zbieżna i określa ciągły funkcjonal liniowy na  $\mathcal{D}$ . Tak więc każdej lokalnie sumowalnej funkcji  $f(x)$  odpowiada dystrybucja  $F$ . Określa to zanurzenie przestrzeni funkcji lokalnie sumowalnych w przestrzeni  $\mathcal{D}'$  wszystkich dystrybucji. Przy tym różnym funkcjom lokalnie sumowalnym odpowiadają różne dystrybucje: jeżeli  $f_1(x)$  i  $f_2(x)$  są funkcjami lokalnie sumowalnymi i dla wszystkich funkcji  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$  zachodzi  $(F_1, \varphi) = (F_2, \varphi)$ , to dla prawie wszystkich  $x$  słuszna jest równość  $f_1(x) = f_2(x)$ . Dystrybucje  $(F, \varphi)$  odpowiadające funkcjom lokalnie sumowalnym  $f(x)$ , określonym na  $R^n$ , nazywamy **dystrybucjami regularnymi**.

Przykładem dystrybucji regularnej może być dystrybucja Heaviside'a  $\Theta$

$$(\Theta, \varphi) = \int_0^\infty \varphi(x) dx \quad \text{dla} \quad \varphi(x) \in \mathcal{D}, \quad x \in R^1, \quad (1.21)$$

której odpowiada funkcja lokalnie sumowalna

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x < 0, \end{cases}$$

- w punkcie zero -  $\Theta(0)$  - może mieć przypisaną dowolną wartość.

Wzór (1.21) można przepisać w postaci

$$(\Theta, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x) \varphi(x) dx = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx. \quad (1.22)$$

Funkcja  $\Theta(x)$  bywa również oznaczana przez  $H(x)$  i  $1_+(x)$ .

Dystrybucje, które nie dają się przedstawić w postaci całkowej z lokalnie sumowalną funkcją  $f(x)$ , nazywamy dystrybucjami osobliwymi (singularnymi). Przykładem dystrybucji osobliwej jest funkcja  $\delta$ . Odpowiedni funkcjonal dany jest wzorem

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0). \quad (1.23)$$

Obszerna klasa dystrybucji osobliwych dana jest wzorami postaci

$$(F, \varphi) = \int \varphi(x) d f(x), \quad (1.24)$$

gdzie  $f$  jest miarą w przestrzeni  $R^n$  o skończonym wahanu w każdej kuli  $|x| \leq a$ , a całkę rozumiemy w sensie Stjeltjesa. Dystrybucje tej postaci nazywamy dystrybucjami typu miary.

Dystrybucją typu miary jest dystrybucja  $\delta$  Diraca.<sup>10</sup> Dystrybucje osobliwe zapisuje się często w tej samej formie co dystrybucje regularne

$$(F, \varphi) = \int f(x) \varphi(x) dx. \quad (1.25)$$

Stąd pochodzi symboliczny zapis

$$(\delta, \varphi) = \int \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0). \quad (1.26)$$

### 1.3 Działania algebraiczne na dystrybucjach

Wprowadzając w przestrzeni  $\mathcal{D}'$  dodawanie i mnożenie przez liczby z  $C^1$ , tworzymy z  $\mathcal{D}'$  przestrzeń liniową. **Sumę dystrybucji** określamy równością

$$(F_1 + F_2, \varphi) := (F_1, \varphi) + (F_2, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (1.27)$$

a iloczyn dystrybucji przez liczbę  $\alpha \in C^1$  - równością

$$(\alpha F, \varphi) := \alpha(F, \varphi) \quad \forall \alpha \in C^1. \quad (1.28)$$

Dla dystrybucji regularnych definicje te pokrywają się ze zwykłymi definicjami sumy funkcji i iloczynu funkcji przez liczbę.

---

<sup>10</sup>W poprzednich rozdziałach używaliśmy określenia "funkcja  $\delta$ ", gdyż nie zdefiniowane było jeszcze pojęcie dystrybucji.

Niech  $g(x) \in C_\infty(R^n)$ . Przyjmujemy, że

$$(g(x)F, \varphi(x)) := (F, g(x)\varphi(x)); \quad (1.29)$$

gdy  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$  i  $g(x) \in C_\infty$ , to  $g(x)\varphi(x) \in \mathcal{D}$ . W szczególności, dla dystrybucji regularnych mamy

$$\int (f(x)g(x))\varphi(x) = \int f(x)(g(x)\varphi(x)) dx. \quad (1.30)$$

Nie można natomiast na ogół określić iloczynu dwóch dystrybucji.

**Translacja dystrybucji**<sup>11</sup>  $F$  o wektor  $h$  nazywamy dystrybucję określoną wzorem

$$(F_h\varphi) := (F(x), \varphi(x+h)), \quad \varphi \in \mathcal{D}. \quad (1.31)$$

Jest to definicja zupełnie naturalna, bowiem jeżeli  $f(x)$  jest funkcją lokalnie całkowalną na  $R^1$ , to określenie (1.31) wynika ze zwykłej zamiany zmiennych,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)\varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t+x) dt. \quad (1.32)$$

Dla dystrybucji  $\delta$  wzór (1.31) przyjmuje postać

$$(\delta(x-h), \varphi(x)) = (\delta(x), \varphi(x+h)) = \varphi(h). \quad (1.33)$$

**Transpozycja**  $F(-x)$  dystrybucji  $F(x)$  nazywamy dystrybucję określoną wzorem

$$(F(-x), \varphi(x)) := (F(x), \varphi(-x)), \quad \varphi \in \mathcal{D}. \quad (1.34)$$

Pojęcie dystrybucji transponowanej może być użyte do określenia dystrybucji parzystych i nieparzystych w ten sam sposób, w jaki określane są funkcje parzyste i nieparzyste. Dystrybucja  $F(x)$  jest **parzysta**, jeśli równa się swej transpozycji

$$F(x) = F(-x). \quad (1.35)$$

Dystrybucja ta jest nieparzysta, jeżeli zachodzi

$$F(x) = -F(-x). \quad (1.36)$$

Jeżeli  $A$  jest liniową transformacją nieosobliwą w  $R^n$ , to dla dowolnej dystrybucji  $F$  przyjmuje się

$$(F_A, \varphi) := (F(Ax), \varphi(x)) := (\text{Det } A)^{-1}(F, \varphi(A^{-1}x)). \quad (1.37)$$

Tak więc **transformacja podobieństwa** przy  $\alpha > 0$  dana jest wzorem

$$(F_\alpha, \varphi) := (F(\alpha x), \varphi(x)) := \alpha^{-n} \left( F, \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) \right). \quad (1.38)$$

---

<sup>11</sup>Dalej powiemy w jakim sensie można mówić o wartościach dystrybucji w punkcie.

Jeżeli funkcja  $f(x) \in C_\infty(R^n)$  ma wszystkie zera jednokrotne, to przyjmujemy

$$\delta[f(x)] := \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|f'(x_n)|}, \quad (1.39)$$

gdzie sumowanie przebiega po wszystkich zerach funkcji  $f(x)$ . Dla przykładu weźmy  $f(x) = \sin x$  i  $f(x) = x^2 - 1$ . Mamy odpowiednio

$$\begin{aligned} \delta(\sin x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n\pi), \\ \delta(x^2 - 1) &= \frac{\delta(x - 1)}{2} + \frac{\delta(x + 1)}{2}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

## 1.4 Różniczkowanie i całkowanie.

### Ciągi i szeregi dystrybucji

Zwykła funkcja lokalnie całkowalna może nie mieć pochodnej w pewnych punktach albo nawet nigdzie. Istnieją funkcje ciągle wszędzie, a mimo to nie mające nigdzie pochodnej. W teorii dystrybucji w ten sposób wprowadza się pojęcie pochodnej, że pochodne dowolnej dystrybucji zawsze istnieją i znowu są dystrybucjami.

**Pochodną** ( $q$ -tą pochodną) **dystrybucji**  $F$  jednej zmiennej określamy wzorem

$$(F^{(q)}, \varphi) := (-1)^q (F, \varphi^{(q)}). \quad (1.41)$$

Dla funkcji wielu zmiennych przyjmujemy

$$(F^{(q)}, \varphi) := (-1)^{|q|} (F, \varphi^{(q)}). \quad (1.42)$$

Łatwo się przekonać, że prawe strony wzorów (1.41) i (1.42) określają ciągłe funkcjonały liniowe na przestrzeni  $\mathcal{D}$ . Wobec tego wszystkie dystrybucje są nieskończenie wiele razy różniczkowalne i różniczkowanie nie wyprowadza ze zbioru  $\mathcal{D}'$ . W szczególności dowolna funkcja lokalnie sumowalna jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna w sensie dystrybucji. Jeżeli zwykła funkcja jest wszędzie różniczkowalna i ma pochodną ograniczoną, to pochodna ta odpowiada pochodnej dystrybucyjnej. Na ogół jednak pochodna zwykła i pochodna dystrybucyjna funkcji nie pokrywają się. Godny uwagi jest również fakt, że pochodne wyższego rzędu z dystrybucji nie zależą od porządku różniczkowania. Jako przykład rozpatrzmy dystrybucję Heaviside'a  $\Theta$ . Pochodna  $\Theta'$  określona jest wzorem

$$(\Theta', \varphi) = -(\Theta, \varphi') = -\int_0^\infty \varphi'(x) dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi); \quad (1.43)$$

ponieważ powyższy związek zachodzi dla dowolnego  $\varphi$ , możemy przyjąć, że  $\Theta' = \delta$ . Z drugiej strony, zwykła pochodna funkcji  $\Theta(x)$  jest funkcja równa zero wszędzie z wyjątkiem początku układu, gdzie nie istnieje.

Korzystając z równości  $\Theta' = \delta$ , można zróżniczkować w uogólnionym sensie dowolną funkcję, mającą punkty nieciągłości pierwszego rodzaju i lokalnie sumowalną pochodną w punktach ciągłości. Jeżeli mianowicie  $x_1, \dots, x_n$  są punktami nieciągłości funkcji  $f(x)$ , a skoki w tych punktach wynoszą  $h_k$ , to

$$(F', \varphi) = \sum_{k=1}^n h_k \varphi(x_k) + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \varphi(x) dx, \quad (1.44)$$

gdzie  $F$  jest dystrybucją regularną odpowiadającą funkcji  $f$ .

W oparciu o definicję pochodnej dystrybucji natychmiast otrzymujemy postać funkcjonału  $\delta^{(q)}$ . Mamy mianowicie

$$(\delta^{(q)}, \varphi) = (-1)^q (\delta, \varphi^{(q)}) = (-1)^q \varphi^{(q)}(0). \quad (1.45)$$

Jeżeli  $f(x)$  jest funkcją należącą do  $C_\infty(R^1)$ , mającą zera jednokrotne, to

$$\delta^{(q)}[f(x)] = \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|} \left( \frac{1}{f'(x_n)} \frac{d}{dx} \right)^q \delta(x - x_n), \quad (1.46)$$

gdzie sumowanie przebiega przez wszystkie zera funkcji  $f(x)$ .

Pierwotną (albo całką nieoznaczoną) funkcji ciągłej nazywamy inną funkcję, której pochodna równa się funkcji danej. Pojęcie funkcji pierwotnej może być rozszerzone na dystrybucje.

Dla każdej dystrybucji  $F$  określonej na  $R^1$  istnieje określona z dokładnością do stałej addytywnej dystrybucja pierwotna  $F_1$ , taka że  $F'_1 = F$ . Jest ona określona równością

$$(F_1, \varphi') = -(F, \varphi) \quad (1.47)$$

na wszystkich funkcjach, które są pochodnymi z  $\mathcal{D}$ . Funkcje te stanowią właściwą podprzestrzeń  $\mathcal{D}$  (tzn. istnieją w  $\mathcal{D}$  funkcje, które nie są pochodnymi funkcji należących do  $\mathcal{D}$ ). Zatem wzór (1.47) nie definiuje  $F_1$  w całej przestrzeni  $\mathcal{D}$ . Aby otrzymać dobrą definicję  $F_1$ , należy rozszerzyć definicję pierwotnej na całą przestrzeń  $\mathcal{D}$ . Okazuje się, że nie ma jednoznacznej drogi rozszerzania, co spowodowane jest tym, że jest wiele pierwotnych dla danej dystrybucji. Jeżeli przyjmiemy

$$(F_1, \varphi_0) = C \quad (1.48)$$

dla ustalonej funkcji  $\varphi_0 \in \mathcal{D}$ , takiej że  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0 dx \neq 0$ , wówczas dystrybucja  $F_1$  będzie już określona jednoznacznie.

Przejdziemy teraz do pojęcia zbieżności ciągu dystrybucji  $\{F_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ . Mówimy, że ciąg dystrybucji  $\{F_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$  dąży w  $\mathcal{D}'$  do dystrybucji  $F$ , jeżeli dla dowolnej funkcji  $\varphi \in \mathcal{D}$  zachodzi równanie

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (F_\nu, \varphi) = (F, \varphi). \quad (1.49)$$

Można pokazać, że dla każdej dystrybucji  $F \in \mathcal{D}'$  istnieje zbieżny do niej ciąg funkcji  $\{\psi_\nu(x)\}_{\nu=1}^{\infty}$  należących do  $\mathcal{D}$ , tzn. taki ciąg, że dla dowolnej funkcji  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$  zachodzi

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int \psi_\nu(x) \varphi(x) dx = (F, \varphi). \quad (1.50)$$

Jeżeli ciąg  $\{f_\nu(x)\}$  funkcji lokalnie całkowalnych ma własność

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int |f(x) - f_\nu(x)| dx = 0, \quad (1.51)$$

to dystrybucje regularne  $(F_\nu, \varphi)$  są zbieżne do dystrybucji  $(F, \varphi)$ . Jednakże z tego, że w dowolnym punkcie  $x$  spełniona jest równość  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu(x) = f(x)$ , nie wynika, że zachodzi również  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} (F_\nu, \varphi) = (F, \varphi)$ . Na przykład dla dowolnego  $x$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k^3 x^2}{\pi(1 + k^2 x^2)^2} = 0. \quad (1.52)$$

Jednakże dla wszystkich funkcji  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$  mamy związek

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k^3}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \varphi(x) dx}{(1 + k^2 x^2)^2} = \varphi(0), \quad (1.53)$$

a więc w sensie dystrybucyjnym

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k^3 x^2}{\pi(1 + k^2 x^2)^2} = \delta(x). \quad (1.54)$$

Ciąg dystrybucji regularnych, a więc funkcji, zbieżny do dystrybucji  $\delta$ , nazywamy **ciągami tworzącymi dla dystrybucji  $\delta$** . Jednym z przykładów przedstawienia dystrybucji  $\delta$  jako granicy dystrybucji regularnych jest wzór (1.54). Oto kilka innych przykładów ciągów tworzących dla dystrybucji  $\delta$ :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\pi(1 + k^2 x^2)} = \delta(x); \\ \text{b)} \quad & \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin kx}{x} = \delta(x); \\ \text{c)} \quad & \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\pi} \frac{\sin^2 kx}{x^2} = \delta(x); \\ \text{d)} \quad & \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{k}{2\pi}} e^{-kx^2/2} = \delta(x); \\ \text{e)} \quad & \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \delta(x), \quad \text{gdzie} \quad f_k(x) = \begin{cases} k/2 & \text{dla } |x| \leq \frac{1}{k} \\ 0 & \text{dla } |x| > \frac{1}{k}. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.55)$$

Mówimy, że szereg  $\sum_{k=1}^{\infty} F_k$  dystrybucji jest zbieżny do dystrybucji  $F$ , jeżeli zachodzi równość

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n F_k = F.$$

Na przykład szereg

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} [\cos kx - \cos(k-1)x]$$

jest zbieżny w sensie dystrybucyjnym do zera, ponieważ dla dowolnej funkcji  $\varphi \in \mathcal{D}$  zachodzi

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \sum_{k=1}^n [\cos kx - \cos(k-1)x], \varphi \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos nx, \varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \cos nx dx = 0. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Ważna własność różniczkowania dystrybucji dana jest przez następujące twierdzenie - **Zbieżny szereg dystrybucji można różniczkować wyraz po wyrazie**. Innymi słowy, jeżeli  $\sum_{k=1}^{\infty} F_k = F$ , to dla dowolnego  $q$  mamy

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_k^{(q)} = F. \quad (1.57)$$

Wynika ten ustala jeszcze jedną przewagę teorii dystrybucji nad analizą klasyczną, w której różniczkowanie szeregu wyraz po wyrazie może być przeprowadzone tylko wtedy, gdy szereg spełnia dodatkowe warunki poza zbieżnością.

Szereg  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx}$  jest zbieżny w sensie dystrybucyjnym do dystrybucji  $2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi)$ . Jeżeli zastosujemy tę równość do funkcji  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ , to otrzymamy tzw. wzór Poissona

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(k) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(2k\pi), \quad (1.58)$$

gdzie  $\psi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{ikx} dx$  jest transformatą Fouriera funkcji  $\varphi(x)$ .

Dalej z równości

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi)$$

wynika, że

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos kx = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi).$$

Różniczkowanie ostatniej równości daje

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^q \cos\left(kx + \frac{q\pi}{2}\right) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta^{(q)}(x - 2k\pi).$$

Podobnie z równości

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k} = -\ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right|$$

otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{q-1} \cos\left(kx + \frac{q\pi}{2}\right) = -\left\{ \ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| \right\}^{(q)},$$

gdzie pochodną po prawej stronie tego równania rozumiemy w sensie dystrybucyjnym.

## 1.5 Własności lokalne i ogólna postać dystrybucji

Mówimy, że dystrybucja  $F$  równa się zero w obszarze  $\Omega$ , jeżeli  $(F, \varphi) = 0$  dla dowolnej funkcji  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ , której nośnik spełnia relację  $\text{supp } \varphi \in \Omega$ . Na przykład dystrybucja  $\delta$  równa się zero w  $\Omega = \{R^n \setminus \mathcal{O}\}$ ,<sup>12</sup> gdzie  $\mathcal{O}$  jest zbiorem składającym się z jednego punktu  $x = 0$ .

<sup>12</sup>Znak  $\setminus$  oznacza tu różnicę zbiorów.

Dystrybucję  $F$  nazywamy skupioną w domkniętym zbiorze  $K$ , jeżeli równa się zero w obszarze  $R^n \setminus K$ .

Najmniejszy zbiór domknięty, w którym skupiona jest dystrybucja  $F$ , nazywamy **nośnikiem** tej dystrybucji i oznaczamy go przez  $\text{supp } F$ .

Dla dystrybucji  $\delta$  i wszystkich jej pochodnych nośnikiem jest punkt  $x = 0$ .

Dystrybucję nazywamy finitną (**dystrybucję o nośniku zwartym**), jeżeli jest ona skupiona w kuli  $|x| \leq a$ .

Mówimy, że dystrybucje  $F_1$  i  $F_2$  **pokrywają się w obszarze otwartym**  $\Omega$ , jeżeli  $F_1 - F_2 = 0$  w tym obszarze. W szczególności dystrybucja  $F$  nazywa się **dystrybucją regularną w obszarze otwartym**  $\Omega$ , jeżeli w tym obszarze pokrywa się z pewną funkcją lokalnie sumowalną. W tym właśnie sensie można mówić o wartościach dystrybucji  $F$  w punktach zbioru  $\Omega$ . Na przykład dystrybucja  $\delta$  jest regularna w dopełnieniu punktu  $x = 0$  i jest równa zero w tym dopełnieniu.

Jeżeli funkcja  $\varphi(x)$  jest dowolną funkcją z przestrzeni  $\mathcal{D}$ , wówczas równość

$$\left(|x|^{-3/2}, \varphi\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x^{3/2}} dx \quad (1.59)$$

określa ciągły funkcjonal liniowy w przestrzeni  $\mathcal{D}$ , tzn. dystrybucję. Ta dystrybucja poza punktem  $x = 0$  pokrywa się z regularną dystrybucją, określoną funkcją  $|x|^{-3/2}$ .

Jeżeli dystrybucja  $F$  ma nośnik zwarty ( $F$  jest dystrybucją finitną), wówczas można znaleźć równoległoscian  $a_j \leq x_j \leq b_j, j = 1, \dots, n$ , w którym skupiona jest ta dystrybucja. Można pokazać, że dla każdego  $\epsilon > 0$  istnieje liczba całkowita  $p \geq 0$  i funkcje ciągłe  $f_{q\epsilon}(x), 0 \leq |q| \leq p$ , zerujące się poza prostopadłościanem  $a_j - \epsilon \leq x_j \leq b_j + \epsilon$  i spełniające równość

$$F = \sum_{|q|=0}^p f_{q\epsilon}^{(q)}(x). \quad (1.60)$$

Widzimy, że **każda dystrybucja o nośniku zwartym może być przedstawiona jako kombinacja liniowa pochodnych funkcji ciągłych o nośniku zwartym** (rzeczywiście pochodne rozumiemy w sensie dystrybucyjnym).

Jeżeli  $F$  jest dowolną dystrybucją, to można utworzyć taki ciąg dystrybucji finitnych  $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ , że będą zachodzić relacje

1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = F,$$

2.

$$\forall a > 0 \quad \exists N, \quad \text{że dla } n \geq N \text{ i } m \geq N, \quad F_n = F_m,$$

$$(\text{tzn. } F_n = F_m \text{ poza obszarem } |x| \leq a).$$

Szczególnie prostą budowę mają dystrybucje skupione w jednym punkcie. Na przykład wszystkie dystrybucje skupione w punkcie  $x = 0$  są skończonymi kombinacjami liniowymi dystrybucji  $\delta$  i jej pochodnych, tj. mają postać

$$F = F = \sum_{|q|=0}^N c_q \delta^{(q)}(x). \quad (1.61)$$

Pewne ciekawe wyniki dotyczące ogólnych postaci dystrybucji można uzyskać dzięki przedstawieniu dystrybucji poprzez funkcje analityczne (p. cytowany wyżej H. Bremermann). Ograniczymy się tu do dystrybucji i funkcji analitycznych jednej zmiennej.

Dokonałmy rozszerzenia przestrzeni  $\mathcal{D} := C_0^\infty(R^n)$  do przestrzeni  $\mathcal{E} := C_\infty(R^n)$ . Oczywiście zachodzi relacja  $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ . Jeżeli zbiór funkcjonałów liniowych i ciągłych na przestrzeni  $\mathcal{E}$  oznaczymy przez  $\mathcal{E}'$ , to pomiędzy  $\mathcal{D}'$  i  $\mathcal{E}'$  będzie zachodziła relacja  $\mathcal{E}' \subset \mathcal{D}'$  (prawie oczywista).

Niech  $T(t) \in \mathcal{E}'$ , przy czym  $t \in R^1$ ; wyrażenie

$$\hat{T}(z) := \frac{1}{2\pi i} \left( T(t), \frac{1}{t-z} \right), \quad z \in C^1 \quad (1.62)$$

nazywamy **analitycznym przedstawieniem dystrybucji  $T$**  przy pomocy jądra Cauchy'ego, lub krótko - **przedstawieniem Cauchy'ego**. Funkcja  $[2\pi i(t-z)]^{-1}$  (jądro Cauchy'ego) należy do  $\mathcal{E}$ , a nie należy do  $\mathcal{D}$ . Gdy  $T(t) = \delta(t)$ , wzór (1.62) przybiera postać

$$\hat{\delta}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(t)}{t-z} dt = -\frac{1}{2\pi i z}. \quad (1.63)$$

Funkcja występująca po prawej stronie ostatniego wzoru jest analityczna dla  $z \neq 0$ , czyli poza nośnikiem dystrybucji  $\delta$ . Kładąc  $T(t) = \delta^{(n)}(t)$  i  $T(t) = \Theta(t)$ , otrzymujemy odpowiednio równości

$$\begin{aligned} \hat{\delta}^{(n)}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta^{(n)}(t)}{t-z} dt = (-1)^{n+1} \frac{n!}{2\pi i z^{n+1}}, \\ \hat{\Theta}(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \ln(-z), \quad \text{Im } z \neq 0. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Jeżeli dystrybucja  $T(t) \in \mathcal{E}'$ , to zachodzą następujące twierdzenia:

**Twierdzenie 1.**  $\hat{T}(z)$  jest funkcją analityczną zmiennej  $z$  w dopełnieniu  $\text{supp } T$  do  $C^1$ , tzn. w zbiorze  $K : C^1 \setminus \text{supp } T$ .

**Twierdzenie 2.**  $\hat{T}(z)$  spełnia

$$\frac{d^n}{dz^n} \hat{T}(z) = \hat{T}^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} (T(t), (t-z)^{-n-1}), \quad (1.65)$$

gdzie  $\hat{T}^{(n)}(z)$  oznacza przedstawienie Cauchy'ego  $n$ -tej pochodnej dystrybucji  $T$ . W ten sposób  $n$ -tą pochodną przedstawienia Cauchy'ego dystrybucji  $T$  jest przedstawienie Cauchy'ego  $n$ -tej pochodnej  $T$ .

**Twierdzenie 3.** Jeżeli  $T \in \mathcal{E}'$  i funkcja  $\varphi(x) \in \mathcal{E}$  jest ograniczona razem ze wszystkimi swoimi pochodnymi, wówczas

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} [\hat{T}(x+i\epsilon) - \hat{T}(x-i\epsilon)] \varphi(x) dx = (T, \varphi). \quad (1.66)$$

**Uwaga.** Dla dowolnej funkcji  $\varphi \in \mathcal{E}$  ostatnie twierdzenie nie jest w ogólności prawdziwe. Podkreślamy, że twierdzenie mówi o przedstawianiu dystrybucji z  $\mathcal{E}'$ .

Dla dystrybucji  $F \in \mathcal{D}$  ostatnie twierdzenie przybiera postać.

**Twierdzenie 3'** (G. Tillman). Jeżeli  $F \in \mathcal{D}'$ , wówczas istnieje funkcja  $f(z)$ , analityczna w zbiorze  $C^1 \setminus \text{supp } F$ , taka, że

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x+i\epsilon) - f(x-i\epsilon)] \varphi(x) dx = (F, \varphi), \quad (1.67)$$

dla wszystkich  $\varphi \in \mathcal{D}$ .

Dowolną funkcję, mającą własności funkcji  $f(z)$ , nazywamy **analitycznym przedstawieniem dystrybucji**  $F$ . Przedstawienie dane wzorem (1.67) nie jest jednoznaczne - funkcja  $\tilde{f}(z) = f(z) + g(z)$ , gdzie  $g(z)$  jest funkcją całkowitą, również spełnia (1.67).

Na zakończenie tego podrozdziału powróćmy jeszcze do przedstawienia Cauchy'ego dla dystrybucji. Dla  $T \in \mathcal{D}'$  (rozważamy przypadek jednowymiarowy, tzn.  $t \in R^1$ ), funkcja  $(t-z)^{-1}$  nie jest funkcją próbną - to znaczy nie należy do  $\mathcal{D}$ , i  $\hat{T}(z)$  w ogólności nie istnieje. Tym niemniej prawdziwy jest następujący rezultat: istnieje para funkcji  $f_+(z)$  i  $f_-(z)$ , analitycznych odpowiednio w górnej i dolnej półpłaszczyźnie, takich że  $f_+(x+i\epsilon) - f_-(x-i\epsilon)$  zbiega do  $T$  przy  $\epsilon \rightarrow 0$  w topologii  $\mathcal{D}'$ .

Funkcję  $f_+$  nazywamy **górną funkcją**,  $f_-$  - **dolną funkcją**, a obie funkcje razem - **analitycznym przedstawieniem**  $T$ . Analityczne przedstawienie jednej i tej samej dystrybucji różnią się co najwyżej o funkcję całkowitą.

Jeżeli dopełnienie nośnika dystrybucji (do  $R^1$ ) nie jest zbiorem pustym, to dla dowolnego analitycznego przedstawienia  $T$  górna i dolna funkcja  $f_+$  i  $f_-$  okazują się analitycznymi przedłużeniami jedna drugiej i są analityczne na dopełnieniu nośnika  $T$ . Para funkcji analitycznych w górnej i dolnej półpłaszczyźnie nie zawsze stanowi przedstawienie dystrybucji:  $f_+(z) = f_-(z) := \exp(1/z^2)$  jest tu kontrprzykładem.

## 1.6 Iloczyn prosty i splot dystrybucji

Niech  $F$  będzie funkcjonałem liniowym i ciągłym na przestrzeni  $\mathcal{D} := C_\infty^0(R^m)$ , a  $G$  funkcjonałem liniowym i ciągłym na przestrzeni  $\mathcal{D}_y := C_\infty^0(R^n)$ . Przez  $F \otimes G$  oznaczamy dystrybucję na

przestrzeni  $\mathcal{D}_{x,y}$  funkcji  $\chi(x, y)$   $m + n$  zmiennych, określoną wzorem

$$(F \otimes G, \chi) = \left( F, G(\chi(x, y)) \right). \quad (1.68)$$

Dystrybucję określoną powyższym wzorem nazywamy **iloczynem prostym dystrybucji**  $F$  i  $G$ . Jeżeli funkcja  $\chi(x, y)$  z przestrzeni  $\mathcal{D}_{x,y}$  ma postać  $\chi(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ , gdzie  $\varphi(x) \in \mathcal{D}_x$ , a  $\psi(y) \in \mathcal{D}_y$ , to

$$(F \otimes G, \chi) = (F, \varphi)(G, \psi). \quad (1.69)$$

Iloczyn prosty jest przemienny i łączny, to zachodzą relacje

$$\begin{aligned} F(x) \otimes G(y) &= G(y) \otimes F(x), \\ F(x) \otimes \{G(y) \otimes H(z)\} &= \{F(x) \otimes G(y)\} \otimes H(z). \end{aligned} \quad (1.70)$$

Jeżeli dystrybucja  $F(x, y)$  jest niezmiennicza ze względu na przesunięcia zmiennej  $x$  (tzn. jeżeli równość  $\left( F, \varphi(x + h, y) \right) = \left( F, \varphi(x, y) \right)$  zachodzi dla dowolnego  $h$ , to ma ona postać

$$F(x, y) = 1_x \otimes G(y), \quad (1.71)$$

gdzie  $G(y)$  jest dystrybucją na  $\mathcal{D}_x$ , a  $1_x$  jest dystrybucją na  $\mathcal{D}_x$ , określoną wzorem

$$(1_x, \varphi(x)) := \int \varphi(x) dx. \quad (1.72)$$

Niech teraz  $F(x)$  i  $G(x)$  będą dystrybucjami jednej zmiennej i niech będzie spełniony jeden z następujących warunków

1. albo dystrybucja  $F$ , albo dystrybucja  $G$  ma nośnik ograniczony,
2. zarówno  $F$ , jak i  $G$  mają nośnik ograniczony z lewej strony (tj. istnieje pewna stała  $c_1$ , taka że  $F(x) = G(x) = 0$  dla  $x < c_1$ );
3. zarówno  $F$ , jak i  $G$  mają nośnik ograniczony z prawej strony (tj. istnieje pewna stała  $c_2$ , taka że  $F(x) = G(x) = 0$  dla  $x > c_2$ ).

Jeżeli któryś z powyższych warunków jest spełniony, wówczas dla dowolnej funkcji  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$  określone jest wyrażenie

$$(F * G, \varphi) := \left( F(x) * (x) * G(z - x), \varphi(z) \right), \quad (1.73)$$

gdzie  $z \in \mathbb{R}^1$ . Dystrybucję  $F \otimes G$  nazywamy splotem dystrybucji  $F$  i  $G$ .

Jeżeli dystrybucje  $F$  i  $G$  są regularne i spełniają przynajmniej jeden z warunków 1), 2), 3), to dystrybucja  $F * G$  jest również regularna i określona przez funkcję

$$(f * g)(x) := \int f(x - y)g(y)dy. \quad (1.74)$$

Jeżeli  $F$  jest dowolną dystrybucją, to  $(\delta \otimes F)(x) = F(x)$ . Zatem funkcjonal  $\delta$  gra rolę jedności względem działania splotu. Oczywiście zachodzi równość  $(\delta * \delta)(x) = \delta(x)$ .

Splot dystrybucji  $F(x)$  z  $\delta(x - h)$  jest równoważny przesunięciu  $F(x)$  o  $h$ :

$$\delta(x - h) * F(x) = F(x - h). \quad (1.75)$$

Ponieważ iloczyn prosty dystrybucji jest przemienny, więc z (1.73) wynika, że tą samą własność ma splot. Rzeczywiście

$$(F * G, \varphi) = \left( F(x) * G(y), \varphi(x + y) \right) = \left( G(y) * F(x), \varphi(x + y) \right) = (G * F, \varphi).$$

Zatem ostatecznie

$$F * G = G * F. \quad (1.76)$$

Zachodzi również następująca tożsamość:

$$(F * G) * H = F * (G * H), \quad (1.77)$$

wyrażająca łączność splotu dystrybucji.

Liniowość iloczynu prostego dystrybucji pociąga za sobą liniowość splotu. To znaczy, że jeżeli  $\alpha$  i  $\beta$  są dowolnymi stałymi, a  $F, G$  i  $H$  są dystrybucjami takimi, że istnieje splot  $F$  z  $G$  oraz  $F$  z  $H$ , to

$$F * (\alpha G + \beta H) = \alpha F * G + \beta F * H. \quad (1.78)$$

Można dokonywać różniczkowania (w sensie dystrybucyjnym) splotu; odpowiedni wzór ma postać

$$\frac{d}{dx}(F * G) = \frac{dF}{dx} * G = F * \frac{dG}{dx}. \quad (1.79)$$

Łatwo można również pokazać, że zachodzi wzór ogólniejszy

$$\frac{d^m}{dx^m}(F * G) = \frac{d^p F}{dx^p} * \frac{d^q G}{dx^q}, \quad (1.80)$$

gdzie  $p + q = m$ ,  $p, m = 0, 1, \dots$

Splot dystrybucji przy pewnych ograniczających założeniach wykazuje własność ciągłości. Zachodzi mianowicie następujące

**Twierdzenie.** Niech ciąg dystrybucji  $\{F_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  będzie zbieżny w  $\mathcal{D}'$  do dystrybucji  $F$  i niech  $G$  będzie ustaloną dystrybucją w przestrzeni  $\mathcal{D}'$ . Wówczas ciąg  $\{F_\nu * G\}_{\nu=1}^\infty$  jest zbieżny w  $\mathcal{D}'$  do dystrybucji  $F * G$ , jeżeli jest spełniony co najmniej jeden z następujących warunków:

1. wszystkie dystrybucje  $F_\nu$  są skupione na ustalonym, ograniczonym zbiorze;
2. dystrybucja  $G$  jest skupiona na ograniczonym zbiorze;
3. nośniki dystrybucji  $F_\nu$  i  $G$  są ograniczone z tej samej strony stałą niezależną od  $\nu$ .

Splot dystrybucji  $F(x)$  i  $G(x)$  wielu zmiennych określamy analogicznie jak dla funkcji jednej zmiennej. Zakładamy przy tym, że chociaż jeden z czynników, na przykład  $F(x)$ , jest **splatający**, to znaczy, że ma następującą własność - dla dowolnej funkcji  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ , funkcja

$$\psi(y) = ((F, \varphi(x+y)))$$

również należy do  $\mathcal{D}$ .

Splot czynnika splatającego  $F * G$  z funkcją  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$  określamy wzorem

$$(F * G, \varphi) := (G, F * \varphi).$$

Jeżeli  $F(x)$  jest dystrybucją regularną, to wzór ten przybiera postać

$$(f * \varphi)(x) = \int f(x-y)\varphi(y)dy.$$

Na zakończenie tego podrozdziału podamy następujące

**Twierdzenie.** Niech  $B(\varphi, \psi)$  będzie funkcjonałem dwuliniowym, takim że  $\varphi(x) \in \mathcal{D}_x := C_\infty^0(R^m)$ , a  $\psi(y)$  należy do  $\mathcal{D}_y = C_\infty^0(R^n)$ . Jeżeli funkcjonał  $B(\varphi, \psi)$  jest ciągły względem każdego z argumentów  $\varphi(x)$  i  $\psi(y)$ , to istnieje taka dystrybucja  $F(x, y)$  należąca do  $\mathcal{D}'_{x,y}$ , gdzie  $\mathcal{D}_{x,y} := C_\infty^0(R^{n+m})$ , że

$$B(\varphi, \psi) = (F, \varphi(x)\psi(y)).$$

## 1.7 Regularyzacja funkcji i całek rozbieżnych

Niech  $f(x)$  będzie funkcją lokalnie całkowlaną w  $R^n$ , a  $\rho_r(x)$  funkcją zdefiniowaną następująco

$$\rho_r(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } |x| > r, \\ \frac{k}{r^n} \exp\left(-\frac{r^2}{r^2-|x|^2}\right) & \text{dla } |x| \leq r \end{cases}, \quad (1.81)$$

gdzie

$$\frac{1}{k} = \int_{|x| \leq 1} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) dx.$$

Łatwo można sprawdzić, że  $\rho_r(x) \in C_\infty^0(R^n) = \mathcal{D}$ . Nośnikiem funkcji  $\rho_r(x)$  jest obszar  $\text{supp } \rho_r = \{x : |x| \leq r\}$ .

Regularyzacją funkcji  $f$  nazywamy splot  $f * \rho_r$  dany wzorem

$$(f * \rho_r)(x) = \int f(y)\rho_r(x-y)dy. \quad (1.82)$$

Zregularyzowana funkcja  $(f * \rho_r)(x)$  jest już klasy  $C_\infty$ , podczas gdy funkcja  $f$  była jedynie lokalnie całkowlana. Jeżeli oznaczymy przez  $K$   $\text{supp } f$ , to  $\text{supp}(f * \rho_r)$  zawarty jest we zbiorze

$$\{x : x_0 \in K, |x - x_0| \leq r\}.$$

Niech  $\Omega$  będzie podzbiorem  $R^n$ . Funkcję charakterystyczną  $f_\Omega$  zbioru  $\Omega$  określamy następująco

$$f_\Omega(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } x \in \Omega, \\ 0, & \text{jeżeli } x \notin \Omega \end{cases}.$$

Funkcja  $f_\Omega$  może być regularyzowana, o ile jest ona lokalnie całkowalna. Funkcja charakterystyczna ma tę własność dla zbiorów  $\Omega$  – mierzalnych (w sensie Lebesgue’a). Łatwo zauważyć, że funkcja charakterystyczna nośnika dowolnej funkcji zwasze może być regularyzowana. Zregularyzowana funkcja  $(f_\Omega * \rho_r)(x)$  jest już oczywiście klasy  $C_\infty$ . Można pokazać, że zachodzą 3 następujące twierdzenia.

**Twierdzenie 1.** Jeżeli  $f(x)$  jest funkcją ciągłą na  $R^n$ , to dla  $r \rightarrow 0$  Zregularyzowana funkcja  $(f_\Omega * \rho_r)(x)$  dąży do  $f(x)$  jednostajnie na dowolnym zwartym podzbiore  $R^n$ .

**Twierdzenie 2.** Jeżeli  $f(x)$  jest funkcją klasy  $C_m$  na  $R^n$ , to  $f * \rho_r^{(k)}(x)$  dąży jednostajnie do  $f^{(k)}(x)$ , dla  $k = 0, \dots, m$ , na dowolnym zwartym podzbiore  $R^n$ .

Dla funkcji lokalnie całkowalnych, ale niekoniecznie ciągłych, zachodzi

**Twierdzenie 3.** Jeżeli funkcja  $f(x)$  jest lokalnie całkowalna na  $R^n$  i  $\varphi \in \mathcal{D}$ , to zachodzi równość

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int (f_\Omega * \rho_r)(x) \varphi(x) dx = \int f(x) \varphi(x) dx.$$

Niech  $S$  będzie podzbiorem  $R^n$ . Otwartym pokryciem zbioru  $S$  nazywamy taką rodzinę otwartych zbiorów  $\{\Omega_i\}$ , gdzie  $i$  należy do zbioru indeksów  $I$ , że każdy punkt  $x \in S$  zawiera się przynajmniej w jednym ze zbiorów  $\Omega_i$ , to znaczy, gdy  $\forall x \in S, \exists i \in I$ , że  $x \in \Omega_i$ . Gdy zbiór  $I$  pokrywa się ze zbiorem  $N$  (zbiorem liczb naturalnych), wówczas mówimy, że pokrycie jest **przeliczalne**.

Niech  $\{\Omega_i\}$  będzie przeliczalnym otwartym pokryciem zbioru  $\Omega$ . Rozkładem jedności, odpowiadającym pokryciu zbioru  $\{\Omega_i\}$ , nazywamy ciąg funkcji  $\alpha_i(x) \in C_\infty$ , mających następujące własności:

- 1)  $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j(x) \equiv 1$  na  $\Omega$ ,  $0 \leq \alpha_j(x) \leq 1$ ,  $\forall x \in \Omega$ ;
- 2)  $\text{supp } \alpha_j \subset \Omega$ ; dla  $j \in N$ ;
- 3) dowolny zwarty zbiór  $\Omega$  przecina się z nośnikami co najwyżej skończonej liczby  $\alpha_j$ .

Zbadamy obecnie bliżej relacje między zbiorami  $\mathcal{D}$  i  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{D}'$  i  $\mathcal{E}'$  oraz ich elementami. Ponieważ  $\mathcal{D} := C_\infty^0(R^n)$ , a  $\mathcal{E} := C_\infty(R^n)$ , więc mamy  $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$  i, jak łatwo sprawdzić,  $\mathcal{E}' \subset \mathcal{D}'$ . Zachodzi  $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ , ale  $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{E}$ , to znaczy zbiór  $\mathcal{D}$  jest gęsty w przestrzeni  $\mathcal{E}$ . Można pokazać, że nośnik dowolnej dystrybucji  $T \in \mathcal{E}'$  jest zbiorem zwartym. Można również pokazać następujące twierdzenie o przedłużaniu dystrybucji z  $\mathcal{D}'$  o zwartym nośniku do dystrybucji z  $\mathcal{E}'$ .

**Twierdzenie.** Dowolną dystrybucję z  $\mathcal{D}'$  mającą zwarty nośnik można przedłużyć jednoznacznie do dystrybucji należącej do  $\mathcal{E}'$ .

Dla dowolnej dystrybucji  $T \in \mathcal{D}'$  zachodzi również następujące

**Twierdzenie.** Niech  $F \in \mathcal{D}'$ . Wówczas  $F$  można przedstawić w postaci nieskończonej sumy dystrybucji  $T_j$  o zwartych nośnikach, przy czym będą spełnione następujące warunki:

- 1)  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N (T_j, \varphi) = (F, \varphi) \quad \text{dla} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D};$
- 2) dowolny podzbiór zwarty  $R^n$  przecina się z nośnikiem co najwyżej skończonej liczby  $T_j$ .

Rozważaliśmy już proces regularyzacji funkcji. Za pomocą aparatu dystrybucji można podać przepis pozwalający przypisać pewnym całkom rozbieżnym określone wartości liczbowe. Przepis ten nazywamy **regularyzacją całki rozbieżnej**.

Jeżeli  $f(x)$  jest dowolną funkcją, to punkt  $x_0$  ( $x, x_0 \in R^n$ ) nazywamy punktem lokalnej całkowalności funkcji  $f(x)$ , jeżeli istnieje otoczenie  $U(x_0)$  tego punktu, w którym funkcja  $f(x)$  jest całkowalna (to znaczy  $\int_{U(x_0)} f(x) dx < \infty$ ). Pozostałe punkty zbioru określoności funkcji nazywamy punktami osobliwymi. Dalej rozważać będziemy funkcje, które w każdym przedziale mają tylko skończoną ilość punktów osobliwych.

Oznaczmy przez  $\mathcal{D}_f$  podprzestrzeń przestrzeni  $\mathcal{D}$  zdefiniowaną następująco:

$$\mathcal{D}_f := \left\{ \varphi(x) : \varphi(x) \in \mathcal{D}, \varphi(x) = 0 \right. \\ \left. \text{w pewnym otoczeniu dowolnego punktu osobliwego funkcji } f(x) \right\}.$$

Ciąg funkcji  $\{\varphi_m(x)\}$  należących do  $\mathcal{D}_f$  nazywamy zbieżnym do zera, jeżeli wszystkie funkcje  $\varphi_m(x)$  są skupione na wspólnym zbiorze zwartym nie zawierającym punktów osobliwych funkcji  $f(x)$  i dla dowolnego  $q$  zachodzi

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_x |\varphi_m^{(q)}(x)| = 0.$$

Rozważmy całkę  $\int f(x)\varphi(x) dx$  dla  $\varphi(x) \in \mathcal{D}_f$ . Jest ona zbieżna dla dowolnej funkcji  $\varphi(x)$  i równość

$$(F, \varphi) = \int f(x)\varphi(x) dx$$

określa funkcjonal liniowy i ciągły na  $\mathcal{D}_f$ . Funkcjonal ten można przedłużyć na całą przestrzeń  $\mathcal{D}$ . Wartość  $(F, \varphi)$  przedłużonego funkcjonału dla dowolnej funkcji  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$  nazywamy **zregularyzowaną wartością całki**  $\int f(x)\varphi(x) dx$ , a samą dystrybucję otrzymaną w powyższy sposób nazywamy **regularyzacją funkcji**  $f(x)$ . Zauważmy, że gdy funkcja  $\varphi(x)$  nie należy do podprzestrzeni  $\mathcal{D}_f$ , to całka  $\int f(x)\varphi(x) dx$  może być rozbieżna - ten właśnie fakt powoduje, że wprowadzamy pojęcie zregularyzowanej wartości całki. Regularyzacja funkcji  $f(x)$  pokrywa się z funkcją  $f(x)$  na dopełnieniu zbioru punktów osobliwych.

Równość

$$(|x|^{-3/2}, \varphi) = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x^{3/2}} dx$$

określa regularyzację dystrybucji  $|x|^{-3/2}$ .

Zadana funkcja może mieć w ogólności różne regularyzacje i regularyzacje różnych funkcji mogą być niezgodne ze sobą, a co za tym idzie, może nie zachodzić równość

$$(F_1 + F_2, \varphi) = (F_1, \varphi) + (F_2, \varphi). \quad (1.83)$$

Zdefiniujemy teraz pojęcie **regularyzacji kanonicznej**. Niech  $\mathcal{L}$  będzie przestrzenią liniową, której elementami są funkcje  $f(x)$  (niekoniecznie lokalnie całkowalne) mające dyskretny zbiór punktów osobiwych i nieskończenie wiele razy różniczkowalne w dopełnieniu tego zbioru. Zakładamy również, że przestrzeń  $\mathcal{L}$  zawiera wraz z każdą funkcją  $f(x)$  wszystkie jej pochodne (tam gdzie one istnieją) oraz wszystkie funkcje postaci  $\alpha(x)f(x)$ , gdzie  $\alpha(x) \in C_\infty$ . Każdej funkcji  $f(x) \in \mathcal{L}$  przyporządkowujemy funkcjonal liniowy  $(F, \varphi)$  - regularyzację tej funkcji. Regularyzację tę nazywamy kanoniczną, a funkcjonal oznaczamy przez  $\text{R.k.}f(x)$ , jeżeli spełnione są następujące warunki:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \text{R.k.}(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) = \lambda_1 \text{R.k.}f_1(x) + \lambda_2 \text{R.k.}f_2(x); \\ \text{b)} \quad & \text{R.k.}(df/dx) = d/dx \left( \text{R.k.}f(x) \right), \end{aligned}$$

przy czym pochodną z prawej strony ostatniego wzoru rozumiemy w sensie dystrybucyjnym (a po lewej- w zwykłym sensie);

$$\text{c)} \quad \text{dla dowolnej funkcji } \alpha(x) \in C_\infty \quad \text{R.k.} \left( \alpha(x)f(x) \right) = \alpha(x) \text{R.k.}f(x).$$

Regularyzacja kanoniczna istnieje na przykład dla **klasy funkcji o osobiwościach potęgowych**. Punkt  $x_0$  nazywamy osobiwością potęgową funkcji  $f(x)$ , jeżeli w otoczeniu tego punktu funkcję  $f(x)$  można przedstawić w postaci

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) h_i(x), \quad (1.84)$$

gdzie  $\alpha_i(x) \in C_\infty$ , a  $h_i(x)$  jest jedną z następujących funkcji

$$(x - x_0)_+^\lambda, (x - x_0)_-^\lambda, (x - x_0)^{-n}, \quad \lambda \neq -1, -2, \dots$$

Funkcje  $x_+^\lambda$  i  $x_-^\lambda$  zdefiniowane są odpowiednio równościami:

$$x_+^\lambda = \begin{cases} x^\lambda & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases}, \quad x_-^\lambda = \begin{cases} 0 & \text{dla } x > 0, \\ |x|^\lambda & \text{dla } x < 0 \end{cases}.$$

Funkcję  $f(x)$  nazywamy **funkcją o osobiwościach potęgowych**, jeżeli w dowolnym przedziale zmiennej  $x$  ma ona skończoną ilość osobiwości potęgowych. Wiedząc, jak przeprowadza się regularyzację funkcji  $x_+^\lambda, x_-^\lambda, x^{-n}$ , będziemy mogli przeprowadzić regularyzację kanoniczną dowolnej funkcji o osobiwościach potęgowych.

Rozważmy jako pierwszą funkcję  $x_+^\lambda$ . Jeżeli  $\operatorname{Re} \lambda > -1$ , to całka

$$(x_+^\lambda, \varphi) = \int_0^{+\infty} (x)^\lambda \varphi(x) dx \quad (1.85)$$

jest zbieżna dla każdej funkcji  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$  i określa funkcjonal liniowy w  $\mathcal{D}$ . Chcąc określić funkcjonal  $(x_+^\lambda, \varphi)$  dla  $\operatorname{Re} \lambda < -1$ , można oprzeć się na definicji regularyzacji kanonicznej. Niech będzie  $\operatorname{Re} \lambda > -n-1$ , przy czym  $\lambda \neq -1, -2, \dots, -n, \dots$ . Wówczas  $\operatorname{Re}(\lambda + n) > -1$ , i funkcjonal  $(x_+^{\lambda+n}, \varphi)$  określamy równością

$$(x_+^{\lambda+n}, \varphi) = \int_0^{+\infty} (x)^{\lambda+n} \varphi(x) dx. \quad (1.86)$$

Ponieważ

$$x_+^\lambda = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\lambda+n+1)} (x_+^{\lambda+n})^{(n)},$$

a regularyzacja ma być kanoniczna, więc powinna zachodzić równość

$$\begin{aligned} (x_+^\lambda, \varphi) &= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\lambda+n+1)} \left( (x_+^{\lambda+n})^{(n)} \varphi \right) \\ &= (-1)^n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\lambda+n+1)} ((x_+^{\lambda+n}, \varphi^{(n)})) \\ &= (-1)^n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\lambda+n+1)} \int_0^{+\infty} (x)^{\lambda+n} \varphi^{(n)}(x) dx. \end{aligned} \quad (1.87)$$

Jeżeli zatem  $\operatorname{Re} \lambda > -n-1$ , to funkcjonal  $(x_+^\lambda, \varphi)$  określony jest wzorem

$$(x_+^\lambda, \varphi) = (-1)^n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\lambda+n+1)} \int_0^{+\infty} (x)^{\lambda+n} \varphi^{(n)}(x) dx. \quad (1.88)$$

Ostatni wzór jest, jak łatwo sprawdzić, równoważny następującemu:

$$\begin{aligned} (x_+^\lambda, \varphi) &= \int_0^1 x^\lambda \left[ \varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \dots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0) \right] dx \\ &+ \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x) dx + \sum_{k=1}^\infty \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!(\lambda+k)}. \end{aligned} \quad (1.89)$$

Dla  $-n-1 < \operatorname{Re} \lambda < -n$  istnieje prostsza postać, mianowicie:

$$(x_+^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \left[ \varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \dots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0) \right] dx. \quad (1.90)$$

Powyższe wzory określają regularyzację  $x_+^\lambda$  przy  $\operatorname{Re} \lambda < -1$ . Dla  $\lambda = -1, -2, \dots, -n, \dots$  dystrybucja ta nie jest określona. Analogicznie dystrybucja  $x_-^\lambda$  dla  $\operatorname{Re} \lambda > -n-1$ ,  $\lambda \neq -1, -2, \dots, -n, \dots$

określona jest wzorem

$$\begin{aligned} (x_-^\lambda, \varphi) &= \int_0^1 x^\lambda \left[ \varphi(-x) - \varphi(0) + x\varphi'(0) - \dots - (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0) \right] dx \\ &+ \int_1^\infty x^\lambda \varphi(-x) dx + \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1} \varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!(\lambda+k)}, \end{aligned} \quad (1.91)$$

a dla  $-n-1 < \operatorname{Re} \lambda < -n$  wzorem prostszym

$$(x_-^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \left[ \varphi(-x) - \varphi(0) + x\varphi'(0) - \dots - (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0) \right] dx. \quad (1.92)$$

Pożyteczne są również niekiedy regularyzacje kombinacji liniowych  $x_+^\lambda, x_-^\lambda$  i  $x^{-n}$ . Wprowadźmy następujące oznaczenia (przy  $\lambda \neq -1, -2, \dots$ ):

$$\begin{aligned} x_+^\lambda + x_-^\lambda &= |x|^\lambda, \quad x_+^\lambda - x_-^\lambda = |x|^\lambda \operatorname{sgn} x, \\ (x+i0)^\lambda &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} (x+i\epsilon)^\lambda = x_+^\lambda + e^{i\lambda\pi} x_-^\lambda, \\ (x-i0)^\lambda &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} (x-i\epsilon)^\lambda = x_+^\lambda + e^{-i\lambda\pi} x_-^\lambda. \end{aligned} \quad (1.93)$$

Jeżeli teraz  $-2m-1 < \operatorname{Re} \lambda < -2m+1$ , to

$$(|x|^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \left\{ \varphi(x) + \varphi(-x) - 2 \left[ \varphi(0) + \frac{x^2}{2!} \varphi''(0) + \dots + \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!} \varphi^{(2m-2)}(0) \right] \right\} dx.$$

Dla  $\lambda = -2m$  oznaczamy  $|x|^{-2m} = x^{-2m}$  i

$$(x^{-2m}, \varphi) = \int_0^\infty x^{-2m} \left\{ \varphi(x) + \varphi(-x) - 2 \left[ \varphi(0) + \frac{x^2}{2!} \varphi''(0) + \dots + \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!} \varphi^{(2m-2)}(0) \right] \right\} dx.$$

W szczególności dla  $m=1$

$$(x^{-2}, \varphi) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x^2} dx.$$

Dla  $-2m-2 < \operatorname{Re} \lambda < -2m$  zachodzi

$$\begin{aligned} (|x|^\lambda, \operatorname{sign} x \varphi) &= \int_0^\infty x^\lambda \left\{ \varphi(x) - \varphi(-x) \right. \\ &\left. - 2 \left[ x\varphi'(0) + \frac{x^3}{3!} \varphi^{(3)}(0) + \dots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} \varphi^{(2m-1)}(0) \right] \right\} dx. \end{aligned} \quad (1.94)$$

Gdy  $\lambda = -2m-1$ , oznaczamy  $|x|^{-2m-1} \operatorname{sign} x = x^{-2m-1}$  i mamy

$$\begin{aligned} (x^{-2m-1}, \varphi) &= \int_0^\infty x^{-2m-1} \left\{ \varphi(x) - \varphi(-x) \right. \\ &\left. - 2 \left[ x\varphi'(0) + \frac{x^3}{3!} \varphi^{(3)}(0) + \dots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} \varphi^{(2m-1)}(0) \right] \right\} dx. \end{aligned} \quad (1.95)$$

W szczególności dla  $m = 0$  i  $m = 1$  mamy odpowiednio

$$\begin{aligned}(x^{-1}, \varphi) &= \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx, \\ (x^{-3}, \varphi) &= \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x) - 2x\varphi'(0)}{x^3} dx.\end{aligned}$$

Liczbę  $(x^{-1}, \varphi)$  nazywamy **wartością główną całki**  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^{-1}\varphi(x)dx$  w sensie Cauchy'ego.

Przy  $\lambda = -n$  wielkość  $(x + i0)^\lambda$  określamy równością

$$(x + i0)^n = x^{-n} - \frac{i\pi(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \delta^{(n-1)}(x), \quad (1.96)$$

a  $(x - i0)^\lambda$ - równością

$$(x - i0)^n = x^{-n} + \frac{i\pi(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \delta^{(n-1)}(x), \quad (1.97)$$

gdzie  $(x^{-n}, \varphi)$  dla dowolnego  $n$  określiliśmy powyżej.

Przeprowadzona wyżej regularyzacja funkcji  $x_+^\lambda, x_-^\lambda x^{-n}$  pozwala przeprowadzić regularyzację dowolnych funkcji o osobliwościach potęgowych. Niech funkcja  $f(x)$  ma jedyny punkt osobliwy  $x = 0$ . Załóżmy, że można ją napisać w postaci

$$f(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(x) h_j(x), \quad (1.98)$$

gdzie  $\alpha_j(x) \in C_\infty$ , a  $h_j(x)$  jest jedną z funkcji  $x_+^\lambda, x_-^\lambda x^{-n}$ ,  $\lambda \neq -1, -2, \dots$ . Przy tych założeniach

$$(F, \varphi) = \sum_{j=1}^n (H_j, \alpha_j \varphi). \quad (1.99)$$

Funkcje  $\alpha_j(x)\varphi(x)$  należą do  $\mathcal{D}$ , zatem wszystkie składniki po prawej stronie ostatniego wzoru mają sens. W ten sposób określiliśmy regularyzację funkcji  $f(x)$ . Analogicznie, dla dowolnej funkcji  $f(x)$  o osobliwościach potęgowych można zbudować takie funkcje  $f_k(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  że  $f = \sum f_k$  i każda z funkcji  $f_k(x)$  ma jeden punkt osobliwy. Funkcje  $f_k$  mają dodatkowo tę własność, że w przedziale  $|x| < a$  tylko skończona ilość funkcji  $f_k(x)$  jest różna od zera. Przyjmujemy wówczas

$$(F, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} (F_k, \varphi).$$

Ostatni wzór określa regularyzację kanoniczną w przestrzeni funkcji o osobliwościach potęgowych. Można pokazać, że wartość  $(F, \varphi)$  nie zależy od rozkładu na czynniki  $f_k$ .

Przeprowadzona wyżej regularyzacja dystrybucji  $x_+^\lambda$  oparta była na równości  $(x_+^\lambda)^1 = \lambda x_+^{\lambda-1}$ . Do tych samych wyników można dojść, opierając się na idei przedłużenia analitycznego.

Niech  $\varphi(x)$  będzie ustaloną funkcją w przestrzeni  $\mathcal{D}$ . Wyrażenie  $(x_+^\lambda, \varphi)$  jest funkcją analityczną  $\lambda$  w obszarze  $\text{Re } \lambda > 1$ . Przedłużając tę funkcję analitycznie na całą płaszczyznę  $\lambda$ , otrzymujemy wartość  $(x_+^\lambda, \varphi)$  również dla  $\text{Re } \lambda \leq -1$ . Gdy  $\text{Re } \lambda > n - 1, \lambda \neq -1, -2, \dots, -n$ , wartość tego

przedłużenia analitycznego dana jest wzorem (1.89), a dla  $-n-1 < \operatorname{Re} < -n$  prostszym wzorem (1.90). Funkcja analityczna  $(x_+^\lambda, \varphi)$  ma bieguny proste przy  $\lambda = -1, -2, \dots, -n$ . Residua w tych biegunach dane są wzorami

$$\operatorname{Res}_{\lambda=-n}(x_+^\lambda, \varphi) = \frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}. \quad (1.100)$$

Można również powiedzieć, że dystrybucja  $x_+^\lambda$  jest analityczną funkcją zmiennej  $\lambda$  o biegunach  $\lambda = -1, -2, \dots, -n$ , przy czym

$$\operatorname{Res}_{\lambda=-n} x_+^\lambda = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \delta^{(n-1)}(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.101)$$

Analogicznie dystrybucja  $x_-^\lambda$  ma bieguny dla  $\lambda = -1, -2, \dots, -n$  o residuach

$$\operatorname{Res}_{\lambda=-n} x_-^\lambda = \frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}. \quad (1.102)$$

Ponieważ funkcja  $\Gamma(\lambda+1)$  ma bieguny w tych samych punktach co rozważane dystrybucje, można rozważać zamiast  $x_+^\lambda$  i  $x_-^\lambda$  funkcje  $x_+^\lambda/\Gamma(\lambda+1)$  i  $x_-^\lambda/\Gamma(\lambda+1)$  będące już całkowitymi funkcjami analitycznymi  $\lambda$ , przyjmującymi przy  $\lambda = -1, -2, \dots, -n$  odpowiednio wartość  $\delta^{(n-1)}(x)$  i  $(-1)^{n-1}\delta^{(n-1)}(x)$ . Dystrybucja  $|x|^\lambda$  jest analityczną funkcją  $\lambda$ , mającą proste bieguny przy  $\lambda = -1, -2, \dots, -2n-1, \dots$  o residuach

$$\operatorname{Res}_{\lambda=-2n-1} x_+^\lambda = \frac{2\delta^{2n}(x)}{(2n)!}. \quad (1.103)$$

## 1.8 Przekształcenia Fouriera dla dystrybucji

Pewien typ dystrybucji, a mianowicie dystrybucje wolno rosnące, pojawia się w sposób naturalny przy badaniu transformacji Fouriera dla dystrybucji. Dystrybucje stanowią podprzestrzeń właściwą przestrzeni  $\mathcal{D}'$ , ale z drugiej strony mogą być określone jako ciągłe funkcyjony liniowe na klasie funkcji próbnych, która jest szersza niż  $\mathcal{D}$ . Wprowadza się mianowicie przestrzeń **S funkcji szybko malejących**, zdefiniowaną następująco:

$$S := \left\{ \varphi(x) : \varphi(x) \in C_\infty, \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^m \varphi^{(q)}(x) = 0, \quad \forall m \in N \quad \text{i dowolnego } q \right\}.$$

Oczywiście, jeżeli  $\varphi \in S$ , to każda z jej pochodnych cząstkowych również należy do  $S$ , co więcej, każda funkcja klasy  $C_\infty$  o zwartym nośniku, czyli każda funkcja należąca do  $\mathcal{D}$ , również należy do  $S$ . Możemy zatem napisać relację

$$\mathcal{D} \subset S \subset \mathcal{E}, \quad (1.104)$$

gdzie  $\mathcal{E}$  jest zbiorem funkcji klasy  $C_\infty$  ( $\mathcal{E} := C_\infty$ ). Łatwo przekonać się, że relacja (1.104) pociąga za sobą zawieranie

$$\mathcal{D}' \supset S' \supset \mathcal{E}'. \quad (1.105)$$

Przestrzeń dualna do  $S$ , którą oznaczyliśmy przez  $S'$ , nosi nazwę **przestrzeni dystrybucji temperowanych**.<sup>13</sup> Ponieważ zachodzi zawieranie  $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}W'$ , więc łącząc związki (1.104) i (1.105), możemy napisać

$$\mathcal{D} \subset S \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{E}' \subset S' \subset \mathcal{D}'. \quad (1.106)$$

Ciąg funkcji  $\{\varphi_m(x)\}$  należących do przestrzeni  $S$  nazywamy **ciągą zbieżną do zera**, jeżeli zachodzi równość

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_x \left[ (1 + |x|^2)^n |\varphi^{(q)}(x)| \right] = 0$$

dla dowolnego  $n$  i  $0 \leq |q| \leq n$ .

Można udowodnić, że przestrzeń  $\mathcal{D}$  jest gęsta w przestrzeni  $S$  w tym sensie, że dla każdego  $\varphi \in S$  istnieje ciąg  $\{\varphi_k(x)\}$ , gdzie  $\varphi_k(x) \in \mathcal{D}$ , który dąży w  $S$  do  $\varphi(x)$ . Mówimy, że dystrybucja  $F$  **wolno rośnie** (jest **dystrybucją temperowaną**), jeżeli jest ciągłym funkcjonałem liniowym w przestrzeni  $S$  funkcji próbnych szybko malejących. Na przykład  $|x|^\lambda$ ,  $(x + i0)^\lambda$  itd są dystrybucjami temperowanymi. Dowolna dystrybucja o nośniku zwartym (tzn. ograniczonym) jest dystrybucją temperowaną. Funkcje  $f(x)$  lokalnie całkowne, dla których całka

$$\int |f(x)|(1 + |x|^2)^{-m} dx$$

jest zbieżna dla pewnego  $m$ , określają regularne dystrybucje temperowane.

**Przekształceniem Fouriera całkownej funkcji** nazywa się funkcję  $\tilde{\varphi}(x)$ , określoną równością

$$\tilde{\varphi}(s) = \int \varphi(x) e^{i(x,s)} dx, \quad (1.107)$$

gdzie  $(x, s) = x_1 s_1 + \dots + x_n s_n$ . Często transformatę Fouriera funkcji  $f(x)$  oznacza się przez  $\mathcal{F}(f)$ .

Można pokazać, że transformacja Fouriera odwzorowuje przestrzeń  $S$  na siebie. Zachodzi mianowicie

**Twierdzenie.** Transformata Fouriera dowolnej funkcji  $\varphi(x) \in S$ ,  $\mathcal{F}(\varphi(x))$ , należy do  $S$ , przy czym odwzorowanie  $\varphi(x) \rightarrow \tilde{\varphi}(s) = \mathcal{F}(\varphi(x))$  i odwzorowanie odwrotne  $\tilde{\varphi}(s) \rightarrow \varphi(x) = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{\varphi}(s))$  są ciągłe i wzajemnie jednoznaczne.<sup>14</sup>

Odwzorowanie odwrotne  $\mathcal{F}^{-1}$  dane jest wzorem

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \tilde{\varphi}(s) e^{-i(x,s)} ds. \quad (1.108)$$

W oparciu o równość Parsevala (1.109) definiujemy transformację Fouriera dla dystrybucji wolno rosnących (temperowanych). Jeżeli funkcja  $f(x)$  jest bezwzględnie całkowna na  $R^1$  oraz jeżeli  $\varphi(x) \in S$ , to odpowiadające im transformaty Fouriera  $\tilde{f}$  i  $\tilde{\varphi}$  istnieją i z jednej postaci równań Parsevala wynika, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) \varphi(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \tilde{\varphi}(x) dx, \quad (1.109)$$

<sup>13</sup>Określenie L. Schwartza (franc. distributions tempérées).

<sup>14</sup>Typowym przykładem jest funkcja Gaussa  $\exp(-x^2)$ , której transformatą Fouriera jest  $\exp(-t^2)$ .

co można również zapisać w postaci

$$(\tilde{f}, \varphi) = (f, \tilde{\varphi}) \quad (1.110)$$

albo

$$(\mathcal{F}f, \varphi) = (f, \mathcal{F}\varphi). \quad (1.111)$$

Korzystając z innej postaci wzoru Parsewala i przechodząc do  $n$  wymiarów, możemy dla funkcji  $f(x)$  i  $\varphi(x)$  o wyżej podanych własnościach napisać

$$\int f(x)\varphi(-x)dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \tilde{f}(s) \tilde{\varphi}(s) ds. \quad (1.112)$$

W związku z tym przekształcenie Fouriera dystrybucji temperowanej  $f$  definiujemy jako taką dystrybucję  $\tilde{f}$ , że dla dowolnej funkcji  $\varphi(x) \in S$  zachodzi

$$(f, \varphi(-x)) = \frac{1}{(2\pi)^n} (\tilde{f}, \tilde{\varphi}). \quad (1.113)$$

Zachodzi następujące

**Twierdzenie.** Jeżeli  $f$  jest dystrybucją temperowaną, to jej transformata  $\tilde{f}$  jest również dystrybucją temperowaną.

Warto zauważyć, że podana definicja transformacji Fouriera nie może być stosowana, jeżeli  $f$  jest dowolną dystrybucją z  $\mathcal{D}'$ . Jest tak dlatego, że  $\mathcal{F}\varphi$  nie należy do  $\mathcal{D}$ , gdy  $\varphi \in \mathcal{D}$  oraz  $\varphi \neq 0$ .

Ten właśnie fakt zadecydował o wprowadzeniu przestrzeni  $S$ . Dla regularnych dystrybucji  $f(x)$  wskazana definicja pokrywa się z definicją zwykłą.

Dla transformacji Fouriera dystrybucji zachodzą następujące wzory prawdziwe dla zwykłych transformat Fouriera:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\right] &= P(-is_1, \dots, -is_n)\tilde{f}, \\ \mathcal{F}[P(ix_1, \dots, ix_n)f] &= P\left(\frac{\partial}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial s_n}\right)\tilde{f}, \end{aligned} \quad (1.114)$$

gdzie  $P$  oznacza dowolny wielomian.

Dwukrotne zastosowanie transformacji Fouriera opisane jest wzorem

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}(f(x))] = (2\pi)^n f(-x). \quad (1.115)$$

Ze wzoru na odwrotną transformację Fouriera (1.108) mamy dla  $x = 0$

$$\varphi(0) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \tilde{\varphi}(s) ds = \frac{1}{(2\pi)^n} (1, \tilde{\varphi}) = (\delta, \varphi), \quad (1.116)$$

zatem  $\tilde{\delta} = 1$ .

W oparciu o wzór (1.114) możemy znaleźć wzór na transformatę Fouriera dla wielomianu

$$\mathcal{F}[P(x_1, \dots, x_n)] = (2\pi)^n P\left(-i\frac{\partial}{\partial s_1}, \dots, -i\frac{\partial}{\partial s_n}\right)\delta(s). \quad (1.117)$$

Na przykład

$$\mathcal{F}(|x|^2) = \mathcal{F}(x_1^2 + \dots x_n^2) = (-2\pi)^n \Delta \delta(s), \quad (1.118)$$

przy czym  $\Delta$  oznacza ty  $n$ -wymiarowy laplasjan.

Niech  $f(x)$  będzie dowolną lokalnie całkowną funkcją temperowaną. Można ją napisać w postaci

$$f(x) = (1 + |x|^2) h(x), \quad (1.119)$$

gdzie  $h(x)$  jest funkcją całkowną, a  $p$  jest liczbą naturalną. Oznaczając  $\tilde{h}(x) = \mathcal{F}(h(x))$ , możemy napisać

$$\tilde{f}(s) = (2\pi)^n (1 - \Delta)^p \tilde{h}(s), \quad (1.120)$$

przy czym różniczkowanie należy rozumieć w sensie dystrybucyjnym.

Niech  $f(x)$  będzie funkcją  $n$ -okresową, lokalnie całkowną, o okresie  $a(a_1, \dots, a_n)$ . Można ją zatem przedstawić w postaci

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \exp \left[ 2\pi i \left( \frac{m}{a}, x \right) \right], \quad (1.121)$$

gdzie

$$\left( \frac{m}{a}, x \right) = \sum_{k=1}^n \frac{m_k x_k}{a_k}.$$

Transformata Fouriera funkcji  $f(x)$  ma postać

$$\tilde{f}(s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \delta \left( s + \frac{2\pi m}{a} \right). \quad (1.122)$$

Nośnikiem funkcjonału  $\tilde{f}(s)$  jest przeliczalny zbiór punktów postaci

$$2\pi \left( \frac{m_1}{a_1}, \dots, \frac{m_n}{a_n} \right), \quad (1.123)$$

gdzie  $m_1, \dots, m_n$  są liczbami całkowitymi.

Podamy kilka przykładów transformat Fouriera dla funkcjonału  $\delta$  i jego pochodnych i transformacje odwrotne:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\delta &= 1 & \mathcal{F}1 &= 2\pi\delta(s), \\ \mathcal{F}\delta(x - \tau) &= e^{-is\tau}, & \mathcal{F}e^{-ix\tau} &= 2\pi\delta(s + \tau), \\ \mathcal{F}\delta^{(l)}(x) &= (is)^k, & \mathcal{F}(ix)^k &= (-1)^k 2\pi\delta^{(k)}(s), \\ \mathcal{F}\delta^{(k)}(x - \tau) &= (is)^k e^{-is\tau}, & \mathcal{F}\left[(ix)^k e^{-ix\tau}\right] &= (-1)^k 2\pi\delta^{(k)}(s + \tau). \end{aligned} \quad (1.124)$$

Na podstawie powyższych wzorów można napisać transformację Fouriera dla dowolnego wielomianu

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_0) \\ &= 2\pi \left[ a_n i^n \delta^{(n)}(s) + a_{n-1} i^{n-1} \delta^{(n-1)}(s) + \dots + a_0 \delta(s) \right]. \end{aligned} \quad (1.125)$$

Jak już wspomnieliśmy wyżej, nie można użyć podanej definicji transformacji Fouriera dla dowolnych dystrybucji z przestrzeni  $\mathcal{D}'$ . Transformaty Fouriera  $\tilde{f}$  dowolnej dystrybucji należącej do  $\mathcal{D}'$  nie jest na ogół dystrybucją, ale jest ciągłym funkcjonałem liniowym nowego typu, określonym w nowej przestrzeni funkcji próbnych  $\mathcal{Z}$ . Taki funkcjonal jest czasem nazywany ultradystrybucją,<sup>15</sup> a to rozszerzenie transformacji Fouriera pochodzi od Gelfanda i Sziłowa.<sup>16</sup> Przez  $\mathcal{Z}$  będziemy dalej oznaczać przestrzeń, której elementami są funkcje całkowite  $\varphi(z)$ , spełniające przy  $m = 0, 1, 2, \dots$  nierówności postaci

$$|z^m \varphi(z)| \leq C e^{a|y|}, \quad a > 0, \quad z = x + iy,$$

przy czym stałe  $C$  i  $a$  zależą od  $\varphi(z)$  i  $m$ .

Przestrzeń  $\mathcal{Z}$  jest zbiorem wszystkich funkcji, których transformaty Fouriera są elementami przestrzeni  $\mathcal{D}$ . Mówimy, że ciąg funkcji  $\{\varphi_\nu(z)\}$  z przestrzeni  $\mathcal{Z}$  jest zbieżny do zera, jeżeli funkcje  $\varphi_\nu(z)$  dążą jednostajnie do zera w każdym ograniczonym obszarze zmiennej  $z$  i jeżeli istnieją takie stałe  $C_m$  i stałe  $a > 0$ , że

$$|z^m \varphi_\nu(z)| \leq C_m e^{a|y|}$$

dla wszystkich  $\nu$ .

**Przestrzeń  $\mathcal{Z}$  jest dwoista do przestrzeni  $\mathcal{D}$  względem transformacji Fouriera:** jeżeli  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ , to funkcja

$$\tilde{\varphi}(z) = \int \varphi(x) e^{i(x,z)} dx$$

należy do  $\mathcal{Z}$ , a odwzorowanie  $\varphi(x) \rightarrow \tilde{\varphi}(z)$  odwzorowuje przestrzeń  $\mathcal{D}$  na  $\mathcal{Z}$  i jest wzajemnie jednoznaczne i ciągłe.

Nie  $\mathcal{Z}'$  będzie przestrzenią dualną do  $\mathcal{Z}$ , to znaczy zbiorem funkcjonałów liniowych i ciągłych na  $\mathcal{Z}$  (ultradystrybucji). Transformatą Fouriera dowolnej dystrybucji  $f \in \mathcal{D}'$  nazywamy ultradystrybucję  $\tilde{f}$  taką, że dla dowolnej funkcji  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$  zachodzi

$$(\tilde{f}, \tilde{\varphi}) = (2\pi)^n (f, \varphi(-x)).$$

Zatem transformatą Fouriera dystrybucji w przestrzeni  $\mathcal{D}$  jest dystrybucja w przestrzeni  $\mathcal{Z}$ .

Transformatą Fouriera regularnej dystrybucji  $e^{bx}$  jest dystrybucja  $(2\pi)^n \delta(s - ib)$  w przestrzeni  $\mathcal{Z}$ , a transformatą Fouriera regularnej dystrybucji jednej zmiennej

$$f(x) = -\frac{i}{2\pi} e^{x^2/2}$$

jest dystrybucja dana wzorem

$$(\tilde{f}, \tilde{\varphi}) = \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{s^2/2} \tilde{\varphi}(s) ds.$$

<sup>15</sup>J. Sebastião e Silva, Math. Ann. 136 (1958), 58.

<sup>16</sup>I.M. Gelfand, G. J. Sziłow, Usp. math. nauk, 8 (1953), 6 i niezależnie L. Ehrenpres, Ann. Math. 63 (1956), 3.

Na zakończenie podamy twierdzenia dotyczące relacji pomiędzy przestrzeniami  $\mathcal{Z}, \mathcal{Z}', S$  i  $S'$ .

**Twierdzenie 1.** Przestrzeń  $\mathcal{Z}$  jest podprzestrzenią właściwą przestrzeni  $S$ . (Jeżeli mówimy o przestrzeni  $\mathcal{Z}$  jako o podprzestrzeni  $S$ , to zmienna niezależna dla funkcji należącej do  $\mathcal{Z}$  jest zmienną rzeczywistą).

**Twierdzenie 2.** Przestrzeń  $\mathcal{Z}'$  zawiera przestrzeń  $S'$ .

Możemy zatem napisać relację

$$\mathcal{Z} \subset S \subset S' \subset \mathcal{Z}'.$$

Można pokazać, że przestrzeń  $\mathcal{Z}$  jest gęsta w przestrzeni  $S$ . Przestrzenie  $\mathcal{D}$  i  $\mathcal{Z}$  mają tylko jeden element wspólny - funkcję równą tożsamościowo zero.

## Rozdział 2

# Metoda termodynamiki informacyjnej

### 2.1 Momenty statystyczne

W fizyce statystycznej wielkości fizyczne traktujemy jako zmienne losowe, a wyniki pomiarów jako wartości średnie (zakładamy, że czytelnik zna elementy rachunku prawdopodobieństwa). Ze względu na dalsze zastosowania przypominamy pewne podstawowe definicje probabilistyczne.

Niech  $x$  będzie zmienną losową przybierającą wartości  $x_1, \dots, x_n$  z prawdopodobieństwami  $p_1, \dots, p_n$ , gdzie

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad p_i \geq 0 \quad \text{dla} \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.1)$$

Wówczas wielkość

$$E(x - a)^k =: \langle (x - a)^k \rangle = \sum_{i=1}^n p_i x_i^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

nazywamy  $k$ -tym momentem statystycznym zmiennej losowej  $x$  względem liczby  $a$ . Dla zmiennej losowej ciągłej, posiadającej rozkład prawdopodobieństwa o gęstości  $p(x)$  ( $x \in [\alpha, \beta]$ ) wzór (2.2) przybiera postać

$$E(x - a)^k =: \langle (x - a)^k \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} (x - a)^k p(x) dx. \quad (2.3)$$

W szczególności momenty względem zera oznaczać będziemy przez  $M_k$  i nazywać **momentami zwykłymi** (lub krótko: momentami):

$$M_k = \langle x^k \rangle. \quad (2.4)$$

Momenty względem  $a = \langle x \rangle = M_1$  nazywamy **momentami centralnymi**:

$$\mu_k = \langle (x - \langle x \rangle)^k \rangle. \quad (2.5)$$

Drugi moment centralny nazywamy wariancją zmiennej losowej  $x$ :

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = M_2 - M_1^2. \quad (2.6)$$

Ponieważ  $\sigma^2 \geq 0$ , istnieje więc pierwiastek  $\sigma = (\sigma^2)^{1/2}$ , który nazywamy **dyspersją** zmiennej losowej  $x$ , względnie **średnim odchyleniem kwadratowym** lub też **odchyleniem standardowym**.

Momenty  $M_k$  i  $\mu_k$  dogodnie jest wyrazić za pomocą funkcji charakterystycznej, względnie funkcji tworzącej momenty.

Funkcją charakterystyczną  $C_x(t)$  nazywamy funkcję

$$C_x(t) = \langle e^{itx} \rangle = \begin{cases} \sum_k p_k e^{itx_k} \\ \int_{\alpha}^{\beta} p(x) e^{itx} dx \end{cases} \quad (2.7)$$

odpowiednio dla zmiennej losowej dyskretnej i ciągłej,  $t$  jest pewnym parametrem rzeczywistym. Zauważmy, że funkcja charakterystyczna jest transformatą Fouriera rozkładu  $p(x)$ .

Funkcją tworzącą momenty  $G(t)$  zmiennej losowej  $x$  nazywamy wyrażenie

$$G_x(t) = \langle e^{-tx} \rangle, \quad (2.8)$$

jeśli ono istnieje (funkcja tworząca nie zawsze istnieje, w przeciwieństwie do funkcji charakterystycznej). Funkcja tworząca jest transformatą Laplace'a rozkładu  $p(x)$ .

Zachodzi następujące twierdzenie: jeżeli zmienna losowa  $x$  ma moment rzędu  $k$ , to jej funkcja charakterystyczna  $C_x(t) =: C(t)$  ma ciągle pochodne do rzędu  $k$  włącznie i przy tym

$$M_s = \frac{1}{i^s} \left[ \frac{d^s}{dt^s} C(t) \right]_{t=0}, \quad s = 1, \dots, k. \quad (2.9)$$

Analogicznie dla funkcji tworzącej mamy

$$M_s = (-1)^s \left[ \frac{d^s}{dt^s} G(t) \right]_{t=0}. \quad (2.10)$$

Momenty centralne wyrażają się również jako pochodne funkcji charakterystycznej

$$\mu_s = \frac{1}{i^s} \left[ \frac{d^s}{dt^s} e^{itM_1} C(t) \right]_{t=0}. \quad (2.11)$$

W wypadku zmiennych losowych przybierających jedynie wartości całkowite  $k = 0, 1, 2, \dots$  dogodnie jest posługiwać się funkcjami tworzącymi prawdopodobieństwa, zdefiniowanymi następująco:

$$Q(a) = \sum_k p^k s^k, \quad (-1 \leq a \leq 1). \quad (2.12)$$

Momenty rzędu  $\ell$  zmiennej losowej  $k$  wyrażają się przez pochodne funkcji  $Q(a)$  wzięte dla  $s = 1$ : w szczególności

$$\begin{aligned} M_1 &= \langle k \rangle = \left. \frac{dQ}{ds} \right|_{s=1}, \\ M_2 &= \langle k^2 \rangle = \left. \frac{d^2 Q}{ds^2} \right|_{s=1} + \left. \frac{dQ}{ds} \right|_{s=1}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Zamiast momentów używamy często innego typu parametrów zdefiniowanych za pośrednictwem funkcji

$$W(t) = \log C(t). \quad (2.14)$$

Wielkości

$$\kappa_s = \frac{1}{s} \left[ \frac{d^s}{dt^s} W(t) \right]_{t=0}, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (2.15)$$

nazywamy **kumulantami**<sup>1</sup> (pólniezmiennikami) zmiennej losowej  $x$  (kumulantami rozkładu zmiennej  $x$ ). Istotną własnością kumulantów jest to, że kumulanty  $\kappa_s(x+y+\dots)$  rozkładu sumy dowolnej ilości zmiennych stochastycznych niezależnych  $x, y, \dots$  równają się sumie odpowiednich kumulantów  $\kappa_s^x, \kappa_s^y, \dots$  zmiennych  $x, y, \dots$ :

$$\kappa_s^{(x+y+\dots)} = \kappa_s^x + \kappa_s^y + \dots, \quad (2.16)$$

co wynika z faktu, że funkcja charakterystyczna sumy dowolnej skończonej ilości zmiennych stochastycznych niezależnych równa się iloczynowi funkcji charakterystycznych dla poszczególnych zmiennych. Momenty zwykle są współczynnikami w rozwinięciu funkcji charakterystycznej na szereg MacLaurina (zakładamy istnienie momentu  $M_k$ )

$$C(t) = \sum_{s=0}^k \frac{M_s}{s!} (it)^s + o(t^k), \quad (2.17)$$

natomiast kumulanty występują w rozwinięciu funkcji  $W(t)$ :

$$W(t) = \sum_{s=0}^k \frac{\kappa_s}{s!} (it)^s + o(t^k). \quad (2.18)$$

Wprowadza się również tzw. momenty iloczynowe (ang. *factorial moments*). **Momentem iloczynowym** rzędu  $r$  zmiennej losowej  $x$  względem  $x = 0$  nazywamy wielkość

$$M_{[r]} = \langle x^{[r]} \rangle = \langle x(x-1)\dots(x-r+1) \rangle. \quad (2.19)$$

Funkcję

$$\mathcal{G}(t) =: \langle t^x \rangle \quad (2.20)$$

nazywamy **funkcją tworzącą momentów iloczynowych**, przy czym

$$\mathcal{G}(t+1) = \sum_{k=0}^{\infty} M_{[r]} \frac{t^k}{k!} \quad (2.21)$$

oraz

$$M_{[r]} = \mathcal{G}^{(r)}(1) = \frac{d^r}{dt^r} \mathcal{G}(t)|_{t=1}. \quad (2.22)$$

---

<sup>1</sup>Pojęcie wprowadzone przez T. N. Thiele'go w książce "Theory of Observation", Londyn, 1903. Terminy angielskie na określenie kumulantów "cumulants", względnie "semi-invariants" lub też "linked moments".

Między momentami różnych typów zachodzą określone związki. Momenty zwykle wyrażają się poprzez momenty centralne i na odwrót poprzez formuły

$$\begin{aligned}\mu_r &= \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} M_{r-k} (M_1)^k, \\ M_r &= \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \mu_{r-k} (M_1)^k.\end{aligned}\tag{2.23}$$

Momenty zwykle i kumulanty związane są relacjami

$$\begin{aligned}M_{r+1} &= \kappa_{r+1} + \sum_{k=0}^{r-1} \binom{r}{k} \kappa_{k+1} M_{r-k}, \\ \kappa_{r+1} &= M_{r+1} - \sum_{k=0}^{r-1} \binom{r}{k} \kappa_{k+1} M_{r-k},\end{aligned}\tag{2.24}$$

natomiast momenty iloczynowe wyrażają się poprzez momenty zwykle jako

$$M_{[r]} = \sum_{k=0}^{r-1} S_k^r M_{r-k}.\tag{2.25}$$

gdzie współczynniki  $S_k^r$  zwane są liczbami Stirlinga pierwszego rodzaju. Współczynniki te związane są z tzw. liczbami Bernoulli'ego, zachodzi bowiem

$$x^{[r]} = x(x-1)\dots(x-r+1) = \sum_{k=0}^r \binom{r-1}{k-1} B_{r-k}^{(r)} x^k,\tag{2.26}$$

gdzie  $B_{n-k}^{(n)}$  to **liczby Bernoulli'ego rzędu  $n$**  będące współczynnikami w następującym rozwinięciu

$$\frac{t^n}{(e^t - 1)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k^{(n)} \frac{t^k}{k!}; \quad (n = 0, 1, 2, \dots).\tag{2.27}$$

## 2.2 Zasada maksimum informacji

Mierząc pewne parametry opisujące wielkość fizyczną  $f$  (o której zakładamy, że ma charakter stochastyczny), np. zbiór jej momentów, nie uzyskujemy w ogólności jednoznacznej odpowiedzi na temat kształtu rozkładu prawdopodobieństwa danej wielkości. Jeśli bowiem zadany jest zbiór momentów  $M_1, \dots, M_k$  wielkości  $f$  (załóżmy dla ustalenia uwagi, że jest to zmienna dyskretna przyjmująca wartości  $f_1, \dots, f_n$  z prawdopodobieństwami  $p_1, \dots, p_n$ );

$$M_s = \sum_{j=1}^n p_j f_j^s, \quad s = 1, \dots, k \leq n-1,\tag{2.28}$$

wówczas istnieje w ogólności cały zbiór rozkładów  $p = (p_1, \dots, p_n)$  spełniających warunki (2.28)

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_{f, f^2, \dots, f^k}(M_1, \dots, M_k) = \\ &= \left\{ (p_1, \dots, p_n) : \sum_{j=1}^n p_j f_j^s = M_s, \quad s = 1, \dots, k \leq n-1, \right. \\ &\quad \left. p_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^n p_j = 1 \right\}.\end{aligned}\tag{2.29}$$

Zbiór ten nazywamy **makrostanem** za względu na wielkości  $M_s = \langle f^s \rangle$ . W szczególności zbiór ten może być pusty, a dla  $k = n - 1$  może to być zbiór 1-elementowy, o ile tylko momenty  $M_s$  i liczby  $f_j^s$  spełniają odpowiednie warunki. Załóżmy więc, że  $k < n - 1$  i że zbiór jest niepusty. Powstaje wtedy problem wyboru pewnego rozkładu prawdopodobieństwa spośród wszystkich należących do danego makrostanu, który by w sposób możliwie najbardziej obiektywny i pełny opisywał wiedzę ("wiedzę statystyczną") zawartą w znajomości momentów  $M_1, \dots, M_k$ . Rozkład taki znajdujemy przy pomocy tzw. **zasady maksimum informacji**, która mówi, że rozkładem najbardziej obiektywnie opisującym zmienną  $f$  (najbardziej zbliżonym do rozkładu rzeczywistego), dla której znamy zbiór momentów  $M_s (s = 1, \dots, k)$ , jest rozkład  $p^* = (p_1^*, \dots, p_n^*)$ , który maksymalizuje informację

$$S(p) = - \sum_{j=1}^n p_j \ln p_j \quad (2.30)$$

na makrostanie  $\Phi$  (2.29), tzn rozkład  $p^*$  taki, że

$$S(p^*) = \max_{p \in \Phi} S(p). \quad (2.31)$$

Rozkład  $p^* = (p_1^*, \dots, p_n^*)$ , jeśli istnieje, nazywamy **rozkładem reprezentatywnym** dla makrostanu  $\Phi$ . Znajdowanie rozkładów reprezentatywnych przy użyciu zasady maksimum informacji jest jedną z podstaw tzw. termodynamiki informacyjnej, której elementy omawiane będą w dalszym ciągu (p. Rozdz. 5 niniejszego skryptu, gdzie cytowana jest odpowiednia literatura). W tym rozdziale ograniczymy się do wyznaczenia rozkładów reprezentatywnych dla pewnych makrostanów. Otrzymane rozkłady użyteczne będą w dalszych rozdziałach.

## 2.3 Rozkład geometryczny

Rozważamy zmienną losową dyskretną  $x = n = 0, 1, 2, \dots$ . Załóżmy, że znana jest wartość średnia  $\langle n \rangle$  zmiennej  $n$

$$\mu := \langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n, \quad (2.32)$$

gdzie

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1, \quad p_n \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.33)$$

Szukamy rozkładu reprezentatywnego dla makrostanu

$$\Phi_n(\mu) = \left\{ p = (p_1, \dots, p_n) : \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \mu, \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1, p_n \geq 0, n = 0, 1, 2, \dots \right\}. \quad (2.34)$$

Zgodnie z zasadą maksimum informacji będzie to rozkład  $p^* = (p_1^*, \dots, p_n^*)$  maksymalizujący informację

$$S(p) = - \sum_{n=0}^{\infty} p_n \ln p_n \quad (2.35)$$

przy warunkach ubocznych (2.32), (2.33). Posłużymy się metodą mnożników Lagrange’a. Jak wiadomo, maksymalizacja funkcjonału (2.35) przy warunkach (2.32), (2.33) równoznaczna jest maksymalizacji funkcjonału

$$L(p) = S(p) - \lambda_0 \sum_{n=0}^{\infty} p_n - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} n p_n \quad (2.36)$$

bez warunków ubocznych:  $\lambda_0$  i  $\lambda$  są nieoznaczonymi mnożnikami Lagrange’a. Ekstremum funkcjonału (2.36) obliczamy z warunku

$$\frac{\partial L}{\partial p_n} = -\ln p_n - 1 - \lambda_0 - \lambda n|_{p_n=p_n^*} = 0, \quad (2.37)$$

a stąd

$$p_n^* = Z^{-1}(\lambda) e^{-\lambda n}, \quad (2.38)$$

gdzie z warunku normalizacji

$$Z(\lambda) := e^{1+\lambda_0} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda n} = (1 - e^{-\lambda})^{-1}. \quad (2.39)$$

Zauważmy, że

$$\left. \frac{\partial^2 L}{\partial p_n^2} \right|_{p_n=p_n^*} = -p_n^* - 1_n < 0, \quad (2.40)$$

czyli że dla  $p_n^*$  funkcjonał  $L(p)$  istotnie osiąga maksimum. Pozostaje do obliczenia nieoznaczony mnożnik  $\lambda$ : będzie on funkcją zadanej wartości średniej  $\mu$ . Z łatwego do sprawdzenia wzoru

$$-\frac{\partial \ln Z}{\partial \lambda} = \mu = \langle n \rangle, \quad (2.41)$$

znajdujemy, że

$$e^{-\lambda} = \frac{\mu}{1 + \mu}. \quad (2.42)$$

Podstawiając ten wynik do (2.38)-(2.39), otrzymujemy ostatecznie rozkład reprezentatywny dla makrostanu (2.34) w postaci

$$p_n^* = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\mu}{1 + \mu} \right)^{n+1} = \frac{\mu^n}{(\mu + 1)^{n+1}}. \quad (2.43)$$

Otrzymany rozkład nosi w statystyce nazwę **rozkładu geometrycznego**. Łatwo sprawdzić, że liczby  $p_n^*$  (2.43) spełniają warunek (2.33):

$$p_n^* \geq 0, \quad (2.44)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{(\mu + 1)^{n+1}} = \frac{1}{\mu + 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{(\mu + 1)^n} = \frac{1}{\mu + 1} \frac{1}{1 - \frac{\mu}{\mu + 1}} = 1,$$

przy założeniu  $\mu \geq 0$ .

## 2.4 Rozkład prostokątny

Założmy, że zmienna losowa  $x$  zmienia się w sposób ciągły w przedziale domkniętym  $[u - a, u + a]$ .

Zmienna ta posiada rozkład prawdopodobieństwa o gęstości  $p(x)$ , o której zakładamy, że

$$\begin{aligned} p(x) &\geq 0 \quad \text{dla} \quad x \in [u - a, u + a], \\ p(x) &= 0 \quad \text{dla} \quad x \notin [u - a, u + a] \end{aligned} \quad (2.45)$$

oraz że

$$\int_{u-a}^{u+a} p(x) dx = 1. \quad (2.46)$$

Poszukamy teraz rozkładu, który maksymalizuje entropię (informację)

$$S(p) = - \int_{u-a}^{u+a} p(x) \ln p(x) dx \quad (2.47)$$

przy warunkach (2.45)-(2.46), czyli rozkładu reprezentatywnego dla makrostanu

$$\Phi = \left\{ p(x) : \begin{aligned} &p(x) \geq 0 \quad \text{dla} \quad x \in [u - a, u + a], \quad p(x) = 0 \quad \text{dla} \quad x \notin [u - a, u + a] \\ &\int_{u-a}^{u+a} p(x) dx = 1 \end{aligned} \right\}. \quad (2.48)$$

Podobnie jak w poprzednim akapicie, posłużymy się metodą nieoznaczonych mnożników Lagrange'a.

Tworzymy funkcjonal

$$L(p) = S(p) - \lambda \int_{u-a}^{u+a} p(x) dx. \quad (2.49)$$

Z warunku na ekstremum

$$\left. \frac{\delta L}{\delta p(x)} \right|_{p=p^*} = 0, \quad (2.50)$$

gdzie znak  $\delta/\delta p(x)$  oznacza pochodną funkcjonalną, otrzymujemy

$$p^*(x) = e^{-(1+\lambda)} = \text{const}, \quad (2.51)$$

co w połączeniu z warunkami (2.45)-(2.46) daje ostatecznie wynik

$$p^*(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & \text{dla } x \in [u - a, u + a], \\ 0, & \text{dla } x \notin [u - a, u + a]. \end{cases} \quad (2.52)$$

Rozkład (2.52) znany jest w matematyce pod nazwą rozkładu prostokątnego.. Zauważmy, że wartość średnia zmiennej losowej  $x$  obliczona z rozkładem (2.52) równa jest wartości wyznaczającej środek przedziału zmienności:

$$\langle x \rangle = \int_{u-a}^{u+a} x p^*(x) dx = u. \quad (2.53)$$

## 2.5 Rozkład wykładniczy

Założmy, że zmienna losowa  $x$  zmienia się w sposób ciągły w przedziale  $[0, \infty]$  i że dana jest wartość średnia:

$$\langle x \rangle =: \mu = \int_0^{\infty} x p(x) dx, \quad (2.54)$$

gdzie

$$p(x) \geq 0 \quad \text{dla} \quad x \geq 0, \quad \int_0^{\infty} p(x) dx = 1. \quad (2.55)$$

Szukamy rozkładu reprezentatywnego dla makrostanu

$$\Phi = \left\{ p(x) : \int_0^{\infty} x p(x) dx = \mu, \quad \int_0^{\infty} p(x) dx = 1, \right. \\ \left. p(x) \geq 0 \quad \text{dla} \quad x \geq 0 \right\}. \quad (2.56)$$

Posługując się, analogicznie jak w 2 poprzednich podrozdziałach, metodą nieoznaczonych mnożników Lagrange'a, otrzymujemy rozkład reprezentatywny w postaci

$$p(x) = Z^{-1}(\lambda) e^{-\lambda x}, \quad (2.57)$$

gdzie

$$Z(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \lambda^{-1}, \quad \lambda > 0. \quad (2.58)$$

Rozkład (2.57) zapisać więc można w postaci

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad (x \geq 0) \quad (2.59)$$

zwanej w statystyce rozkładem wykładniczym. Ze związku

$$-\frac{\partial \ln Z}{\partial \lambda} = \mu = \langle x \rangle, \quad (2.60)$$

otrzymujemy, że

$$\lambda = \frac{1}{\mu}, \quad (2.61)$$

co pozwala na przepisanie (2.59) w postaci

$$p(x) = \frac{1}{\mu} \exp(-x/\mu). \quad (2.62)$$

Obliczmy dowolny moment  $M_k$  rozkładu wykładniczego (2.62):

$$M_k = \langle x^k \rangle = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} x^k e^{-x/\mu} dx = k! \mu^k. \quad (2.63)$$

Funkcja tworząca rozkładu wykładniczego, zgodnie z definicją (2.8), będzie miała postać

$$G(t) = \langle e^{-tx} \rangle = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} e^{-tx-x/\mu} dx = \frac{1}{1 + \mu t}. \quad (2.64)$$

## 2.6 Rozkład Poissona

Niech zmienna  $x$  zmienia się w sposób ciągły w przedziale  $[0, \infty]$ . Rozważmy teraz rozkład  $\tilde{p}(x)$ , unormowany z wagą  $w(x)$ , tzn. że

$$\int_0^{\infty} \tilde{p}(x) w(x) dx = 1, \quad \tilde{p}(x) \geq 0, \quad w(x) \geq 0. \quad (2.65)$$

Niech będzie również zadana **średnia ważona**  $\langle x \rangle_w$

$$\langle x \rangle_w = \int_0^{\infty} x \tilde{p}(x) w(x) dx =: \mu. \quad (2.66)$$

Jeżeli wprowadzimy oznaczenie

$$p(x) = \tilde{p}(x) w(x), \quad (2.67)$$

wówczas warunki (2.65)-(2.66) przepisać można w postaci

$$\int_0^{\infty} p(x) dx = 1, \quad \int_0^{\infty} x p(x) dx = \mu, \quad (2.68)$$

a entropię w postaci

$$S(p, w) = - \int_0^{\infty} p(x) \ln \frac{p(x)}{w(x)} dx. \quad (2.69)$$

Dla przypadku dyskretnego, gdy  $x = n = 0, 1, 2, \dots$ , rozkład ciągły  $p(x)$  przechodzi w dyskretny  $p = (p_0, p_1, \dots)$ , a warunki (2.68) przyjmą postać

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \mu, \quad p_n \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.70)$$

Entropia (2.69) przechodzi w wyrażenie

$$S(p, w) = - \sum_{n=0}^{\infty} p_n \ln \frac{p_n}{w_n}. \quad (2.71)$$

Szukamy teraz rozkładu  $p_n$  ekstremalizującego entropię (2.71) przy warunkach (2.70), gdy  $w_n = 1/n!$ . Budujemy, jak zwykle funkcjonal  $L$ :

$$L = - \sum_{n=0}^{\infty} p_n \ln(n! p_n) - \lambda_0 \sum_{n=0}^{\infty} p_n - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} n p_n, \quad (2.72)$$

gdzie  $\lambda_0$  i  $\lambda$  to nieoznaczone mnożniki Lagrange'a. Warunek na ekstremum

$$\frac{\partial L}{\partial p_n} = - \ln(n! p_n) - 1 - \lambda_0 - \lambda n = 0, \quad (2.73)$$

daje

$$p_n = e^{-1-\lambda_0} \frac{e^{-\lambda n}}{n!} = Z(\lambda)^{-1} \frac{e^{-\lambda n}}{n!}, \quad (2.74)$$

gdzie

$$Z(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda n}}{n!} = \exp(e^{-\lambda}). \quad (2.75)$$

Z warunku

$$-\frac{\partial \ln Z}{\partial \lambda} = \mu \quad (2.76)$$

otrzymujemy równość  $e^{-\lambda} = \mu$ , a stąd

$$p_n = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu}. \quad (2.77)$$

Rozkład (2.77) nazywamy rozkładem Poissona. Przypomnijmy teraz kilka własności tego rozkładu.

Funkcja charakterystyczna rozkładu Poissona ma postać

$$C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{itn} \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu} = \exp[\mu(e^{it} - 1)]. \quad (2.78)$$

Obliczmy dwa pierwsze momenty rozkładu oraz jego wariancję:

$$M_1 = \langle n \rangle = \frac{C'(0)}{i} = \mu, \quad (2.79)$$

$$M_2 = \langle n^2 \rangle = \frac{C''(0)}{i^2} = \mu(\mu + 1), \quad (2.80)$$

$$\sigma^2 = M_2 - (M_1)^2 = \mu. \quad (2.81)$$

Korzystając ze wzorów (2.14)-(2.15) i (2.78), obliczymy kumulanty  $\kappa_k$  rozkładu Poissona. Ponieważ

$$W(t) = \ln C(t) = \mu(e^{it} - 1) = \mu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!}, \quad (2.82)$$

więc

$$\kappa_k = \mu \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.83)$$

Funkcja tworząca prawdopodobieństwa ma dla rozkładu Poissona postać

$$Q(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\mu} \frac{(\mu s)^n}{n!} = e^{-\mu(1-s)}. \quad (2.84)$$

## Rozdział 3

# Klasyczna teoria koherencji światła

### 3.1 Wprowadzenie

Wykład teorii częściowej koherencji światła (ang. *partially coherent light*) oprzemy na książce J. Klaudera i E. C. G. Sudarshana "Fundamentals of Quantum Optics" (N. York 1968) oraz na przeglądowym artykule Mandela i Wolfa, zamieszczonym w "Review of Modern Physics".<sup>1</sup> Zakładamy również, że czytelnik zna podstawy rachunku prawdopodobieństwa oraz termodynamiki i fizyki statystycznej. Zwykle wykład teorii koherencji rozpoczyna się od opisu eksperymentu Younga. Jak wiadomo, polega on na tym, że przed przegrodą z dwoma otworkami  $S_1$  i  $S_2$  (Rys. 3.1) umieszcz się źródło światła  $S$ . Okazuje się, że zmieniając odległość  $\ell$  źródła  $S$  od przegrody (a więc zmieniając kąt  $\vartheta$ ), zmieniamy ostrość prążków. Gdy  $\vartheta \rightarrow \pi/2$  (przy zmniejszaniu  $\ell$ ), prążki znikają, natomiast dla  $\vartheta \rightarrow 0$  (a więc  $\ell \rightarrow \infty$ ) prążki stają się coraz bardziej ostre. Jako ilościową miarę ostrości prążków wprowadzimy, za A. Michelsonem **widzialność**  $w$  (ang. visibility), gdzie

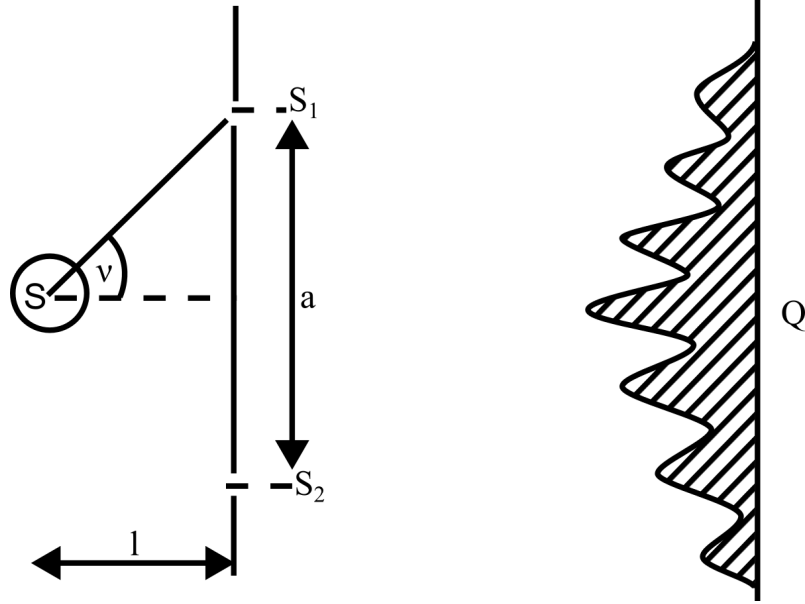
$$w = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (3.1)$$

przy czym  $I_{\max}, I_{\min}$  oznaczają odpowiednio maksymalne i minimalne natężenie światła w prążkach. Gdy  $w \rightarrow 0$ , mówimy o świetle **niekoherentnym** (niespójnym), natomiast światło, dla którego  $w \rightarrow 1$ , nazywamy **koherentnym** (spójnym). Przypadki  $w = 0$  i  $w = 1$  są przypadkami granicznymi, pomiędzy którymi mamy całe kontinuum sytuacji pośrednich, kiedy mówimy o **częściowej koherencji światła**.

Niespójność światła tłumaczono tym, że źródła promieniowania, tj. atomy, wysyłają promieniowanie w postaci ciągów falowych o różnych fazach i kierunkach. W związku z tym sądzono, że

---

<sup>1</sup>L. Mandel and E. Wolf, *Coherence properties of optical fields*, Rev. Modern Physics **37**, 231 (1965).



Rysunek 3.1: Eksperyment Younga

światło może interferować tylko z samym sobą (pogląd ten uległ zmianie od czasu wynalezienia laserów).

W matematycznym opisie częściowej koherencji światła pamiętać trzeba, że obserwujemy jedynie pewne wielkości średnie, a więc, że opis ten musi być statystyczny. Uwzględniając fakt, że czas trwania aktu emisji jest rzędu  $10^{-15}$  s, czas rejestracji drgania optycznego, np. poprzez fotografowanie, jest rzędu  $10^{-9}$  s, a czas bezwładności oka -  $10^{-2}$  s, widać, że w czasie rejestracji drgania optycznego poszczególne atomy dokonują  $10^6$  emisji - obserwujemy więc tylko pewien średni proces (średniowanie po czasie).

Podobne podejście statystyczne zastosować można również do zjawisk polaryzacji światła. Efektem analogicznym do częściowej koherencji światła jest **częściowa polaryzacja światła**.

W dalszej dyskusji, dla prostoty, ograniczymy się do skalarnej teorii światła.

### 3.2 Skalarna teoria koherencji. Opis przy użyciu sygnału analitycznego

Składowe pola elektromagnetycznego są funkcjami rzeczywistymi współrzędnych przestrzennych i czasu. Oznaczać je będziemy  $V^{(r)}(\mathbf{r}, t)$ . Obserwabłami są wielkości średnie typu (średnie natężenia)

$$I(r) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T [V^{(r)}(t)] dt, \quad (3.2)$$

przy czym  $V^{(r)}(t)$  oznacza, że rozważamy ewolucję czasową składowej  $V^{(r)}(\mathbf{r}, t)$  w ustalonym punkcie  $\mathbf{r}$ . W dalszych rozważaniach posługiwać się będziemy wprowadzonym przez D. Gabora<sup>2</sup> i podanym przez nas uprzednio<sup>3</sup> pojęciem sygnału analitycznego. Rozważmy falę o składowych

$$V^{(r)}(t) = 2A \cos(2\pi \nu t) = 2A \cos \omega t. \quad (3.3)$$

Dla takiej fali, jak łatwo sprawdzić, średnia typu (3.2) jest równa  $A^2$ . Idea Gabora polegała na tym, by wziąć sygnał analityczny

$$V(t) = A e^{-2\pi i \nu t}, \quad (3.4)$$

a wówczas, z definicji,  $A^2 = \overline{V(t)}V(t) = |V(t)|^2$ . Zauważmy, że ponieważ pole  $V^{(r)}(t)$  jest rzeczywiste, to jego transformata Fouriera

$$\tilde{V}^{(r)}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} V^{(r)}(t) e^{2\pi i \nu t} dt \quad (3.5)$$

spełniać musi relację

$$\tilde{V}^{(r)}(-\nu) = \overline{\tilde{V}^{(r)}(\nu)}. \quad (3.6)$$

W związku z tym widać, że wystarczy zadać funkcję  $\tilde{V}^{(r)}(\nu)$  tylko dla  $\nu \geq 0$ . Wprowadzamy więc sygnał analityczny  $V(t)$  jako

$$V(t) = \int_0^{\infty} \tilde{V}^{(r)}(\nu) e^{-2\pi i \nu t} d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{V}(\nu) e^{-2\pi i \nu t} d\nu, \quad (3.7)$$

gdzie

$$\tilde{V}(\nu) = \begin{cases} \tilde{V}^{(r)}(\nu) & \text{dla } \nu > 0, \\ 0 & \text{dla } \nu < 0. \end{cases}$$

Można pokazać, że

$$V^{(r)}(t) = 2 \operatorname{Re} V(t), \quad (3.8)$$

( $\operatorname{Re}$  oznacza część rzeczywistą) oraz że

$$V(t) = \frac{1}{2} \left[ V^{(r)}(t) + i V^{(i)}(t) \right], \quad (3.9)$$

gdzie, jak uprzednio pokazaliśmy<sup>4</sup>

$$V^{(i)}(t) = \frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V^{(r)}(t')}{t' - t} dt', \quad (3.10)$$

$$V^{(r)}(t) = -\frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V^{(i)}(t')}{t' - t} dt', \quad (3.11)$$

<sup>2</sup>D. Gabor, J.I.E.E. (London) **93**(1946), 429.

<sup>3</sup>R. S. Ingarden, Elektrodynamika klasyczna i kwantowa, Toruń 1970, UMK, str. 35, wzór (6.39)

<sup>4</sup>R. S. Ingarden, Elektrodynamika klasyczna i kwantowa, Toruń 1970, UMK, § 6.

gdzie p.v. oznacza wartość główną całki. Z relacji tych wynika związek

$$\tilde{V}(\nu) = \varepsilon(\nu)\tilde{V}(\nu), \quad \varepsilon(\nu) = \text{sign } \nu = \begin{cases} 1 & \text{dla } \nu > 0 \\ 0 & \text{dla } \nu = 0 \\ -1 & \text{dla } \nu < 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Używając pojęcia sygnału analitycznego, opiszemy teraz eksperyment Younga. Oznaczmy przez  $\mathbf{r}$  wektor wodzący punktu  $Q$ , a przez  $\mathbf{r}_1$  i  $\mathbf{r}_2$  wektory wodzące odpowiednio punktów  $S_1$  i  $S_2$ . Fala w punkcie  $Q$  będzie superpozycją fal pochodzących z otworów  $S_1$  i  $S_2$

$$V(\mathbf{r}, t) = K_1 V(\mathbf{r}_1, t - t_1) + K_2 V(\mathbf{r}_2, t - t_2), \quad (3.13)$$

gdzie  $t_1$  i  $t_2$  - to czasy propagacji fal od  $\mathbf{r}_1$  do  $\mathbf{r}$  od  $\mathbf{r}_2$  do  $\mathbf{r}$ , a  $K_1$  i  $K_2$  oznaczają czynniki propagacji, tzn. funkcje zespolone, zależne od  $\mathbf{r}$  i od geometrii otworów  $S_1$  i  $S_2$ , natomiast niezależne od czasu. Natężenie  $I(\mathbf{r}, t)$  zdefiniowane jako

$$I(\mathbf{r}, t) = \overline{V(\mathbf{r}, t)} V(\mathbf{r}, t), \quad (3.14)$$

przy uwzględnieniu (3.13), równe będzie

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}, t) &= \overline{K_1} K_1 \overline{V(\mathbf{r}_1, t - t_1)} V(\mathbf{r}_1, t - t_1) \\ &+ \overline{K_2} K_2 \overline{V(\mathbf{r}_2, t - t_2)} V(\mathbf{r}_2, t - t_2) \\ &+ \overline{K_1} K_2 \overline{V(\mathbf{r}_1, t - t_1)} V(\mathbf{r}_2, t - t_2) + \overline{K_2} K_1 \overline{V(\mathbf{r}_2, t - t_2)} V(\mathbf{r}_1, t - t_1) \\ &= \overline{K_1} K_1 \overline{V(\mathbf{r}_1, t - t_1)} V(\mathbf{r}_1, t - t_1) \\ &+ \overline{K_2} K_2 \overline{V(\mathbf{r}_2, t - t_2)} V(\mathbf{r}_2, t - t_2) \\ &+ \text{Re} \{ \overline{K_1} K_2 \overline{V(\mathbf{r}_1, t - t_1)} V(\mathbf{r}_2, t - t_2) \}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Robimy teraz pierwszy krok w kierunku opisu statystycznego - wprowadzamy średniowania. Zmiennymi losowymi są funkcje  $V$ , a przestrzenią probabilistyczną - przestrzeń  $\{V_t(\mathbf{r})\}$  wszystkich funkcji  $V(\mathbf{r}, t) = V_t(\mathbf{r})$  z rozkładem prawdopodobieństwa  $P[V_t(\mathbf{r})]$ , przy czym oczywiście

$$\int_{\{V_t(\mathbf{r})\}} P(V_t(r)) d(V_t(r)) = 1. \quad (3.16)$$

Zależność od czasu traktowana jest parametrycznie. Rozkład  $P$  w ogólności może być zależny od czasu. Ograniczymy się do rozważania przypadku **stacjonarnego**, tzn. średnie z rozkładem  $P$  spełniać muszą warunek (jest to konsekwencja stacjonarności)

$$\langle \overline{V(\mathbf{r}_1, \tau_1 + t)} V(\mathbf{r}_2, \tau_2 + t) \rangle = \langle \overline{V(\mathbf{r}_1, \tau_1)} V(\mathbf{r}_2, \tau_2 + t) \rangle, \quad (3.17)$$

gdzie

$$\langle V_t(\mathbf{r}) \rangle = \int_{\{V_t(\mathbf{r})\}} V_t(r) P(V_t(r)) d(V_t(r)). \quad (3.17a)$$

Zgodnie z tą notacją średnie natężenie pola w punkcie  $Q$  jest równe (p. (3.15))

$$\begin{aligned} \langle I(\mathbf{r}, t) \rangle &= \overline{K}_1 K_1 \langle I(\mathbf{r}_1) \rangle + \overline{K}_2 K_2 \langle I(\mathbf{r}_2) \rangle \\ &+ 2 \operatorname{Re} \{ K_2 \overline{K}_1 \langle V(\mathbf{r}_2, t - t_2) \overline{V}(\mathbf{r}_1, t - t_1) \rangle \}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Zakłada się (co, jak pokażemy później, równoznaczne jest z przybliżeniem Huyghensa), że czynniki  $K_1, K_2$  spełniają warunek

$$K_1 \overline{K}_2 \simeq |K_1|^2 \simeq |K_2|^2 \equiv K^2. \quad (3.19)$$

Zdefiniujmy teraz funkcję

$$\Gamma_{ij}(\tau) = \langle V(\mathbf{r}_j, 0) V(\mathbf{r}_i, \tau) \rangle, \quad (3.20)$$

zwaną **funkcją koherencji wzajemnej** (ang. *mutual coherence function*). Gdy  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_j$ , mówimy o **autokorelacji** sygnału  $V(\mathbf{r}_i, t)$ ; gdy  $\mathbf{r}_i \neq \mathbf{r}_j$ , funkcja  $\Gamma$  opisuje **korelację krzyżową** (ang. *cross-correlation*). Oznaczając

$$\begin{aligned} I_1 &= \Gamma_{11}(0) = \langle |V(\mathbf{r}_1, 0)|^2 \rangle, \\ I_2 &= \Gamma_{22}(0) = \langle |V(\mathbf{r}_2, 0)|^2 \rangle, \end{aligned} \quad (3.21)$$

przy założeniu (3.19) i kładąc  $t = -t_2$ , przepiszemy (3.18) w postaci

$$0 \leq I = \langle I(r) \rangle = K^2 \{ I_1 + I_2 + 2 \operatorname{Re} \Gamma_{12}(t_2 - t_1) \}. \quad (3.22)$$

Wprowadzimy teraz wielkość

$$\gamma_{ij}(\tau) = \frac{\Gamma_{ij}(\tau)}{(I_i I_j)^{1/2}}, \quad (3.23)$$

zatem  $\operatorname{Re} \gamma_{ij}(\tau) \leq |\gamma_{ij}(\tau)| \leq 1$ . Teraz (3.22) przybierze postać

$$\langle I \rangle = K^2 \left\{ I_1 + I_2 + 2 (I_i I_j)^{1/2} \operatorname{Re} \gamma_{12}(t_2 - t_1) \right\}. \quad (3.24)$$

Dla zilustrowania sensu wielkości  $\gamma_{12}$  zbadajmy 2 przypadki.

### 1. Przypadek dynamiczny

Rozważmy falę ściśle monochromatyczną (nie ma więc problemu statystycznego). Dla takiej fali

$$V(\mathbf{r}_j, t - t_j) = |A_j| \exp[-2\pi i \nu(t - t_j)], \quad (3.25)$$

tak więc korzystając z (3.20) i (3.23), mamy

$$\gamma_{12}(t_2 - t_1) = \exp[-2\pi i \nu(t_2 - t_1)], \quad (3.26)$$

a stąd

$$I = K^2 \left\{ I_1 + I_2 + 2 (I_i I_j)^{1/2} \cos[2\pi \nu(t_2 - t_1)] \right\}. \quad (3.27)$$

Otrzymaliśmy znany wzór na interferencję światła pochodzącego z 2 źródeł. Ponieważ  $-1 \leq \cos x \leq 1$ , więc ze wzoru (3.1) otrzymujemy wyrażenie na widzialność  $w$  dla tego przypadku

$$w = \frac{2(I_i I_j)^{1/2}}{I_1 + I_2}. \quad (3.28)$$

## 2. Przypadek quasidynamiczny

Rozważmy falę quasimonochromatyczną, tzn. falę, której częstość zmienia się w przedziale  $[\bar{\nu} - (\Delta\nu/2), \bar{\nu} + (\Delta\nu/2)]$  z pewnym rozkładem prawdopodobieństwa. Zakładamy przy tym, że przedział jest bardzo mały, tzn.  $\Delta\nu/\bar{\nu} \ll 1$ . Jeśli o rozkładzie  $p(\nu)$  założymy jedynie, że

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\nu} - (\Delta\nu/2)}^{\bar{\nu} + (\Delta\nu/2)} p(\nu) d\nu &= 1, \\ p(\nu) &\geq 0 \quad \text{dla } \nu \in \left[\bar{\nu} - \frac{\Delta\nu}{2}, \bar{\nu} + \frac{\Delta\nu}{2}\right], \\ p(\nu) &= 0 \quad \text{dla } \nu \notin \left[\bar{\nu} - \frac{\Delta\nu}{2}, \bar{\nu} + \frac{\Delta\nu}{2}\right], \end{aligned} \quad (3.29)$$

wówczas zasada maksimum informacji prowadzi do rozkładu prostokątnego dla  $\nu$  - patrz podrozdz. 2.4:

$$p(\nu) = \begin{cases} 0, & \text{dla } \nu \notin [\bar{\nu} - \frac{\Delta\nu}{2}, \bar{\nu} + \frac{\Delta\nu}{2}] \\ \frac{1}{\Delta\nu} & \text{dla } \nu \in [\bar{\nu} - \frac{\Delta\nu}{2}, \bar{\nu} + \frac{\Delta\nu}{2}], \end{cases} \quad (3.30)$$

przy czym  $\bar{\nu} = \langle \nu \rangle$ . Z definicji (3.20), używając do średniowania rozkład (3.30), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}(\tau) &= \int_0^\infty p(\nu) |A_i| |A_j| e^{-2\pi i \nu \tau} d\nu \\ &= |A_i| |A_j| \frac{1}{\Delta\nu} \int_{\bar{\nu} - (\Delta\nu/2)}^{\bar{\nu} + (\Delta\nu/2)} e^{-2\pi i \nu \tau} d\nu = |A_i| |A_j| \frac{\sin \pi \tau \Delta\nu}{\pi \tau \Delta\nu} e^{-2\pi i \bar{\nu} \tau}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Ponieważ  $I_i = \Gamma_{ii}(0) = |A_i|^2$ , więc z określenia (3.23) otrzymujemy

$$\gamma_{ij}(\tau) = \frac{\sin \pi \tau \Delta\nu}{\pi \tau \Delta\nu} e^{-2\pi i \bar{\nu} \tau} = |\gamma_{ij}(\tau)| e^{-2\pi i \bar{\nu} \tau}, \quad (3.32)$$

gdzie

$$|\gamma_{ij}(\tau)| = \frac{\sin \pi \tau \Delta\nu}{\pi \tau \Delta\nu}. \quad (3.33)$$

Podstawiając  $i = 1$ ,  $j = 2$   $\tau = t_2 - t_1$ , przepisemy (3.32) w postaci

$$\gamma_{12}(t_2 - t_1) = |\gamma_{12}(t_2 - t_1)| \exp[-2\pi i \bar{\nu} (t_2 - t_1)]. \quad (3.34)$$

W tym przypadku z (3.24) otrzymamy

$$I = K^2 \left\{ I_1 + I_2 + 2(I_1 I_2)^{1/2} |\gamma_{12}(t_2 - t_1)| \cos 2\pi \bar{\nu} (t_2 - t_1) \right\}, \quad (3.35)$$

natomiast widzialność  $w$  będzie funkcją postaci

$$w = \frac{2(I_1 I_2)^{1/2} |\gamma_{12}(t_2 - t_1)|}{I_1 + I_2}. \quad (3.36)$$

W przypadku, gdy  $I_1 = I_2$ , widzialność  $w$  wyrażona jest wzorem

$$0 \leq w = |\gamma_{12}(t_2 - t_1)| \leq 1. \quad (3.37)$$

W tym przypadku  $|\gamma_{12}|$  jest identyczne z widzialnością prążków w sensie Michelsona.

Wielkość  $|\gamma_{ij}|$  może być uważana za miarę koherencji fal elektromagnetycznych. W związku z tym  $\gamma_{ij}(\tau)$  nazywa się **zespolonym stopniem koherencji** (ang. *complex degree of coherence*), natomiast moduł  $|\gamma_{ij}(\tau)|$  nazywa się po prostu **stopniem koherencji**.

Udowodnimy teraz ważną własność funkcji koherencji wzajemnej. Okazuje się, że  $\Gamma_{12}(\tau)$  jest sygnałem analitycznym w sensie (3.7). Z definicji (3.20) mamy bowiem

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}(\tau) &= \langle \bar{V}_2(t) V_1(t + \tau) \rangle \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \{-2\pi i [\nu_1(t + \tau) - \nu_2 t]\} \langle \bar{V}_2(\nu_2) \tilde{V}_1 \rangle d\nu_1 d\nu_2 \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \{-2\pi i [\nu_1 \tau + t(\nu_1 - \nu_2)]\} \langle \bar{V}_2(\nu_2) \tilde{V}_1 \rangle d\nu_1 d\nu_2.\end{aligned}\tag{3.38}$$

Z warunku stacjonarności wynika, że wynik (3.38) nie może zależeć od  $t$ , co nakłada na średnie następujący warunek:

$$\langle \bar{V}_2(\nu_2) \tilde{V}_1 \rangle = \delta(\nu_1 - \nu_2) \tilde{\Gamma}_{12}(\nu_1).\tag{3.39}$$

Ostatecznie więc

$$\Gamma_{12}(\tau) = \int_0^\infty e^{-2\pi i \nu \tau} \Gamma_{12}(\nu) d\nu,\tag{3.40}$$

czyli  $\Gamma_{12}$  jest sygnałem analitycznym. Jak wynika z powyższego rozumowania,  $\Gamma_{12}$  jest sygnałem analitycznym, o ile spełniony jest warunek (3.33), wyrażający założenie stacjonarności.

Z pomiarów doświadczalnych wyznaczyć można  $|\gamma_{12}|$ . Powstaje więc problem, w jaki sposób użyć  $|\gamma_{12}|$  do wyznaczenia  $\gamma_{12}$ , gdzie

$$\gamma_{12}(\tau) = |\gamma_{12}(\tau)| e^{i\varphi_{12}(\tau)}.\tag{3.41}$$

Problem ten, zwany "problemem fazy", badany był przez E. Wolfa<sup>5</sup> Gdybyśmy założyli, że  $\gamma_{12}(\tau)$  nie ma zer w dolnej półpłaszczyźnie zespolonej płaszczyzny  $\tau$ , wówczas można by napisać

$$\ln \gamma_{12}(\tau) = \ln |\gamma_{12}(\tau)| + i\varphi_{12}(\tau),\tag{3.42}$$

biorąc gałąź główną logarytmu. Jeżeli  $\gamma_{12}$  posiada zera w dolnej półpłaszczyźnie, to, jak można wykazać, wyrażenie na  $\gamma_{12}$  zawiera czynnik

$$\prod_j \frac{\tau - \tau_j}{\tau - \bar{\tau}_j},$$

zwany "czynnikiem Blaschke'go", przy czym iloczyn przebiega po wszystkich zerach  $\tau_j$  zawartych w dolnej półpłaszczyźnie. Wynika stąd, że sama wielkość  $|\gamma_{12}|$  nie wystarcza do

<sup>5</sup>p. np. E. Wolf, Proc. Phys. Soc. **80** (1967), 1269.

określenia zespolonego stopnia koherencji. Musimy posiadać dodatkową informację o położeniu zer  $\gamma_{12}$ .

### 3.3 Własności propagacyjne funkcji wzajemnej koherencji

Wykażemy teraz, że funkcja wzajemnej koherencji spełnia równanie d'Alemberta. Jak wiadomo, funkcje pola elektromagnetycznego spełniają równanie (w próżni)

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) V(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (3.43)$$

(położyliśmy  $c = 1$ ). Równanie to mnożymy obustronnie przez  $\overline{V(\mathbf{r}', t')}$  i otrzymujemy związek

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) V(\mathbf{r}, t) \overline{V(\mathbf{r}', t')} = 0. \quad (3.44)$$

Ponieważ związek (3.44) słuszny jest dla każdej fali z całej przestrzeni dopuszczalnych  $V$ , słuszny więc będzie również po wyśredniowaniu

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \Gamma(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = 0, \quad (3.45)$$

$$\left(\nabla'^2 - \frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right) \Gamma(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = 0. \quad (3.46)$$

Funkcje korelacji wzajemnej spełniają więc równanie d'Alemberta. Stwierdził to po raz pierwszy E. Wolf w 1955 r.<sup>6</sup>

Jak stwierdziliśmy uprzednio, przy nałożeniu warunku stacjonarności funkcja koherencji wzajemnej ma własności sygnału analitycznego, czyli

$$\Gamma(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \int_0^\infty \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \nu) e^{-2\pi i \nu(t-t')} d\nu, \quad (3.47)$$

dla  $\Gamma$  stacjonarnych. Uwzględniając (3.45, 3.46), otrzymujemy

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k^2) \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \nu) &= 0, \\ (\nabla'^2 + k^2) \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \nu) &= 0, \end{aligned} \quad (3.48)$$

gdzie  $k = k(\nu) = 2\pi\nu$ . Ponieważ funkcja koherencji wzajemnej spełnia równanie falowe, do jej badania użyjemy funkcji Greena dla równania falowego<sup>7</sup>. Oznaczając przez  $G(\mathbf{r}, \mathbf{s})$  wartości funkcji Greena na pewnej powierzchni  $S$ , otrzymujemy z twierdzenia Greena (p. również<sup>8</sup>)

$$\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \nu) = \int_S \left\{ G(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial n}(\mathbf{s}, \mathbf{r}'; \nu) - \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \tilde{\Gamma}(\mathbf{s}, \mathbf{r}'; \nu) \right\} dS. \quad (3.49)$$

<sup>6</sup>E. Wolf, Proc. Roy. Soc. **A 230** (1955), 246.

<sup>7</sup>R. S. Ingarden, Elektrodynamika klasyczna i kwantowa, Toruń 1970, UMK, § 28.

<sup>8</sup>R. S. Ingarden, Elektrodynamika klasyczna i kwantowa, Toruń 1970, UMK, § 24.

Przyjmując  $G(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = 0$ , mamy

$$\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \nu) = \int_S \int_S \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \frac{\partial \bar{G}}{\partial n'}(\mathbf{r}', \mathbf{s}') \tilde{\Gamma}(\mathbf{s}, \mathbf{r}'; \nu) dS dS'. \quad (3.50)$$

Rozważmy dla ilustracji przypadek, kiedy  $S$  jest płaszczyzną  $z = 0$ . Singularna funkcja Greena dla równania d'Alemberta w przypadku półpłaszczyzny ma postać

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (3.51)$$

W szczególności można przyjąć

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}, x', y', z') - G_0(\mathbf{r}, x', y', -z'), \quad (3.52)$$

wówczas  $G = 0$ , gdy  $\mathbf{r}'$  lub  $\mathbf{r}$  należy do  $S$ .

Czynnik  $K$  występujący w (3.13) związany jest z pochodną  $\partial G / \partial n$ . Przyjmując

$$R = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2]^{1/2} \quad (3.53)$$

i zakładając, że  $kR \gg 1$ , mamy

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{e^{ikR}}{2\pi R} \right) \approx \frac{i\langle k \rangle z}{2\pi R^2} e^{ikR} = K e^{ikr}, \quad (3.54)$$

a stąd

$$K = \frac{i\langle k \rangle z}{2\pi R^2}. \quad (3.54a)$$

Przy użyciu funkcji Greena zbadamy zjawisko częściowej koherencji, która powstaje w wyniku propagacji fal elektromagnetycznych. Przypuśćmy, że  $S$  jest powierzchnią źródła promieniowania elektromagnetycznego (np. gwiazdy) o pochodzeniu termicznym. Posługiwać się tu będziemy związkiem (3.50). Można przyjąć, że

$$\tilde{\Gamma}(\mathbf{s}, \mathbf{s}'; \nu) = \int_S \nu = \delta_S(\mathbf{s} - \mathbf{s}') \tilde{\Gamma}(\mathbf{s}, \nu), \quad (3.55)$$

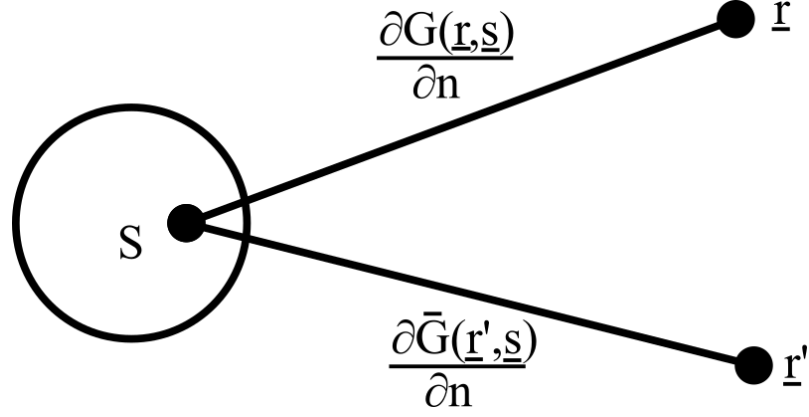
gdzie  $\delta_S(\mathbf{s} - \mathbf{s}')$  oznacza powierzchniową deltę Diraca. Wstawiając (3.55) do (3.50), mamy

$$\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \nu) = \int_S \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{s})}{\partial n} \frac{\partial \bar{G}(\mathbf{r}', \mathbf{s})}{\partial n} \Gamma(\mathbf{s}, \nu) dS, \quad (3.56)$$

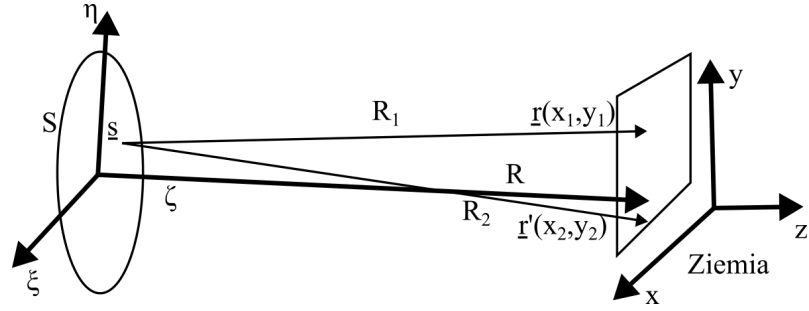
które to wyrażenie niekoniecznie znika dla  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ , więc światło, pochodzące ze źródła  $S$ , początkowo niespójne, może w wyniku propagacji stać się spójne. Wzór (3.56) pozwala na pewną interpretację typu dyfrakcyjnego. Interpretacja taka pochodzi od F. Zernike'go (1938)<sup>9</sup> i van Citterta<sup>10</sup> i nazywana jest "twierdzeniem van Citterta-Zernicke'go". Funkcję  $\Gamma$ , według nich, traktować można jako amplitudę pola w punkcie  $\mathbf{r}$ . Amplituda ta skonstruowana jest na podstawie zasady Huygensa następująco :

<sup>9</sup>F. Zernicke, Physica **5** (1938), 785.

<sup>10</sup>P. H. van Cittert, Physica **1** (1934), 201.



Rysunek 3.2: Konstrukcja amplitudy



Rysunek 3.3: Koherencja na podstawie wzoru (3.56)

1. punktowe źródło światła umieszczone w  $\mathbf{r}'$  wysyła promieniowanie w kierunku  $S$ , propagatorem jest  $\partial\bar{G}(\mathbf{r}', \mathbf{s})/\partial n$  (p. (Rys. 3.2);
2. promieniowanie odbija się od każdego punktu  $s \in S$  ze współczynnikiem odbicia  $\tilde{\Gamma}(\mathbf{s}; \nu)$ ;
3. promieniowanie propagowane jest z propagatorem  $\partial G/\partial n(\mathbf{r}, \mathbf{s})$  w kierunku obserwacji  $\mathbf{r}$ .

Przedyskutujemy teraz wynik (3.56) używając tzw. przybliżenie dalekiego pola (ang. *far-field approximation*). Zakładając, że źródło  $S$  jest powierzchnią odległej gwiazdy i ma kształt dysku, według oznaczeń na rysunku 3.3 mamy  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 \ll R^2$  oraz

$$\begin{aligned} R_1^2 &= (x_1 - \xi)^2 + (y_1 - \eta)^2 + R^2, \\ R_2^2 &= (x_2 - \xi)^2 + (y_2 - \eta)^2 + R^2, \end{aligned} \quad (3.57)$$

a stąd

$$\begin{aligned} R_1 &\simeq \frac{(x_1 - \xi)^2 + (y_1 - \eta)^2}{2R}, \\ R_2 &\simeq \frac{(x_2 - \xi)^2 + (y_2 - \eta)^2}{2R}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

czyli

$$R_1 - R_2 = -\frac{\mathbf{s}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{R}. \quad (3.59)$$

Uwzględniając jeszcze (3.54), otrzymamy

$$\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \nu) = |K|^2 \int_S \exp \left[ -i \left( \frac{k}{R} \right) \mathbf{s}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right] \tilde{\Gamma}(\mathbf{s}, \nu) dS. \quad (3.60)$$

Zakładając, że dysk gwiazdy jest kołem o promieniu  $b$  oraz że gwiazda wysyła promieniowanie w sposób jednorodny, tzn.  $\tilde{\Gamma}$  nie zależy od  $\mathbf{s}$ , otrzymujemy

$$\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \nu) = |K|^2 \tilde{\Gamma}(\nu) \int_0^b \int_0^{2\pi} e^{i(k/R)s r \cos \varphi} s ds d\varphi. \quad (3.61)$$

Uwzględniając pewne własności całek Bessela (p. (3.70)-(3.73)), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \nu) &= 2\pi |K|^2 \tilde{\Gamma}(\nu) \int_0^b J_0 \left( \frac{ksr}{R} \right) s ds \\ &= 2\pi \left( \frac{Rb}{kr} \right) |K|^2 \tilde{\Gamma}(\nu) J_1 \left( \frac{kb r}{R} \right), \end{aligned} \quad (3.62)$$

gdzie  $J_0$  i  $J_1$  są funkcjami Bessela. Dla fali monochromatycznej z (3.62) otrzymujemy

$$\Gamma(\mathbf{r}, t) = 2\pi \left( \frac{Rb}{\langle k \rangle r} \right) |K|^2 \Gamma(t) J_1 \left( \frac{\langle k \rangle b r}{R} \right) \quad (3.63)$$

oraz

$$\gamma(\mathbf{r}, t) = \gamma(t) \frac{J_1(x)}{x}, \quad x = \frac{\langle k \rangle b r}{R}, \quad \gamma(t) = \frac{\Gamma(t)}{\Gamma(0)}. \quad (3.64)$$

Funkcja  $J_1(x)/x$  jest funkcją periodyczną, a z obserwacji jej zer (tzn. miejsc znikania koherencji, co obserwuje się w interferometrach) wnioskować można na temat średnic gwiazd. Pierwsze zero osiąga funkcja  $J_1(x)/x$  dla  $x \approx 3,83$ . Wówczas średnica gwiazdy

$$b = \frac{3,83 R}{\langle k \rangle r}. \quad (3.65)$$

Biorąc np.  $r \approx 4 \times 10^2$  cm,  $R \approx 10^{18}$  cm (rok świetlny), oraz  $\langle k \rangle$  około  $10^5$  cm<sup>-1</sup>, otrzymamy  $b \approx 10^{11}$  cm, co odpowiadałoby gwiazdzie o rozmiarach zbliżonych do naszego Słońca.

## Uzupełnienia. Pewne własności funkcji Bessela

Dla funkcji walcowej  $Z_p(z)$ , będącej rozwiązaniem równania różniczkowego

$$\frac{d^2 Z_p}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dZ_p}{dz} + \left( 1 - \frac{p^2}{z^2} \right) Z_p = 0, \quad (3.66)$$

mamy

$$Z_p(z) = c_1 J_p(z) + c_2 N_p(z), \quad (3.67)$$

gdzie  $J_p(z)$  jest funkcją Bessela (funkcją walcową I rodzaju), a  $N_p(z)$  jest funkcją Neumanna (funkcją walcową drugiego rodzaju). Szczególną postacią funkcji walcowej są również funkcje Hankela

(funkcje walcowe trzeciego rodzaju)  $H_p^{(1)}(z)$  i  $H_p^{(2)}(z)$ . Sommerfeld<sup>11</sup> wyprowadził następujący wzór dla funkcji walcowych:

$$\begin{aligned} Z_p(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} e^{i z \cos \omega} e^{i \beta(\omega - \pi/4)} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\alpha - \pi/2}^{\beta - \pi/2} e^{-i z \sin \omega} e^{i \beta \omega} d\omega, \end{aligned} \quad (3.68)$$

gdzie  $\omega = \varphi + i\psi$ . Biorąc na płaszczyźnie zespolonej  $\omega = \varphi + i\psi$  różne drogi całkowania, otrzymamy, na podstawie (3.68), wyniki ujęte w Tabelicy 3.1

Tabelica 3.1: Funkcje walcowe  $Z_p(z)$  w postaci całkowej

| Droga całkowania | 1                 | 2                       | 3                       |
|------------------|-------------------|-------------------------|-------------------------|
| od $\alpha$      | $-\eta + i\infty$ | $\eta - i\infty$        | $-\eta + i\infty$       |
| przez            | 0                 | $\pi$                   | $\pi - \eta$            |
| do $\beta$       | $\eta - i\infty$  | $2\pi - \eta + i\infty$ | $2\pi - \eta + i\infty$ |
| wynik            | $H_p^{(1)}(z)$    | $H_p^{(2)}(z)$          | $2J_p(z)$               |

Funkcje  $H_p^{(1)}(z)$  i  $H_p^{(2)}(z)$  wyrazić można poprzez funkcje  $J_p(z)$  i  $N_p(z)$  jako

$$\begin{aligned} H_p^{(1)}(z) &= J_p(z) + i N_p(z), \\ H_p^{(2)}(z) &= J_p(z) - i N_p(z). \end{aligned} \quad (3.69)$$

Funkcje Bessela mają przedstawienie całkowe (dla całkowitych  $p = n$ )

$$J_n(z) = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i z \cos \varphi} e^{i n \varphi} d\varphi = \frac{i^{-n}}{\pi} \int_0^{\pi} e^{i z \cos \varphi} \cos n \varphi d\varphi. \quad (3.70)$$

W szczególności dla  $J_0(z)$  otrzymujemy

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i z \cos \varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i z \cos \varphi} d\varphi. \quad (3.71)$$

Całki z funkcji walcowych mają własność

$$\int x^{p+1} Z_p(x) dx = x^{p+1} Z_{p+1}(x). \quad (3.72)$$

W szczególności dla  $p = 0$

$$\int_0^b x J_0(x) dx = x J_1(x)|_0^b = b J_1(b). \quad (3.73)$$

<sup>11</sup>A. Sommerfeld, Math. Ann. **47** (1896), 33.

## Rozdział 4

# Statystyka fotonów

W tym i następnym rozdziale będziemy zajmowali się badaniem metod statystycznych, dzięki którym można analizować częściową koherencję pola promieniowania.

### 4.1 Pole o ustalonym natężeniu

Istnieją różne sposoby detekcji promieniowania elektromagnetycznego (światła) poprzez jego oddziaływanie z materią. Jednym z nich jest wykorzystanie zjawiska fotoelektrycznego, wyjaśnionego przez Einsteina w 1905 roku. Einstein pokazał, że proces oddziaływania pola elektromagnetycznego z materią ma charakter korpuskularny - prawa zgodne z doświadczeniem otrzymuje się przy założeniu, że istnieją cząstki (fotony), które padając na metal powodują emisję elektronów.

W dalszym ciągu rozważać będziemy proces rejestracji promieniowania przy użyciu pewnego detektora fotoelektrycznego. Proces ten jest procesem statystycznym i istnieje określone prawdopodobieństwo  $dp(t)$ , że detektor dokona rejestracji w interwale czasowym  $(t, t + dt)$ . Zgodnie z intuicją, prawdopodobieństwo to wyrażać się będzie jako

$$dp(t) = \alpha I(t) dt = \alpha \bar{V}(t), V(t) dt \quad (4.1)$$

gdzie  $I(t)$  jest natężeniem promieniowania padającego na licznik, a parametr  $\alpha$  charakteryzuje czułość przyrządu i jest zależny od jego konstrukcji, np. od wielkości powierzchni detektora. Wzór (4.1) przepisać oczywiście można w równoważnej postaci

$$\frac{dp}{dt} = \alpha I(t). \quad (4.2)$$

Założmy początkowo, że natężenie  $I(t)$  nie podlega statystycznym fluktuacjom. Zakładamy natomiast i jest to założenie natury fizycznej, że prawdopodobieństwa zliczeń w różnych przedziałach czasowych są statystycznie niezależne. W zasadzie nie interesuje nas całkowanie równania (4.2), natomiast interesuje nas problem ilości zliczeń w przedziale czasu równym  $T$  - od chwili  $t$  do  $t + T$ .

Oczywiście padające promieniowanie ma charakter ciągły, natomiast wynik jest wielkością nieciągłą -  $n$ -krotnym zadziałaniem licznika detektora w przedziale czasu  $T$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Prawdopodobieństwo  $n$ -krotnego zadziałania licznika w przedziale czasu  $t, t + T$  będziemy oznaczali symbolem  $P_O(n, T + t, t)$ , przy czym mała litera "o" oznacza tu, że  $I(t)$  nie podlega wahaniom statystycznym.

Ponieważ  $1 - dp(t')$  jest prawdopodobieństwem tego, że w przedziale  $dt'$  licznik niendokonał żadnej rejestracji, więc całkowite prawdopodobieństwo tego, że licznik nie dokona rejestracji w przedziale  $(t, t + T)$  jest zgodne z wyżej określoną niezależnością zliczeń w różnych przedziałach czasowych dane przez symboliczny iloczyn

$$" \prod_t^{t+T} (1 - dp(t')) " \Rightarrow \exp \left[ - \int_t^{t+T} dp(t') \right], \quad (4.3)$$

gdyż dla małych  $x$  mamy  $\exp(-x) \cong 1 - x$ . Wobec powyższego prawdopodobieństwo braku rejestracji w wybranym przedziale czasu opisane jest wzorem

$$P_O(0, T + t, t) = \exp \left[ -\alpha \int_t^{t+T} I(t') dt' \right] \quad (4.4)$$

przy czym istotne jest założenie, że natężenie promieniowania nie podlega fluktuacjom. Analogicznie obliczamy prawdopodobieństwo  $P_O(n, T + t, t)$  dokonania przez licznik jednej rejestracji w przedziale czasu  $(t, T + t)$ ; ponieważ

$$" \sum_{t''} dp(t'') \prod_t^{t+T} [1 - dp(t')] " \Rightarrow \int_t^{t+T} dp(t'') \exp \left[ - \int_t^{t+T} dp(t') \right] \quad (4.5)$$

zatem możemy napisać

$$P_O(1, T + t, t) = \alpha \int_t^{t+T} I(t'') dt'' \exp \left[ -\alpha \int_t^{t+T} I(t') dt' \right]. \quad (4.6)$$

Podobne postępowanie prowadzi do ogólnego wzoru na prawdopodobieństwo  $P_O(n, T + t, t)$   $n$  zliczeń w przedziale czasu  $(t, t + T)$ , gdy funkcja natężenia  $I = I(t)$  nie podlega wahaniom statystycznym,

$$P_O(n, T + t, t) = \frac{1}{n!} \left( \alpha \int_t^{t+T} I(t'') dt'' \right)^n \exp \left[ -\alpha \int_t^{t+T} I(t') dt' \right]. \quad (4.7)$$

Wprowadzając oznaczenie

$$\mu := \alpha \int_t^{t+T} I(t') dt' \quad (4.8)$$

przepiszemy wzór (4.7) w postaci

$$P_O(n, T + t, t) \equiv P_O(n, \mu) = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu}. \quad (4.9)$$

Widać, że prawdopodobieństwo  $n$  zliczeń w przedziale czasu  $t, t + T$  opisane jest **rozkładem Poissona**, którego własności podane były wcześniej (p. 2.6).

## 4.2 Promieniowanie o stochastycznym natężeniu

W Rozdziale 3 poświęconym częściowej koherencji światła stwierdziliśmy, że pole  $V(t)$ , a zatem i natężenie  $I(t)$ , mają charakter stochastyczny. Fakt ten należy uwzględnić w rozkładzie zliczeń  $P_O(n, T + t, t)$ . Łatwo zauważyć, że natężenie  $I(t)$  wchodzi do rozkładu  $P_O(n, T + t, t)$  jedynie w postaci całki  $\int_t^{t+T} I(t') dt'$ . Wobec tego kładąc

$$U = \int_t^{t+T} I(t') dt' \quad (4.10)$$

można uwzględnić stochastyczną naturę  $I(t)$  poprzez wprowadzenie odpowiedniego rozkładu  $p(U)$ . Takie postępowanie zastosowane po raz pierwszy przez L. Mandela<sup>1</sup> prowadzi do następującego rozkładu zliczeń

$$P(n, T + t, t) = \int_0^\infty \frac{(\alpha U)^n}{n!} e^{-\alpha U} p(U) dU. \quad (4.11)$$

Wprowadzamy pojęcie **funkcji tworzącej** dla rozkładu (4.11)

$$\begin{aligned} Q(\lambda, T + t, t) &:= \sum_{n=0}^\infty (1 - \lambda)^n P(n, T + t, t) \\ &= \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{[(1 - \lambda)U\alpha]^n}{n!} e^{-\alpha U} p(U) dU \\ &= \int_0^\infty \exp(-\lambda \alpha U) p(U) dU, \end{aligned} \quad (4.12)$$

gdzie  $\lambda \in R^1$ . Widać, że funkcja  $Q(\lambda, T + t, t)$  jest transformatą Laplace'a rozkładu  $p(U)$ .

Z porównania dwóch ostatnich wzorów otrzymujemy następujący związek

$$P(n, T + t, t) = \frac{1}{n!} (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} Q(\lambda, T + t, t) |_{\lambda=1}. \quad (4.13)$$

Funkcja tworząca  $Q(\lambda, T + t, t)$  pozwala w prosty sposób znaleźć **momenty iloczynowe**, tzn. wielkości postaci  $\langle n(n-1) \dots (n-k) \rangle$ . Mamy bowiem

$$\begin{aligned} \langle n(n-1) \dots (n-k) \rangle &= \sum_{n=0}^\infty n(n-1) \dots (n-k) P(n, T + t, t) \\ &= (-1)^{k+1} \frac{\partial^{k+1}}{\partial \lambda^{k+1}} Q(\lambda, T + t, t) |_{\lambda=0}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Funkcja charakterystyczna dla rozkładu (4.11) ma postać

$$C(s, T + t, t) := \sum_{n=0}^\infty e^{i s n} P(n, T + t, t). \quad (4.15)$$

Znając funkcję charakterystyczną danego rozkładu znaleźć można sam rozkład

$$P(n, T + t, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-i s n} C(s, T + t, t) ds \quad (4.16)$$

---

<sup>1</sup>L. Mandel, Progr. in Optics, **2** (1963), Amsterdam.

oraz momenty

$$\langle n^k \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} n^k P(n, T+t, t) = \left( -i \frac{\partial}{\partial s} \right)^k C(s, T+t, t)|_{s=0}. \quad (4.17)$$

Założmy teraz, że długość przedziału czasowego  $T$  jest tak mała, że natężenie  $I(t)$  możemy w przedziale  $(t, t+T)$  uznać za stałe, tzn.

$$I(t) \cong I = \text{const.} \quad (4.18)$$

Zakładając przybliżoną stałość  $I(t)$  otrzymujemy

$$U = \int_t^{t+T} I(t') dt' = I T. \quad (4.19)$$

Pokazano, że założenie (4.18) dla źródeł termicznych ma sens dla  $T \leq 10^{-4}\text{s}$ . W tym przypadku rozkład dla  $U$  pokrywa się z rozkładem dla natężenia  $I$ , gdzie w większym stopniu możemy się posługiwać intuicją. Jeżeli założymy, że wartość natężenia  $I$  jest zmienną losową z rozkładem prawdopodobieństwa  $p(I)$ , wówczas rozkład prawdopodobieństwa ilości zliczeń w przedziale  $(t, t+T)$  przyjmie postać

$$P(n, T) = \int_0^{\infty} \frac{(\alpha I T)^n}{n!} e^{-\alpha I T} p(I) dI, \quad (4.20)$$

gdzie brak już zależności od  $t$ . Obliczmy pierwszy moment dla rozkładu (4.20). Mamy

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &:= \sum_{n=0}^{\infty} n P(n, T) = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(\alpha I T)^n}{n!} e^{-\alpha I T} p(I) dI \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha I T \frac{(\alpha I T)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha I T} p(I) dI = \int_0^{\infty} \alpha I T p(I) dI = \alpha T \langle I \rangle \end{aligned} \quad (4.21)$$

przy czym będziemy używali oznaczenia

$$\langle I^k \rangle = \int_0^{\infty} I^k p(I) dI. \quad (4.22)$$

Warto tu zaznaczyć, że zgodnie z (4.14) dla rozkładu (4.9) mieliśmy  $\langle n \rangle = \mu = \alpha U$  i kładąc  $U = IT$  otrzymalibyśmy równość  $\langle n \rangle = \alpha I T$ . Podobnie możemy obliczyć drugi moment

$$\begin{aligned} \langle n^2 \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P(n, T) = \int_0^{\infty} [\alpha^2 T^2 I^2 + \alpha I T] p(I) dI \\ &= \alpha^2 T^2 \langle I^2 \rangle + \alpha T \langle I \rangle, \end{aligned} \quad (4.23)$$

oraz wariancję (dla rozkładu (4.20))

$$\sigma^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \alpha T \langle I \rangle + \alpha^2 T^2 [\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2]. \quad (4.24)$$

Wprowadzając naturalne oznaczenie  $\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2 = \sigma_I^2$ , przepisemy wzór (4.24) w postaci

$$\sigma^2 = \alpha T \langle I \rangle + \alpha^2 T^2 \sigma_I^2 = \langle n \rangle + \alpha^2 T^2 \sigma_I^2. \quad (4.25)$$

Zatem dla rozkładu (4.20) zachodzi nierówność  $\sigma^2 \geq \langle n \rangle$ , chyba że rozkład prawdopodobieństwa  $p(I)$  jest funkcją Diraca  $\delta(I - I_0)$ .

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy  $p(I)$  jest **rozkładem termicznym**, tzn. ma postać

$$p(I) = I_0^{-1} \exp(-I/I_0). \quad (4.26)$$

Widać, że rozkład termiczny to nic innego jak dyskutowany wcześniej rozkład wykładniczy z podrozdz. 2.5. Jak pamiętamy,  $k$ -ty moment dla tego rozkładu dany jest wzorem

$$\langle I^k \rangle = I_0^{-1} \int_0^\infty I^k \exp(-I/I_0) dI = k! I_0^k. \quad (4.27)$$

Ponieważ w tym przypadku  $\langle n \rangle = \alpha T \langle I \rangle = \alpha T I_0$ , więc na wariancję  $\sigma^2$  (p. (4.25)) otrzymamy wyrażenie

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \alpha T I_0 + \alpha^2 T^2 (2I_0^2 - I_0^2) = \langle n \rangle + \langle n \rangle^2 \\ &= \langle n \rangle (1 + \langle n \rangle), \end{aligned} \quad (4.28)$$

które jest większe od wariancji rozkładu Poissona równej  $\langle n \rangle$ .

Dla rozkładu termicznego funkcja tworząca zgodnie z (4.15) i (2.64) ma postać

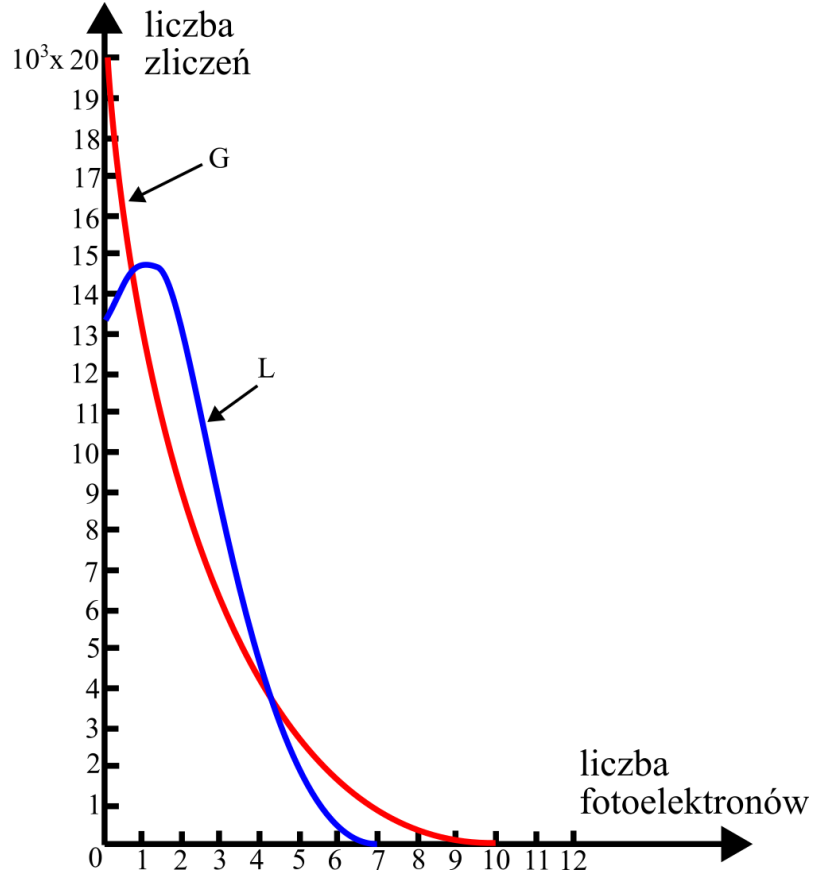
$$Q(\lambda, T) = I_0^{-1} \int_0^\infty \exp(-\lambda \alpha I T - I/I_0) dI = (1 + \lambda \langle n \rangle)^{-1}. \quad (4.29)$$

Ostatecznie sam rozkład prawdopodobieństwa  $n$  zliczeń w przedziale czasu o długości  $T$  dane jest wzorem (dla termicznego rozkładu  $p(I)$ )

$$\begin{aligned} P(n, T) &= \int_0^\infty \frac{(\alpha I T)^n}{n!} \exp(-\alpha I T) p(I) dI \\ &= \frac{(\alpha T)^n}{I_0 n!} \int_0^\infty I^n \exp \left[ -I \left( \alpha T + \frac{1}{I_0} \right) \right] dI \\ &= \frac{(\alpha T)^n}{I_0 n!} \left( \alpha T + \frac{1}{I_0} \right)^{-(n+1)} \int_0^\infty x^n E^{-x} dx \\ &= \frac{(\alpha T)^n}{I_0} \left( \alpha T + \frac{1}{I_0} \right)^{-(n+1)} = (1 + \alpha T I_0)^{-1} \left( 1 + \frac{1}{\alpha T I_0} \right)^{-n} \\ &= (1 + \langle n \rangle)^{-1} (1 + \langle n \rangle^{-1})^{-n}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

dzięki równości  $\langle n \rangle = \alpha T I_0$ . Wprowadzając dla uproszczenia oznaczenie  $\langle n \rangle = \mu$ , przepisujemy rozkład (4.30) w postaci

$$P(n, T) = \frac{1}{1 + \mu} \left( \frac{\mu + 1}{\mu} \right)^{-n} = \frac{\mu^n}{(\mu + 1)^{n+1}}. \quad (4.31)$$



Rysunek 4.1: Dane doświadczalne F.T. Arecchi'ego dotyczące ilości zliczeń

Jest to więc rozkład geometryczny omawiany w podrozdz. 2.3. Ze wzoru (4.31) wynika

$$P(0, T) = \frac{1}{\mu + 1} \leq 1, \quad (4.32)$$

$$P(1, T) = \frac{\mu}{(\mu + 1)^2} = \frac{\mu}{\mu + 1} P(0, T) \leq P(0, T), \quad (4.33)$$

itd. Ponieważ

$$\frac{P(0, T)}{P(1, T)} = \frac{1}{\mu + 1} \frac{(\mu + 1)^2}{\mu} = 1 + \frac{1}{\mu}, \quad (4.34)$$

zatem

$$\mu = \left[ \frac{P(0, T)}{P(1, T)} - 1 \right]^{-1}. \quad (4.35)$$

Dane doświadczalne otrzymane przez F.T. Arecchi<sup>2</sup> dotyczące ilości zliczeń w stosunku do ilości fotoelektronów dla źródła termicznego oraz dla promieniowania laserowego są zgodne z powyższymi wynikami, p. Rys. 4.1.

<sup>2</sup>F.T. Arecchi, Phys. Rev. Letters 15, 912 (1965).

### 4.3 Określanie rozkładu natężenia na podstawie rozkładu

$$P(n, T + t, t)$$

Naturalnym problemem, jaki pojawia się w zagadnieniach przez nas analizowanych, jest ustalenie rozkładu  $p(U)$  wprowadzonych w podrozdz. 4.2, gdy znany jest rozkład  $P(n, T + t, t)$  (rozkład  $P(n, T + t, t)$  ustalić możemy poprzez pomiary). Pokażemy obecnie, że całkowita znajomość rozkładu  $P(n, T + t, t)$  (tzn. dla wszystkich  $n$ ) pozwala jednoznacznie określić  $p(U)$ .

Funkcję charakterystyczną  $C(s)$  dla rozkładu  $p(U)$  określamy, jak zwykle, jako transformatę Fouriera rozkładu  $p(U)$

$$C(s) := \int_0^{\infty} e^{isU} p(U) dU. \quad (4.36)$$

Funkcję  $C(s)$  przedstawić można jako graniczną wartość funkcji zmiennej zespolonej  $C(s + iv)$

$$C(s + iv) := \int_0^{\infty} e^{isU - vU} p(u) dU, \quad (4.37)$$

będącą funkcją analityczną w całej górnej półpłaszczyźnie, tzn. dla  $v > 0$ ,  $\lim_{v \rightarrow +0} C(s + iv) = C(s)$ .

Funkcja ta dla  $\lambda \in R^1$  i  $0 \leq \lambda \leq 1$  ma postać

$$\begin{aligned} C(i\lambda\alpha) &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda\alpha U} p(U) dU = \int_0^{\infty} e^{(1-\lambda)\alpha U - \alpha U} p(U) dU \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1-\lambda)^n \int_0^{\infty} \frac{(\alpha U)^n}{n!} e^{-\alpha U} p(U) dU \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1-\lambda)^n P(n, T + t, t) = Q(\lambda, T + t, t). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Dzięki własnościom funkcji analitycznych informacja o funkcji  $C(s + iv)$  zawarta w (4.38) pozwala jednocześnie określić tę funkcję na całej górnej półpłaszczyźnie. Wobec powyższego funkcja charakterystyczna, a poprzez nią rozkład  $p(U)$ , jest jednoznacznie określony przez rozkład  $P(n, T + t, t)$ .

Funkcję rozkładu  $p(U)$  wyrazić można poprzez  $P(n, T + t, t)$  jeszcze w innej formie. Wprowadzając oznaczenie

$$x := \alpha U, \quad \tilde{p}(x) := \frac{1}{\alpha} p(U)$$

przepisać można  $P(n, T + t, t)$  w postaci

$$P(n, T + t, t) = \int_0^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tilde{p}(x) dx. \quad (4.39)$$

Użyjemy teraz rozwinięcia na wielomiany Laguerre’a<sup>3</sup>  $L_p(x), p = 0, 1, \dots$ , zdefiniowane jako

$$L_p(x) = \frac{1}{p!} e^x \frac{d^p}{dx^p} x^p e^{-x} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{(-x)^k}{k!}. \quad (4.40)$$

Oto kilka pierwszych wyrażeń na  $L_p(x)$  ( $p=0.1.2.3$ ):

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1, \\ L_1(x) &= 1 - x, \\ L_2(x) &= 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2, \\ L_3(x) &= 1 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (4.41)$$

Wielomiany Laguerre’a spełniają relację ortogonalności

$$\int_0^\infty L_p(x) L_q(x) e^{-x} dx = \delta_{pq}; \quad (4.42)$$

przez zamianę zmiennych ostatni wzór przedstawić można również w postaci przydatnej dla dalszych rozważań:

$$2 \int_0^\infty L_p(2x) L_q(2x) e^{-2x} dx = \delta_{pq}; \quad (4.43)$$

Wielomiany Laguerre’a  $L_p(x)$  są rozwiązaniami równania różniczkowego

$$x \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + (1-x) \frac{du(x)}{dx} + p u(x) = 0. \quad (4.44)$$

Jest to szczególny przypadek konfluentnego równania hipergeometrycznego, toteż wielomiany  $L_p(x)$  można przedstawić poprzez konfluentną funkcję hipergeometryczną

$$L_p(x) = \frac{1}{n!} {}_1F_1(-p, 1; x), \quad (4.45)$$

gdzie

$${}_1F_1(\alpha, \gamma; x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} \frac{x^n}{n!}. \quad (4.46)$$

Funkcja tworząca dla wielomianów Laguerre’a ma postać

$$\frac{\exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right)}{1-t} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} L_p(x) t^p, \quad (4.47)$$

gdzie  $|t| < 1$ .

---

<sup>3</sup>E. Laguerre (1834-1885) - 1879. Wielomiany te znane były wcześniej przez P.A. Czebyszewa (1821-1894) - 1859, w związku z czym nazywa się je również wielomianami Czebyszewa-Laguerre’a (nie mylić z wielomianami Czebyszewa  $T_n(x)$ ,  $U_n(x)$  określonymi na przedziale  $(-1, +1)$  i ortogonalnymi z wagą  $w = (1-x)^{-1/2}$ ). Wielomiany Laguerre’a nazywa się również wielomianami Kummera, Sanina lub Whittakera.

Niech ciąg liczb  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$  będzie określony wzorem

$$\begin{aligned}\lambda_n &:= 2 \int_0^\infty L_n(2x) \tilde{p}(x) e^{-x} dx \\ &= 2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-2)^k \int_0^\infty \frac{x^k}{k!} p(x) e^{-x} dx \\ &= 2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-2)^k P(k, T+t, t).\end{aligned}\tag{4.48}$$

Funkcję  $\tilde{p}(x)$  można teraz przedstawić w postaci

$$\tilde{p}(x) = \sum_{k=0}^\infty \lambda_k L_k(2x) e^{-x},\tag{4.49}$$

gdyż, podstawiając (4.49) do (4.48) i wykorzystując warunek ortogonalności otrzymujemy

$$\begin{aligned}\lambda_m &= 2 \int_0^\infty L_m(2x) \sum_{n=0}^\infty \lambda_n L_n(2x) e^{-x} dx \\ &= 2 \sum_{n=0}^\infty \lambda_n \int_0^\infty L_m(2x) L_n(2x) e^{-2x} dx \\ &= \sum_{n=0}^\infty \lambda_n \delta_{mn} = \lambda_m.\end{aligned}\tag{4.50}$$

Ponieważ  $\tilde{p}(x) = (1/\alpha)p(U)$  i  $x = \alpha Y$ , więc możemy napisać

$$p(U) = \alpha \sum_{m=0}^\infty \lambda_m L_m(2\alpha U) e^{-\alpha U},\tag{4.51}$$

przy czym współczynniki  $\lambda_m$  określone są przez (4.48).

Wystarczającym warunkiem dla zbieżności szeregu (4.51) dla każdej wartości  $U$  jest zbieżność szeregu  $\sum_{m=0}^\infty |\lambda_m|$ , ponieważ dla dodatnich argumentów  $\alpha U$  zachodzi nierówność

$$|L_m(2\alpha U)| e^{-\alpha U} \leq 1.\tag{4.52}$$

Gdy szereg  $\sum_{m=0}^\infty |\lambda_m|$  jest bezwzględnie zbieżny, funkcja  $p(U)$  dana przez szereg (4.51) jest ciągła.

Dla funkcji  $p(U)$  używa się czasami prostokątnego rozkładu

$$p(U) = \begin{cases} U_0^{-1} & \text{dla } 0 \leq U \leq U_0 \\ 0 & \text{dla } U > U_0. \end{cases}$$

W punkcie  $U_0$ , gdzie funkcja  $p(U)$  jest nieciągła, szereg (4.51) może nie być dobrze określony. Wtedy wprowadzić należy bardziej ogólną interpretację wyrażenia (4.51), rozważając zbieżność "w średniej" (ang. "in the mean"). W szczególności jeżeli wprowadzimy

$$p_M(U) := \alpha \sum_{m=0}^M \lambda_m L_m(2\alpha U) e^{-\alpha U}\tag{4.53}$$

( $M$ -sumę cząstkową), wówczas (4.51) przedstawia rozkład  $p(U)$  w tym sensie, że

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^\infty |p(U) - p_M(U)| dU = 0. \quad (4.54)$$

Jeżeli przez  $\mathcal{L}^1$  oznaczymy przestrzeń funkcji bezwzględnie całkowalnych, w których norma jest określona wzorem  $\|f\| := \int_\Omega |f| dx$ ,  $x \in \Omega$ , wówczas zbieżność ciągu funkcyjnego  $p_M(U)$  jest po prostu zbieżnością według normy w  $\mathcal{L}^1$ . Dla funkcji ograniczonej  $b(U)$  ciąg przybliżonych wartości średnich

$$b_M := \int b(U) p_M(U) dU, \quad M = 1, 2, \dots \quad (4.55)$$

jest zbieżny do wartości średniej

$$b := \int b(U) p(U) dU \quad (4.56)$$

o ile  $p_M(U) \rightarrow p(U)$  według normy w  $\mathcal{L}^1$ . Na przykład ciąg przybliżonych wartości średnich dla funkcji  $\exp(isU)$  ( $|\exp(isU)| = 1$ ), jest zbieżny do funkcji charakterystycznej rozkładu  $p(U)$ , a ciąg przybliżonych wartości średnich dla funkcji  $\exp(-\lambda \alpha U)$  jest zbieżny do funkcji tworzącej rozkładu  $p(U)$ . Z kolei ciąg przybliżonych wartości średnich dla funkcji  $(n!)^{-1}(\alpha U)^n \exp(-\alpha U)$  jest zbieżny do rozkładu  $P(n, T+t, t)$ .

## 4.4 Rozkłady łączne i rozkłady dla sum składników niezależnych

Dla dwóch zmiennych stochastycznych rozważa się tzw. rozkłady łączne. Np. dla polaryzacji światła dwie składowe pola uważać można za stochastycznie niezależne. Rozważamy 2 funkcje tworzące  $Q_1(\lambda)$  i  $Q_2(\lambda)$  rozkładów  $P_1(n)$  i  $P_2(n)$ . Z definicji

$$Q_i(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-\lambda)^n P_i(n), \quad i = 1, 2, \dots, \quad \lambda \in R^1. \quad (4.57)$$

Formalnie można utworzyć iloczyn

$$Q(\lambda) = Q_1(\lambda) Q_2(\lambda) \quad (4.58)$$

przy czym, jak łatwo sprawdzić

$$Q(\lambda) = \sum_m \sum_n (1-\lambda)^{m+n} P_1(m) P_2(n) = \sum_k (1-\lambda)^k P(k) \quad (4.59)$$

gdzie

$$P(k) := \sum_{m=0}^k P_1(k-m) P_2(m). \quad (4.60)$$

Wzór (4.60) daje pewien nowy rozkład prawdopodobieństwa, gdyż

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = 1, \quad P(n) \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Widać stąd, że iloczyn funkcji tworzących dwóch rozkładów  $P_1(n)$  i  $P_2(m)$  daje nowy rozkład  $P(k)$  zmiennej  $k = m + n$ . Podobną własność ma iloczyn funkcji charakterystycznych.

Przedstawiając funkcje tworzące  $Q_i(\lambda)$  w postaci (p. (4.12))

$$Q_i(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda \alpha U_i} p_i(U_i) dU_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (4.61)$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} Q(\lambda) &= Q_1(\lambda) Q_2(\lambda) = \int_0^\infty \int_0^\infty \exp[-\lambda \alpha (U_1 + U_2)] p_1(U_1) p_2(U_2) dU_1 dU_2 \\ &= \int_0^\infty \exp(-\lambda \alpha U) p(U) dU, \end{aligned} \quad (4.62)$$

przy czym

$$p(U) = \int_0^U p_1(U - W) p_2(W) dW. \quad (4.63)$$

Podobnie jak w przypadku dyskretnym (4.60) funkcja  $p(U)$  oznacza rozkład prawdopodobieństwa sumy  $U$  dwóch niezależnych zmiennych stochastycznych  $U_1$  i  $U_2$  o rozkładach odpowiednio  $p_1$  i  $p_2$ .

Założmy teraz, że długość przedziału czasowego  $(t, t + T)$  jest tak mała, że zachodzi równość

$$U_j = T I_j, \quad j = 1, 2.$$

Niech  $I_1$  i  $I_2$  przedstawiają natężenia dwóch modów o liniowo niezależnych polaryzacjach. Jeżeli mody te są niezależne i każdy z nich, tzn. natężenia każdego z nich, opisywane są rozkładem termicznym

$$p_j(I_j) = I_{0j}^{-1} \exp\left(-\frac{I}{I_{0j}}\right) \quad (4.64)$$

gdzie  $I_{0j} = \langle I_j \rangle$ , wówczas dla rozkładu sumarycznego natężenia otrzymujemy na podstawie (4.58) funkcję tworzącą

$$Q(\lambda, T) = Q_1(\lambda, T) Q_2(\lambda, T), \quad (4.65)$$

przy czym poszczególne  $Q_j$ ,  $j = 1, 2$ , dane są wzorem

$$\begin{aligned} Q_j(\lambda, T) &= \frac{1}{1 + \lambda \langle n_j \rangle}, \\ \langle n_j \rangle &= \alpha T \langle I_j \rangle = \alpha T I_{0j}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Podstawiając (4.66) do (4.65) otrzymujemy

$$Q(\lambda, T) = \frac{1}{(1 + \lambda \langle n_1 \rangle)(1 + \lambda \langle n_2 \rangle)}. \quad (4.67)$$

Ważnym parametrem jest **stopień polaryzacji**  $\mathcal{P}$  zdefiniowany wzorem

$$\mathcal{P} := \left| \frac{\langle n_1 \rangle - \langle n_2 \rangle}{\langle n_1 \rangle + \langle n_2 \rangle} \right| = \left| \frac{I_{01} - I_{02}}{I_{01} + I_{02}} \right|. \quad (4.68)$$

Bez uszczerbku dla ogólności założyć możemy, że  $I_{01} \gg I_{02}$ . Założenie to prowadzi do następujących związków:

$$\begin{aligned} I_{01} &= \frac{1}{2}(1 + \mathcal{P})I_0, & I_{02} &= \frac{1}{2}(1 - \mathcal{P})I_0, \\ \langle n_1 \rangle &= \frac{1}{2}(1 + \mathcal{P})\langle n \rangle, & \langle n_2 \rangle &= \frac{1}{2}(1 - \mathcal{P})\langle n \rangle, \end{aligned} \quad (4.69)$$

gdzie

$$I_0 = I_{01} + I_{02}, \quad \langle n \rangle = \langle n_1 \rangle + \langle n_2 \rangle = TI_0. \quad (4.70)$$

Uwzględniając powyższe związki przepisujemy (4.67) w postaci:

$$\begin{aligned} Q(\lambda, T) &= \frac{1}{\langle n_1 \rangle - \langle n_2 \rangle} \left[ \frac{\langle n_1 \rangle}{1 + \lambda \langle n_1 \rangle} - \frac{\langle n_2 \rangle}{1 + \lambda \langle n_2 \rangle} \right] \\ &= \frac{1}{\mathcal{P}\langle n \rangle} \left[ \frac{\langle n_1 \rangle}{1 + \lambda \langle n_1 \rangle} - \frac{\langle n_2 \rangle}{1 + \lambda \langle n_2 \rangle} \right]. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Wiadomo (p.(4.13)), że między rozkładem  $P(n)$  a jego funkcją tworzącą zachodzi związek

$$P(n, T) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} Q(\lambda, T) \Big|_{\lambda=1}.$$

Stąd dla funkcji tworzącej określonej wzorem (4.71) otrzymujemy

$$\begin{aligned} P(n, T) &= \frac{1}{\mathcal{P}\langle n \rangle} \left[ \frac{\langle n_1 \rangle^{n+1}}{1 + \lambda \langle n_1 \rangle^{n+1}} - \frac{\langle n_2 \rangle^{n+1}}{1 + \lambda \langle n_2 \rangle^{n+1}} \right] \\ &= \frac{1}{\mathcal{P}\langle n \rangle} \left\{ \left[ 1 + \frac{2}{(1 + \mathcal{P})\langle n \rangle} \right]^{-(n+1)} - \left[ 1 + \frac{2}{(1 - \mathcal{P})\langle n \rangle} \right]^{-(n+1)} \right\}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Powyższy wynik jest poszukiwanym przez nas rozkładem łącznym.

Rozkład termiczny opisany wzorem (4.26) prowadzi do rozkładu łącznego postaci

$$p(I) = \frac{1}{\mathcal{P}I_0} \left\{ \exp \left[ -\frac{2I}{(1 + \mathcal{P})I_0} \right] - \exp \left[ -\frac{2I}{(1 - \mathcal{P})I_0} \right] \right\}. \quad (4.73)$$

Wiadomo, że dla rozkładu termicznego

$$\sigma_j^2 = \langle n_j \rangle (1 + \langle n_j \rangle) \quad (4.74)$$

a stąd

$$\langle n_j^2 \rangle = \sigma_j^2 + \langle n_j \rangle^2 = \langle n_j \rangle (1 + 2\langle n_j \rangle). \quad (4.75)$$

Zatem dla rozkładu (4.72) wariancja ma postać

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \langle (n_1 + n_2)^2 \rangle - \langle n_1 + n_2 \rangle^2 \\ &= \langle n_1 \rangle (1 + \langle n_1 \rangle) + \langle n_2 \rangle (1 + \langle n_2 \rangle) = \langle n \rangle (1 + \varepsilon \langle n \rangle), \end{aligned} \quad (4.76)$$

przy czym skorzystaliśmy z tego, że zmienne  $n_1$  i  $n_2$  są, z założenia, stochastycznie niezależne, a  $\varepsilon$  zdefiniowane jest jako

$$\begin{aligned} \varepsilon &:= \frac{\langle n_1 \rangle^2 + \langle n_2 \rangle^2}{\langle n \rangle^2} = \frac{1}{2} \frac{(\langle n_1 \rangle + \langle n_2 \rangle)^2 + (\langle n_1 \rangle - \langle n_2 \rangle)^2}{\langle n \rangle^2} \\ &= \frac{1}{2} (1 + \mathcal{P}^2). \end{aligned} \quad (4.77)$$

Ostatecznie wariancja  $\sigma^2$  wyrazi się jako

$$\sigma^2 = \langle n \rangle \left[ 1 + \frac{1}{2}(1 + \mathcal{P}^2)\langle n \rangle \right]. \quad (4.78)$$

Przypadek  $\mathcal{P} = 1$ ,  $\varepsilon = 1$ , czyli

$$\sigma^2 = \langle n \rangle (1 + \langle n \rangle) \quad (4.79)$$

odpowiada pełnej polaryzacji, a  $\mathcal{P} = 0$ ,  $\varepsilon = 1/2$ , czyli

$$\sigma^2 = \langle n \rangle \left( 1 + \frac{1}{2}\langle n \rangle \right) \quad (4.80)$$

odpowiada światłu niespolaryzowanemu.

Poszukamy teraz rozkładu łącznego w przypadku  $N$  niezależnych modów. Niech zadane będzie  $N$  rozkładów typu termicznego

$$P_1(n_1), P_2(n_2), \dots, P_N(n_N), \quad (4.81)$$

przy czym

$$P_i(n_i) \equiv P_i(n_i, T) = \int_0^\infty \frac{(\alpha I_j T)^{n_i}}{n_i!} e^{-\alpha I_j T} p(I_j) dI_j, \quad (4.82)$$

oraz

$$p(I_j) = I_{0j}^{-1} \exp(-I_j/I_{0j}). \quad (4.83)$$

Jeśli zmienne  $n_1, \dots, n_N$  są stochastycznie niezależne, to rozkład łączny ma postać

$$P(n_1, \dots, n_N) = \prod_{i=1}^N P_i(n_i). \quad (4.84)$$

Obliczmy teraz rozkład prawdopodobieństwa dla sumy  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_N$ . Oznaczając ten rozkład przez  $P(n)$  możemy napisać

$$\begin{aligned} P(n) &= \sum_{n_1+n_2+\dots+n_N=n} P(n_1, \dots, n_N) \\ &= \sum_{n_1+n_2+\dots+n_N=n} P_1(n_1)P_2(n_2)\dots P_N(n_N). \end{aligned} \quad (4.85)$$

Funkcja tworząca dla rozkładu (4.85) ma postać

$$\begin{aligned} Q(\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} (1-\lambda)^n P(n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1+n_2+\dots+n_N=n} (1-\lambda)^n P_1(n_1)P_2(n_2)\dots P_N(n_N) \\ &= \sum_{n_1+n_2+\dots+n_N=0}^{\infty} (1-\lambda)^{n_1+n_2+\dots+n_N} P_1(n_1)P_2(n_2)\dots P_N(n_N) \\ &= \prod_{j=1}^N \left[ \sum_{n_j=0}^{\infty} (1-\lambda)^{n_j} P_j(n_j) \right] = \prod_{j=1}^N Q_j(\lambda), \end{aligned} \quad (4.86)$$

gdzie  $Q_j(\lambda)$  jest funkcją tworzącą dla rozkładu  $P_j(n_j)$ . Dla uproszczenia założymy, że  $\langle n_1 \rangle = \dots \langle n_N \rangle$ . Z założenia tego wynika, że

$$Q_j(\lambda) = (1 + \lambda \langle n_j \rangle)^{-1} = \left(1 + \lambda \frac{\langle n \rangle}{N}\right)^{-1} \quad (4.87)$$

gdyż

$$\langle n \rangle = \langle n_1 + n_2 + \dots + n_N \rangle \quad (4.88)$$

oraz

$$\langle n_j \rangle = \frac{\langle n \rangle}{N}. \quad (4.89)$$

Znając funkcję tworzącą wyliczyć można explicite rozkład  $P(n)$

$$\begin{aligned} P(n) &= (-1)^n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} Q(\lambda) \Big|_{\lambda=1} \\ &= \frac{1}{n!} \left(1 + \frac{\langle n \rangle}{N}\right)^{-N} \left(\frac{\langle n \rangle}{\langle n \rangle + N}\right)^n \prod_{p=1}^n (N + p - 1). \end{aligned} \quad (4.90)$$

Wariancja  $\sigma^2$  dla rozkładu  $P(n)$  jest równa:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 \\ &= \langle (n_1 + n_2 + \dots + n_N)^2 \rangle - (\langle n_1 \rangle + \dots + \langle n_N \rangle)^2 \\ &= \sum_{j=1}^N (\langle n_j^2 \rangle - \langle n_j \rangle^2) = \sum_{j=1}^N \sigma_j^2. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Korzystając z tego, że

$$\sigma_j^2 = \langle n_j \rangle (1 + \langle n_j \rangle), \quad \langle n_j \rangle = \frac{\langle n \rangle}{N} \quad (4.92)$$

zapiszemy wariancję (4.91) jako

$$\sigma^2 = \sum_{j=1}^N \langle n_j \rangle (1 + \langle n_j \rangle) = N \langle n_1 \rangle (1 + \langle n_1 \rangle) = \langle n \rangle \left(1 + \frac{\langle n \rangle}{N}\right). \quad (4.93)$$

Obliczmy teraz rozkład sumy  $U = U_1 + U_2 + \dots + U_N$   $N$  zmiennych  $U_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , z których każda podlega rozkładowi termicznemu typu

$$p_j(U_j) = \frac{\alpha}{\langle n_j \rangle} \exp\left(-\frac{\alpha U_j}{\langle n_j \rangle}\right). \quad (4.94)$$

Ponadto zakładamy, że  $\langle n_1 \rangle = \langle n_2 \rangle = \dots = \frac{\langle n \rangle}{N}$ .

Rozkład sumy  $N$  składników znajdziemy obliczając kolejno rozkłady  $p^2(U = W + Y)$ ,  $p^3(U = W + Y + Z), \dots$ , dla sum  $2, 3, \dots, N$  zmiennych niezależnych. Korzystając z (4.63) mamy bowiem

$$\begin{aligned} p^1(U) &= \frac{\alpha}{\langle n_1 \rangle} \exp\left(-\frac{\alpha U}{\langle n_1 \rangle}\right), \\ p^2(U) &= \int_0^U p^1(U - W) p^1(W) dW = U \left(\frac{\alpha}{\langle n_1 \rangle}\right)^2 \exp\left(-\frac{\alpha U}{\langle n_1 \rangle}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p^3(U) &= \int_0^U p^2(W)p^1(U-W)dW = \frac{U^2}{2!} \left( \frac{\alpha}{\langle n_1 \rangle} \right)^3 \exp\left(-\frac{\alpha U}{\langle n_1 \rangle}\right), \\
&\dots \\
p^N(U) &:= p(U) = \left( \frac{\alpha}{\langle n_1 \rangle} \right)^N \frac{U^{N-1}}{(N-1)!} \exp\left(-\frac{\alpha U}{\langle n_1 \rangle}\right) \\
&= \left( \frac{N\alpha}{\langle n \rangle} \right)^N \frac{U^{N-1}}{\Gamma(N)} \exp(-\alpha NU/\langle n \rangle),
\end{aligned} \tag{4.95}$$

przy czym wykorzystaliśmy związki

$$\langle n_1 \rangle = \frac{\langle n \rangle}{N}, \quad (N-1)! = \Gamma(N).$$

## 4.5 Podstawowe własności rozkładów gaussowskich

Ze względu na późniejsze zastosowania omówimy w niniejszym podrozdziale podstawowe własności rozkładów gaussowskich w przestrzeniach  $R^n$  ( $n$ -wymiarowych przestrzeniach euklidesowych) i w przestrzeni  $\mathcal{L}^2$  funkcji całkowalnych z kwadratem.

Niech dany będzie układ  $n$  parametrów (zmiennych losowych)  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  i niech ciąg  $x := (x_1, \dots, x_n)$  będzie elementem przestrzeni  $R^n$ . Wprowadzimy nieujemną unormowaną funkcję

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \rho_n(x) \geq 0, \tag{4.96}$$

$$\int \dots \int \rho_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int \rho_n(x) d^n x = 1, \tag{4.97}$$

(brak zaznaczonych explicite granic całkowania oznacza, że całkowanie przebiega w przedziale od minus do plus nieskończoności w przypadku całki jednowymiarowej, względnie po całej przestrzeni  $R^n$  w przypadku całki  $n$ -wymiarowej), która jest **gęstością** pewnego rozkładu prawdopodobieństwa w  $R^n$ . Gęstość prawdopodobieństwa może być w szczególności dystrybucją. Funkcja  $\rho_n$  należy do przestrzeni funkcji całkowalnych  $\mathcal{L}^1$ , gdyż

$$\int |\rho_n(x)| d^n x < \infty.$$

Funkcja charakterystyczna  $C_n(s_1, \dots, s_n)$  rozkładu prawdopodobieństwa o gęstości (4.96), czyli jej transformata Fouriera, dana jest jako

$$\begin{aligned}
C_n(s_1, \dots, s_n) &:= C_n(s) \\
&= \int \dots \int \exp\left(i \sum_{j=1}^n x_j s_j\right) \rho_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \\
&= \int e^{i(x,s)} \rho_n(x) d^n x,
\end{aligned} \tag{4.98}$$

gdzie nawias  $(x, s)$  oznacza iloczyn skalarny wektorów  $s$  oraz  $x$  należących do przestrzeni  $R^n$ .

Rozważmy makrostan

$$\begin{aligned} \Phi_{x_j, x_j x_k} = \Phi_{\mathbf{x}, \mathbf{x}^2} = & \left\{ \rho(x); \int \rho(x) d^n x = 1, \quad \langle x_j \rangle = \int x_j \rho(x) d^n x = m_j, \right. \\ & \left. \langle x_j x_k \rangle = \int x_j x_k \rho(x) d^n x = a_{jk}, \quad (j, k = 1, \dots, n) \right\}. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Ze względu na symetrię  $a_{jk} = a_{kj}$ , makrostan ten jest wyznaczony przez  $(n+1)n/2$  warunków. W związku z tym rozważać można pewien makrostan równoważny makrostanowi (4.99). W tym celu zdefiniujemy pojęcie korelacji  $K_{j\ell}$  jako

$$\begin{aligned} K_{j\ell} &= \int (x_j - m_j)(x_\ell - m_\ell) \rho_n(x) dx \\ &= a_{j\ell} - m_j m_\ell = \langle (x_j - m_j)(x_\ell - m_\ell) \rangle. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Macierz  $\mathcal{K}$ , której elementami są korelacje  $K_{j\ell}$ , ( $j, \ell = 1, \dots, n$ ) jest symetryczna i dodatnio określona, tzn.

$$\sum_{j, \ell=1}^n \eta_j \eta_\ell K_{j\ell} > 0, \quad \sum_{j=1}^n \eta_j^2 > 0, \quad (4.101)$$

co wynika z nierówności

$$\sum_{j=1}^n \eta_j \eta_\ell K_{j\ell} = \left\{ \int \sum_{j=1}^n (x_j - m_j)^2 \eta_j^2 \rho_n(x) d^n x \right\} > 0. \quad (4.102)$$

Wyznacznik macierzy  $\mathcal{K}$ , zwanej macierzą korelacyjną, jest równy

$$\begin{aligned} \text{Det } \mathcal{K} &= \prod_{p=1}^n k_p = \exp \left( \ln \prod_{p=1}^n k_p \right) = \exp \left( \sum_{p=1}^n \ln k_p \right) \\ &= \exp(\text{Tr } \ln \mathcal{K}). \end{aligned} \quad (4.103)$$

Poszukamy teraz rozkładu reprezentatywnego dla makrostanu korelacyjnego  $\Phi_{\xi^2}$

$$\begin{aligned} \Phi_{\xi^2} = & \left\{ \rho(\xi) : \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n), \quad \xi_j = x_j - m_j, \quad \rho_n(\xi) > 0, \right. \\ & \left. \int \dots \int \rho_n(\xi) d\xi_1 \dots d\xi_n = \int \rho_n(\xi) d^n \xi = 1, \quad \int \rho_n(\xi) \xi_j \xi_\ell d^n \xi = K_{j\ell} \right\}. \end{aligned} \quad (4.104)$$

Jest to makrostan równoważny do makrostanu (4.99), tzn. rozkład reprezentatywny dla makrostanu (4.104) będzie rozkładem reprezentatywnym dla makrostanu (4.99). Rozkład reprezentatywny dla makrostanu (4.104) poszukamy metodą mnożników Lagrange'a. Zgodnie z zasadą maksimum entropii, rozkład ten spełnia warunek

$$S(\rho_n^*) = \max \left\{ s(\rho_n), \quad \rho_n \in \Phi_{\xi^2} \right\} = S(\Phi_{\xi^2}), \quad (4.105)$$

gdzie

$$s(\rho_n) = - \int \dots \int \rho_n(\xi) \ln \rho_n(\xi) d^n \xi. \quad (4.106)$$

Maksymalizacja funkcjonału (4.106) przy warunku unormowania i zadanych korelacjach prowadzi do rozkładu

$$\begin{aligned}\rho_n^*(\xi) &= Z_n^{-1} \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{j,\ell=1}^n \xi_j \Lambda_{j\ell} \xi_\ell \right] \\ &= Z_n^{-1}(\Lambda) \exp \left[ \sum_{j,\ell=1}^n (x_j - m_j) \Lambda_{j\ell} (x_\ell - m_\ell) \right],\end{aligned}\quad (4.107)$$

gdzie

$$\begin{aligned}Z_n(\Lambda) &= \int \dots \int \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{j,\ell=1}^n \xi_j \Lambda_{j\ell} \xi_\ell \right] d\xi_1 \dots d\xi_n \\ &= (2\pi)^{n/2} \left( \prod_{j=1}^n \lambda_j \right)^{-1/2},\end{aligned}\quad (4.108)$$

a  $\lambda_j$  są wartościami własnymi macierzy nieoznaczonych mnożników Lagrange'a  $\Lambda$ ,

$$\text{Det } \Lambda = \prod_{j=1}^n \lambda_j.$$

Znajdziemy teraz związek między wielkościami  $\Lambda_{j\ell}$  a elementami macierzy korelacyjnej  $\mathcal{K}$ . Zauważmy, że formę kwadratową, występującą w wykładniku wzoru (4.107), zapisać można, po sprowadzeniu do postaci diagonalnej, jako

$$\sum_{j,\ell=1}^n \Lambda_{j\ell} \xi_j \xi_\ell = \sum_{p=1}^n \lambda_p \chi_p^2. \quad (4.109)$$

Wartości średnie kwadratów zmiennych  $\chi$  odpowiadać będą odwrotnościom wartości własnych  $k_p$  macierzy  $\mathcal{K}$ ; mamy bowiem

$$\rho_n(\chi) = Z_n^{-1}(\Lambda) \prod_{p=1}^n \exp \left( -\frac{1}{2} \lambda_p \chi_p^2 \right), \quad (4.110)$$

a więc, po uwzględnieniu (4.108)

$$\langle \chi_p^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_p}} \int \chi_p^2 \exp \left( -\frac{1}{2} \lambda_p \chi_p^2 \right) d\chi_p = \frac{1}{\lambda_p} = k_p. \quad (4.111)$$

Na podstawie powyższego rozumowania otrzymujemy ostatecznie, że

$$\Lambda_{j\ell} = K_{j\ell}^{-1}, \quad (4.112)$$

gdzie przez  $K_{j\ell}^{-1}$  oznaczyliśmy elementy **macierzy odwrotnej** do macierzy  $\mathcal{K}$ . Ostatecznie więc rozkład (4.107), reprezentatywny dla makrostanu (4.99), ma postać

$$\begin{aligned}\rho_n^*(x_1, \dots, x_n) &= (2\pi)^{-n/2} [\exp(\text{Tr } \ln \mathcal{K})]^{1/2} \\ &\times \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{j,\ell=1}^n (x_j - m_j) K_{j\ell}^{-1} (x_\ell - m_\ell) \right].\end{aligned}\quad (4.113)$$

Jest to rozkład (a raczej gęstość rozkładu) gaussowski w przestrzeni  $R^n$ . Funkcja charakterystyczna rozkładu (4.113), zgodnie z określeniem (4.98), jest równa

$$C_n(\mathbf{s}, \mathcal{K}) = \exp \left( i \sum_{j=1}^n s_j m_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n s_j K_{jk} s_k \right). \quad (4.114)$$

Przejdziemy obecnie do zbadania rozkładu gaussowskiego w przestrzeni funkcji całkowalnych z kwadratem, odgrywającego ważną rolę w teorii procesów stochastycznych. Przy przejściu tym pamiętać należy, że procedura otrzymywania rozkładu prawdopodobieństwa poprzez maksymalizację entropii dla danego makrostanu  $\Phi$ , jest stosowalna pod warunkiem  $S(\Phi) < \infty$ . Tymczasem entropia rozkładu (4.113), zdefiniowana wzorem (4.106), jest równa

$$S(\Phi_{\xi^2}) = n \ln \sqrt{2\pi e} - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \mathcal{K}, \quad (4.115)$$

a więc w przestrzeni funkcji, gdy  $n \rightarrow \infty$ , staje się nieskończona. "Źródłem nieskończoności" w wyrażeniu (4.115) jest wyraz  $n \ln \sqrt{2\pi e}$ , trzeba więc tak zdefiniować entropię, by wyraz ten zniknął. W tym celu przyjmijmy następującą definicję

$$\begin{aligned} S(\rho, c_n) &= - \int d^n x \rho_n(x) \ln \frac{\rho}{c_n} \\ &= - \int d^n x \rho_n(x) \ln \rho_n(x) + \ln c_n. \end{aligned} \quad (4.116)$$

Po podstawieniu

$$c_n = (2\pi e)^{-n/2} \quad (4.117)$$

wzór (4.116) przyjmie postać

$$S(\rho, c_n) = - \int \dots \int c(dx_1 \dots dx_n) \frac{\rho_n(x)}{c_n} \ln \frac{\rho_n(x)}{c_n}, \quad (4.118)$$

gdzie

$$c(dx_1 \dots dx_n) = c_n dx_1 \dots dx_n = \frac{dx_1}{\sqrt{2\pi e}} \dots \frac{dx_n}{\sqrt{2\pi e}}.$$

Wzór (4.118) ma postać analogiczną do (4.106), ale dla rozkładu

$$\sigma^*(x_1, \dots, x_n) = \frac{\rho^*(x_1, \dots, x_n)}{c_n}$$

oraz względem miary  $c(dx_1 \dots dx_n)$ .

Entropia (4.118) dla rozkładu gaussowskiego (4.113) jest równa

$$S(\rho, c_n) = -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \mathcal{K}. \quad (4.119)$$

Mając na uwadze powyższe zastrzeżenia, przechodzimy do sformułowania funkcjonalnego. Niech dana będzie przestrzeń

$$\mathcal{L}_T^2 := \left\{ x(t), \int_0^T x^2(t) dt < \infty \right\}.$$

Na przestrzeni  $\mathcal{L}_T^2$  określić można nieujemny funkcjonal  $\sigma[x]$ , który rozumiemy jako gęstość prawdopodobieństwa **względem miary**

$$D(x) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{dx_j}{\sqrt{2\pi e}}. \quad (4.120)$$

Prawdopodobieństwo w  $\mathcal{L}_T^2$  określone jest następująco

$$P(A) = \int_A \sigma[x] D(x), \quad A \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}_T^2}, \quad (4.121)$$

gdzie  $\mathcal{A}_{\mathcal{L}_T^2}$  jest sigma-algebrą podzbiorów borelowskich przestrzeni  $\mathcal{L}_T^2$ . Niech  $u_1(t), \dots, u_N(t)$  będzie ciągiem funkcji ortonormalnych w  $\mathcal{L}_T^2$ . Definiujemy **całkę funkcjonalną** wzorem

$$\int_{\mathcal{L}_T^2} F[x] D(x) := \lim_{N \rightarrow \infty} F(x_1, \dots, x_N) \frac{dx_1}{\sqrt{2\pi e}} \dots \frac{dx_N}{\sqrt{2\pi e}}, \quad (4.122)$$

o ile granica ta istnieje, przy czym

$$x_N(t) = \sum_{j=1}^N x_j u_j(t).$$

Poszukamy rozkładu  $\sigma^*[x]$  reprezentatywnego dla makrostanu

$$\Phi_{m,K} = \left\{ \sigma[x]; \int_{\mathcal{L}_T^2} \sigma[x] D(x) = 1, \int_{\mathcal{L}_T^2} \sigma[x] x(t) D(x) = m(t), \right. \\ \left. \int_{\mathcal{L}_T^2} \sigma[x] D(x) [x(t) - m(t)][x(t') - m(t')] = K(t, t') \right\}, \quad (4.123)$$

będącego odpowiednikiem makrostanu (4.104) dla przypadku przestrzeni  $\mathcal{L}_T^2$ . Funkcja  $m(t)$  należy do  $\mathcal{L}_T^2$ , natomiast **funkcja korelacyjna**  $K(t, t')$  jest

1. symetryczna względem argumentów  $t$  i  $t'$ :  $K(t, t') = K(t', t)$ ,
2. dodatnio określona, tzn,

$$\forall \alpha(t), \quad \int_0^T \int_0^T \alpha(t) \alpha(t') K(t, t') dt dt' > 0, \quad \text{gdy} \\ \int_0^T \alpha^2(t) dt > 0.$$

Entropia  $S(\sigma, D)$  zdefiniowana jest wzorem

$$S(\sigma, D) := - \int_{\mathcal{L}_T^2} \sigma[x] \ln \sigma[x] D(x). \quad (4.124)$$

Rozkład reprezentatywny dla makrostanu (4.123), otrzymany metodą mnożników Lagrange’a, ma postać

$$\sigma^*[x] = Z^{-1}(\Lambda) \exp \left[ -\frac{1}{2} \int dt \int dt' \xi(t) \xi(t') \Lambda(t, t') \right] \quad (4.125)$$

gdzie

$$\xi(t) = x(t) - m(t)$$

oraz

$$\begin{aligned} Z(\Lambda) &= \int_{\mathcal{L}_T^2} \exp \left( -\frac{1}{2} \xi \Lambda \xi \right) D(\xi) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{dx_1}{\sqrt{2\pi e}} \dots \frac{dx_n}{\sqrt{2\pi e}} \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^2 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n/2} \left( \prod_{j=1}^n \lambda_j \right)^{1/2} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n/2} \left( \prod_{j=1}^n k_j \right)^{-1/2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \exp \left[ -\frac{1}{2} (\text{Tr } I_n + \text{Tr } \ln \mathcal{K}_n) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.126)$$

Symbol  $I_n$  oznacza macierz jednostkową rzędu  $n$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

a  $\mathcal{K}_n$  jest macierzą korelacji rzędu  $n$ .

Jeśli suma stanów  $Z(\Lambda)$  dana wzorem (4.126) jest skończona, wówczas rozkład reprezentatywny (4.125) przybierze postać

$$\begin{aligned} \sigma^*[x] &= \exp \left[ \frac{1}{2} (\text{Tr } I_n + \text{Tr } \ln \mathcal{K}_n) \right] \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_T \int_T dt dt' [x(t) - m(t)] K^{-1} [x(t') - m(t')] \right\}. \end{aligned} \quad (4.127)$$

Entropia tego rozkładu jest równa

$$S(\sigma^*[x]) = S(\Phi_{m,k}) = -\frac{1}{2} \text{Tr } \ln \mathcal{K}_n$$

i osiąga w tym przypadku wartość nieskończoną.

Mimo tego obliczyć można funkcję charakterystyczną

$$\begin{aligned} C(s, K) &= \exp \left\{ i \int dt s(t) m(t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_T \int_T dt dt' K(t, t') s(t) s(t') \right\}. \end{aligned} \quad (4.128)$$

Znając funkcję charakterystyczną obliczać można dowolne wartości średnie

$$\langle x(t_1) \dots x(t_n) \rangle = \frac{\delta^n}{\delta s(t_1) \dots \delta s(t_n)} C(s, K) \Big|_{s(t)=0}.$$

## 4.6 Stochastyczne pole $V(\mathbf{r}, t)$

Zawarte w poprzednich podrozdziałach równania dotyczące statystyki fotonów prowadzone były dla dowolnie wybranego, ale ustalonego punktu pola, w przedziale czasu  $(t, t + T)$ . Obecnie rozważać będziemy pole  $V(\mathbf{r}, t)$  zależne od punktu jako odpowiednią **wielkość stochastyczną**. Dla ustalonego punktu  $\mathbf{r}$  i procesu stacjonarnego (tzn. nie ma zależności od czasu  $t$ ) prawdopodobieństwo  $n$  rejestracji wyrażone jest wzorem

$$P(n, T) = \frac{1}{n!} \left\langle \left( \alpha \int_0^T \overline{V(t')} V(t') dt' \right)^n \exp \left[ -\alpha \int_0^T \overline{V(t')} V(t') dt' \right] \right\rangle \quad (4.129)$$

gdzie nawias  $\langle \rangle$  oznacza średniowanie po ensemble pól  $V$ . Wartości średnie  $\langle n \rangle$  oraz  $\langle n^2 \rangle$  dla rozkładu (4.129) mają odpowiednio postać

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n P(n, T) = \left\langle \alpha \int_0^T \overline{V(t')} V(t') dt' \right\rangle, \quad (4.130)$$

oraz

$$\begin{aligned} \langle n^2 \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P(n, T) \\ &= \left\langle \alpha^2 \int_0^T \int_0^T \overline{V(t')} V(t') \overline{V(t'')} V(t'') dt' dt'' \right\rangle + \langle n \rangle. \end{aligned} \quad (4.131)$$

Ostatnie wyrażenie ma postać funkcji korelacyjnej 4-go rzędu, więc również dyspersja pola związana jest z funkcjami korelacyjnymi 4-go rzędu. Analogicznie, dla wyższych momentów  $\langle n^k \rangle$  otrzymalibyśmy odpowiednio funkcje korelacyjne wyższych rzędów.

Funkcja tworząca dla rozkładu (4.129) ma postać

$$\begin{aligned} Q(\lambda, T) &= \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \lambda)^n P(n, T) \\ &= \left\langle \exp \left[ -\lambda \alpha \int_0^T \overline{V(t')} V(t') dt' \right] \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.132)$$

Bezpośrednie obliczenie rozkładu  $P(n, T)$  lub funkcji  $Q(\lambda, T)$  wymaga znajomości funkcji korelacyjnych pola  $V(t')$  dowolnie wysokiego rzędu.

## 4.7 Gaussowskie procesy stochastyczne

W bieżącym podrozdziale podamy pewne własności tzw. procesów stochastycznych gaussowskich.

Rozważamy układ  $n$  parametrów  $x_1, \dots, x_n$ ,  $(-\infty < x_j < +\infty, j = 1, \dots, n)$  podlegających wielowymiarowemu rozkładowi gaussowskiemu (4.113), który zapiszemy w postaci

$$\rho_n(x) = \pi^{-n/2} (\text{Det } \mathcal{K})^{1/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum (x_j - m_j) K_{j\ell}^{-1} (x_\ell - m_\ell) \right]$$

gdzie

$$\mathcal{K} = \|K_{pq}\|, \quad p, q = 1, \dots, n$$

oznacza macierz korelacji (p.(4.100)), a  $m_j$  są odpowiednimi wartościami średnimi. Sumowanie przebiega od 1 do  $n$ . Obliczona przez nas uprzednio (p. (4.114) funkcja charakterystyczna tego rozkładu ma postać

$$C_n(s, \mathcal{K}) = \exp \left( i \sum s_j m_j - \frac{1}{2} \sum s_j K_{j\ell} s_\ell \right).$$

Liczby  $\{s_j\}$  są w tym przypadku dowolne. Natomiast przy przejściu do rozkładu w przestrzeni funkcji np. całkowalnych z kwadratem, tj. dla  $n \rightarrow \infty$ , ciągi  $s_j$ ,  $j = 1, \dots$ , muszą być tak dobrane, by sumy występujące w wykładniku były zbieżne, czyli musi zachodzić

$$\sum_{j=1}^{\infty} |s_j \langle x_j \rangle| < \infty, \quad \sum_{j,k=1}^{\infty} s_j \langle \Delta x_j \Delta x_k \rangle > s_k < \infty, \quad (4.133)$$

przy czym korelacje  $K_{j\ell}$  oznaczyliśmy przez  $\langle \Delta x_j \Delta x_\ell \rangle$  ( $\Delta x_j = \xi_j = x_j - m_j$ , p. (4.104)).

Przypomnimy teraz, że procesem stochastycznym<sup>4</sup>

$$\{X_t(\omega) = X(t), t \in T\}$$

nazywamy jednoparametrową rodzinę zmiennych losowych  $X(t)$ , zależnych od parametru  $t$ , przebiegającego dowolny zbiór wartości  $T$ . W przypadku, gdy proces opisywać ma pewne własności układu podlegającego wahaniom w czasie, parametr  $t$  będziemy interpretowali jako czas.

Proces stochastyczny nazywamy **procesem Gaussa** (gaussowskim), jeśli każdy skonczenie wymiarowy rozkład zmiennych losowych procesu jest normalny (tzn. gaussowski).

Proces taki można zapisać w postaci

$$X_n(t) := \sum_{j=1}^n x_j u_j(t)$$

gdzie  $x_j$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym typu (4.113).

Funkcje  $u_j$  tworzą układ ortonormalny,

$$\int u_j(t) u_k(t) dt = \delta_{jk}.$$

Uogólnieniem na przypadek funkcjonalny nieskończenie wymiarowy będzie proces

$$X(t) := \sum_{j=1}^{\infty} x_j u_j(t). \quad (4.134)$$

---

<sup>4</sup>Teorii procesów stochastycznych poświęconych jest wiele monografii np.: M. Rosenblatt, Procesy stochastyczne, PWN, Warszawa, 1967; W. Feller, Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa, PWN, Warszawa, 1969, t. II, I. I. Gichman i A. W. Skorochod, Wstęp do teorii procesów stochastycznych, PWN, Warszawa, 1968.

Dla dowolnego ciągu  $\{s_j\}$ , ( $j = 1, \dots$ ), spełniającego warunki (4.133), zbudować można funkcję

$$s(t) = \sum_{j=1}^{\infty} s_j u_j(t). \quad (4.135)$$

Przy pomocy tych dwu wielkości, tzn. (4.134) i (4.135) skonstruujemy funkcję charakterystyczną dla rozkładu gaussowskiego w przestrzeni  $\mathcal{L}_T^2$  funkcji całkownych z kwadratem, danego w postaci (4.125)

$$\begin{aligned} C\{s(t)\} &= \left\langle \exp \left[ i \int s(t) X(t) dt \right] \right\rangle \\ &= \exp \left[ i \int s(t) \langle X(t) \rangle dt \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int dt' \int dt'' s(t') \langle \Delta X(t') \Delta X(t'') \rangle s(t'') \right]. \end{aligned} \quad (4.136)$$

Otrzymaliśmy wynik analogiczny do (4.128), przy zamianie oznaczeń

$$K(t', t'') = \langle \Delta X(t') \Delta X(t'') \rangle.$$

Warunki (4.133) mają tym razem postać

$$\begin{aligned} \int |s(t)| |X(t)| dt &< \infty, \\ \int \int s(t') \langle \Delta X(t') \Delta X(t'') \rangle s(t'') dt' dt'' &< \infty. \end{aligned} \quad (4.137)$$

Wprowadzamy pojęcie procesu stacjonarnego. Będziemy mówili, że proces

$$\{X_t(\omega) = X(t), t \in T\}$$

jest **procesem stacjonarnym** (lub ściśle stacjonarnym) jeśli dla każdej liczby naturalnej  $p$  i dla dowolnych  $t_1, \dots, t_p$  należących do  $T$  zmienne losowe

$$X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_p)$$

mają ten sam łączny rozkład prawdopodobieństwa co zmienne

$$X(t_1 + t_0), X(t_2 + t_0), \dots, X(t_p + t_0).$$

Inaczej mówiąc, struktura probabilistyczna procesu stacjonarnego jest niezmiennicza względem przesunięcia wzdłuż osi czasowej. Dla procesu stacjonarnego zachodzi więc

$$\langle X(t) \rangle = \langle X(0) \rangle = m,$$

a także

$$\langle \Delta X(t') \Delta X(t'') \rangle = \langle \Delta X(t' - t'') \Delta X(0) \rangle,$$

co przy pomocy transformaty Fouriera przepisać można w postaci

$$\langle \Delta X(t') \Delta X(t'') \rangle = \int \exp[-2\pi i \nu(t' - t'')] \tilde{\mu}(\nu) d\nu$$

gdzie

$$\tilde{\mu}(\nu) \geq 0, \quad \tilde{\mu}(-\nu) = \overline{\tilde{\mu}(\nu)}.$$

Wykorzystując tę relację i wprowadzając funkcję  $\tilde{s}(\nu)$

$$\tilde{s}(\nu) := \int \exp(2\pi i \nu t) s(t) dt \quad (4.138)$$

możemy  $C\{\tilde{s}(\nu)\}$  przedstawić wzorem

$$C\{\tilde{s}(\nu)\} = \exp \left[ i m \tilde{s}(0) - \frac{1}{2} \int \overline{\tilde{s}(\nu)} \tilde{\mu}(\nu) \tilde{s}(\nu) d\nu \right]. \quad (4.139)$$

W ten sposób otrzymaliśmy gaussowską postać rozkładu dla każdej ustalonej częstotliwości.

Warunek stacjonarności może być łatwo otrzymany ze wzoru (4.136) jeżeli zażądamy, by równość

$$C\{s(t)\} = C\{s(t + t_0)\}$$

zachodziła dla wszystkich  $t_0$  oraz dla wszystkich funkcji  $s(t)$ .

W teorii koherencji procesem stochastycznym będzie ewolucja w czasie funkcji pola  $V(t)$ . Jak pamiętamy z poprzednich rozważań, wprowadza się pojęcie sygnału analitycznego poprzez związek

$$V(t) = \frac{1}{2} \left[ V^{(r)}(t) + i V^{(i)}(t) \right]. \quad (4.140)$$

Definiując analityczną funkcję próbną  $S(t)$  jako

$$S(t) := \frac{1}{2} \left[ S^{(r)} + i S^{(i)} \right], \quad (4.141)$$

możemy napisać równość

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int S^{(r)}(t) V^{(r)}(t) dt &= \operatorname{Re} \int_0^\infty \overline{\tilde{S}^{(r)}(\nu)} \tilde{V}^{(r)}(\nu) d\nu \\ &\equiv \operatorname{Re} \int_0^\infty \overline{\tilde{S}(\nu)} \tilde{V}(\nu) d\nu = \operatorname{Re} \int \overline{S(t)} V(t) dt. \end{aligned} \quad (4.142)$$

Wykorzystaliśmy tu wyprowadzoną poprzednio własność

$$\tilde{V}^{(r)}(-\nu) = \overline{\tilde{V}^{(r)}(\nu)}.$$

Wiadomo również, że zachodzą związki

$$\begin{aligned} V^{(i)}(t) &= \frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V^{(r)}(t')}{t' - t} dt', \\ V^{(r)}(t) &= -\frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V^{(i)}(t')}{t' - t} dt', \end{aligned}$$

gdzie p.v. oznacza wartość główną całki (ang. *principal value*), (p. (3.10,3.11)). Odpowiedni funkcjonal charakterystyczny ma postać

$$\begin{aligned} C\{S(t)\} &= \left\langle \exp \left[ i \int S^{(r)}(t) V^{(r)}(t) dt \right] \right\rangle \\ &= \left\langle \exp \left[ i \int (\bar{S} V + S \bar{V}) dt \right] \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.143)$$

Zakładamy, że występująca w powyższych związkach funkcja  $S(t)$  należy do klasy  $\mathcal{S}$  funkcji szybko malejących. Jak już podawaliśmy, warunek stacjonarności jest równoważny żądaniu, by równość

$$C\{S(t + t_0)\} = C\{S(t)\} \quad (4.144)$$

zachodziła dla wszystkich  $t_0$  i wszystkich funkcji  $S(t) \in \mathcal{S}$ . Po przejściu do transformat Fouriera warunek ten przepiszemy w postaci

$$C \left\{ \tilde{S}(\nu) \exp(-2\pi i \nu t_0) \right\} = C\{\tilde{S}(\nu)\} \quad (4.145)$$

dla wszystkich  $t_0$  i wszystkich  $\tilde{S}(\nu)$ .

Weźmy pod uwagę rozkłady niezależne dla różnych częstości. Rozkład dla poszczególnych częstości jest niezależny, o ile spełniona jest równość

$$C \left\{ \tilde{S}_1(\nu) + \tilde{S}_2(\nu) \right\} = C \left\{ \tilde{S}_1(\nu) \right\} C \left\{ \tilde{S}_2(\nu) \right\} \quad (4.146)$$

dla wszystkich  $\tilde{S}_1(\nu)$  i  $\tilde{S}_2(\nu)$  takich, że

$$\tilde{S}_1(\nu) \tilde{S}_2(\nu) = 0.$$

Warunek (4.146) zapewnia stochastyczną niezależność dla każdej częstości.

Innym warunkiem, często nakładanym na zespolone pole falowe, jest nakładanie na całe pole wspólnej fazy:

$$V(t) \rightarrow e^{i\varphi} V(t), \quad \varphi = \text{const.}$$

Faza ta nie ma sensu fizycznego. Taka wspólna faza wynika z żądania, by równość

$$C \left\{ e^{-i\varphi} S(t) \right\} = C \{ S(t) \}$$

zachodziła dla każdego  $\varphi \in R^1$  i każdego  $S(t) \in \mathcal{S}$ . Warunek ten będzie spełniony, o ile

$$C\{S(t)\} = C_1 \left\{ \overline{\tilde{S}(t')} S(t'') \right\} \quad (4.147)$$

dla pewnego funkcjonału  $C_1$ .

Dla funkcji zależnych od częstości warunek ten przyjmie postać

$$C \left\{ \tilde{S}(\nu) \right\} = C_1 \left\{ \overline{\tilde{S}(\nu')} S(\nu'') \right\}. \quad (4.148)$$

Jeżeli funkcja charakterystyczna spełnia warunek

$$C\{\tilde{S}(\nu)\} = \overline{C}\left\{\overline{\tilde{S}(\nu)} \tilde{S}(\nu)\right\}, \quad (4.149)$$

wówczas jednocześnie spełnione są oba warunki - stacjonarności i stałej fazy.

Funkcjonał charakterystyczny dla zespolonego, stacjonarnego gaussowskiego procesu stochastycznego jest określony przez uogólnienie wzoru (4.136) wzorem

$$\begin{aligned} C\{S(t)\} &= \exp\left[-\int\int\overline{S}(t'')\langle V(t')\overline{V}(t'')\rangle S(t'') dt' dt''\right] \\ &= \exp\left[-\int\int\overline{S}(t')\Gamma(t'-t'')S(t'') dt' dt''\right] \\ &= \exp\left[-\int\overline{\tilde{S}}(\nu)\tilde{\Gamma}(\nu)\tilde{S}(\nu) d\nu\right]. \end{aligned} \quad (4.150)$$

Funkcjonał określony wzorem (4.150) spełnia warunki (4.144) oraz (4.147). Rozpatrzmy 2 przypadki szczególne:

1. Niech funkcja  $\tilde{\Gamma}(\nu)$  występująca we wzorze (4.150), będąca funkcją koherencji wzajemnej, ma postać

$$\tilde{\Gamma}(\nu) = \tilde{G}(\nu) + p\tilde{H}(\nu), \quad (4.151)$$

gdzie wszystkie te wielkości są dodatnie. Niech  $\tilde{G}(\nu)$  i  $\tilde{H}(\nu)$  będą ustalonymi funkcjami, a  $p$  dyskretną zmienną stochastyczną ( $p = 0, 1, 2, \dots$ ) podlegającą rozkładowi Poissona, ze średnią wartością

$$\langle p \rangle = \mu.$$

Otrzymamy wówczas funkcjonal charakterystyczny postaci

$$\begin{aligned} C\{S(t)\} &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\mu^p}{p!} \exp\left[-\mu - \int |\tilde{S}|^2 (\tilde{G} + p\tilde{H}) d\nu\right] \\ &= \exp\left\{-\int |\tilde{S}|^2 \tilde{G} d\nu - \mu \left[1 - \exp\left(-\int |\tilde{S}|^2 \tilde{H} d\nu\right)\right]\right\}. \end{aligned} \quad (4.152)$$

2. Przyjmijmy teraz, że funkcja  $\tilde{\Gamma}(\nu)$  ma postać<sup>5</sup>

$$\tilde{\Gamma}(\nu) = \tilde{G}(\nu) + \sum_{j=1}^N \tilde{K}(\nu_j) \delta(\nu - \nu_j), \quad (4.153)$$

przy czym  $\tilde{G} > 0$ ,  $\tilde{K} > 0$ , a zmienna  $\nu$  przybiera wartości z przedziału

$$|\nu| \leq \frac{F}{2}, \quad F = \text{const.}$$

Jeżeli dla  $N \rightarrow \infty$  również  $F \rightarrow \infty$ , ale w taki sposób, że

$$\frac{N}{F} := \rho < \infty,$$

wówczas funkcjonal charakterystyczny przybiera formę

$$C\{S(t)\} = \exp\left\{-\int \left[|\tilde{S}|^2 \tilde{G} + \rho \left(1 - \exp(-\tilde{K}|\tilde{S}|^2)\right)\right] d\nu\right\}. \quad (4.154)$$

---

<sup>5</sup>S.O. Rice, Bell. S.T.J. **23** (1944), 282, ibid. **25** (1945), 46.

## 4.8 Zastosowanie do teorii częściowej koherencji światła

Dla dowolnej funkcji  $S(t) \in \mathcal{S}$  (klasa funkcji szybko malejących) zachodzi równość

$$\begin{aligned} & \frac{2^4}{4!} \left\langle \left( \operatorname{Re} \int \bar{S}(t) V(t) dy \right)^4 \right\rangle \\ &= \frac{1}{2!} \left\{ \int \int \bar{S}(t') \langle V(t') \bar{V}(t'') \rangle S(t'') dt' dt'' \right\}^2, \end{aligned} \quad (4.155)$$

a stąd, porównując odpowiednie współczynniki, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \langle \bar{V}(t_1) V(t_2) \bar{V}(t_3) V(t_4) \rangle &= \langle \bar{V}(t_1) V(t_2) \rangle \langle \bar{V}(t_3) V(t_4) \rangle \\ &+ \langle \bar{V}(t_1) V(t_4) \rangle \langle \bar{V}(t_3) V(t_2) \rangle. \end{aligned} \quad (4.156)$$

W ogólności z równania (4.150) wynika, że

$$\left\langle \prod_{p=1}^n V(t_{2p-1}) V(t_{2p}) \right\rangle = \sum_P \left( \left\langle \prod_{p=1}^n V(t_{2p-1}) V(t_{2P(p)}) \right\rangle \right)$$

gdzie sumowanie przebiega po wszystkich permutacjach  $P$  liczb całkowitych  $p, p = 1, \dots, n$ .

W szczególności, z (4.156) otrzymujemy następujący wynik

$$\begin{aligned} \langle \bar{V}(t') V(t') \bar{V}(t'') V(t'') \rangle &= \langle \bar{V}(t') V(t') \rangle + \langle \bar{V}(t'') V(t'') \rangle \\ &+ \langle \bar{V}(t') V(t'') \rangle \langle \bar{V}(t'') V(t') \rangle \\ &= \langle I(t') \rangle \langle I(t'') \rangle + |\Gamma(t' - t'')|^2, \end{aligned} \quad (4.157)$$

gdzie

$$\Gamma(t' - t'') = \langle \bar{V}(t'') V(t') \rangle$$

jest funkcją autokorelacji dla punktu  $\mathbf{r}_i$  poprzednio oznaczana  $\Gamma_{ii}(t' - t'')$ .

Wzory (4.130) oraz (4.157) pozwalają obliczyć dyspersję (fluktuację)

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 \\ &= \alpha^2 \int_0^T \int_0^T |\Gamma(t' - t'')|^2 dt' dt'' + \langle n \rangle, \end{aligned} \quad (4.158)$$

gdzie

$$\langle n \rangle = \int_0^T \langle I(t) \rangle dt.$$

Wprowadźmy teraz znormalizowaną funkcję  $\gamma$  (lub  $\gamma_{ii}$ ), czyli zespolony stopień koherencji (p. podrozdz. 3.2), równą

$$\gamma(t' - t'') = \frac{\Gamma(t' - t'')}{\Gamma(0)}. \quad (4.159)$$

W oparciu o funkcję  $\gamma(t' - t'')$  wprowadzamy funkcję  $\xi(T)$ ,

$$\xi(T) := \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T |\gamma(t' - t'')|^2 dt' dt'' = \frac{2}{T} \int_0^T (T - \tau) |\gamma(\tau)|^2 d\tau. \quad (4.160)$$

Ostatnią równość otrzymujemy, zakładając symetryczność funkcji podcałkowej

$$|\gamma(-\tau)| = |\gamma(\tau)|,$$

z następującego rozumowania

$$\begin{aligned} \xi(T) &= \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \int_0^T |\gamma(t' - t'')|^2 dt' \right\} dt'' \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T dt'' \left\{ t' |\gamma(t' - t'')|^2 \Big|_0^T - \int_0^T t' \frac{\partial}{\partial t'} |\gamma(t' - t'')|^2 dt' \right\} \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T dt'' \left\{ T |\gamma(T - t'')|^2 - \int_0^T t' \frac{\partial}{\partial t'} |\gamma(t' - t'')|^2 dt' \right\} \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T T |\gamma(T - t'')|^2 dt'' + \frac{1}{T} \int_0^T |\gamma(t' - T)|^2 dt' - \frac{1}{T} \int_0^T t' |\gamma(t')|^2 dt' \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T T |\gamma(\tau)|^2 d\tau + \frac{1}{T} \int_{-T}^0 (T + \tau) |\gamma(\tau)|^2 d\tau - \frac{1}{T} \int_0^T \tau |\gamma(\tau)|^2 d\tau \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T (T - \tau) |\gamma(\tau)|^2 d\tau. \end{aligned}$$

Z relacji

$$|\gamma(t)| \ll 1$$

spełnianej przez funkcję (4.159) wynika nierówność

$$\xi(T) \leq T. \quad (4.161)$$

Jeżeli funkcja  $\gamma(t)$  spada do zera w charakterystycznym czasie  $\tau_0$ , wówczas dla  $T \gg \tau_0$  mamy

$$\xi(T) = \frac{2}{T} \int_0^T (T - t) |\gamma(t)|^2 dt \cong 2\tau_0 \int_0^\infty |\gamma(\tau_0 x)|^2 dx. \quad (4.162)$$

Graniczną wartość

$$\xi(\infty) = 2 \int_0^\infty |\gamma(\tau)|^2 d\tau \quad (4.163)$$

będziemy nazywali **czasem koherencji**.

Dla wartości średniej mamy

$$\langle n \rangle = \alpha \int_0^T \langle \bar{V}(t') V(t') \rangle dt' = \alpha T \Gamma(0), \quad (4.164)$$

stąd dla fluktuacji  $\sigma^2$  otrzymujemy wyrażenie

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \alpha^2 \Gamma^2(0) \times T \times \xi(T) + \langle n \rangle \\ &= \langle n \rangle^2 \frac{\xi(T)}{T} + \langle n \rangle = \langle n \rangle \left( 1 + \langle n \rangle \frac{\xi(T)}{T} \right).\end{aligned}\quad (4.165)$$

Porównując ostatni wzór z wyprowadzoną wyżej (p. (4.93)) równością

$$\sigma^2 = \langle n \rangle \left( 1 + \frac{\langle n \rangle}{N} \right)$$

otrzymujemy, że

$$N = \frac{T}{\xi(T)}.$$

Wielkość

$$\delta := \frac{\langle n \rangle \xi(T)}{T} \quad (4.166)$$

jest nazywana **parametrem degeneracji**.

Rozważmy teraz dwa liczniki umieszczone w punktach  $\mathbf{r}_1$  i  $\mathbf{r}_2$ . Wprowadzając oznaczenia

$$V_i(t) = V(\mathbf{r}_i, t), \quad I_i(t) = \bar{V}_i(t) V_i(t) \quad (4.167)$$

zapiszemy rozkład ilości zliczeń w punkcie  $\mathbf{r}_i$  wzorem

$$P_{0i}(n, T) = \frac{1}{n_i!} \left( \alpha_i \int_0^T I_i(t) dt \right)^{n_i} \exp \left( -\alpha_i \int_0^T I_i(t) dt \right), \quad (4.168)$$

natomiast funkcje korelacji przybiorą w tym przypadku postać

$$\begin{aligned}\langle n_1 n_2 \rangle &= \sum_{n_1, n_2} n_1 n_2 \langle P_{0i}(n_1, T) P_{0j}(n_2, T) \rangle \\ &= \alpha_1 \alpha_2 \int_0^T \int_0^T \langle I_1(t') I_2(t'') \rangle dt' dt''.\end{aligned}\quad (4.169)$$

Załóżmy, że funkcja  $V(\mathbf{r}, t)$  podlega stacjonarnemu rozkładowi gaussowskiemu. Rozkład ten scharakteryzować można poprzez funkcjonal charakterystyczny postaci

$$\begin{aligned}C\{S(\mathbf{r}, t)\} &= \exp \left\{ - \int \int \bar{S}(\mathbf{r}_1, t_1) \langle V(\mathbf{r}_1, t_1) \bar{V}(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle \right. \\ &\quad \left. \times S(\mathbf{r}_2, t_2) d^3 \mathbf{r}_1 d^3 \mathbf{r}_2 dt_1 dt_2 \right\}.\end{aligned}\quad (4.170)$$

Ustalając położenie detektorów w punktach  $\mathbf{r}_1$  i  $\mathbf{r}_2$  oraz kładąc

$$S_i(t) = S(\mathbf{r}_i, t), \quad i = 1, 2$$

otrzymujemy

$$C\{S_i(t)\} = \exp \left\{ - \sum_{i,j} \int \int \bar{S}_i(t_1) \langle V_i(t_1) \bar{V}_j(t_2) \rangle S_j(t_2) dt_1 dt_2 \right\}. \quad (4.171)$$

Z powyższego wzoru mogą być wyprowadzone wszystkie funkcje korelacyjne. W szczególności otrzymujemy

$$\begin{aligned} \langle \bar{V}_1(t') V_1(t') \bar{V}_2(t'') V_2(t'') \rangle &= \langle \bar{V}_1(t') V_1(t') \rangle \langle \bar{V}_2(t'') V_2(t'') \rangle \\ &+ \langle \bar{V}_1(t') V_2(t'') \rangle \langle \bar{V}_2(t'') V_1(t') \rangle. \end{aligned} \quad (4.172)$$

Teraz wyrażenie (4.169) przepisać można w postaci

$$\langle n_1 n_2 \rangle = \langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle + \alpha_1 \alpha_2 \int_0^T \int_0^T |\Gamma_{12}(t' - t'')|^2 dt' dt'', \quad (4.173)$$

gdzie

$$\Gamma_{12}(t' - t'') := \langle \bar{V}_2(t'') V_1(t') \rangle \quad (4.174)$$

oznacza funkcję korelacyjną, a  $\langle n_i \rangle$  jest wartością średnią

$$\langle n_i \rangle = \alpha_i \int_0^T \langle \bar{V}_i(t') V_i(t'') \rangle dt' = \alpha_i T \Gamma_{ii}(0). \quad (4.175)$$

Wprowadzając funkcję znormalizowaną

$$\gamma_{12} := \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{(\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0))^{1/2}} \quad (4.176)$$

oraz wielkość

$$\xi_{12}(T) = \frac{2}{T} \int_0^T (T - \tau) |\gamma_{12}(\tau)|^2 d\tau, \quad (4.177)$$

przepiszemy wzór (4.173) w postaci

$$\langle n_1 n_2 \rangle - \langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle = \langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle \frac{\xi_{12}(T)}{T}. \quad (4.178)$$

Jeżeli dodatkowo zachodzi

$$\langle \bar{V}(\mathbf{r}_2, t_2) V(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle = \Gamma(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, t_1 - t_2), \quad (4.179)$$

wówczas z (4.175) otrzymamy

$$\langle n_i \rangle = \alpha_i \int_0^T \Gamma(0, 0) dt' = \alpha_i T \Gamma(0, 0). \quad (4.180)$$

Kładąc  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$  możemy napisać wzór analogiczny do (4.178)

$$\langle n_1 n_2 \rangle - \langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle = \langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle \frac{\xi_{\mathbf{r}}(T)}{T}, \quad (4.181)$$

gdzie

$$\xi_{\mathbf{r}}(T) = \frac{2}{T} \int_0^T (T - \tau) |\gamma_{\mathbf{r}}(\tau)|^2 d\tau, \quad (4.182)$$

oraz

$$\gamma_{\mathbf{r}}(\tau) = \frac{\Gamma(\mathbf{r}, \tau)}{\Gamma(0, 0)}.$$

Jeśli zachodzi relacja  $T \ll \xi_{\mathbf{r}}(\infty)$ , wówczas

$$\frac{\xi_{\mathbf{r}}(T)}{T} \cong |\gamma_{\mathbf{r}}(0)|^2, \quad (4.183)$$

i wzór (4.181) przybiera postać

$$\langle n_1 n_2 \rangle - \langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle = \langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle |\gamma_{\mathbf{r}}(0)|^2. \quad (4.184)$$

## 4.9 Interferometria gwiazdowa (natężeniowa)

Pomiary korelacji zliczeń stanowiąc mogą podstawę do tzw. interferometrii natężeniowej. W zastosowaniu do pomiarów astronomicznych interferometria natężeniowa, zaproponowana przez Hanbury Browna i Twissa (1956)<sup>6</sup> umożliwiła znaczne zwiększenie dokładności pomiarów średnic gwiazd przy znanych odległościach.

W przypadku zwykłych pomiarów interferometrycznych bada się interferencję 2 źródeł koherentnych,

$$\begin{aligned} \langle I(Q) \rangle &= K^2 \{I_1 + I_2 + 2\operatorname{Re} \Gamma_{12}(t_2 - t_1)\} \\ &= K^2 \left\{ I_1 + I_2 + 2(I_1 I_2)^{1/2} \operatorname{Re} \gamma_{12}(t_2 - t_1) \right\}, \end{aligned}$$

p. (3.24).

Światło gwiazdy, przechodzące przez atmosferę ziemską, doznaje rozmaitych zaburzeń, wskutek odchylenia, fluktuacji współczynnika załamania itd. Zaburzenia te ująć można matematycznie w postaci stochastycznego czynnika fazowego, nakładającego się na pole  $V_j(t)$  przy jego przejściu przez atmosferę;

$$V_j(t) \rightarrow V_j(t) \exp[i\varphi_j(t)], \quad (4.185)$$

gdzie

$$\varphi_j(t) = \varphi(\mathbf{r}_j, t)$$

oznacza wspomniany stochastyczny współczynnik zaburzenia fazowego dla  $j$ -tego detektora. W rezultacie obserwowana funkcja wzajemnej koherencji  $\Gamma_{obs}(\mathbf{r}, t'' - t')$  różnić się będzie od funkcji źródła  $\Gamma_{gw}$ ,

$$\Gamma_{obs}(\mathbf{r}, t'', t') = \exp\{i[\varphi_1(t') - \varphi_2(t'')]\} \Gamma_{gw}(\mathbf{r}, t' - t''), \quad (4.186)$$

---

<sup>6</sup>R. Hanbury Brown, R. Q. Twiss, *Nature*, **192** (1956) 27.

i na ogół nie będzie funkcją różnicy  $\tau = t' - t''$ , tzn. funkcją stacjonarną, więc w ogólności

$$\text{Re } \Gamma_{obs} \neq \text{Re } \Gamma_{gw}. \quad (4.187)$$

Efekt ten jest istotnym ograniczeniem dla stosowania interferometru Michelsona, dyskutowanego przez nas w podrozdz. 3.3. Nawet dla  $t' = t''$  funkcje  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  mogą się istotnie różnić, szczególnie dla większych odległości między detektorami.

Z kolei w interferometrii natężeniowej dokonujemy pomiarów korelacji zliczeń, a tym samym (p. (4.183) i (4.184)) określamy stopień koherencji, niezależny od przypadkowych zaburzeń fazowych. Z (4.186) widać, że

$$|\gamma_{obs}(\mathbf{r}, \tau)| = |\gamma_{gw}(\mathbf{r}, \tau)|. \quad (4.188)$$

Z wcześniejszych rozważań (p. podrozdz. 3.3) wynika, że dla gwiazdy (źródła światła) będącej tarczą o promieniu  $b/2$  zespolony stopień koherencji ma postać

$$\gamma(\mathbf{r}, \tau) = \gamma(\tau) \frac{J_1(x)}{x}, \quad \gamma(\tau) = \frac{\Gamma(\tau)}{\Gamma(0)},$$

(p. (3.64)), gdzie  $J_1$  jest funkcją Bessela pierwszego rodzaju, a  $x$  jest zdefiniowane jako

$$x = \frac{\langle k \rangle b r}{R},$$

przy czym  $\langle k \rangle = 2\pi\langle\nu\rangle$  ( $\langle\nu\rangle$  - średnia częstość),  $b$  - średnica gwiazdy,  $R$  - odległość do gwiazdy, a  $r$  oznacza odległość detektorów.

Uwzględniając powyższe w (4.184) otrzymujemy dla dwóch liczników w odległości wzajemnej  $r$ :

$$\langle n_1 n_2 \rangle - \langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle = \langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle \left( \frac{J_1(x)}{x} \right)^2. \quad (4.189)$$

Z pomiarów korelacji (4.189) jako funkcji  $r$  wyznaczać można średnicę  $b$  gwiazdy przy zadanej odległości  $R$  do gwiazdy. Uwzględniając położenie pierwszego zera funkcji  $J_1(x)$  otrzymujemy, że korelacja (4.189) znika, gdy

$$\langle k \rangle b r \cong 3,83 R,$$

(p. (3.65)). Ponieważ baza interferometru natężeniowego może wynosić kilkaset metrów (np. w interferometrze Hanbury-Browna - Twissa wynosiła ok. 200 m), więc dokładność tej metody kilkadziesiąt (40-50) razy przewyższa dokładność metody Michelsona.

## 4.10 Liczniki o skończonej czułości

Liczniki (detektory) występujące uprzednio w naszych rozważaniach były mocno wyidealizowane: miały one punktowe rozmiary, nieskończone pasmo czułości i nieskończone mały czas martwy. Z kolei wiemy, że liczniki rzeczywiste mają skończone pasmo czułości i skończoną szybkość rejestracji.

W efekcie licznik jest pewnym filtrem, który zamiast pola  $V(\mathbf{r}, t)$  rejestruje pewne pole efektywne  $V^{ef}(t)$ . Związek między  $V^{ef}$  i  $V$  zapiszemy w postaci

$$V_i^{ef}(t) = \int a_i(\mathbf{r}) \bar{S}(t - t') V(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} dt', \quad (4.190)$$

gdzie  $\bar{S}(t - t')$  jest transformatą Fouriera funkcji  $\overline{\tilde{S}(\nu)}$ , nazywanej **funkcją rozmywającą detektora**, a funkcja  $a_i(\mathbf{r})$  jest przestrzenną funkcją rozmywającą  $i$ -tego detektora. Funkcja  $\overline{\tilde{S}(\nu)}$  zawiera informację o czasie martwym i paśmie czułości detektora, a funkcja  $a_i(\mathbf{r})$  odpowiada za skończone rozmiary detektora. W granicy, dla detektorów idealnych

$$a_i(\mathbf{r}) \rightarrow \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (4.191)$$

$$S(t - t') \rightarrow \delta(t - t'), \quad (4.192)$$

gdzie symbol  $\delta$  oznacza funkcję Diraca.

Rozważmy przypadek detektora punktowego o skończonym paśmie czułości (tzn.  $a_i$  spełnia (4.191)) rejestrującego pole o rozkładzie gaussowskim. Uwzględniając (4.156) mamy

$$\begin{aligned} & \langle \bar{V}_e(t_1) V_e(t_2) \bar{V}_e(t_3) V_e(t_4) \rangle \\ &= \langle \bar{V}_e(t_1) V_e(t_2) \rangle \langle \bar{V}_e(t_3) V_e(t_4) \rangle + \langle \bar{V}_e(t_1) V_e(t_4) \rangle \langle \bar{V}_e(t_3) V_e(t_2) \rangle, \end{aligned} \quad (4.193)$$

gdzie

$$V_e(t) = V_{ef}(t) = \int \bar{S}(t - t') V(\mathbf{r}_i, t') dt'.$$

Na podstawie (4.131) oraz (4.131), kładąc  $I_e = |V_e|^2$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \alpha \int_0^T \langle I_e(t') \rangle dt', \\ \langle n^2 \rangle &= \alpha^2 \int_0^T \int_0^T \langle I_e(t') I_e(t'') \rangle dt' dt'' + \langle n \rangle. \end{aligned} \quad (4.194)$$

Dla rozważanego pola (4.190), przy warunku (4.191), wzory te przybiorą postać

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \alpha \int_0^T dt \int \int \bar{S}(t - t_2) \Gamma(t_1 - t_2) S(t - t_1) dt_1 dt_2 \\ &= \alpha T \int |\tilde{S}(\nu)|^2 \tilde{\Gamma}(\nu) d\nu, \end{aligned} \quad (4.195)$$

oraz

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 \\ &= \alpha^2 \int_0^T \int_0^T dt' dt'' \int \int \int \int \bar{S}(t' - t_2) S(t' - t_1) \bar{S}(t'' - t_4) S(t'' - t_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \Gamma(t_2 - t_3)\Gamma(t_4 - t_1)dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 + \langle n \rangle \\
& = \alpha^2 \int_0^T \int_0^T dt' dt'' \left| \int e^{-2\pi i \nu(t' - t'')} |\tilde{S}|^2 \tilde{\Gamma}(\nu) d\nu \right|^2 + \langle n \rangle.
\end{aligned} \tag{4.196}$$

Jeśli  $\tilde{S}(\nu) \approx 1$  dla zasadniczej części spektrum  $\tilde{\Gamma}(\nu$ , wówczas momenty takiego licznika zbliżone są do momentów licznika idealnego. W przeciwnym wypadku, gdy  $\tilde{S}(\nu)$  silnie zależy od  $\tilde{\Gamma}(\nu)$ , wówczas zliczenia licznika bardziej zależą od jego charakterystyki, niż od charakterystyki źródła.

W ogólnym przypadku mamy łączną funkcję rozmywającą po przestrzeni i po czasie

$$\bar{S}_{i,t}(\mathbf{r}, t') = a_i(\mathbf{r})\bar{S}(t - t'). \tag{4.197}$$

Funkcję tę uwzględnić można w funkcjonale charakterystycznym zapisując

$$C\{S(\mathbf{r}, t)\} = \exp \left\{ - \int \int S(\mathbf{r}_1, t_1) \langle V(\mathbf{r}_1, t_1) \bar{V}(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle S(\mathbf{r}_2, t_2) d^3 \mathbf{r}_1 d^3 \mathbf{r}_2 dt_1 dt_2 \right\}. \tag{4.198}$$

Zauważmy, że ogólnie rzecz biorąc, zawsze należałoby uwzględnić istnienie funkcji rozmywających, bowiem obserwacji przyrodniczych dokonujemy za pomocą przyrządów, z których każdy scharakteryzowany jest przez pewien funkcjonal zależny od przyrządu i obserwowanego zjawiska.

## Rozdział 5

# Procesy Markowa i d.c. termodynamiki informacyjnej

### 5.1 Przejście od opisu dynamicznego do statystycznego

Rozważać będziemy ewolucję w czasie pewnego pola elektromagnetycznego  $V(\mathbf{r}, t) = V(x)$  ( $x$  oznacza tu zmienną w 4-wymiarowej przestrzeni  $\mathbf{r}, t$ ), wywołanego źródłami  $j(x)$ . Jak wiadomo, ewolucja w czasie pola elektromagnetycznego ze źródłami opisywana jest przez równanie d'Alemberta

$$\square V(x) = j(x) = j(x; V, \{\psi_k\}, k = 1, \dots, n) \quad (5.1)$$

gdzie  $\square = \nabla^2 - \partial^2/\partial t^2$  oznacza operator d'Alemberta (położyliśmy prędkość światła  $c = 1$ ), a  $\{\psi_k\}$  to pewne pola spinorowe, opisujące źródło  $j(x)$  i spełniające również równanie

$$\square \psi_k(x) = F_k(x) = F_k(x; V, \{\psi_k\}). \quad (5.2)$$

Wielkości  $\psi_k$  nazwiemy polem źródła promieniowania.

Jest to na razie opis czysto dynamiczny. Przy zastosowaniu do teorii częściowej koherencji pól typu (5.1), (5.2) na opis dynamiczny nakłada się pewna statystyka, która może być dwojakiego rodzaju.

1. Rozważamy pewne pole swobodne spełniające równanie

$$\square V(x) = 0. \quad (5.3)$$

Równanie różniczkowe tego typu ma jednoznacznie określone przez warunki początkowe rozwiązanie, które formalnie zapisać można jako

$$V(x) = V(x; V_0), \quad (5.4)$$

przy czym  $V_0$  to zbiór warunków początkowych.

Pierwszym źródłem statystyki może być nieznanomość warunków początkowych. Zbiór  $V_0$  będzie więc zbiorem "pierwotnych" zmiennych stochastycznych.<sup>1</sup>

2. Rozumowanie powyższe przenieść można na pole związane opisane przez warunki (5.1-5.2). Rozwiązania tego układu równań zapiszemy wówczas w postaci

$$V(x) = V(x; V_0, \{\psi_{k0}\}), \quad (5.5)$$

$$\psi_k(x) = \psi_k(x; V_0, \{\psi_{\ell 0}\}), \quad (5.6)$$

przy czym zmiennymi stochastycznymi pierwotnymi będą tu  $V_0(x)$  i  $\psi_{k0}(x)$ . W duchu określenia procesu stochastycznego podanego w podrozdz. 4.7  $V_k(x)$  i  $\psi_k(x)$  są procesami stochastycznymi, gdzie  $V_0$  i  $\psi_{k0}$  tworzą rodzinę zmiennych stochastycznych.

3. Jako wtórny proces stochastyczny rozważać można  $j(x)$ ,

$$j(x) = j(x; V, \{\psi_k\}), \quad (5.7)$$

wyznaczony jako funkcja procesów  $V$  i  $\{\psi_k\}$ . Byłoby to podejście dość skomplikowane, gdyż skomplikowane są warunki początkowe, od których zależy  $j(x)$ . Ponieważ w fizyce z reguły przyjmuje się założenie ergodyczności, z którego wynika niezależność procesu od warunków początkowych, powstała koncepcja, by jako zmienną stochastyczną przyjąć  $j(x)$ . W ten sposób rozwiązanie równania

$$\square V(x) = j(x), \quad (5.8)$$

będzie miało postać

$$V(x) = V(x; j), \quad (5.9)$$

bez zależności od  $V_0$ . Wielkość  $j(x)$  odgrywa tu rolę analogiczną do stochastycznej siły wymuszającej drgania oscylatora (siła ta zwana jest siłą Langevina)<sup>2</sup> "Siła"  $j(x)$  opisana jest przez swe momenty statystyczne

$$\alpha_1 = \langle j(x) \rangle, \quad \alpha_2 = \langle j^2(x) \rangle, \dots$$

Dla siły Langevina (ang. *drawing force*), z definicji  $\alpha_1 = 0$ . Równania (5.8) nazywamy **równaniami fluktuacyjnymi**. Stochastyczne źródła pola, jak w tym wypadku  $j(x)$ , nazywa się często **rezerwuarem** (zbiornikiem) **ciepłym**.

Ponieważ  $j(x)$  zależne są stochastycznie od czasu, opisywane przez nie proces będzie procesem nieodwracalnym.

---

<sup>1</sup>Określenie wprowadzone przez Klaudera - Sudarshana w cytowanym podręczniku "Fundamentals of Quantum Optics".

<sup>2</sup>Paul Langevine (1872-1946).

4. Rozważmy sytuację, gdy istnieją tylko dwa pola źródłowe  $\{\psi_k\}$ ,  $k = 1, 2$ . Równania ewolucji w czasie będą tu miały postać

$$\square V(x) = j(x; V, \psi_1, \psi_2), \quad (5.10)$$

$$\square \psi_1(x) = F_1(x; V, \psi_1, \psi_2), \quad (5.11)$$

$$\square \psi_2(x) = F_2(x; V, \psi_1, \psi_2). \quad (5.12)$$

Niech funkcja  $\psi_2$  opisuje rezerwuar. Wówczas, zgodnie z poprzednim rozumowaniem, rozwiązanie  $f(x)$  równania (5.12) nie zależy od  $V$  i  $\psi_1$ , a równania pola przybiorą postać

$$\begin{aligned} \square V(x) &= j(x; V, \psi_1, f), \\ \square \psi_1(x) &= F_1(x; V, \psi_1, f). \end{aligned} \quad (5.13)$$

5. Zauważmy, że źródłem statystyki mogą być nie tylko źródła zewnętrzne (reprezentowane powyżej przez  $f$ ) czy też warunki początkowe. Gdy pole promieniowania (światło) rozchodzi się w ośrodku niejednorodnym, w którym współczynnik załamania a tym samym prędkość rozchodzenia się fali w danym ośrodku jest zmienną stochastyczną, wówczas proces stochastyczny  $V(x)$  ma postać

$$V(x) = V(x; n),$$

gdzie zmienną stochastyczną jest  $n(x)$ .

## 5.2 Metoda funkcjonalna. Równania dla średnich

jako przykład rozważmy następujący układ równań typu (5.13):

$$\begin{aligned} \square V(x) &= V^3(x) + \psi^2(x) + f(x), \\ \square \psi(x) &= V(x)\psi(x) + g(x), \end{aligned} \quad (5.14)$$

gdzie  $f(x)$  i  $g(x)$  reprezentują siły Langevina. Równania powyższe rozwiązywać można metodą perturbacyjną, podstawiając

$$\begin{aligned} v(x) &= V(x) - V_0(x), \\ \varphi(x) &= \psi(x) - \psi_0(x), \end{aligned} \quad (5.15)$$

gdzie  $V_0(x)$  i  $\psi_0(x)$  są ustalonymi, niestochastycznymi funkcjami.

Przedyskutujemy teraz inną metodę rozwiązywania równań (5.14). Średniując mianowicie układ (5.13) po ensemble pól  $V(x)$  otrzymujemy "średnie równania"

$$\begin{aligned} \square \langle V(x) \rangle &= \square \langle V(x) \rangle = \langle j(x; V, \psi_1, f) \rangle \\ \square \langle \psi_1(x) \rangle &= \square \langle \psi_1(x) \rangle = \langle F_1(x; V, \psi_1, f) \rangle. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Procedura ta w zastosowaniu do równań (5.14) prowadzi do związków

$$\begin{aligned}\square \langle V(x) \rangle &= \langle V^3(x) \rangle + \langle \psi^2(x) \rangle + \langle f(x) \rangle, \\ \square \langle \psi(x) \rangle &= \langle V(x)\psi(x) \rangle + \langle g(x) \rangle.\end{aligned}\tag{5.17}$$

By odkryć trudność, kryjącą się w równaniu (5.17), ograniczmy się do prostego nieliniowego równania, będącego szczególnym przypadkiem (5.14)

$$\square V(x) = V^3(x) + f(x).\tag{5.18}$$

Mnożąc obustronnie przez  $V(y)V(z)$  i średniując po ensemble otrzymujemy

$$\langle [\square_x V(x) - V^3(x) - f(x)] V(y)V(z) \rangle = 0.\tag{5.19}$$

gdzie  $\square_x$  oznacza d'alambercjan ze względu na zmienną  $x$ . Przekształcając (5.19) do postaci

$$\square_x \langle V(x)V(y)V(z) \rangle = \langle V^3(x)v(y)V(z) \rangle + \langle f(x)V(y)V(z) \rangle\tag{5.20}$$

zauważmy, że do określenia korelacji trzeciego rzędu  $\langle V(x)V(y)V(z) \rangle$  trzeba mieć korelację piątego rzędu  $\langle V^3(x)v(y)V(z) \rangle$ . Tak więc korelacje niższego rzędu wyznaczone są przez korelacje wyższego rzędu. Ogólnie, stosując równanie d'Alemberta do funkcji korelacyjnej

$$G_{rs}(x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_s) = \langle f(x_1) \dots f(x_r)V(y_1) \dots V(y_s) \rangle\tag{5.21}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}\square_{y_1} G_{rs}(x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_s) \\ = G_{r,s+2}(x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_s, y_1, y_1) + G_{r+1,s-1}(x_1, \dots, x_r; y_1, y_2, \dots, y_s),\end{aligned}\tag{5.22}$$

dla wszystkich  $r$  i  $s$ . Równania (5.22) tworzą, dla kolejnych  $r$  i  $s$ , tzw. łańcuch lub **hierarchię**. Problem ten pojawia się w termodynamice procesów nieodwracalnych.<sup>3</sup> Tam też podano zasadniczą metodę rozwiązywania tego typu hierarchii zakładającą, że dla pewnego  $n$  momenty rzędu większego od  $n$  są funkcjami rzędu niewiększego od  $n$  (metoda Bogoliubova), p. np. cytowany podręcznik Łopuszańskiego i Pawlikowskiego, s. 83.

Podamy teraz pewną metodę rozwiązywania równań (5.22) poprzez wprowadzenie "średnich" dla funkcjonału charakterystycznego. Rozważamy dla prostoty pewne pole rzeczywiste  $V(x)$  i  $f(x)$ . Funkcjonał charakterystyczny zdefiniowany jest jako

$$C\{S, s\} = \left\langle \exp \left\{ i \int [S(y)V(y) + s(y)f(y)] d^4y \right\} \right\rangle.\tag{5.23}$$

<sup>3</sup>Chodzi o tzw. równania hierarchiczne B.B.G.K.Y., p. np. J. Łopuszański i A. Pawlikowski, Fizyka statystyczna, Warszawa, PWN, 1969, s.81.

Zakładamy znajomość statystyki funkcji  $f(x)$ , tzn. rozkładu w przestrzeni funkcyjnej  $\{f(x)\}$ . Jest to równoznaczne z założeniem, że wielkość

$$C\{0, s\} = \left\langle \exp \left[ i \int s(y) f(y) d^4 y \right] \right\rangle \quad (5.24)$$

jest znana. Innymi słowy, jest to nałożenie pewnego warunku brzegowego na  $C\{S, s\}$ . Znając (5.24) poszukujemy wielkości

$$C\{S, 0\} = \left\langle \exp \left[ i \int S(y) V(y) d^4 y \right] \right\rangle. \quad (5.25)$$

Obie funkcje (5.24-5.25) są szczególnymi przypadkami (5.23). Sformułujemy teraz pewne równanie na funkcję  $C\{S, s\}$ . Użyliśmy już poprzednio<sup>4</sup> pojęcia pochodnej funkcjonalnej. Dla dowolnego funkcjonału  $\varphi(\xi)$  pochodna funkcjonalna  $\delta\varphi(\xi)/\delta\xi(x)$  zdefiniowana została jako

$$\begin{aligned} \int \frac{\delta\varphi}{\delta\xi(x)} \gamma(x) d^4 x &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{-1} [\varphi(\xi + \tau\gamma) - \varphi(\xi)] \\ &= \left. \frac{d}{d\tau} \varphi(\xi + \tau\gamma) \right|_{\tau=0}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Pochodne funkcjonalne  $C\{S, s\}$  odpowiednio względem  $S$  i  $s$  będą miały postać

$$\int E(x) \frac{\delta C\{S, s\}}{\delta S(x)} d^4 x = \left. \frac{d}{d\tau} C\{S + \tau E, s\} \right|_{\tau=0}, \quad (5.27)$$

$$\int e(x) \frac{\delta C\{S, s\}}{\delta s(x)} d^4 x = \left. \frac{d}{d\tau} C\{S, s + \tau e\} \right|_{\tau=0}, \quad (5.28)$$

gdzie  $E$  i  $e$  są pewnymi ustalonymi funkcjami próbnymi, dla których odpowiednie pochodne funkcjonalne istnieją (tzn.  $E$  i  $e$  należą do klasy  $\mathcal{S}$  funkcji szybko malejących). Zauważmy bowiem, że łatwo podać przykłady funkcjonałów, dla których pochodne funkcjonalne od pewnego rzędu począwszy, nie istnieją. Weźmy np. funkcjonał

$$C_1\{S\} := \int S^2(x) d^4 x.$$

Z definicji, pochodna funkcjonalna tego funkcjonału jest równa

$$\begin{aligned} &\left. \frac{d}{d\tau} C_1\{S + \tau E\} \right|_{\tau=0} \\ &= \left. \frac{d}{d\tau} \left\{ \int [S^2 + 2\tau ES + \tau^2 E^2] d^4 x \right\} \right|_{\tau=0} = 2 \int E(x) S(x) d^4 x, \end{aligned}$$

(z założenia,  $E$  i  $S$  są całkowalne z kwadratem), czyli

$$\frac{\delta C_1\{S\}}{\delta S(x)} = 2 S(x).$$

Obliczmy teraz drugą pochodną  $C_1\{S\}$ ;

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta S(x')} \frac{\delta}{\delta S(x)} C_1\{S\} &= 2 \frac{\delta}{\delta S(x')} S(x) \\ &= 2 \left. \frac{d}{d\tau} [S(x) + \tau \delta(x - x')] \right|_{\tau=0} = 2 \delta(x - x'). \end{aligned}$$

<sup>4</sup>p. R.S. Ingarden, Elektrodynamika klasyczna i kwantowa, Toruń, UMK, 1970, s. 365.

W szczególności dla  $x = x'$

$$\frac{\delta^2}{\delta S(x)^2} C_1\{S\} = 2\delta(0) = \infty,$$

więc druga pochodna funkcjonału  $C_1\{S\}$  nie istnieje. Oczywiście, są funkcjonały, dla których druga pochodna istnieje, na przykład

$$C_2\{S\} = \left( \int E_0(x) S(x) d^4x \right)^2.$$

Obliczając pierwszą i drugą pochodną funkcjonalną mamy

$$\begin{aligned} \frac{\delta C_2\{S\}}{\delta S(x)} &= 2 \left( \int E_0(x) S(x) d^4x \right) E_0(x), \\ \frac{\delta^2 C_2\{S\}}{\delta S(x)^2} &= 2E_0^2(x). \end{aligned}$$

Obliczając pochodne funkcjonalne dla funkcjonału (5.23) otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\left( -i \frac{\delta}{\delta S(x)} \right)^p C\{S, s\} \\ &= \left\langle V^p(x) \exp \left\{ i \int [S(y)V(y) + s(y)f(y)] d^4y \right\} \right\rangle, \end{aligned} \quad (5.29)$$

oraz

$$\left( -i \frac{\delta}{\delta s(y)} \right)^q C\{S, s\} = \left\langle f^q(x) \exp \left\{ i \int [S(y)V(y) + s(y)f(y)] d^4y \right\} \right\rangle. \quad (5.30)$$

Korzystając z powyższych wyników łatwo jest przepisać odpowiednie równanie na funkcję  $V(x)$  w "języku" funkcjonału charakterystycznego. Biorąc np. pod uwagę równanie (5.18), otrzymamy

$$\begin{aligned} -i \square \frac{\delta}{\delta S(x)} C &= \left[ \left( -i \frac{\delta}{\delta S(x)} \right)^3 + \left( -i \frac{\delta}{\delta S(x)} \right) \right] C \\ &= \left\langle [\square V(x) - V^3(x) - f(x)] \exp \left\{ i \int [S(y)V(y) + s(y)f(y)] d^4y \right\} \right\rangle = 0, \end{aligned}$$

a stąd, rugując "i", otrzymujemy równanie

$$\square \frac{\delta}{\delta S(x)} C\{S, s\} = \left[ -\frac{\delta^3}{\delta S(x)^3} + \frac{\delta}{\delta s(x)} \right] C\{S, s\}. \quad (5.31)$$

W ten sposób nieskończonej ilości równań (5.22) odpowiada jedno równanie funkcjonalne (5.31), lecz zysk z tej zamiany jest w istocie niewielki, gdyż teoria równań różniczkowych funkcjonalnych jest na razie słabo rozwinięta, by podać efektywną metodę rozwiązywania równania (5.31). W praktyce łatwiej jest rozwiązać układ (5.22) wspomnianą wyżej metodą rozszczepienia łańcucha równań., tzn. wyrażenia wyższych momentów przez niższe. W dalszym ciągu podamy możliwość ujęcia teorii informacyjnego, które jest jakościowo istotnie różne od podanych wyżej metod.

### 5.3 Elementy teorii procesów Markowa

Wspomniane wyżej trudności w opisie dynamicznym problemu koherencji przyczyniły się do dalszego uproszczenia modelu. Zakłada się mianowicie, że zachowanie w czasie pól źródłowych  $\psi_k$  opisane jest równaniami

$$\dot{\psi}_k = F_k(\{\psi_k\}, \{f_m\}, t) \quad (k = 1, \dots, N). \quad (5.32)$$

Do pól  $\psi_k$  zaliczono również pole  $V$ . Dla ustalonych sił  $f_m$  i przy założeniu warunków początkowych w chwili  $t = \tau$ ,

$$\psi_k(\tau) = \varphi_k, \quad (5.33)$$

równania (5.32) posiadają, (przynajmniej teoretycznie), rozwiązanie, które można zapisać w postaci

$$\psi_k(t) = \Psi_k(t, \{f_m\}; \{\varphi_\ell\}, \tau). \quad (5.34)$$

Przy przejściu od ustalonych  $f_m$  do  $f_m$  jako zmiennych stochastycznych, powstaje problem zachowania się rozkładu prawdopodobieństwa dla  $\psi_k$ , które stają się w tej sytuacji zmiennymi stochastycznymi.

Prawdopodobieństwo  $P(\{\psi_k\}, t | \{\varphi_\ell\}, \tau)$  przejścia od stanu w chwili  $\tau$ , opisanego zbiorem funkcji  $\varphi_k$ , do stanu w chwili  $t$ , wyrazi się jako następująca wartość średnia

$$\begin{aligned} P_{(2)}(\{\psi_k\}, t | \{\varphi_\ell\}, \tau) &= \left\langle \prod_k \delta[\psi_k - \psi_k(t)] \right\rangle \\ &= \left\langle \prod_k \delta[\psi_k - \Psi_k(t, \{f_m\}; \{\varphi_\ell\}, \tau)] \right\rangle. \end{aligned} \quad (5.35)$$

W teorii procesów stochastycznych rozróżnia się 2 typy prawdopodobieństw przejścia:

1. prawdopodobieństwa przejścia zależą tylko od stanu w chwili początkowej i stanu w chwili końcowej, niezależnie od przebiegu procesu wewnątrz rozpatrywanego przedziału czasowego (innymi słowy, prawdopodobieństwo, że układ znajduje się w pewnym stanie, zależy tylko od stanu w chwili poprzedzającej, a nie zależy od całej historii procesu; cofając się w ten sposób wstecz otrzymujemy zależność wyłącznie od stanu początkowego i końcowego),
2. prawdopodobieństwo tego, że układ będzie się znajdował w pewnym stanie w chwili  $t$ , zależy od wszystkich stanów, w jakich układ znajdował się w interwale  $< \tau, t >$ , a więc od całej historii procesu.

Procesy o własności 1 nazywamy **procesami Markowa**<sup>5</sup> lub markowowskimi (ang. *Markoffian processes*), a procesy pozostałe - **procesami niemarkowowskimi** (ang. *non-Markoffian processes*).

---

<sup>5</sup>A. A. Markow, 1856-1922.

Oczywiście prostsze w ujęciu matematycznym są procesy Markowa, aczkolwiek większość interesujących nas w przyrodzie procesy stochastyczne to procesów stochastycznych to procesy niemarkowskie. W pewnych przypadkach, przy dodatkowych założeniach, z procesu niemarkowskiego otrzymać można proces Markowa. Weźmy np. cząstkę gazu zamkniętą w naczyniu i zderzającą się z pozostałymi cząstkami. Jej położenie wyznaczone jest przez równanie

$$m\ddot{x}(t) = f(t) \quad (5.36)$$

gdzie  $m$  oznacza masę cząstki, a  $f(t)$  jest stochastyczną siłą pochodzącą od oddziaływania pozostałych cząstek. Zakładając, że cząstka zderza się sprężysto z pozostałymi widać, że stochastyczna siła nie posiada "pamięci", tzn. mamy proces Markowa. Np. klasyczne błądzenie przypadkowe (ang. termin: *random walk*) opisane jest przez (5.36) przy założeniu, że siła  $f(t)$  opisana jest przez funkcjonal

$$C\{s\} = \left\langle \exp \left[ i \int s(t') f(t') dt' \right] \right\rangle = \exp \left[ -\frac{1}{2} \int s^2(t') dt' \right], \quad (5.37)$$

który jest funkcjonalem charakterystycznym dla rozkładu gaussowskiego o transformacie typu (4.139) dla  $m = 0$  i  $\tilde{\mu}(\nu) = 4\pi^2 a \nu^2$ .

Innym znanym w fizyce przykładem procesu markowskiego jest klasycznych ruch Browna, opisany przez (5.36) i funkcjonal

$$C\{s\} = \left\langle \exp \left[ i \int s(t') f(t') dt' \right] \right\rangle = \exp \left[ -\frac{1}{2} b \int s^2(t') dt' \right], \quad (5.38)$$

typu (4.139) dla  $\tilde{\mu}(\nu) = b$ .

Wracając do prawdopodobieństwa przejścia (5.35) zauważmy, że jest to dwupunktowe prawdopodobieństwo zaistnienia zdarzenia (stanu)  $\{\psi_k\}$  w chwili  $t$  i zdarzenia  $\varphi_\ell$  w chwili  $\tau$ . Wprowadzić również można pojęcie prawdopodobieństwa warunkowego. Zdefiniujmy mianowicie prawdopodobieństwo stanu  $\psi_k$  w chwili  $\tau$  jako

$$P_{(1)}(\{\psi_k\}, t) := \int P_{(2)}(\{\psi_k\}, t | \{\varphi_\ell\}, \tau) d^N \varphi_\ell \quad (5.39)$$

gdzie

$$d^N \varphi_\ell = \prod_{\ell=1}^N d\varphi_\ell,$$

oraz

$$P_{(2)}(\{\psi_k\}, t | \{\varphi_\ell\}, \tau) = \prod_k \delta(\psi_k - \varphi_k).$$

Można więc napisać, że

$$P_{(2)}(\{\psi_k\}, t | \{\varphi_\ell\}, \tau) = g(\{\psi_k\}, t | \{\varphi_\ell\}, \tau) p_{(1)}(\{\psi_k\}, \tau), \quad (5.40)$$

czyli

$$g(\{\psi_k\}, t | \{\varphi_\ell\}, \tau) = \frac{p_{(2)}(\{\psi_k\}, t | \{\varphi_\ell\}, \tau)}{p_{(1)}(\{\varphi_\ell\}, \tau)}. \quad (5.41)$$

Funkcja  $g$  określa prawdopodobieństwo zaistnienia stanu  $\{\psi_k\}$  w chwili  $t$  pod warunkiem zaistnienia stanu  $\{\varphi_\ell\}$  w chwili  $\tau$ , jest więc prawdopodobieństwem warunkowym przejścia od stanu  $(\{\varphi_\ell\}, \tau)$  do stanu  $(\{\psi_k\}, t)$ . Dla dowolnego procesu stochastycznego definiować można prawdopodobieństwo ciągów  $n$  zdarzeń. Np.  $p_{(3)}$ - prawdopodobieństwo zaistnienia zdarzeń  $(\{\lambda_k\}, \vartheta), (\{\varphi_k\}, \tau), (\{\psi_k\}, t), (\vartheta, \tau$  i  $t$  oznaczają pewne punkty czasowe,  $\vartheta \leq \tau \leq t)$ , dla procesu (5.34) będzie równe

$$p_{(3)}(\{\psi_k\}, t | \{\varphi_\ell\}, \tau | \{\lambda_n\}, \vartheta) = \left\langle \prod_k \delta[\psi_k - \Psi_k(t, \{f_m\}; \{\varphi_\ell\}, \tau)] \prod_\ell \delta[\varphi_\ell - \Psi_\ell(\tau, \{f_m\}; \{\lambda_r\}, \vartheta)] \right\rangle \quad (5.42)$$

przy czym między  $p_{(2)}$  i  $p_{(3)}$  zachodzi zależność

$$p_{(2)}(\{\psi_k\}, t | \{\varphi_\ell\}, \tau) = \int p_{(3)}(\{\psi_k\}, t | \{\varphi_\ell\}, \tau | \{\lambda_k\}, \vartheta) d^N \lambda_k. \quad (5.43)$$

Z definicji procesów Markowa wynika, że istotne jest dla nich prawdopodobieństwo 2 - punktowe  $p_{(2)}$  (prawdopodobieństwo 2 zdarzeń), natomiast prawdopodobieństwa  $n$  zdarzeń ( $n \geq 2$ ) są kuź iloczynem prawdopodobieństw  $p_{(2)}$ . W takim razie np.  $p_{(3)}$  będzie można przedstawić w postaci

$$p_{(3)}(\{\psi_k\}, t | \{\varphi_\ell\}, \tau | \{\lambda_r\}, \vartheta) = A p(\{\psi_k\}, t | \{\varphi_\ell\}, \tau), \quad (5.44)$$

gdzie

$$A = p(\{\varphi_\ell\}, \tau | \{\lambda_r\}, \vartheta),$$

czyli

$$p_{(3)}(\{\psi_k\}, t | \{\varphi_\ell\}, \tau | \{\lambda_r\}, \vartheta) = p(\{\psi_k\}, t | \{\varphi_\ell\}, \tau) p(\{\varphi_\ell\}, \tau | \{\lambda_r\}, \vartheta). \quad (5.45)$$

Porównując (5.43) i (5.45) możemy napisać

$$\begin{aligned} & \int p(\{\psi_k\}, t | \{\varphi_\ell\}, \tau | \{\lambda_r\}, \vartheta) d^N \varphi_\ell \\ &= \left\langle \prod_k \delta[\psi_k - \Psi_k(t, \{f_m\}, \{\lambda_r\}, \vartheta)] \right\rangle = p(\{\psi_k\}, t | \{\lambda_r\}, \vartheta). \end{aligned} \quad (5.46)$$

Relację (5.46), będącą istotną własnością procesów Markowa, nazywamy **równaniem Chapmana-Kołmogorowa**. Równanie (5.46) można przedstawić w postaci różniczkowej jako

$$\frac{\partial p(\{\psi_k\})}{\partial t} = \int \dots \int K(\{\psi_k\}, \{\varphi_\ell\}) p(\{\varphi_\ell\}) d^N \varphi_\ell, \quad (5.47)$$

gdzie jądro całkowania  $K$  dane jest wzorem

$$K(\{\varphi_k\}, \{\varphi_\ell\}) = \frac{\partial \delta}{\partial t} p(\{\varphi_k\}, t | \{\varphi_\ell\}, \tau), \quad (\tau = t). \quad (5.48)$$

Jeśli  $K$  nie zależy od czasu, proces nazywamy stacjonarnym. Z równania (5.47) otrzymać można w niżej podany sposób równanie różniczkowe nieskończonego rzędu, które w szczególnych przypadkach da się przybliżać przez równania skończonych rzędów. Oznaczając funkcjonal charakterystyczny dla  $p\{\psi_k\}$  przez  $C(s\{s_k\})$  mamy

$$\begin{aligned} C(\{s_k\}) &\equiv \exp[W(\{s_k\})] = \left\langle \exp \left( i \sum s_k \psi_k \right) \right\rangle \\ &= \int \dots \int \exp \left( i \sum s_k \psi_k \right) p(\{\psi_k\}) d^N \psi_k, \end{aligned} \quad (5.49)$$

a stąd

$$p(\psi_k) = (2\pi)^{-N} \int \dots \int \exp \left[ -i \sum s_k \psi_k + W(\{s_k\}) \right] d^N s_k. \quad (5.50)$$

Biorąc pochodną po czasie z (ref30.19) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(\{\psi_k\})}{\partial t} &= \dot{p}(\{\psi_k\}) \\ &= (2\pi)^{-N} \int \dots \int \dot{W}(\{s_k\}) \exp \left[ -i \sum s_k \psi_k + W(\{s_k\}) \right] d^N s_k \\ &= \dot{W} \left( \left\{ i \frac{\partial}{\partial \psi_k} \right\} \right) \int \dots \int \exp \left[ -i \sum s_k \psi_k + W(\{s_k\}) \right] d^N s_k \\ &= \dot{W} \left( \left\{ i \frac{\partial}{\partial \psi_k} \right\} \right) p(\{\psi_k\}), \quad \dot{W} := \frac{\partial W}{\partial t}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

W ten sposób różniczkowo-całkowe równanie (5.47) sprowadzone zostało do równania różniczkowego (5.51). Z równania (5.51), o ile mamy warunki początkowe  $p_k|_{t=0}$ , możemy wyznaczyć  $p_k|_{t=\tau}$ . Ponieważ

$$W(\{s_k\}) = \ln C(\{s_k\}), \quad (5.52)$$

więc, zgodnie z określeniem kumulantów (2.14)-(2.15), przechodząc do

$$W(\{s_k\}) = \sum_{i=1}^n \frac{i^n}{n!} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n \\ k_1 + \dots + k_n = n}} s_{k_1} \dots s_{k_n} \langle \psi_{k_1} \dots \psi_{k_n} \rangle_L, \quad (5.53)$$

gdzie przez  $\langle \psi_{k_1} \dots \psi_{k_n} \rangle_L$  oznaczyliśmy kumulanty ( $L$  od *linked moments*). Dla jednej zmiennej  $\psi_{k_1} = \dots = \psi$  i  $\langle \psi^s \rangle = \kappa_s$ , zgodnie z oznaczeniami podrozdz. 2.1. Uwzględniając powyższe, otrzymujemy ostatecznie równanie

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(\{\psi_k\})}{\partial t} &= \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n \\ k_1 + \dots + k_n = n}} \frac{\partial}{\partial \psi_{k_1}} \dots \frac{\partial}{\partial \psi_{k_n}} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi_{k_1} \dots \psi_{k_n} \rangle_L \right\} p(\{\psi_k\}), \end{aligned} \quad (5.54)$$

zwane równaniem stochastycznym. Jeśli urwać szereg na wyrazie  $n = 2$ , to (5.54) przechodzi w znane m.in. w teorii dyfuzji **równanie Fokkera-Plancka**. Zapis (5.54) rozumiany jest ogólnie; jeśli pola  $\psi_k$  są pewnymi funkcjami  $\psi_k = \psi_k(x)$ , wówczas pochodne  $\partial/\partial \psi_k$  oznaczają pochodne funkcjonalne  $\delta/\delta \psi_k(x)$ .

Dla jednej zmiennej stochastycznej  $\psi$  równanie (5.54) przybiera postać

$$\frac{\partial p(\psi)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \psi^n} \left( \dot{\kappa}_n p(\psi) \right). \quad (5.55)$$

Dla zilustrowania powyższego rozumowania rozważmy stochastyczny ruch harmoniczny o równaniu  $x = 0$  i funkcjonale charakterystycznym

$$C\{s\} = \left\langle \exp \left[ i \int s(t') x(t') dt' \right] \right\rangle. \quad (5.56)$$

Równaniu  $x = 0$  odpowiada następujące równanie funkcjonalne

$$\frac{d^2}{dt^2} \frac{\delta C\{s\}}{\delta s(t)} = 0. \quad (5.57)$$

Dla ustalenia uwagi o funkcjach próbnych  $s(t')$  zakładamy, że

1. należą do klasy funkcji szybko malejących,
2. istnieje jedno-jednoznaczne przyporządkowanie między zbiorem wartości funkcji a zbiorem momentów

$$s_p := \int (t')^p s(t') dt' < \infty, \quad (5.58)$$

( $p = 0, 1, 2, \dots$ ) i *vice versa*, tak że

3.  $C$  może być traktowane jako funkcja momentów,

$$C = C(s_0, s_1, \dots).$$

Wówczas pochodna  $\delta/\delta s(t)$  wyrazi się wzorem

$$\frac{\delta C}{\delta s(t)} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\delta s_p}{\delta s(t)} \frac{\partial C}{\partial s_p} = \sum_{p=0}^{\infty} t^p \frac{\partial C}{\partial s_p}. \quad (5.59)$$

Funkcjonał  $C$  spełniający (5.57) może zależeć jedynie od  $s_0$  i  $s_1$ ; ma on więc postać

$$\begin{aligned} C\{s\} &= C \left\{ \int s(t') dt', \quad \int t' s(t') dt' \right\} \\ &= \int \exp \left\{ i \left[ x_0 \int s(t') dt' + v_0 \int t' s(t') dt' \right] \right\} p(x_0, v_0) dx_0 dv_0, \end{aligned} \quad (5.60)$$

gdzie  $p(x_0, v_0)$  jest rozkładem prawdopodobieństwa w przestrzeni fazowej cząstki w chwili początkowej. Z kolei jeśli rozkład  $p(x_0, v_0)$  jest rozkładem gaussowskim dla dwóch zmiennych stochastycznych niezależnych  $x_0$  i  $v_0$ , to odpowiednim rozwiązaniem (5.57) jest funkcjonal

$$C\{s\} = \exp \left[ -a \left( \int s(t') dt' \right)^2 - b \left( \int t' s(t') dt' \right)^2 \right]. \quad (5.61)$$

## 5.4 Pewne pojęcia termodynamiki informacyjnej

W naszych poprzednich rozważaniach (patrz Rozdział 2, a także podrozdz. 4.5) pojawiała się już pojęcie entropii czyli informacji, jako pewnego funkcjonału rozkładu prawdopodobieństwa. Funkcjonał ten dawał nam pewne kryterium wyboru (zwane zasadą maksimum entropii) rozkładu prawdopodobieństwa ze zbioru rozkładów, zwanego makrostanem, wyznaczonego przez pewne warunki uboczne. Było to statystyczne zastosowanie entropii jako **estymatora** rozkładu prawdopodobieństwa.

W niniejszym podrozdziale naszkocować pragniemy implikacje podejścia teorio-informacyjnego na gruncie termodynamiki, jak najszerzej pojętej. Na początek przypomnimy, że w klasycznej termodynamice statystycznej układowi fizycznemu o  $f$  stopniach swobody przyporządkowana jest przestrzeń fazowa  $\Gamma$ .<sup>6</sup>

Elementami przestrzeni fazowej  $\Gamma$  są ciągi  $(q, p)$  pędów  $p_1, \dots, p_f$  i położeń  $q_1, \dots, q_f$ . Elementy (punkty) przestrzeni fazowej nazywamy **stanami czystymi** układu. Równania Hamiltona

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (5.62)$$

( $i = 1, \dots, f$ ), przy warunkach początkowych i hamiltonianie niezależnym explicite od czasu wyznaczają nam jednoznacznie stan  $(q, p)(t)$  układu w chwili  $t$ :

$$(q, p)(t) = R_t(q, p), \quad R_0(q, p) = (q, p)(0). \quad (5.63)$$

Związek (5.63) określa pewną grupę  $\mathcal{R}$  przekształceń  $R_t$   $\Gamma$  na siebie, zwaną grupą ruchów mechanicznych,

$$\mathcal{R} = \{R_t : (q, p)(0) \rightarrow (q, p)(t) = R_t(q, p)(0)\}.$$

Grupa  $\mathcal{R}$  jest jednoparametrową grupą Lie'go i jest podgrupą grupy transformacji kanonicznych.<sup>7</sup> Jak wiadomo, przekształcenia kanoniczne są przekształceniami unimodularnymi. W przestrzeni  $\Gamma$  określić można algebrę  $\mathcal{B}_\Gamma$  zbiorów borelowskich oraz miarę Lebesgue'a  $\lambda(A)$  (zwaną w fizyce miarą Liouville'a). Mianowicie każdemu  $A \in \mathcal{B}_\Gamma$  przyporządkowana jest "objętość"  $\lambda(A)$ :

$$\lambda(A) = \int_A d\Gamma = \int_A dq_1 \dots dq_f dp_1 \dots dp_f. \quad (5.64)$$

Udowadnia się<sup>8</sup> **twierdzenie Liouville'a** mówiące, że miara Liouville'a jest jedyną miarą na  $\mathcal{B}_\Gamma$  niezmienniczą względem wszystkich przekształceń kanonicznych w przestrzeni fazowej  $\Gamma$ . Mając zdefiniowane pojęcie miary na  $\mathcal{B}_\Gamma$  rozszerzyć można pojęcie stanu czystego (punktu w przestrzeni

<sup>6</sup>dokładniejszą dyskusję znaleźć można w podręcznikach fizyki statystycznej, p. np. A. Kossakowski, Fizyka statystyczna I, Preprint Nr 64, Toruń, UMK 1969, Rozdz. III, p. także J. Łopuszański i A. Pawlikowski, Fizyka statystyczna, PWN, Warszawa, 1969, Rozdz. II.

<sup>7</sup>p. np. R. S. Ingarden, Elektrodynamika klasyczna i kwantowa, Toruń, UMK, 1970, s. 252.

<sup>8</sup>p. np. A. Kossakowski, odnośnik 6.

fazowej  $\Gamma$ ). Statystycznym stanem (lub krótko **stanem**) układu nazywać będziemy każdy element  $P$  zbioru  $\mathcal{P}$ , gdzie  $\mathcal{P}$  jest rodziną miar probalistycznych na  $\mathcal{B}_\Gamma$  postaci

$$P(A) = \int_A \rho(q, p) d\Gamma, \quad (5.65)$$

gdzie  $\rho(q, p)$  jest nieujemną funkcją określoną na przestrzeni fazowej  $\gamma$  taką, że

$$P(\Gamma) = \int_\Gamma \rho(q, p) d\Gamma. \quad (5.66)$$

Funkcję  $\rho(q, p)$  nazywamy **po pochodną Radona-Nikodyma** miary  $P(A)$  względem miary  $d\Gamma$ ;

$$\rho(q, p) = \frac{dP(A)}{d\Gamma}, \quad (A \in \mathcal{B}_\Gamma),$$

przy czym miara  $P(A)$  musi być absolutnie ciągła względem  $d\Gamma$ ,<sup>9</sup> co oznaczamy przez  $P(A) \ll d\Gamma$ . Zauważmy, że w "języku" probalistycznym  $\rho(q, p)$  jest gęstością pewnego rozkładu prawdopodobieństwa zmiennych  $q, p \in \Gamma$ . Pojęcie absolutnej ciągłości odgrywa rolę przy dowodzie odwrotnego twierdzenia Liouville'a, które mówi, że jeśli miara  $\mu(A)$  postaci

$$\mu(a) = \int_A \alpha(q, p) d\Gamma \quad (5.67)$$

gdzie

$$\alpha(q, p) = \frac{d\mu(A)}{d\Gamma},$$

jest niezmiennicza względem grupy przekształceń kanonicznych, tzn.

$$\mu(K^{-1}(A)) = \mu(A),$$

( $K$  – przekształcenie kanoniczne), to z dokładnością do stałej multiplikatywnej  $\alpha_0$  jest ona równa mierze Lebesgue'a  $\lambda(A)$ ;

$$\mu(A) = \alpha_0 \lambda(A). \quad (5.68)$$

Ponieważ

$$\mu(K^{-1}(A)) = \int_A \alpha(K^{-1}(Q, P)) dQ dP, \quad (5.69)$$

co wynika z tzw. twierdzenia Liouville'a, a założenia  $\mu(K^{-1}(A)) = \mu(A)$ , więc musi być  $\alpha(q, p) = \alpha(K^{-1}(q, p))$  identycznie dla wszystkich punktów i wszystkich funkcji, a stąd otrzymujemy,<sup>10</sup> że  $\alpha(q, p) = \alpha_0$ .

Dokonując pomiarów fizycznych mierzymy pewne wartości średnie wielkości fizycznych  $A_i = A_i(q, p)$  ( $q, p \in \Gamma, i = 1, 2, \dots, r$ ), gdzie wielkością fizyczną zwykło się nazywać funkcję rzeczywistą

<sup>9</sup>miara  $v_1(A)$  jest absolutnie ciągła względem miary  $v_2(A)$ ,  $A \in \mathcal{B}_\Gamma$ , co oznaczamy  $v_1 \ll v_2$ , wtedy i tylko wtedy, gdy z równości  $v_2(A) = 0$  wynika równość  $v_1(A) = 0$ .

<sup>10</sup>A. Kossakowski, odn. 6.

$A_i$  określoną na  $\Gamma$ . Wartością  $m_{A_i}(\rho) = M_{A_i}$  wielkości fizycznej  $A_i$  w stanie  $\rho$  nazywamy wartość średnią

$$M_{A_i} = m_{A_i}(\rho) = \int_{\Gamma} A_i(q, p) \rho(q, p) d\Gamma, \quad (i = 1, \dots, r). \quad (5.70)$$

Jednocześnie pomiar wartości  $M_{A_1}, \dots, M_{A_r}$  określa nam pewien zbiór  $\Phi_{A_1, \dots, A_r}$  stanów układu:

$$\Phi_{A_1, \dots, A_r} = \{\rho : m_{A_1}(\rho) = M_{A_1}, \dots, m_{A_r}(\rho) = M_{A_r}\}, \quad (5.71)$$

które nazywamy **makrostanem** ze względu na wielkości fizyczne  $A_1, \dots, A_r$ . Dowodzi się,<sup>11</sup> że makrostan jest **zbiorem wypukłym** stanów, tzn. dla stanów  $\rho_1, \rho_2 \in \Phi_{A_1, \dots, A_r}$  i dla liczb  $\alpha, \beta \geq 0$ ,  $\alpha + \beta = 1$ , stan  $\alpha\rho_1 + \beta\rho_2$  również należy do  $\Phi_{A_1, \dots, A_r}$ . Wielkości  $A_1 = A_1(q, p), \dots, A_r = A_r(q, p)$  tworzą zespół **termodynamicznie regularny**, o ile

1. są liniowo niezależne,
2. istnieją liczby rzeczywiste  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  takie, że spełniona jest nierówność

$$\int_{\Gamma} \exp[\lambda_1 A_1(q, p) + \dots + \lambda_r A_r(q, p)] d\Gamma < \infty. \quad (5.72)$$

Zdefiniujemy teraz pojęcie entropii stanu. Entropią  $s(\rho)$  stanu  $\rho$  nazywamy funkcjonal, określony dla wszystkich  $\rho \in \Phi$  ( $\Phi$  jest makrostanem ze względu na zespół termodynamicznie regularny) przez wyrażenie

$$s(\rho) = -k \int_{\Gamma} \rho(q, p) \ln \rho(q, p) d\Gamma, \quad (5.73)$$

$k$  jest stałą Boltzmanna. Wzór (5.73) jest szczególnym przypadkiem ogólniejszej formuły

$$s[\rho, \mu] = -k \int_{\Gamma} \rho(q, p) \ln \frac{\rho(q, p)}{\mu(q, p)} d\Gamma, \quad (5.74)$$

definiującej tzw. entropię względem miary  $\mu(q, p)$  (niekoniecznie probabilistycznej). Wybór  $\mu(q, p) = 1$  lub ogólniej  $\mu(q, p) = \alpha_0 = \text{const.}$ , związany jest z tym, że entropia postaci (5.73) jest **niezmiennicza względem grupy przekształceń kanonicznych** w  $\Gamma$ .

Wprowadzimy teraz pojęcie stanu reprezentatywnego. Niech  $\mathcal{P}$  będzie zbiorem wypukłym miar probabilistycznych na algebrze zdarzeń  $\mathcal{A}_N$ . Miarą probabilistyczną  $P^* \in \mathcal{P}$ , na której entropia  $s(P)$  osiąga wartość maksymalną,<sup>12</sup> gdzie

$$s(P) = -k \sum P_i \ln P_i, \quad k > 0, \quad \sum P_i = 1, \quad P_i \geq 0 < \quad i = 1, \dots, n,$$

(dla ustalenia uwagi rozważamy dyskretne zbiory zdarzeń), nazywamy rozkładem prawdopodobieństwa reprezentatywnym dla zbioru  $\mathcal{P}$ .

<sup>11</sup>A. Kossakowski, odn. 6.

<sup>12</sup>Jeśli  $\mathcal{P}$  jest zbiorem wypukłym, wówczas entropia (funkcjonal wypukły) osiąga wartość maksymalną na zbiorze  $\mathcal{P}$  na jednym i tylko jednym elemencie  $P^* \in \mathcal{P}$ , p. A. Kossakowski, odn. 6.

Z kolei zasada maksimum entropii (nazywana też zasadą maksymalnej niepewności, lub zasadą wariacyjną termodynamiki) Jaynesa,<sup>13</sup> Ingardena i Urbanika<sup>14</sup> brzmi następująco:

Niech  $\mathcal{P}$  będzie zbiorem wypukłym miar probabilistycznych, odpowiadającym stanowi naszej wiedzy o zdarzeniach. Przez miarę probabilistyczną najlepiej odpowiadającą stanowi naszej wiedzy o zdarzeniach będziemy rozumieć rozkład prawdopodobieństwa reprezentatywny dla zbioru  $\mathcal{P}$ .<sup>15</sup>

Przejdźmy teraz do przestrzeni  $\Gamma$ . Niech  $A_1, \dots, A_r$  tworzą termodynamicznie regularny zespół wielkości fizycznych, a  $\Phi_{A_1, \dots, A_r}$  - odpowiadający temu zespołowi makrostan. Zgodnie z zasadą maksimum entropii entropię  $\mathcal{S}(\Phi_{A_1, \dots, A_r})$  makrostanu  $\Phi_{A_1, \dots, A_r}$  definiujemy jako

$$\mathcal{S}(\Phi_{A_1, \dots, A_r}) = \sup \{s(\rho) : \rho \in \Phi_{A_1, \dots, A_r}\}, \quad (5.75)$$

gdzie  $s(\rho)$  określone jest wzorem (5.73). Stosując metodę nieoznaczonych mnożników Lagrange'a (p. Rozdział 2) otrzymujemy, że

$$\mathcal{S}(\Phi_{A_1, \dots, A_r}) = k \ln Z + \sum_{i=1}^r k \lambda_i M_{A_i}(\Phi_{A_1, \dots, A_r}) < \infty \quad (5.76)$$

a stan reprezentatywny  $\rho^*$  dla makrostanu  $\Phi_{A_1, \dots, A_r}$  ma postać

$$\rho^*(q, p) = Z^{-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \exp \{-\lambda_1 A_1(q, p) + \dots - \lambda_r A_r(q, p)\} \quad (5.77)$$

gdzie **suma stanów**  $Z$  dana jest wyrażeniem

$$Z(\lambda_1, \dots, \lambda_r) = \int_{\Gamma} \exp \{-\lambda_1 A_1(q, p) + \dots - \lambda_r A_r(q, p)\}. \quad (5.78)$$

Mnożniki Lagrange'a  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  określone są jednoznacznie przy pomocy równań

$$M_{A_i}(\Phi_{A_1, \dots, A_r}) = -\frac{\partial \ln Z(\lambda_1, \dots, \lambda_r)}{\partial \lambda_i}, \quad (i = 1, \dots, r). \quad (5.79)$$

Mając entropię dla danego makrostanu konstruować możemy termodynamikę. Takie ujęcie termodynamiki, oparte na entropii otrzymanej *via* zasada maksimum entropii, nosi nazwę **termodynamiki informacyjnej**. Teoria ta jest szerokim uogólnieniem termodynamiki statystycznej, gdzie rozpatrywano w zasadzie jedynie makrostany energii oraz makrostany energii i ilości cząstek. W szczególności w termodynamice informacyjnej wprowadza się uogólnioną temperaturę  $\theta_i$  ze względu na wielkość  $A_i$  jako

$$\theta_i := \frac{1}{\lambda_i} = \left[ \frac{\partial \mathcal{S}(\Phi_{A_1, \dots, A_r})}{\partial M_{A_i}} \right]^{-1}, \quad (i = 1, \dots, r). \quad (5.80)$$

Niech np. wielkościami  $A_i$  będą pewne termodynamicznie regularne obserwable  $F_a^k$ ,<sup>16</sup> które przebiegają dyskretne zbiory wartości  $f_{ja}^k$  ( $k = 1, \dots, N_a$ ;  $a = 1, \dots, m$ ). Oznaczając momenty

<sup>13</sup>E.T. Jaynes, Phys. Rev. **106** (1957) 620.

<sup>14</sup>R.S. Ingarden i K. Urbanik, Acta Phys. Polon. **21**(1962) 281, p. także R.S. Ingarden, Fortschr. Physik **12** (1964) 567, tamże **13** (1965) 755.

<sup>15</sup>p. A. Kossakowski, odn. 6.

<sup>16</sup>Przykład podany przez R.S. Ingardena, Fortschr. Physik. **13** (1965), s. 795.

statystyczne rzędu  $k$  tych wielkości przez  $M_{ka}$ , gdzie

$$M_{ka} = \sum_{j=1}^n p_j f_{ja}^k \quad (k = 1, \dots, N_a; a = 1, \dots, m), \quad (5.81)$$

otrzymujemy makrostan  $\Phi_{F_a^k}$

$$\Phi_{F_a^k} = \left\{ p_j : p_j > 0, \sum_{j=1}^n p_j = 1, \sum_{j=1}^n p_j f_{ja}^k = M_{ka}, \right. \\ \left. (k = 1, \dots, N_a; a = 1, \dots, m) \right\}. \quad (5.82)$$

Otrzymany metodą mnożników Lagrange'a rozkład reprezentatywny dla makrostanu (5.82) ma postać

$$p_j = Z^{-1} \exp \left[ - \sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^{N_a} \beta_{ks} f_{ja}^k \right], \quad (j = 1, \dots, n) \quad (5.83)$$

gdzie

$$Z = \sum_{j=1}^n \exp \left[ - \sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^{N_a} \beta_{ks} f_{ja}^k \right] \quad (5.84)$$

a współczynniki  $\beta_{ka}$  otrzymuje się z zależności

$$M_{ka} = - \frac{\partial Z(\{\beta_{ka}\})}{\partial \beta_{ka}}. \quad (5.85)$$

Wielkości typu (5.80)

$$\theta_{ka} = \frac{1}{\beta_{ka}} \quad (k = 1, \dots, N_a; a = 1, \dots, m) \quad (5.86)$$

noszą nazwę temperatur różnych **typów** ( $a = 1, \dots, m$ ) i **rzędów** ( $k = 1, \dots, N_a$ ).

Można badać jeszcze szersze klasy makrostanów, zakładając znajomość mieszanych momentów zmiennych  $F_a$ , typu

$$\sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} p_{j_1, \dots, j_m} f_{1j_1}^{k_1} \dots f_{mj_m}^{k_m} = M_{k_1 \dots k_m}, \quad (5.87)$$

$$p_{j_1, \dots, j_m} > 0 \quad (j_1 = 1, \dots, n_1; \dots; j_m = 1, \dots, n_m), \\ \sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} p_{j_1, \dots, j_m} = 1. \quad (5.88)$$

Warunki (5.87-5.88) wyznaczają makrostan, dla którego rozkład reprezentatywny ma postać

$$p_{j_1, \dots, j_m} = Z^{-1} \exp \left[ - \sum_{k_1 \dots k_m \in R} \beta_{k_1, \dots, k_m} f_{1j_1}^{k_1} \dots f_{mj_m}^{k_m} \right], \quad (5.89)$$

gdzie, jak zwykle,  $Z$  wyznaczamy z warunku normalizacji,  $R$  jest pewnym zbiorem liczbowym, a mnożniki  $\beta_{k_1 \dots k_m}$  są dane jako

$$\beta_{k_1, \dots, k_m} =: \frac{1}{\theta_{k_1 \dots k_m}} = \frac{\partial \mathcal{S}(\Phi_{M_{k_1 \dots k_m}})}{\partial M_{k_1 \dots k_m}}. \quad (5.90)$$

Mając entropię danego rozkładu reprezentatywnego tworzymy zasady termodynamiki w niżej podany sposób. Weźmy pod uwagę np. makrostan (5.82). Niech momenty  $M_{ka}$  dane wzorem (5.81) zależą od pewnych parametrów  $V_\mu$  ( $\mu = 1, \dots, q$ ), które nazwiemy parametrami zewnętrznymi (może to być objętość naczynia, natężenie zewnętrznego pola magnetycznego lub elektrycznego itp.). Wszystkie wartości spektralne wielkości  $F_a$  będą określonymi funkcjami tych parametrów zewnętrznych. Zmieniając  $V_\mu$  o infinitesimalne przyrosty  $dV_\mu$  otrzymamy<sup>17</sup> wzór na przyrost entropii

$$dS = \sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^{N_a} \frac{1}{\theta_{ka}} dM_{ka} + \sum_{\mu=1}^q P_a^{(\mu)} dV_\mu, \quad (5.91)$$

gdzie  $\theta_{ka}$  dane są przez (5.86), a

$$P_a^{(\mu)} = \left( \frac{\partial S}{\partial V_\mu} \right)_{M_{ka}}. \quad (5.92)$$

Wielkości  $P_a^{(\mu)}$  nazywamy **siłami uogólnionymi**. Entropia  $S(\{M_{ka}\})$  dla rozkładu (5.83), z definicji  $-\sum p_j \ln p_j$ , jest równa

$$S(\Phi_{F_k^a}) = \ln Z + \sum_{a=1}^m \sum_{k=1}^{N_a} \beta_{ka} M_{ka}, \quad (k = 1, \dots, N_a; a = 1, \dots, m). \quad (5.93)$$

Równanie (5.91) uważać można za uogólnienie pierwszej zasady termodynamiki, w związku z czym nazwiemy je **pierwszą zasadą termodynamiki informacyjnej**. Zauważmy dalej, że nasza podstawowa zasada maksimum informacji jest uogólnieniem drugiej zasady termodynamiki. Uogólnioną drugą zasadę termodynamiki (drugą zasadę termodynamiki informacyjnej), przedstawioną jako prawo zachowania entropii, otrzymujemy bezpośrednio z (31.30):

$$\oint dS = 0, \quad (5.94)$$

gdzie  $\oint$  oznacza całkowanie po zamkniętej drodze w przestrzeni ( $M = \{M_{ka}\}$ ,  $V = \{V_\mu\}$ ). Ponieważ może się zdarzyć, że zależności

$$M_{ka} = M_{ka}(V_\mu)$$

będą znane jedynie w sposób statystyczny, wówczas, zamiast (5.94) mamy

$$\oint dS \geq 0. \quad (5.95)$$

Dowodzi się jeszcze<sup>18</sup> trzecią zasadę termodynamiki informacyjnej, która mówi, że punkty  $\theta_{ka}, \dots (\theta_{kj}$  tworzą zbiór temperatur dowolnych rzędów i typów)  $= 0$ , są nieosiągalne.

Podaliśmy tu w wielkim skrócie zarys termodynamiki informacyjnej, ograniczając się tylko do ujęcia klasycznego. Metody termodynamiki informacyjnej używane są obecnie w coraz większym zakresie w różnych działach klasycznej i kwantowej fizyki statystycznej, o czym dokładniej będzie mowa w dalszym ciągu wykładu.

<sup>17</sup>p. R.S. Ingarden, Postępy Fizyki **15** (1964), s. 311.

<sup>18</sup>R.S. Ingarden i K. Urbanik, Acta Phys. Polon. **21**(1962) 281, p. także R.S. Ingarden, Fortschr. Physik **13** (1965) s.802, oraz A. Kossakowski, Fizyka statystyczna I, Toruń 1969, s.97.



## Rozdział 6

# Operatory i stany mieszane w teorii kwantowej

### Wstęp

Nasze dotychczasowe rozważania obejmowały elektrodynamikę statystyczną w ujęciu klasycznym. Obecnie będziemy zajmowali się elektrodynamiką statystyczną w aspekcie kwantowym. Podobnie jak w części klasycznej podstawą będzie monografia J.R. Klaudera i E.C.G. Sudarshana.<sup>1</sup> W tym rozdziale podamy niektóre podstawowe pojęcia mechaniki kwantowej i teorii liniowych operatorów w przestrzeni Hilberta. Tam, gdzie będzie to możliwe, będziemy stosowali formalizm Diraca (tzn. dla operatorów hermitowskich). Niniejszy rozdział jest w pewnym sensie rozszerzeniem Rozdziału 1. Części II skryptu R.S. Ingardena "Elektrodynamika klasyczna i kwantowa" (UMK, Toruń 1970), ale może być traktowany jako niezależna całość.

### 6.1 Pewne własności przestrzeni Hilberta

W mechanice kwantowej stanom czystym układu przyporządkowujemy wektory w (skończenie lub nieskończenie wymiarowej) ośrodkowej przestrzeni Hilberta, a obserwabłom i zmiennym dynamicznym - operatory liniowe działające w tej przestrzeni. Przypomnimy najpierw podstawowe własności przestrzeni Hilberta.

**Df. 6.1.1.** Przestrznią unitarną (prehilbertowską)  $\mathcal{H}_0$  nazywamy przestrzeń liniową, w której każdej parze elementów  $\psi, \varphi$  została przyporządkowana liczba zespolona  $(\psi, \varphi)$ , nazywana **iloczynem skalarnym** tych elementów, przy czym

$$1) \quad (\varphi, \psi) = \overline{(\psi, \varphi)} \quad (\text{kreska u góry oznacza sprzężenie zespolone}),$$

---

<sup>1</sup>J.R. Klauder, E.C.G. Sudarshan, Fundamentals of Quantum Optics, Benjamin, New York 1969.

$$2) \quad (\alpha\varphi, \psi) = \overline{\alpha}(\varphi, \psi), \quad (6.1)$$

$$3) \quad (\varphi + \psi, \chi) = (\varphi, \chi) + (\psi, \chi),$$

$$4) \quad (\varphi, \varphi) \geq 0, \quad (\varphi, \varphi) = 0 \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \varphi = 0.$$

W powyższych równościach  $\varphi, \psi, \chi$  są dowolnymi wektorami z przestrzeni  $\mathcal{H}_0$ , a  $\alpha$  dowolną liczbą zespoloną. W przestrzeni  $\mathcal{H}_0$  można zdefiniować **normę**, (długość) wektorów według wzoru

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)} \quad (6.2)$$

oraz **odległość** dwóch wektorów  $\varphi, \psi$  poprzez równość

$$d(\varphi, \psi) = \|\varphi - \psi\|. \quad (6.3)$$

W ten sposób wprowadzamy w przestrzeń  $\mathcal{H}_0$  strukturę przestrzeni metrycznej. Łatwo można sprawdzić, że odległość zdefiniowana wzorem (6.3) spełnia podstawowe własności metryki

$$\begin{aligned} 1) \quad & d(\varphi, \psi) \geq 0, \quad d(\varphi, \psi) = 0 \quad \text{tylko gdy} \quad \psi = \varphi \quad \text{dodatnia określoność,} \\ 2) \quad & d(\varphi, \psi) = d(\psi, \varphi) \quad (\text{symetria}), \\ 3) \quad & d(\varphi, \chi) \leq d(\varphi, \psi) + d(\psi, \chi) \quad (\text{nierówność trójkąta}). \end{aligned} \quad (6.4)$$

**Df. 6.1.2.** Przestrznię Hilberta  $\mathcal{H}$  nazywamy przestrzenią unitarną, zupełną w sensie zbieżności definiowanej przez normą (6.2).

**Df. 6.1.3.** Przestrzeń  $\mathcal{H}$  nazywamy ośrodkową, jeżeli istnieje zbiór co najwyżej przeliczalny  $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$ , gęsty w przestrzeni  $\mathcal{H}$ .

**Df. 6.1.4.** Układ wektorów  $\{\varphi_k\}$  przestrzedni Hilberta  $\mathcal{H}$  nazywamy układem ortonormalnym, jeżeli dla dowolnych dwóch wektorów  $\varphi_i, \varphi_k$  z tego układu zachodzi równość

$$(\varphi_i, \varphi_k) = \delta_{ik}. \quad (6.5)$$

**Df. 6.1.5.** Układ ortonormalny  $\{\varphi_k\}$  nazywamy układem zupełnym, jeżeli nie istnieje w przestrzeni  $\mathcal{H}$  element różny od zera, ortogonalny do wszystkich wektorów  $\varphi_i \in \{\varphi_k\}$  (dwa wektory są ortogonalne, gdy  $(\varphi, \psi) = 0$ ). Można udowodnić, że w dowolnej ośrodkowej przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$  ( $\dim \mathcal{H} > 0$ ) istnieje układ ortonormalny zupełny skończony lub przeliczalny.<sup>2</sup>

Przyjmując oznaczenia wprowadzone przez Diraca,<sup>3</sup> będziemy wektory przestrzeni Hilberta oznaczali przez  $|\psi\rangle$  (wektory "ket"). Dla każdej pary wektorów  $|\psi\rangle, |\varphi\rangle$  zapisujemy teraz iloczyn skalarny w postaci  $\langle\psi|\varphi\rangle$ , a normę wektora w postaci  $\|\varphi\| = \sqrt{\langle\varphi|\varphi\rangle}$ . Wektory  $\langle\psi|$  można utożsamiać z elementami przestrzeni dualnej do  $\mathcal{H}$  (wektory "bra").

Wektory bazy ortonormalnej będziemy oznaczali w notacji Diraca przez  $|m\rangle$ ; z definicji ortonormalności mamy zatem

$$\langle n|m\rangle = \begin{cases} 1, & \text{dla } n = m, \\ 0, & \text{dla } n \neq m. \end{cases} \quad (6.6)$$

<sup>2</sup>patrz np. W. Kołodziej, Wybrane działy analizy matematycznej, PWN, Warszawa 1970.

<sup>3</sup>patrz np. P.A.M. Dirac, The principles of Quantum Mechanics, 4th ed. Oxford 1958.

Jeżeli baza ortonormalna  $\{|n\rangle\}$  jest zupełna, to dla każdego wektora  $|\psi\rangle$  zachodzi równość

$$|\psi\rangle = \sum_{n=1}^N \psi_n |n\rangle = \sum_{n=1}^N |n\rangle \langle n|\psi\rangle, \quad (6.7)$$

gdzie  $N = \dim \mathcal{H}$  (skończony lub nieskończony)<sup>4</sup>(wymiar - z ang. *dimension*). Kwadrat normy dowolnego wektora daje się zatem przedstawić w postaci

$$\langle\psi|\psi\rangle = \sum_{n=1}^N |\psi_n|^2 = \sum_{n=1}^N \langle\psi|n\rangle \langle n|\psi\rangle. \quad (6.8)$$

Oczywiście dla dowolnego wektora  $|\psi\rangle$  musi zachodzić nierówność  $\langle\psi|\psi\rangle < \infty$ . W tej notacji dowolny iloczyn skalarny przyjmie formę analogiczną do iloczynu zwykłych wektorów wyrażonych przez ich składowe

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \sum_{n=1}^N \langle\varphi|n\rangle \langle n|\psi\rangle. \quad (6.9)$$

Szczególnie ważnymi ze względu na zastosowanie w mechanice kwantowej są przestrzenie  $\ell^2$  i  $\mathcal{L}^2$ .

**Df. 6.1.6.** Przestrzeń  $\ell^2$  jest przestrzenią ciągów  $x = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots\}$ ,  $\xi_n \in \mathbb{C}$ , dla których zbieżny jest szereg  $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2$ . Można pokazać, że  $\ell^2$  jest przestrzenią liniową. Iloczyn skalarny dwu wektorów  $x = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$  i  $y = \{\eta_1, \eta_2, \dots\}$  definiujemy wzorem

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\xi}_i \eta_i. \quad (6.10)$$

Udowadnia się, że przestrzeń  $\ell^2$  z tak zdefiniowanym iloczynem skalarnym jest przestrzenią unitarną i zupełną, tzn. przestrzenią Hilberta.

**Df. 6.1.7.** Elementami przestrzeni  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  są takie funkcje mierzalne  $x(\tau)$ , dla których zachodzi  $\int_{\Omega} |x(\tau)|^2 d\tau < +\infty$ . Można pokazać, że  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  jest przestrzenią liniową. Iloczyn skalarny dwu wektorów  $x(\tau)$  i  $y(\tau) \in \mathcal{L}^2(\Omega)$  określamy wzorem

$$(x, y) = \int_{\Omega} \overline{x(\tau)} y(\tau) d\tau. \quad (6.11)$$

Przestrzeń  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  jest również przestrzenią Hilberta.

Stany czyste układów są w mechanice kwantowej reprezentowane przez unormowane wektory w przestrzeni Hilberta.

## 6.2 Operatory liniowe w przestrzeni Hilberta

W mechanice kwantowej wielkości fizyczne reprezentowane są przez operatory liniowe w odpowiedniej dla danego zagadnienia przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$ .

---

<sup>4</sup>Dowód znajduje się w cytowanej książce W. Kołodzieja.

**Df. 6.2.1.** Operator  $A$  jest liniowy, jeżeli jego dziedziną  $D_A$  jest cała przestrzeń  $\mathcal{H}$  lub jej dowolna podprzestrzeń i jeżeli dla dowolnych wektorów  $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$  należących do  $D_A$  oraz dowolnych liczb zespolonych  $\alpha_1, \alpha_2$  zachodzi równość

$$A(\alpha_1|\psi_1\rangle + \alpha_2|\psi_2\rangle) = \alpha_1 A|\psi_1\rangle + \alpha_2 A|\psi_2\rangle. \quad (6.12)$$

**Df. 6.2.2.** Operator  $A$  nazywamy **częściowym**, gdy jego dziedzina  $D_A$  jest podprzestrzenią właściwą przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$ .

W przypadku operatorów częściowych, interesujących z fizycznego punktu widzenia, dziedzina ich jest zwykle gęsta w przestrzeni, tzn.  $\overline{D_A} = \mathcal{H}$ , gdzie kreską oznaczamy domknięcie zbioru  $D_A$ . Żądanie liniowości operatora uzasadnione jest zasadą superpozycji stanów.

W mechanice kwantowej interesujące są te operatory liniowe, które posiadają wektory własne i wartości własne.

**Df. 6.2.3.** Wartością własną operatora  $A$  nazywamy różną od zera liczbę  $\lambda$ , dla której zachodzi równość  $A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$ , dla pewnego (różnego od wektora zerowego) wektora  $|\psi\rangle$ .

Jeżeli  $N = \dim \mathcal{H} < \infty$ , to każdy operator liniowy ma przynajmniej jedną wartość własną i jeden wektor własny. Na przykład w przestrzeni euklidesowej  $\mathcal{R}^N$  operator zdefiniowany wzorami  $y = Ax$ , gdzie  $y_i = x_i + x_{i+1}$  dla  $i = 1, \dots, N-1$  oraz  $y_N = x_N$ , ma tylko jedną wartość własną  $\lambda = 1$ . W przestrzeniach nieskończenie wymiarowych istnieją operatory, które nie mają wartości własnych. Znaczenie wartości własnych w mechanice kwantowej polega na interpretacji ich jako jedynie możliwych wyników pomiaru wielkości fizycznej związanej z danym operatorem. Ze względu na tę interpretację podstawową rolę odgrywają operatory o rzeczywistych wartościach własnych.

**Df. 6.2.4.** Operator liniowy  $A$  nazywamy ograniczonym, jeżeli istnieje taka liczba nieujemna  $b$ , że

$$\|A\psi\| \leq b\|\psi\|, \quad (6.13)$$

dla wszystkich wektorów  $|\psi\rangle \in D_A$ .

Jeżeli operator  $A$  jest ograniczony, to wśród liczb  $b$  spełniających dla każdego  $|\psi\rangle \in D_A$  nierówność (6.13) istnieje liczba najmniejsza; nazwiemy ją normą operatora  $A$  i oznaczamy symbolem  $\|A\|$ . Można pokazać, że zachodzi równość

$$\|A\| = \sup_{\|\psi\|=1, \psi \in D_A} \|A\psi\|, \quad (6.14)$$

Wśród operatorów nieograniczonych (nie posiadających normy) istotną rolę odgrywają operatory różniczkowania oraz mnożenia przez współrzędną. Wszystkie rozpatrywane w dalszym ciągu operatory będą liniowe i ograniczone.

**Df. 6.2.5.** Operator  $A^*$  nazywamy operatorem sprzężonym do operatora  $A$ , liniowego i ograniczonego, jeżeli spełnia on równość

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, A^*\psi), \quad (6.15)$$

dla dowolnych  $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ .<sup>5</sup>

Zachodzi następujące twierdzenie:

**Twierdzenie VII.1** Operator  $A^*$  - sprzężony z operatorem liniowym ograniczonym  $A$  w przestrzeni  $\mathcal{H}$ , jest operatorem liniowym, ograniczonym, i

$$\|A^*\| = \|A\|. \quad (6.16)$$

Podamy teraz najważniejsze typy operatorów.

**Df. 6.2.6.** Jeżeli zachodzi równość  $A = A^*$ , wówczas operator  $A$  nazywamy **samosprężonym** lub **hermitowskim** (te 2 pojęcia są ekwiwalentne dla operatorów ograniczonych). Oczywiście operator  $A$  jest samosprężony wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi), \quad (6.17)$$

dla każdego  $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ . Wszystkie wartości własne operatora samosprężonego są rzeczywiste.

**Df. 6.2.7.** Operator  $A$  nazywamy **unitarnym**, jeżeli posiada następującą własność

$$AA^* = A^*A = I, \quad (6.18)$$

gdzie  $I$  jest operatorem jednostkowym. Jeżeli  $\{|n\rangle\}$  jest układem ortonormalnym zupełnym w przestrzeni  $\mathcal{H}$ , wówczas operator  $I$  można przedstawić w postaci

$$I = \sum_{n=1}^N |n\rangle\langle n|,$$

gdzie  $N = \dim \mathcal{H}$ . Operator  $|n\rangle\langle n|$  jest operatorem rzutu na podprzestrzeń rozpiętą przez wektor  $|n\rangle$ .

**Df. 6.2.8.** Operator  $A$  nazywamy **normalnym**, jeżeli spełnia równość

$$AA^* = A^*A. \quad (6.19)$$

Każdy operator samosprężony oraz każdy operator unitarny jest operatorem normalnym. Związki między tymi operatorami można następująco (Rys. 6.1):

**Df. 6.2.9.** Operatory samosprężone, które są jednocześnie unitarnymi, nazywamy operatorami symetrii. Spełniają one równość

$$A = A^*, \quad A^2 = I. \quad (6.20)$$

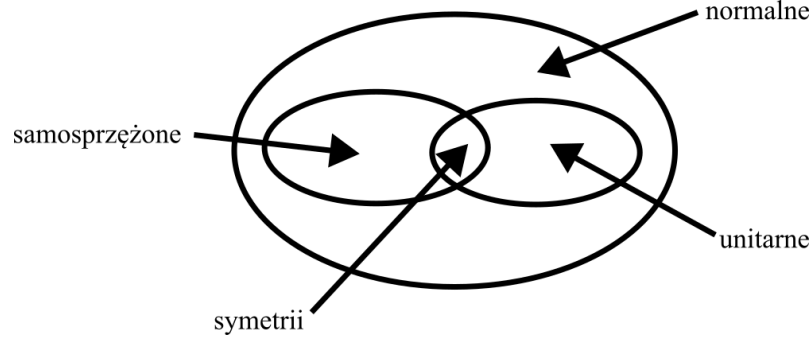
Wartościami własnymi operatorów symetrii są liczby 1 i  $-1$ .

**Df. 6.2.10.** Operator normalny spełniający warunek

$$A^* = -A \quad (6.21)$$

---

<sup>5</sup>Ograniczamy się tu do operatorów o dziedzinie  $D_A = \mathcal{H}$ ; dokładniejsza analiza tych problemów zawarta jest w skrypcie R.S. Ingardena "Elektrodynamika klasyczna i kwantowa", UMK, Toruń 1970, Cz. II, Rozdz. I.



Rysunek 6.1: Związki między operatorami

nazywamy operatorem antyhermitowskim (antysprężonym). Dla każdego samosprężonego  $A$  operator  $iA$ , gdzie  $i = \sqrt{-1}$ , jest operatorem antyhermitowskim.

Jeżeli  $A$  jest operatorem hermitowskim, wtedy dla każdego  $\varphi \in D_A$

$$\|A\varphi \pm i\varphi\|^2 = \|A\varphi\|^2 + \|\varphi\|^2.$$

Zatem operator  $A \pm iI$  jest odwracalny (przyjmuje wartość zera tylko dla  $\varphi = 0$ ) i istnieje operator

$$U = (A - iI)(A + iI)^{-1}. \quad (6.22)$$

Operator  $U$  nazywany jest **przekształceniem Caylaya**<sup>6</sup> operatora  $A$ . Łatwo sprawdzić, że  $UU^* = U^*U = I$ . Równość (6.22) można rozwiązać względem operatora  $A$

$$A = i(I + U)(I - U)^{-1}. \quad (6.23)$$

W ten sposób otrzymujemy tzw. odwrotne przekształcenie Caylaya.

**Df. 6.2.11.** Operator hermitowski  $A$  nazywamy dodatnio określonym, jeżeli

$$\forall \varphi \in \mathcal{H}, \quad \langle \varphi | A | \varphi \rangle \geq 0. \quad (6.24)$$

Wszystkie wartości własne operatora hermitowskiego dodatnio określonego są nieujemne.

**Df. 6.2.12.** Operator dodatnio określony  $A$  nazywamy **operatorem klasy śladowej**, (ang. *traceable*) gdy niezależnie od wyboru bazy  $|n\rangle$ ,

$$\sum_{n=1}^N \langle n | A | n \rangle < \infty. \quad (6.25)$$

Tutaj  $N = \dim \mathcal{H}$ , a  $\{|n\rangle\}$  jest ortonormalną bazą w  $\mathcal{H}$ . Sumę występującą we wzorze (6.25) nazywamy śladem operatora i oznaczamy  $\text{Tr } A$ .

**Df. 6.2.13.** Operator liniowy  $A$  nazywamy **pełnociągłym**, gdy odwzorowuje on dowolny zbiór ograniczony w zbiór zwarty.

---

<sup>6</sup>A. Caylay żył w latach 1821-1895.

Każdy operator pełnociągły jest ograniczony. Można udowodnić, że każdy pełnociągły operator  $A$  ma postać  $A = UT$ , gdzie  $T$  jest dodatnio określonym operatorem pełnociągłym, a  $U$  operatorem izometrycznym. Szczególnie prostą strukturę mają operatory samosprężone pełnociągłe. Jeżeli  $A$  jest operatorem samosprężonym pełnociągłym, to w przestrzeni  $\mathcal{H}$  można wybrać ortogonalną unormowaną bazę  $\{\varphi_k\}$ , zbudowaną z wektorów własnych tego wektora. Pełnociągły operator  $A$  nazywamy **jądrowym**, jeżeli jest zbieżny szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$  zbudowany z wartości własnych operatora  $T$  wchodzącego w rozkład  $A = UT$ . Dla dodatnio określonych operatorów pojęcie operatora jądrowego pokrywa się z pojęciem operatora klasy śladowej. Zachodzi następujące twierdzenie:

**Twierdzenie VII.2.** Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby pełnociągły dodatnio określony operator  $A$  był jądrowy, jest istnienie skończonego śladu operatora  $A$ ;  $\text{Tr } A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$ .

Dowolny pełnociągły operator  $A$  może być przedstawiony w postaci szeregu

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n\rangle \lambda_n \langle \psi_n|, \quad (6.26)$$

gdzie  $\{|\varphi_n\rangle\}$  i  $\{|\psi_n\rangle\}$  są ortonormalnymi bazami w  $\mathcal{H}$ , a  $\lambda_n$  dodatnimi liczbami dążącymi do zera, gdy  $n \rightarrow \infty$ . Odwrotnie, każdy szereg postaci (6.26), w którym  $\{|\varphi_n\rangle\}$ ,  $\{|\psi_n\rangle\}$  i  $\lambda_n$  mają podane wyżej własności, określa operator pełnociągły.

## 6.3 Stany czyste i stany mieszane

W mechanice kwantowej unormowane wektory przestrzeni  $\mathcal{H}$  odpowiadają stanom czystym układu, a operatory liniowe samosprężone odpowiadają wielkościom fizycznym. Niech  $\mathcal{O}$  będzie operatorem samosprężonym odpowiadającym pewnej wielkości fizycznej. Średnia wartość  $\mathcal{O}$  w stanie  $|\psi\rangle$  równa jest pewnej liczbie rzeczywistej

$$\langle \mathcal{O} \rangle \equiv \langle \psi | \mathcal{O} | \psi \rangle. \quad (6.27)$$

Wyższe momenty potęgowe określone są również przez liczby rzeczywiste

$$\langle \mathcal{O}^n \rangle \equiv \langle \psi | \mathcal{O}^n | \psi \rangle. \quad (6.28)$$

Analogicznie jak w klasycznej teorii prawdopodobieństwa funkcja charakterystyczna rozkładu w stanie  $|\psi\rangle$  zadana jest wzorem

$$C_{\mathcal{O}}(s) = \langle \psi | e^{is\mathcal{O}} | \psi \rangle, \quad (6.29)$$

gdzie  $\exp(is\mathcal{O})$  jest operatorem unitarnym. Jest to funkcja charakterystyczna dla stanu czystego. Funkcja  $C_{\mathcal{O}}(s)$  jest transformatą Fouriera rozkładu wartości obserwowanych odpowiadających operatorowi  $\mathcal{O}$ . Te obserwowane wartości mają rozrzut, tzn. różną od zera dyspersję, jeżeli stan  $|\psi\rangle$  nie jest stanem własnym operatora  $\mathcal{O}$ . Ale nawet wówczas, gdy wektor  $|\psi\rangle$  jest wektorem własnym operatora  $\mathcal{O}$ , może on nie być wektorem własnym innych operatorów odpowiadających innym obserwabłom, gdyż nie wszystkie operatory komutują. Zatem w dowolnym stanie czystym zawsze

pewne obserwowane wielkości mają rozrzut opisywany pewnym rozkładem. Widzimy, że teoria kwantowa jest od podstaw teorią statystyczną.

Gdy zadane są wszystkie momenty, wtedy można jednoznacznie wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa. Oczywiście momenty nie mogą być zupełnie dowolne. Gdy wartości  $\lambda_n$  obserwabli  $\mathcal{O}$  występują z prawdopodobieństwami  $p_n$ , wówczas definiujemy wielkość

$$s)_{\mathcal{O}} = - \sum_{n=1}^{\infty} p_n \ln p_n, \quad p_n \geq 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1, \quad (6.30)$$

którą będziemy nazywali entropią związaną z obserwabłą  $\mathcal{O}$ .

Dwa stany uważamy za równoważne, jeżeli w tych stanach są równe średnie wartości wszystkich wielkości obserwowalnych. Wynika stąd, że wektory  $|\psi_1\rangle$  i  $|\psi_2\rangle$  odpowiadają jednakowym stanom wtedy i tylko wtedy, gdy  $|\psi_1\rangle = \exp(i\varphi)|\psi_2\rangle$ . W ten sposób dany stan jest opisywany przez całą rodzinę wektorów o normie również jedności.

Stany czyste można również opisywać przy pomocy macierzy gęstości postaci  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ . Teraz wartość średnią możemy liczyć według przepisu

$$\langle\mathcal{O}\rangle \equiv \text{Tr}(\rho\mathcal{O}). \quad (6.31)$$

Równowartość obu definicji na wartość średnią jest oczywista

$$\begin{aligned} \langle\mathcal{O}\rangle &= \text{Tr}(\rho\mathcal{O}) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle n|\psi\rangle\langle\psi|\mathcal{O}|n\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle\psi|\mathcal{O}|n\rangle\langle n|\psi\rangle = \langle\psi|\mathcal{O}|\psi\rangle. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Łatwo można również sprawdzić idempotentność macierzy gęstości dla stanu czystego (unormowanego)

$$\rho^2 = |\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi| = \rho. \quad (6.33)$$

Stanem mieszanym nazywamy zbiór stanów czystych występujących z prawdopodobieństwami  $p_n$ , opisany macierzą gęstości

$$\rho = \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n\rangle p_n \langle n|\psi_n|. \quad (6.34)$$

Ogólnie żądamy, aby macierz gęstości była dodatnio określona i spełniała warunek  $\text{Tr}\rho = 1$ . wobec tego dowolna macierz gęstości jest dodatnio określonym operatorem jądrowym i jako taki zawsze może być przedstawiony w postaci (6.34), gdzie  $p_n \geq 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$ , a  $\{|\psi_n\rangle\}$  tworzą bazę w  $\mathcal{H}$ .

Operatorem  $\rho$  działając na stan  $|\psi_n\rangle$  daje

$$\rho|\psi_n\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k\rangle p_k \langle\psi_k|\psi_n\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{nk} p_k |\psi_k\rangle = p_n |\psi_n\rangle,$$

tzn. wektory  $|\psi_n\rangle$  są wektorami własnymi  $\rho$ .

Pojęcie **macierzy gęstości** jest odpowiednikiem **gęstości prawdopodobieństwa** w przestrzeni fazowej pędów i położeń  $(q, p)$  w fizyce klasycznej. Ponieważ tu zmienne  $q$  i  $p$  są ciągłe, używamy gęstości prawdopodobieństwa  $\rho(q, p)$  spełniającej warunki  $\rho(q, p) \geq 0$  oraz  $\int_{\Omega} \rho(q, p) dq dp = 1$ . Formalnie te same warunki nakładamy na macierze (operatory) gęstości w mechanice kwantowej. Analizując ogólną postać operatorów gęstości daną wzorem (6.34), widzimy, że ogólny operator gęstości jest wypukłą kombinacją liniową operatorów gęstości stanów czystych. Zbiór operatorów gęstości jest wypukły: jeżeli należą do niego operatory  $\rho_1$  i  $\rho_2$ , to należą również wszystkie punkty odcinka, którego punktami ekstremalnymi<sup>7</sup> są operatory  $\rho_1$  i  $\rho_2$ . Stany czyste są wszystkimi punktami ekstremalnymi zbioru  $\{\rho\}$  dowolnych operatorów gęstości. Elementy brzegowe zbioru  $\{\rho\}$  charakteryzowane są poprzez warunek  $\det(\rho) = 0$ . Warunek ten w szczególności zachodzi dla stanów czystych. Biorąc  $\rho$  w reprezentacji diagonalnej, otrzymujemy na przekątnej liczby odpowiadające prawdopodobieństwu poszczególnych stanów czystych w zbiorze stanu mieszanego.

Aksjomatyczna definicja informacji (entropii) w mechanice kwantowej prowadzi do formuły von Neumanna na informację  $s(\rho)$  stanu  $\rho$ , tzn.

$$s(\rho) = -\text{Tr}(\rho \ln \rho). \quad (6.35)$$

Tak zdefiniowana entropia spełnia nierówność

$$0 \leq s(\rho) \leq \ln N$$

dla dowolnego  $\rho$ , przy czym  $N = \dim \mathcal{H} < \infty$ . Najmniejszą wartość  $s = 0$  entropia przyjmuje dla stanów czystych. Jak pokazał O. Klein, pomiędzy entropią  $s(\rho)$  daną przez (6.35) a entropią (6.30) zachodzi nierówność

$$s(\rho) \leq s_{\mathcal{O}}(\rho). \quad (6.36)$$

**Df. 6.3.1.** Zbiór  $\Omega$  z określoną na nim  $\sigma$ -algebrą zbiorów  $\mathcal{A}$  i zupełną miarą  $\mu$ , określoną na  $\mathcal{A}$  i spełniającą warunek  $\mu(\Omega) = 1$  nazywamy przestrzenią probabilistyczną. Od miary  $\mu$  żądamy zatem, aby spełniała warunki:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \mu(X) \geq 0 \quad \text{dla każdego } X \in \mathcal{A}, \\ 2) \quad & \mu(\emptyset) = 0, \quad \mu(\Omega) = 1, \\ 3) \quad & \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(X_i), \quad \text{gdy } X_i \cap X_j = \emptyset, \end{aligned} \quad (6.37)$$

i była zupełna. W mechanice kwantowej jako elementy  $\mathcal{A}$  bierzemy domknięte podprzestrzenie przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$ . Jeżeli przez  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  oznaczymy zbiór podprzestrzeni przestrzeni  $\mathcal{H}$  i przez sumę dwóch podprzestrzeni będziemy rozumieli najmniejszą podprzestrzeń zawierającą obie, a

<sup>7</sup>Jeżeli  $W$  jest zbiorem wypukłym, to punkt  $x \in W$  nazywamy ekstremalnym, jeżeli równość  $x = (1-t)x_1 + tx_2$ , gdzie  $t \in (0, 1)$ ,  $x_1, x_2 \in W$  możliwa jest tylko wtedy gdy  $x_1 = x_2$ .

przez iloczyn największą zawartą w obu, to na zbiorze  $\mathcal{LH}$ ) można będzie określić miarę  $\mu$  spełniającą własności (6.37). Można również udowodnić następujące ważne twierdzenie o postaci dowolnej miary na przestrzeni  $\mathcal{H}$ .

**Twierdzenie VII.4** (A.M. Gleason 1957).

Niech  $\mu$  będzie miarą na domkniętych podprzestrzeniach ośrodkowej przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$  o wymiarze większym lub równym trzy. Istnieje wówczas dodatnio określony operator  $\rho$  klasy śladowej, taki że dla wszystkich domkniętych podprzestrzeni  $\mathcal{L}$  przestrzeni  $\mathcal{H}$

$$\mu(\mathcal{L}) = \text{Tr}(\rho \mathcal{P}_{\mathcal{L}}), \quad (6.38)$$

gdzie  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$  jest operatorem rzutu ortogonalnego na  $\mathcal{L}$ . W przypadku gdy  $N = \dim \mathcal{H} = 2$ , twierdzenie Gleasona nie obowiązuje. W przestrzeni o wymiarze 2 można otrzymać klasyczną wersję prawdopodobieństwa. Jest to związane z tzw. **parametrami ukrytymi**. Von Neumann twierdził, że skonstruowanie modelu klasycznego jest niemożliwe. Okazało się jednak, że jest możliwa konstrukcja klasycznego modelu dla  $N = 2$  (spin).

## 6.4 Stany polaryzacji fali monochromatycznej

Rozpatrzmy stany polaryzacji monochromatycznej fali jako przykład układu o skończonej liczbie niezależnych stanów. Upraszczamy problem ustalając pozostałe stopnie swobody - w ten sposób fala świetlna ma tylko dwa niezależne stany, którymi są dwie liniowe polaryzacje. Stany będziemy opisywali w dwuwymiarowej przestrzeni Hilberta ( $N = \dim \mathcal{H} = 2$ ). Wobec tego stany czyste można przedstawić przy pomocy unormowanych wektorów o dwu składowych

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, & \langle\psi| &= (\bar{u}_1, \bar{u}_2), \\ \text{ i } & \langle\psi|\psi\rangle &= |u_1|^2 + |u_2|^2 = 1. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Wartości  $u_i$  określają charakter polaryzacji. Na przykład, przy  $u_1 = 0, u_2 \neq 0$  (lub odwrotnie) fala jest liniowo spolaryzowana. Macierz gęstości stanu czystego (6.39) jest macierzą hermitowską  $2 \times 2$  o śladzie równym 1,

$$\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} (\bar{u}_1, \bar{u}_2) = \begin{pmatrix} |u_1|^2 & \bar{u}_2 u_1 \\ \bar{u}_1 u_2 & |u_2|^2 \end{pmatrix}. \quad (6.40)$$

Warunek dodatniej określoności przyjmuje tu postać  $\rho_{11} = |u_1|^2 \geq 0$  i  $\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}\rho_{21} \geq 0$ . Łatwo można sprawdzić, że dla stanu  $\rho_\psi$  zachodzi  $\det \rho_\psi = 0$ . Rzeczywiście

$$\det \rho_\psi = |u_1|^2 |u_2|^2 - |u_1|^2 |u_2|^2 = 0. \quad (6.41)$$

Bardzo wygodne przedstawienie  $\rho$  zarówno dla stanów czystych, jak i mieszanych, otrzymujemy, wprowadzając tak zwane parametry Stokesa.<sup>8</sup> Dla stanu czystego danego (6.39) te parametry są

<sup>8</sup>G.G. Stokes (1852).

określone następująco:

$$\begin{aligned}
s_0 &= \bar{u}_1 u_1 + \bar{u}_2 u_2 = 1 = \rho_{11} + \rho_{22}, \\
s_1 &= \bar{u}_1 u_2 + \bar{u}_2 u_1 = \rho_{21} + \rho_{12}, \\
s_2 &= i(\bar{u}_2 u_1 - \bar{u}_1 u_2) = i(\rho_{12} - \rho_{21}), \\
s_3 &= \bar{u}_1 u_1 - \bar{u}_2 u_2 = \rho_{11} - \rho_{22}.
\end{aligned} \tag{6.42}$$

Wyrażając teraz  $\rho_\psi$  (dla stanu czystego) poprzez  $s_0, s_1, s_2, s_3$ , otrzymujemy

$$\rho_\psi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} s_0 + s_3 & s_1 - is_2 \\ s_1 + is_2 & s_0 - s_3 \end{pmatrix}. \tag{6.43}$$

Ostatni wzór przyjmujemy jako definicję parametrów Stokesa dla dowolnego  $\rho$  (niekoniecznie dla stanu czystego).

Wprowadzając macierze Pauliego

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{6.44}$$

możemy napisać dla dowolnego  $\rho$

$$\rho = \frac{1}{2}(s_0\sigma_0 + s_1\sigma_1 + s_2\sigma_2 + s_3\sigma_3) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \mathbf{s}\boldsymbol{\sigma}), \tag{6.45}$$

gdzie  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ , i  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ .

Ze wzoru (6.43) natychmiast dostajemy

$$\det \rho = \frac{1}{4}(s_0^2 - \mathbf{s}^2). \tag{6.46}$$

Dla stanu czystego  $\det \rho = 0$  zatem  $\mathbf{s}^2 = s_0^2 - 1$ . Wobec tego w oznaczeniach Stokesa stany czyste są przedstawione przez wektory jednostkowe  $\mathbf{s}$ . Dla stanów mieszanych

$$0 \leq \mathbf{s}^2 \leq 1. \tag{6.47}$$

Stopień polaryzacji  $\mathcal{P}$  określamy równością

$$\mathcal{P}^2 = \mathbf{s}^2 \tag{6.48}$$

niezależnie od postaci polaryzacji (liniowa, kołowa). Zachodzi nierówność

$$0 \leq \mathcal{P}^2 \leq 1. \tag{6.49}$$

Gdy  $\mathcal{P} = 1$  - polaryzacja jest pełna, gdy  $\mathcal{P} = 0$  - mamy depolaryzację. Stanowi  $\mathcal{P} = 0$  odpowiada macierz  $\rho$  postaci (całkowicie chaotyczny stan)

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{6.50}$$

Korzystając z reguł antykomutacji dla  $\sigma_k$ , łatwo sprawdzić, że dla  $k = 0, 1, 2, 3$

$$s_k = \text{tr}(\rho \sigma_k). \quad (6.51)$$

Ponieważ macierze gęstości w rozpatrywanym przez nas przypadku są jednoznacznie scharakteryzowane przez wektory  $\mathbf{s}$ , zatem zbiór macierzy gęstości można interpretować jako kule w przestrzeni  $R^3$ . Stany czyste leżą na powierzchni kuli  $|\mathbf{s}|^2 = 1$ .

Entropia von Neumanna w stanie (6.50) wynosi

$$s[\rho] = -\text{Tr}(\rho \ln \rho) = -\rho_1 \ln \rho_1 - \rho_2 \ln \rho_2 = \ln 2.$$

Wykorzystując wzór (6.46) i oznaczając przez  $\rho_1$  i  $\rho_2$  wartości własne macierzy  $\rho$ , możemy napisać

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^2 &= 1 - 4 \det(\rho) = (\rho_1 + \rho_2)^2 - 4\rho_1\rho_2 \\ &= (\rho_1 - \rho_2)^2, \end{aligned} \quad (6.52)$$

gdyż  $\text{Tr} \rho = \rho_1 + \rho_2 = 1$  i  $\det(\rho) = \rho_1\rho_2$ . Ponieważ  $\rho_1 + \rho_2 = 1$ , więc  $\rho_1 - \rho_2 = 2\rho_1 - 1 = 1 - 2\rho_2$ . Wzór (6.52) możemy więc przepisać w postaci

$$\mathcal{P}^2 = (\rho_1 - \rho_2)^2 = (2\rho_1 - 1)^2 = 4 \left( \rho_1 - \frac{1}{2} \right)^2. \quad (6.53)$$

Weźmy teraz

$$\begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + s_3 & 0 \\ 0 & 1 - s_3 \end{pmatrix}. \quad (6.54)$$

Dla małych  $s_3$  mamy

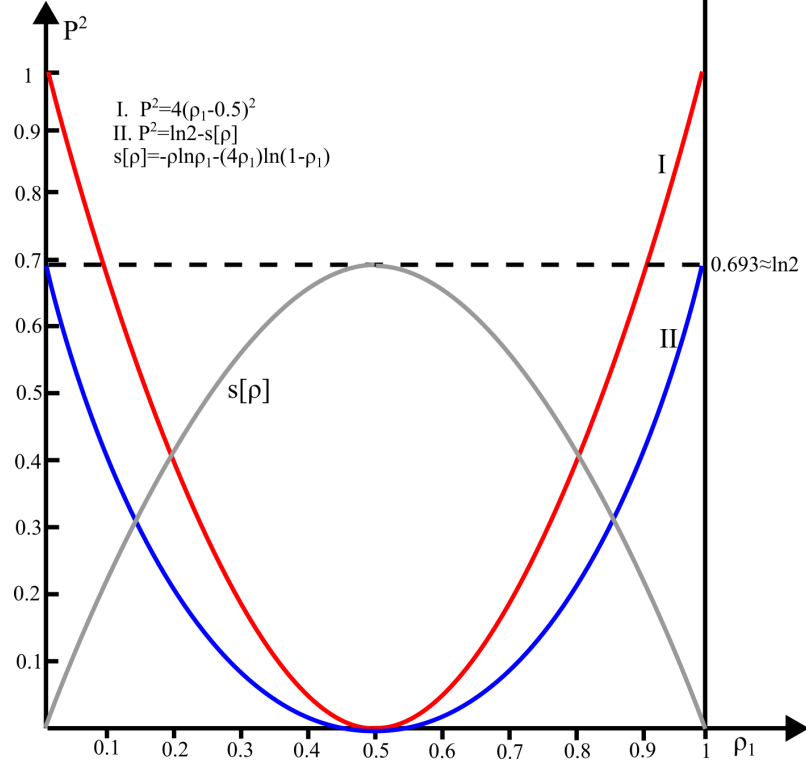
$$\begin{aligned} s[\rho] &= -\frac{1}{2}(1 + s_3) \ln \frac{1}{2}(1 + s_3) \\ &\quad - \frac{1}{2}(1 - s_3) \ln \frac{1}{2}(1 - s_3) \\ &= \ln 2 - s_3^2 = \ln 2 - \mathcal{P}^2. \end{aligned} \quad (6.55)$$

Zatem w przybliżeniu

$$\mathcal{P}^2 = \ln 2 - s[\rho]. \quad (6.56)$$

Wykres  $\mathcal{P}^2$  jako funkcji  $\rho_1$ , wyliczony ze wzoru (6.53) (dokładna  $\mathcal{P}^2$ , jak i ze wzoru (6.56) (przybliżenie) przedstawiony jest na rys. 6.2 odpowiednio jako krzywe I i II. Mamy teraz 2 miary uporządkowania: kwadratową ( $\mathcal{P}^2$ ), i logarytmiczną ( $s$ ). Odpowiadają one dwom metodom estymacji rozkładu prawdopodobieństwa:

- a) metodzie maksymalizacji entropii (tzn. poszukiwania maksimum dla  $s$ ),
- b) metodzie najmniejszych kwadratów (poszukiwanie minimum dla  $\mathcal{P}^2$ ).



Rysunek 6.2: Wykresy stopnia polaryzacji  $\mathcal{P}^2$  jako funkcji wartości własnej  $\rho_1$

## 6.5 Oscylator harmoniczny. Operatory tworzenia i niszczenia

Ze względu na znaczenie oscylatora harmonicznego w całej mechanice kwantowej, a w szczególności w optyce kwantowej, rozpatrzmy go dokładnie. Niech  $Q$  i  $P$  będą odpowiednio operatorami wsólrzędnej i sprzężonego kanonicznie z tą współrzędną pędu. Operatory  $P$  i  $Q$  są samosprężone i spełniają następującą relację komutacji

$$[Q, P] \equiv QP - PQ = i\hbar I. \quad (6.57)$$

Własności operatorów  $Q$  i  $P$  wygodnie jest badać przy pomocy pewnych ich kombinacji liniowych. Ponieważ  $Q$  i  $P$  jako wielkości fizyczne mają różne wymiary, wprowadzamy stałą  $\omega$ , przy pomocy której budujemy z operatorów  $P$  i  $Q$  dwa nowe operatory, operator niszczenia (anihilacji)  $a$  oraz tworzenia (kreacji)  $a^*$ :

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} Q + i\left(\frac{1}{2\omega\hbar}\right)^{1/2} P, \\ a^* &= \left(\frac{\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} Q - i\left(\frac{1}{2\omega\hbar}\right)^{1/2} P. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Oczywiście z powyższych związków możemy otrzymać relacje odwrotne

$$\begin{aligned} Q &= \left( \frac{\hbar}{2\omega} \right)^{1/2} (a^* + a), \\ P &= i \left( \frac{\omega\hbar}{2} \right)^{1/2} (a^* - a). \end{aligned} \quad (6.59)$$

Wprowadzony parametr  $\omega$  można interpretować jako częstość kątową badanego oscylatora. Z równości (6.57) wynikają relacje komutacji dla operatorów  $a$  i  $a^*$

$$[a, a^*] \equiv aa^* - a^*a = I. \quad (6.60)$$

Własności operatorów  $a$  i  $a^*$  były badane obszernie w szczególności przez Glaubera.<sup>9</sup> Operator

$$N = a^*a \quad (6.61)$$

jest operatorem samosprzężonym oraz dodatnio określonym. Własność samosprzężoności jest oczywista, a dodatnia określoność wynika z relacji

$$(a^*a\varphi, \varphi) = (a\varphi, a\varphi) = \|a\varphi\|^2 \geq 0, \quad (6.62)$$

dla dowolnego  $\varphi$ . Zatem wszystkie wartości własne operatora  $N = a^*a$  są nieujemne, Operator ten jest interpretowany jako operator ilości cząstek.

Mnożąc relację  $aa^* - a^*a = 1$  z prawej strony przez  $a$ , otrzymujemy równość

$$Na = a(N - 1). \quad (6.63)$$

Mnożąc relację  $aa^* - a^*a = 1$  z lewej strony przez  $a$ , otrzymujemy

$$Na^* = a^*(N + 1). \quad (6.64)$$

Powtarzanie opisanej wyżej procedury prowadzi do wzorów

$$\begin{aligned} Na^m &= a^m(N - m), \\ Na^{*m} &= a^{*m}(N + m) \end{aligned} \quad (6.65)$$

dla dowolnych  $m = 0, 1, 2, \dots$

Z równości (6.63) mamy

$$a^{*2}a^2 = a^*Na = a^*a(N - 1) = N(N - 1), \quad (6.66)$$

analogicznie

$$\begin{aligned} a^{*3}a^3 &= a^{*2}Na^2 = a^*N(N - a) \\ &= a^*N[a(N - 1) - a] = a^*Na(N - 2) = N(N - 1)(N - 2). \end{aligned} \quad (6.67)$$

---

<sup>9</sup>R. J. Glauber

Indukcyjnie można pokazać, że dla dowolnego  $m \geq 1$

$$a^{*m}a^m = N(N-1)(N-2)\dots(N-m+1). \quad (6.68)$$

Można pokazać, że wartości własne operatora  $a^*a$  są dyskretne. Wynika to z faktu, że  $a^{*m}a^m$  jest operatorem dodatnim, zatem widmo jego musi być dodatnie, a dla ciągłego widma można by dla dużych  $m$  uzyskać wartości ujemne.

Zakładamy, że istnieje co najmniej jeden niezdegenerowany stan własny  $|n\rangle$  operatora  $N$

$$N|n\rangle = n|n\rangle. \quad (6.69)$$

Gdyby  $n$  nie było całkowitą nieujemną liczbą, wzór (6.68) prowadziłby do sprzeczności. Weźmy  $n = 0$  i stan  $|0\rangle$ . Ze wzoru (6.65) otrzymujemy

$$N a^{*m} |0\rangle = a^{*m} (N + m) |0\rangle = m(a^{*m} |0\rangle).$$

Zatem stan  $a^{*m} |0\rangle$  jest stanem własnym odpowiadającym wartości własnej  $m$ . Z równości

$$a^m a^{*m} = (N+1)(N+2)\dots(N+m), \quad (6.70)$$

którą można otrzymać analogicznie jak (6.68), dostajemy

$$\langle 0|a^m a^{*m}|0\rangle = m!. \quad (6.71)$$

Wobec powyższego unormowany wektor  $|m\rangle$  można przedstawić w postaci

$$|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{m!}} a^{*m} |0\rangle. \quad (6.72)$$

Wzór ten ujawnia sens operatora kreacji -  $m$ -krotne działanie tego operatora na stan  $|0\rangle$  daje stan własny odpowiadający wartości własnej  $m$ . Zachodzą następujące związki

$$\begin{aligned} a^*|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \\ n|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle. \end{aligned} \quad (6.73)$$

Równania (6.73) opisują działanie operatorów kreacji i anihilacji na stany własne operatora  $N$ . Jako definicję stanu podstawowego możemy przyjąć równość  $a|0\rangle = 0$ . W oparciu o wzory (6.73) możemy znaleźć elementy macierzowe operatorów  $a^*$  i  $a$

$$\begin{aligned} \langle m|a^*|n\rangle &= \sqrt{n+1} \langle m|n+1\rangle = \sqrt{n+1} \delta_{m,n+1}. \\ \langle m|a|n\rangle &= \sqrt{n} \langle m|n-1\rangle = \sqrt{n} \delta_{m,n-1}. \end{aligned} \quad (6.74)$$

W postaci macierzowej ostatnie związki można zapisać następująco (macierze nieskończone, repre-

zentacja  $n$ )

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.75)$$

$$a^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Ponieważ operatory  $Q$  i  $P$  wyrażają się poprzez  $a$  i  $a^*$  zgodnie z (6.59), zatem  $Q$  i  $P$  w reprezentacji użytej wyżej przybierają postać

$$Q = \left(\frac{\hbar}{2\omega}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (6.76)$$

$$P = i\left(\frac{\omega\hbar}{2}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Macierze  $Q$  i  $P$  są hermitowskie. Reprezentacja macierzowa dana wzorem (6.76) jest niediagonalna - w reprezentacji diagonalnej  $Q$  i  $P$  nie są dyskretne. Reprezentacja (6.76) była znaleziona przez Heisenberga.

Wszystkie powyższe rozważania były przeprowadzone przy założeniu, że stan  $|0\rangle$  jest niezdegenerowany. Załóżmy, że istnieje dodatkowy parametr degenracji, tak że istnieje  $L$  liniowo niezależnych stanów podstawowych  $|0\ell\rangle$ ,  $\ell = 1, 2, \dots, L$  dla których  $N|0, \ell\rangle = 0$ . Wobec tego istnieje  $L$

pełnych zbiorów stanów  $|n, \ell\rangle$  i odpowiednie operatory  $a^*$  i  $a$  zależą od  $\ell$ . Jednak operatory  $a$  i  $a^*$  nie mogą mieszać stanów z różnymi wartościami  $\ell$ . Aby uchronić się od tej degeneracji, wystarczy założyć, że każdy operator może być przedstawiony jako funkcja operatorów  $a$  i  $a^*$ .

Macierze gęstości stanów czystych oscylatora harmonicznego budujemy z wektorów własnych operatora  $N = a^*a$ . Mianowicie  $\rho = |n\rangle\langle n|$ , gdzie  $|n\rangle$  spełnia równanie  $N|n\rangle = n|n\rangle$ .

Macierz gęstości stanów mieszanych mają postać

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle p_n \langle n|,$$

gdzie  $p_n \geq 0$  i  $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ . Łatwo można sprawdzić, że zachodzi równość

$$[\rho, N] = 0. \quad (6.77)$$

Policzmy kwadrat operatora  $\rho$ :

$$\rho^2 = \sum_{n,m} |n\rangle p_n p_m \langle n|m\rangle \langle m| = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle p_n^2 \langle n|. \quad (6.78)$$

Na ogół  $\rho^2 \leq \rho$ . Podnosząc  $\rho$  do wolnej potęgi  $k$ , otrzymujemy

$$\rho^k = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle p_n^k \langle n|. \quad (6.79)$$

Dla dowolnej funkcji analitycznej  $f$  mamy

$$f(\rho) = \sum_k \frac{f^{(k)}(\rho)}{k!} \rho^k = \sum_k a_k \rho^k = \sum_k |n\rangle f(p_n) \langle n|. \quad (6.80)$$

Stąd w szczególności wynika, że dowolna funkcja operatora komutuje z tym operatorem.

Definiując entropię  $s[\rho]$  wzorem

$$s[\rho] = -k \operatorname{Tr} \rho \ln \rho, \quad (6.81)$$

gdzie  $k$  - pewna stała, widzimy, że na podstawie (6.80) mamy

$$s[\rho] = - \sum_n p_n \ln p_n$$

(położyliśmy  $k = 1$ ). Przy pomocy entropii można zdefiniować zagadnienie równowagi termodynamicznej, przyjmując, że entropia  $s$  osiąga maksimum, przy pewnych warunkach ubocznych  $U_i = \operatorname{Tr}(\rho A_i)$ , gdzie  $i = 1, \dots, k$  numerują zbiór liniowo niezależnych operatorów  $A_i$ . Maksymalizując  $s$ , przy powyższych warunkach otrzymamy

$$\rho = Z^{-1} \exp \left( - \sum_i \beta_i A_i \right), \quad Z = \operatorname{Tr} \exp \left( - \sum_i \beta_i A_i \right). \quad (6.82)$$

Związek z parametrami  $U_i$  jest następujący

$$U_i = - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta_i}.$$

Dla oscylatora harmonicznego używamy hamiltonianu w postaci  $H = \hbar\omega a^*a$  lub  $H = \hbar(a^*a + 1/2)$ . Przesunięcie o  $1/2$  związane jest z problemami normalizacyjnymi (nieskończona energia stanu podstawowego). Przyjmując warunek  $U = \langle H \rangle = \hbar\omega n$ , otrzymujemy, maksymalizując entropię (6.81), macierz  $\rho$  w postaci

$$\rho = Z^{-1} e^{-\beta H} = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle p_n \langle n|, \quad (6.83)$$

gdzie  $\beta = 1/kT$  oraz

$$\begin{aligned} p_n &= (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) e^{-n\beta\hbar\omega} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ Z &= \text{Tr} e^{-\beta\hbar\omega a^*a} = \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}. \end{aligned} \quad (6.84)$$

Średnia liczba obsadzeń  $\langle N \rangle = \langle a^*a \rangle$  obliczona z rozkładem (6.83-6.84) jest równa

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= \text{Tr}(\rho N) = (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \sum_{m,n=0}^{\infty} \langle m|n \rangle e^{-\beta\hbar\omega n} \langle n|N|m \rangle \\ &= (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\beta\hbar\omega n} = (1 - e^{-\beta\hbar\omega})^{-1}, \end{aligned} \quad (6.85)$$

przy czym wykorzystaliśmy związek

$$\begin{aligned} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} n x^n &= (1-x) \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x) \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{x}{1-x} = \frac{1}{x^{-1} - 1} \quad (\text{tu } |x| < 1). \end{aligned} \quad (6.86)$$

W rezultacie otrzymujemy następujące wyrażenie na średnią energię

$$U = \frac{\hbar\omega}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1}. \quad (6.87)$$

Łatwo można sprawdzić, że  $U = -\partial \ln Z / \partial \beta$ , gdyż

$$Z = (1 - e^{-\beta\hbar\omega})^{-1}.$$

W fizyce najczęściej rozkład (6.84) przyjmuje się jako dany i oblicza średnie jako funkcje temperatury. W naszym rozumowaniu wielkością zadaną jest średnia energia  $U$  i temperaturę można wyrazić jako funkcję średniej energii

$$T = \frac{1}{k} \frac{\hbar\omega}{\ln(1 + \hbar\omega/U)}.$$

Funkcja charakterystyczna dla operatora  $N$  ma postać

$$\begin{aligned} C_N(s) &= \text{Tr}(\rho e^{iSN}) = (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \sum_{n,m=0}^{\infty} \langle m|n \rangle e^{-\beta\hbar\omega n} \langle n|e^{isN}|m \rangle \\ &= (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n(\beta\hbar\omega - is)} = \frac{1 - \exp(-\beta\hbar\omega)}{1 - \exp(-\beta\hbar\omega + is)}. \end{aligned} \quad (6.88)$$

W następnych rozdziałach będzie,y rozważali przypadki, gdy liczby  $p_n$  w sumie  $\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle p_n \langle n|$  będą zadane rozkładem Poissona

$$p_n = \frac{1}{n!} \mu^n e^{-\mu}. \quad (6.89)$$

Okazuje się, że rozkład Poissona można również otrzymać metodami teorii informacji, rozszerzając definicję entropii do postaci

$$s = - \sum_{n=0}^{\infty} p_n \ln \frac{p_n}{w_n}, \quad (6.90)$$

gdzie  $w_n$  jest pewną miarą nieunormowaną. Aby otrzymać rozkład Poissona przez ekstremalizację (6.90), należy przyjąć  $w_n = 1/n!$  (patrz podrozdz. (2.6)).

Dla rozkładu Poissona średnia liczba obsadzeń jest równa

$$\langle N \rangle = \text{Tr}(\rho N) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} \mu^n e^{-\mu} = \mu, \quad (6.91)$$

a funkcja charakterystyczna

$$C_N(s) = \text{Tr}(\rho e^{isN}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} \mu^n e^{-\mu} e^{isn} = \exp[(e^{is} - 1)\mu]. \quad (6.92)$$

Jak wiadomo, w dowolnej ortonormalnej bazie  $\{|\psi_n\rangle\}$  macierz gęstości może być przedstawiona w postaci

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty} |\psi_n\rangle p_n \langle \psi_n|, \quad (6.93)$$

gdzie  $p_n \geq 0$  i  $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ . Często jednak wygodnie jest wyrazić macierz  $\rho$  poprzez stany własne operatora  $N$ . Dla każdego wektora  $|\psi_n\rangle$  wchodzącego w rozkład (6.93) można napisać

$$|\psi_n\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{nm} |m\rangle.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_{n=0}^{\infty} |\psi_n\rangle p_n \langle \psi_n| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m,m'=0}^{\infty} \psi_{nm} |m\rangle p_n \langle m'| \overline{\psi_{nm'}} \\ &= \sum_{m,m'=0}^{\infty} \text{vertm} \rangle \rho_{mm'} \langle m'|, \end{aligned} \quad (6.94)$$

gdzie

$$\rho_{mm'} = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{nm} p_n \overline{\psi_{nm'}} = \langle m | \rho | m' \rangle. \quad (6.95)$$

Aby macierz  $\rho$  była w rzeczywistości macierzą gęstości, musi być macierzą

1. hermitowską

$$\rho_{m'm} = \overline{\rho_{mm'}};$$

2. dodatnio określoną, tzn.

$$\sum_{m,m'=0}^{\infty} \overline{c_m} \rho_{mm'} c'_m \geq 0, \quad \text{dla} \quad \sum |c_m|^2 < \infty;$$

3. o skończonym śladzie

$$\sum_{m=0}^{\infty} \rho_{mm} = 1.$$

### 6.5.1 Operatory gęstości dla układu oscylatorów

Rozpatrzmy teraz  $K$  niezależnych oscylatorów z częstościami kołowymi  $\omega_k, k = 1, 2, \dots, K$ . Z każdym oscylatorem wiążemy operatory  $Q_k$  i  $P_k$ , które spełniają następujące relacje komutacyjne:

$$[Q_k, Q_{k'}] = [P_k, P_{k'}] = 0, \quad [Q_k, P_{k'}] = \delta_{kk'}. \quad (6.96)$$

Dla każdego oscylatora wprowadzamy operatory kreacji i anihilacji  $a_k^*$  i  $a_k$  poprzez równości

$$\begin{aligned} a_k^* &= \left(\frac{\omega_k}{2\hbar}\right)^{1/2} Q_k - i \left(\frac{1}{2\hbar\omega_k}\right)^{1/2} P_k, \\ a_k &= \left(\frac{\omega_k}{2\hbar}\right)^{1/2} Q_k + i \left(\frac{1}{2\hbar\omega_k}\right)^{1/2} P_k. \end{aligned} \quad (6.97)$$

Wprowadzamy również odpowiednie operatory ilości cząstek

$$N_k = a_k^* a_k, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (6.98)$$

Operatory  $a_k^*$  i  $a_k$  spełniają następujące relacje komutacyjne:

$$[a_k, a_{k'}] = [a_k^*, a_{k'}^*] = 0, \quad [a_k, a_{k'}^*] = \delta_{kk'}. \quad (6.99)$$

Operator energii ma teraz postać

$$H = \sum_{k=1}^K \hbar\omega_k N_k = \sum_{k=1}^K \hbar\omega_k a_k^* a_k. \quad (6.100)$$

Operatory  $N_k$  tworzą zupełny układ komutujących operatorów, których wektory własne są określone poprzez zbiór odpowiednich wartości własnych. Zbiór jednostkowych wektorów własnych wszystkich operatorów  $N_k$  oznaczamy przez

$$|n_1, n_2, \dots, n_k\rangle = |\{n_k\}\rangle. \quad (6.101)$$

Wektory te tworzą bazę w przestrzeni  $\mathcal{H}$ .

Wiele rezultatów otrzymanych wyżej dla jednego oscylatora łatwo uogólnić dla układu  $K$  oscylatorów. Stany czyste z określonymi liczbami ilości obsadzeń są określone przez wyrażenie

$$\rho_{\{n_k\}} = |\{n_k\}\rangle \langle \{n_k\}|. \quad (6.102)$$

Rozkład termiczny dla  $K$  niezależnych oscylatorów ma postać

$$p_{\{n_k\}} = \prod_{k=1}^K (1 - e^{-\beta \hbar \omega_k}) e^{-n_k \hbar \omega_k}, \quad (6.103)$$

tzn. jest iloczynem rozkładów typu (6.84). Jak poprzednio  $\beta = 1/kT$ . Suma stanów dla tego rozkładu dana jest wzorem

$$Z = \prod_{k=1}^K \frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar \omega_k}}. \quad (6.104)$$

Na średnią energię otrzymujemy wyrażenie

$$\begin{aligned} U &= \langle H \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = \sum_{k=1}^K \frac{\hbar \omega_k e^{-\beta \hbar \omega_k}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega_k}} \\ &= \sum_{k=1}^K \frac{\hbar \omega_k}{e^{\beta \hbar \omega_k} - 1}. \end{aligned} \quad (6.105)$$

Funkcja charakterystyczna  $C_H(s)$  ma postać

$$C_H(s) = \prod_{k=1}^K \frac{1 - e^{-\beta \hbar \omega_k}}{1 - e^{-\hbar \omega_k (\beta - i s)}}. \quad (6.106)$$

Dla  $K$  – wymiarowego rozkładu Poissona

$$P_{\{n_k\}} = \prod_{k=1}^K \frac{\mu_k^{n_k}}{n_k!} e^{-\mu_k} \quad (6.107)$$

średnie liczby obsadzeń są równe  $\langle N \rangle = \mu_k$ , a średnia wartość energii wynosi

$$U = \text{Tr}(\rho H) = \hbar \sum_{k=1}^K \omega_k \mu_k. \quad (6.108)$$

Funkcja charakterystyczna ma teraz postać

$$C_H(s) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^K [\exp(i \hbar \omega_k s) - 1] \mu_k \right\}. \quad (6.109)$$

Dla operatora  $I$  możemy teraz używać przedstawienia

$$I = \sum_{\{n_k\}=0}^{\infty} |\{n_k\}\rangle \langle \{n_k\}|. \quad (6.110)$$

Dowolna macierz gęstości może być przedstawiona w postaci

$$\rho = \sum_{\substack{\{m_k\}=0 \\ \{m'_k\}=0}}^{\infty} |\{m_k\}\rangle \rho(\{m_k\}, \{m'_k\}) \langle \{m'_k\}|, \quad (6.111)$$

gdzie  $\rho(\{m_k\}, \{m'_k\}) \equiv \langle \{m_k\} | \rho | \{m'_k\} \rangle$ . Te współczynniki powinny spełniać warunki hermitowskości, dodatniej określoności i zbieżności śladu.

### 6.5.2 Nieskończony układ oscylatorów

By w sposób precyzyjny mówić o jakiegoś typu "nieskończonościach", przypomnijmy pojęcie liczby kardynalnej.

**Liczbą kardynalną** lub **mocą** nazywamy klasę równoważności zbiorów ze względu na relację równoliczności. Liczbę kardynalną zbioru  $A$  będziemy oznaczali symbolem  $\overline{\overline{A}}$ . Zachodzi następujące Twierdzenie (Cantora). Dla dowolnego zbioru  $X$

$$\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{2^X}}, \quad (6.112)$$

gdzie symbolem  $2^X$  oznaczamy zbiór wszystkich podzbiorów zbioru  $X$ . Oznaczając symbolem  $\aleph_0$  (alef zero) moc zbioru liczb naturalnych  $N$ , mamy

$$\aleph_0 = \overline{\overline{N}} < \overline{\overline{2^N}} \equiv \aleph_1, \quad (6.113)$$

gdzie ostatnia równość może być definicją liczby  $\aleph_1$  (alef jeden). Przedłużając procedurę zawartą w (6.58), możemy otrzymać nieskończenie wiele wzrastających liczb kardynalnych. Zbiór o mocy  $\aleph_0$  nazywamy zbiorem przeliczalnym. Moc zbioru liczb rzeczywistych równa jest  $\aleph_1$ .

Rozważmy przeliczalny zbiór oscylatorów opisywanych przez  $Q_k, P_k$ , gdzie  $k \in N$ . Aby operatory  $N = \sum_{k=1}^{\infty} N_k$  oraz  $H = \sum_{k=1}^{\infty} \hbar \omega_k N_k$  były dobrze określone, wystarczy aby baza w odpowiedniej przestrzeni Hilberta składała się z wektorów własnych operatorów ilości cząstek

$$|n_1, n_2, \dots\rangle \equiv |\{n_k\}\rangle, \quad (6.114)$$

takich, że zachodzi nierówność

$$\sum_{k=1}^{\infty} n_k < \infty. \quad (6.115)$$

To oznacza, że dla dowolnego wektora bazy  $|\{n_k\}\rangle$  tylko skończona ilość liczb  $n_k$  jest różna od zera. Gdyby liczby  $n_k$  w wektorach postaci (6.114) nie były ograniczone warunkiem (6.115), czyli mogły przyjmować dowolne wartości, wówczas wektorów bazy byłoby  $\aleph_1^{10}$  tzn. baza w przestrzeni Hilberta nie byłaby przeliczalna. Tego typu przestrzenie noszą nazwę **przestrzeni von Neumanna** (np. przestrzenie funkcji prawie okresowych).. Przestrzeń rozpiętą przez wektory (6.114) spełniającą warunek (6.115) nazywamy **przestrzenią Focka**. Przestrzeń Focka jest oczywiście ośrodkowa. Jako bazę w przestrzeni Focka można wskazać układ wektorów postaci

$$\begin{aligned} &|1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots\rangle, \\ &|0 \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots\rangle, \\ &|1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots\rangle. \end{aligned} \quad (6.116)$$

ogólnie w  $j$ -tym wektorze bazy na  $j$ -tym miejscu mamy jedynekę, a pozostałe pozycje wypełniają zera.

<sup>10</sup>wektorów byłoby tyle, ile podzbiorów  $N$ , tzn.  $\aleph_1$ .

Dla stanów należących do przestrzeni Focka

$$\langle \{n_k\} | N | \{n_k\} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} n_k < \infty, \quad (6.117)$$

oraz

$$\langle \{n_k\} | H | \{n_k\} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \hbar \omega_k n_k < \infty. \quad (6.118)$$

Stany postaci

$$|\psi\rangle = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell} |\{\delta_{\ell k}\}\rangle$$

, gdzie  $\{n_k\} = \{\delta_{\ell k}\}$  oznacza, że dla ustalonego  $\ell$ ,  $n_{\ell} = 1$ , a pozostałe  $n_k$  są równe zero, również należą do przestrzeni Focka. Zachodzą następujące równości

$$\begin{aligned} \langle N_k \rangle &\equiv \langle \psi | N_k | \psi \rangle = \frac{1}{k^2}, \\ \langle N \rangle &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty. \end{aligned} \quad (6.119)$$

Funkcja charakterystyczna dla rozkładu Poissona przyjmuje teraz postać

$$C_N(S) = \exp \left[ (e^{is} - 1) \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \right], \quad (6.120)$$

przy czym szereg  $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k = \langle N \rangle$  dla przestrzeni Focka jest skończony.

W rozważaniach dotyczących przestrzeni Focka ważna jest zbieżność nieskończonych iloczynów postaci  $\prod_{k=1}^{\infty} z_k$ , gdzie wszystkie  $z_k \neq 0$ . Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby

$$0 < \prod_{k=1}^{\infty} z_k < \infty, \quad \text{gdy } z_k \neq 0, \quad (6.121)$$

jest zbieżność szeregu  $\sum_{k=1}^{\infty} |1 - z_k| < \infty$  (Tw. von Neumanna).

Funkcja charakterystyczna dla operatora  $N$  w przypadku rozkładu termicznego nieskończonej liczby operatorów ma postać

$$C_N(s) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{[1 - \exp(-\beta \hbar \omega_k)]}{[1 - \exp(-\beta \hbar \omega_k + is)]}. \quad (6.122)$$

Ponieważ  $\omega_k > 0$ , żaden czynnik w (6.122) nie jest równy zero, zatem zbieżność tego iloczynu można badać przy pomocy twierdzenia von Neumanna. Możemy przeprowadzić następujące oszacowanie

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{[1 - \exp(-\beta \hbar \omega_k)]}{[1 - \exp(-\beta \hbar \omega_k + is)]} \right| \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(-\beta \hbar \omega_k) |1 - e^{is}|}{|1 - \exp(-\beta \hbar \omega_k + is)|} \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\beta \hbar \omega_k). \end{aligned} \quad (6.123)$$

Jest to warunek konieczny i dostateczny na  $\omega_k$ , zapewniający istnienie  $C_N(s)$  (warunek termodynamicznej regularności). Gdy nierówność (6.123) jest spełniona, wówczas istnieje i jest skończona

suma stanów  $Z$ . Jeżeli rozważamy stany oscylatora w nieskończonej przestrzeni, wówczas dla  $\omega$  mamy na ogół zarówno widmo ciągłe, jak i dyskretne - wówczas suma stanów jest rozbieżna. Można wówczas rozważać nieskończoną ilość cząstek rozłożonych w ten sposób, aby "gęstość"

$$\rho = \frac{N}{V} = \text{const.}, \quad (6.124)$$

gdzie  $V \rightarrow \infty$  i  $N \rightarrow \infty$  (tzw. granica termodynamiczna).

## Rozdział 7

# Równania ruchu dla skwantowanego pola elektromagnetycznego

### 7.1 Ewolucja w czasie w mechanice kwantowej

Zależność od czasu wektora  $|\psi(t)\rangle$ , opisującego stan czysty układu, dana jest równaniem Schrödingera

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle, \quad (7.1)$$

gdzie  $H$  jest hamiltonianem układu. Dalej będziemy zakładali, że operator samosprężony  $H$  nie zależy od czasu. Jeżeli stan czysty opisujemy macierzą gęstości  $\rho = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ , wówczas równanie ruchu ma postać

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho = [H, \rho]. \quad (7.2)$$

Rzeczywiście, z równania (7.1) mamy

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho &= i\hbar \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle \right] \langle\psi(t)| + |\psi(t)\rangle \left[ \frac{\partial}{\partial t} \langle\psi(t)| \right] \right\} \\ &= H |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| - |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| H \\ &= H \rho(t) - \rho(t) H = [H, \rho(t)]. \end{aligned}$$

Ponieważ dowolna macierz gęstości jest kombinacją liniową macierzy stanów czystych, zatem przyjmujemy, że równanie postaci (7.2) opisuje ewolucję w czasie dowolnego operatora gęstości  $\rho$ . Równość (7.2) nosi nazwę równania von Neumanna..

Jeżeli operator  $H$  nie zależy od czasu, to formalne rozwiązanie równania (7.1) ma postać

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-it \frac{H}{\hbar}\right) |\psi(0)\rangle = \mathcal{U}(t) |\psi(0)\rangle, \quad (7.3)$$

gdzie  $\mathcal{U}(t)$  jest operatorem unitarnym. Operator ewolucji odwzorowujący stan początkowy  $|\psi(0)\rangle$  na stan  $|\psi(t)\rangle$ , ze względu na swą unitarność zachowuje w czasie normę stanu  $|\psi(0)\rangle$ .

Z równości (7.3) natychmiast otrzymujemy zależność od czasu macierzy gęstości stanu czystego

$$\begin{aligned}\rho(t) &= |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| = \mathcal{U}(t)|\psi(0)\rangle\langle\psi(0)|\mathcal{U}(t)^{-1} \\ &= \mathcal{U}(t)\rho(0)\mathcal{U}(t)^{-1}.\end{aligned}\tag{7.4}$$

Ze względu na to, że dowolna macierz gęstości jest kombinacją liniową macierzy gęstości stanów czystych, również dla dowolnego operatora mamy

$$\rho(t) = \mathcal{U}(t)\rho(0)\mathcal{U}(t)^{-1}.\tag{7.5}$$

Średnia wartość obserwabli  $\mathcal{O}$  w stanie  $\rho(t)$  dana jest równością

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{O}\rangle &= \text{Tr}\left(\rho(t)\mathcal{O}\right) = \text{Tr}\left(\mathcal{U}(t)\rho(0)\mathcal{U}^{-1}(t)\mathcal{O}\right) \\ &= \text{Tr}\left(\rho(0)\mathcal{U}^{-1}(t)\mathcal{O}\mathcal{U}(t)\right) = \text{Tr}\left(\rho(0)\mathcal{O}(t)\right),\end{aligned}\tag{7.6}$$

gdzie równość  $\mathcal{O}(t) = \mathcal{U}^{-1}(t)\mathcal{O}\mathcal{U}(t)$  określa zależność od czasu obserwabli  $\mathcal{O}$ . Widzimy, że są możliwe dwa podejścia: w pierwszym obserwable nie zależą od czasu i cała zależność od czasu tkwi w wektorach stanu lub macierzach gęstości, w drugim zaś wektory stanu lub macierze gęstości nie zależą od czasu, a zależność od czasu przerzucona jest na obserwable. W pierwszym przypadku mówimy o obrazie Schrödingera, a w drugim o obrazie Heisenberga. Zależność od czasu obserwabli  $\mathcal{O}(t)$  w obrazie Heisenberga otrzymujemy w następujący sposób:

$$\begin{aligned}i\hbar\frac{\partial\mathcal{O}(t)}{\partial t} &= i\hbar\frac{\partial\mathcal{U}^{-1}(t)}{\partial t}\mathcal{O}\mathcal{U}(t) + i\hbar\mathcal{U}^{-1}(t)\mathcal{O}\frac{\partial\mathcal{U}(t)}{\partial t} \\ &= -H\mathcal{U}^{-1}(t)\mathcal{O}\mathcal{U}(t) + \mathcal{U}^{-1}(t)\mathcal{O}\mathcal{U}(t)H,\end{aligned}\tag{7.7}$$

gdyż  $\mathcal{U}(t) = \exp(-itH/\hbar)$ . Ostatecznie równanie (7.7) możemy przepisać w postaci

$$i\hbar\frac{\partial\mathcal{O}(t)}{\partial t} = [\mathcal{O}(t), H] = -[H, \mathcal{O}(t)].\tag{7.8}$$

Równość (7.8) nosi nazwę **równania Heisenberga**. W wielu zagadnieniach wygodnie jest używać jeszcze innych obrazów, a szczególnie obrazu oddziaływania Tomonagi-Schwingera.

Dla hamiltonianu zależnego od czasu prawie wszystkie równania wyżej rozpatrywane pozostają słuszne, gdy zastąpimy  $H$  przez  $H(t)$ . W sposób istotny zmienia się tylko określenie operatora ewolucji  $\mathcal{U}(t)$ . Załóżmy, że hamiltonian  $H(t)$  jest odcinkami stały, tzn.

$$H(t) = H(t_i), \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}, \quad t_{i+1} - t_i \equiv \Delta_i.\tag{7.9}$$

Operator ewolucji w czasie ma teraz postać

$$\mathcal{U}(t) = e^{-i(t-t_j)H_j/\hbar} \prod_{k=0}^{j-1} e^{-i\Delta_k H_k/\hbar}\tag{7.10}$$

dla  $t \in [t_j, t_{j+1})$ . Ponieważ na ogół  $[H_i, H_j] \neq 0$  dla  $i \neq j$ , zatem (7.10) różni się w ogólności od operatora

$$\mathcal{U}'(t) = \exp \left[ -\frac{i}{\hbar}(t - t_j)H_j - \frac{i}{\hbar} \sum_{k=0}^{j-1} \Delta_k H_k \right]. \quad (7.11)$$

Wygodnie jest wprowadzić operator  $T$  porządkujący w czasie, który definiuje się równością

$$\mathcal{U}(t) \equiv T\{\mathcal{U}'(t)\}, \quad (7.12)$$

( $T$  - operator chronologicznego uporządkowania). Operator  $T$  działa w ten sposób, że we wszystkich iloczynach operatorów czynniki brane są w porządku wzrastania argumentów czasowych. Przechodząc w (7.10) do granicy, otrzymujemy dla operatora ewolucji układu z hamiltonianem  $H(t)$  zależnym od czasu wyrażenie

$$\mathcal{U}(t) = T \left\{ \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t H(t') dt' \right] \right\}. \quad (7.13)$$

## 7.2 Równania pola elektromagnetycznego. Podejście nierelatywistyczne

Stan pola elektromagnetycznego opisany jest równaniami Maxwella, które (w układzie jednostek S.I.) mają postać<sup>1</sup>

$$\dot{\mathbf{B}} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad \dot{\mathbf{D}} = \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{J}, \quad (7.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (7.15)$$

gdzie:  $\mathbf{B}$  jest wektorem indukcji magnetycznej,  $\mathbf{D}$  - wektorem indukcji elektrycznej,  $\mathbf{E}$  - wektorem natężenia pola elektrycznego,  $\mathbf{H}$  - wektorem natężenia pola magnetycznego,  $\mathbf{J}$  oznacza wektor gęstości prądu, a  $\rho$  - gęstość ładunków. Równania (7.14) są **równaniami ruchu dla pola elektromagnetycznego**, natomiast równania (7.15) wyrażają warunki wewnętrznej zgodności, które muszą zachodzić, by istniało jednoznaczne rozwiązanie układu równań Maxwella. Wektory  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$  oraz  $\mathbf{B}$  i  $\mathbf{H}$  związane są równaniami materiałowymi

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H},$$

gdzie  $\varepsilon$  jest tensorem przenikalności elektrycznej, a  $\mu$  - tensorem przenikalności magnetycznej. Dla pól w próżni równania materiałowe przybierają postać

$$D = \varepsilon_0 E, \quad B = \mu_0 H,$$

gdzie  $\varepsilon_0$  jest przenikalnością elektryczną próżni ( $\varepsilon_0 \cong 8.9 \times 10^{-12}$  farad/metr), a  $\mu_0$  - przenikalnością magnetyczną próżni ( $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-1}$  weber/amper·metr).

<sup>1</sup>Szerszą dyskusję teorii Maxwella znaleźć można np. w skrypcie R. S. Ingardena "Elektrodynamika klasyczna i kwantowa" (UMK, Toruń 1970), Cz. I, Rozdział 1.

Równość  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  ”rozwiązuje się”, kładąc  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , gdzie  $\mathbf{A}$  jest wektorem potencjału. Wybór  $\mathbf{A}$  jest niejednoznaczny; mianowicie z dokładnością do gradientu pewnej funkcji skalarnej. Ze względu jednak na to, że równania (7.14) i (7.15) nie mają postaci kowariantnej, wybierzemy dalej takie rozwiązanie  $\nabla \times \mathbf{A}$ , w którym rezygnujemy ze wskazanej wyżej dowolności (przyjmujemy cechowanie kulombowskie).

Dowolne pole wektorowe  $\mathbf{V}(\mathbf{x})$  (operatorowe lub  $c$ -liczbowe), jeśli jest dostatecznie regularne, można rozłożyć na składową poprzeczną i podłużną<sup>2</sup>

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}^T + \mathbf{V}^L, \quad (7.16)$$

tak aby zachodziły tożsamości  $\nabla \cdot \mathbf{V}^T \equiv 0$ ,  $\nabla \times \mathbf{V}^L \equiv 0$ . Stosując ten rozkład dla pola  $\mathbf{B}$ , mamy

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^T + \mathbf{B}^L. \quad (7.17)$$

Ponieważ  $\nabla \cdot \mathbf{B}^T \equiv 0$ , zatem z równości  $\nabla \cdot \mathbf{B}^T = 0$  wynika

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^L = 0.$$

Analogicznie,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T + \mathbf{A}^L$ ,  $\nabla \times \mathbf{A}^L \equiv 0$ , zatem  $\mathbf{B}^T = \nabla \times \mathbf{A}^T$ . Równania Maxwella (ref38.1) i (7.15) możemy teraz przepisać w postaci

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}}^T &= -\mathbf{E}^T, \quad \dot{\mathbf{D}}^T = \nabla \times \mathbf{H}^T - \mathbf{J}^T, \\ \nabla \cdot \mathbf{B}^L &= 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{D}^L = \rho, \quad \dot{\mathbf{D}}^L = -\mathbf{J}_L. \end{aligned} \quad (7.18)$$

W ten sposób równania Maxwella rozpadają się na dwa niezależne układy równań dla składowych transwersalnych i longitudinalnych. Dwa ostatnie z równań (7.18) przedstawiają po prostu prawo zachowania ładunku

$$\nabla \cdot \mathbf{J}^L + \dot{\rho} = 0. \quad (7.19)$$

Dalej będziemy zajmowali się polem transwersalnym związanym z promieniowaniem. Równania tego pola  $\dot{\mathbf{A}}^T = -\mathbf{E}^T$  i  $\dot{\mathbf{D}}^T = \nabla \times \mathbf{H}^T - \mathbf{J}^T$ , po podstawieniu  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}^T = (1/\mu_0) \nabla \times \mathbf{A}^T$  oraz wykorzystaniu tożsamości

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla^2 \mathbf{V}, \quad (7.20)$$

można przepisać w postaci

$$\dot{\mathbf{D}}^T = \frac{1}{\mu_0} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}^T) - \frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{A}^T - \mathbf{J}^T, \quad (7.21)$$

i

$$\ddot{\mathbf{A}}^T = -\frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{D}^T.$$

---

<sup>2</sup>longitudinalną i transwersalną

Ponieważ  $\nabla \cdot \mathbf{A}^T \equiv 0$ , więc z równań (7.21) otrzymujemy

$$\nabla^2 \mathbf{A}^T - \epsilon_0 \mu_0 \ddot{\mathbf{A}}^T = -\mu_0 \mathbf{J}^T, \quad (7.22)$$

tzn. niejednorodne równanie d'Alemberta.

Równanie (7.22) może być również wyprowadzone w przestrzeni pędów. Rozważmy wnękę sześcienną o boku  $L$ , objętości  $\Omega = L^3$ , gdzie  $L \gg 1$ . Możemy teraz wprowadzić pole zależne od pędów

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}) &\equiv \Omega^{-1/2} \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3x, \\ \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{k}) &\equiv \Omega^{-1/2} \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \mathbf{H}(\mathbf{x}) d^3x, \\ \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{k}) &\equiv \Omega^{-1/2} \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \mathbf{D}(\mathbf{x}) d^3x, \\ \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}) &\equiv \Omega^{-1/2} \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \mathbf{B}(\mathbf{x}) d^3x, \\ \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{k}) &\equiv \Omega^{-1/2} \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \mathbf{J}(\mathbf{x}) d^3x, \\ \tilde{\rho}(\mathbf{k}) &\equiv \Omega^{-1/2} \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \rho(\mathbf{x}) d^3x. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Oczywiście zachodzą równości  $\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{k}) = \epsilon_0 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k})$  i  $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}) = \mu_0 \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{k})$ . Przestrzenne transformaty Fouriera wprowadzone w (7.23) pozwalają zamienić równania różniczkowe względem  $\mathbf{x}$  na równania algebraiczne (wektorowe) względem  $\mathbf{k}$ . W przestrzeni pędów z każdym punktem  $\mathbf{k}$  związujemy trójkę wzajemnie ortogonalnych, unormowanych wektorów  $\mathbf{e}_j(\mathbf{k})$ , ( $j = 1, 2, 3$ ),  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ , takich, że  $\mathbf{e}_3(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = k \equiv |\mathbf{k}|$ . Zatem dla każdego  $\mathbf{k} \neq 0$  wektor  $\mathbf{e}_3(\mathbf{k})$  jest równoległy do  $\mathbf{k}$ , a wektory  $\mathbf{e}_1(\mathbf{k})$  i  $\mathbf{e}_2(\mathbf{k})$  są ortogonalne do  $\mathbf{k}$ :  $\mathbf{e}_1(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{e}_2(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = 0$ .

Dowolne pole wektorowe

$$\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{k}) = \Omega^{-1/2} \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \mathbf{V}(\mathbf{x}) d^3x \quad (7.24)$$

może być rozłożone dla dowolnego  $\mathbf{k}$  w następujący sposób:

$$\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{k}) = \sum_j \mathbf{e}_j(\mathbf{k}) [\mathbf{e}_j(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{k})] \equiv \tilde{\mathbf{V}}^T(\mathbf{k}) + \tilde{\mathbf{V}}^L(\mathbf{k}), \quad j = 1, 2, 3, \quad (7.25)$$

gdzie część transwersalna i longitudinalna mają postać

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{V}}^L(\mathbf{k}) &\equiv \mathbf{e}_3(\mathbf{k}) [\mathbf{e}_3(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{k})], \\ \tilde{\mathbf{V}}^T(\mathbf{k}) &\equiv \mathbf{e}_1(\mathbf{k}) [\mathbf{e}_1(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{k})] + \mathbf{e}_2(\mathbf{k}) [\mathbf{e}_2(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{k})]. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Z (7.26) mamy natychmiast dwie tożsamości

$$\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{V}}^T(\mathbf{k}) \equiv 0 \quad \text{oraz} \quad \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{V}}^L(\mathbf{k}) = 0,$$

które są transformacjami Fouriera równości  $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{V}}^T(\mathbf{k}) \equiv 0$  i  $\nabla \times \tilde{\mathbf{V}}^L(\mathbf{k}) \equiv 0$  (po skróceniu przez jednostkę urojoną  $i$ ). Transformata Fouriera równości  $\mathbf{B}^T = \nabla \times \mathbf{A}^T$  ma postać

$$\tilde{\mathbf{B}}^T(\mathbf{k}) = \mu_0 \tilde{\mathbf{H}}^T(\mathbf{k}) \equiv i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{A}}^T(\mathbf{k}), \quad (7.27)$$

stąd zaś

$$\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{H}}^T(\mathbf{k}) = \frac{i}{\mu_0} k \times [\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{A}}^T(\mathbf{k})] = -\frac{i}{\mu_0} k^2 \tilde{\mathbf{A}}^T(\mathbf{k}),$$

i ostatecznie

$$\tilde{\mathbf{A}}^T(\mathbf{k}) = \frac{\mu_0 i \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{H}}^T(\mathbf{k})}{k^2}. \quad (7.28)$$

Przetransformowane równania Maxwella mają postać

$$\mu_0 \dot{\tilde{\mathbf{H}}} = -i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}, \quad \epsilon_0 \dot{\tilde{\mathbf{E}}} = i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{H}} - \tilde{\mathbf{J}}, \quad (7.29)$$

$$i\mu_0 \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{H}} = 0, \quad i\epsilon_0 \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\rho}. \quad (7.30)$$

Dla składowych longitudinalnych równan (7.29) mamy

$$i\mu_0 \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{H}}^L = 0 \quad \text{oraz} \quad i\epsilon_0 \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{E}}^L = \tilde{\rho}, \quad (7.31)$$

a stąd z dowolności  $\mathbf{k}$  dla dowolnej chwili  $t$

$$\tilde{\mathbf{H}}^L(\mathbf{k}) = 0 \quad \text{oraz} \quad \tilde{E}^L = -\frac{\mathbf{k}\tilde{\rho}}{\epsilon_0 k^2}. \quad (7.32)$$

Zatem gęstość ładunku w zupełności określa pole  $\mathbf{E}^L(\mathbf{x}, t)$ .

Wykorzystując równania (7.27) i (7.28), równania (7.29) można przepisać w postaci

$$k^2 \tilde{\mathbf{A}}^T(\mathbf{k}) + \epsilon_0 \mu_0 \ddot{\tilde{\mathbf{A}}}(\mathbf{k}) = \mu_0 \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{k}) \quad (7.33)$$

równoważnej równaniu d'Alemberta (7.22).

Ponieważ pola  $\mathbf{A}^T(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{E}^T(\mathbf{x}, t)$  i  $\mathbf{J}^T(\mathbf{x}, t)$  są hermitowskie, z równości (7.23) łatwo widać, że

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathbf{A}}^T(\mathbf{k})]^* &= \tilde{\mathbf{A}}^T(-\mathbf{k}), \\ [\tilde{\mathbf{E}}^T(\mathbf{k})]^* &= \tilde{\mathbf{E}}^T(-\mathbf{k}), \\ [\tilde{\mathbf{J}}^T(\mathbf{k})]^* &= \tilde{\mathbf{J}}^T(-\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (7.34)$$

Zatem zachowanie się wielkości z indeksem  $(-\mathbf{k})$  jest całkowicie określone zachowaniem się wielkości z  $(+\mathbf{k})$ . Czyli tylko połowa przestrzeni pędów odpowiada zmiennym dynamicznym niezależnym.

W płaszczyźnie wyznaczonej przez wektory  $\mathbf{e}_1(\mathbf{k})$  i  $\mathbf{e}_2(\mathbf{k})$  można również prowadzić bazę zespoloną postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_+(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\mathbf{e}_1(\mathbf{k}) + i\mathbf{e}_2(\mathbf{k})], \\ \mathbf{e}_-(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\mathbf{e}_1(\mathbf{k}) - i\mathbf{e}_2(\mathbf{k})]. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Przy tak wybranej bazie każdemu wektorowi  $\mathbf{V}$  odpowiadają dwie poprzeczne składowe

$$\tilde{V}_\pm(k) = \mathbf{e}_\pm \cdot \tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{k}). \quad (7.36)$$

Przy obrocie bazy  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  o kąt  $\theta$  składowe (7.36) transformują się według wzoru

$$\tilde{V}'_{\pm}(\mathbf{k}) = e^{\pm i\theta} \tilde{V}_{\pm}(\mathbf{k}). \quad (7.37)$$

Dwa ortogonalne kierunki polaryzacji, wyznaczone przez wektory  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  lub  $\mathbf{e}_+, \mathbf{e}_-$ , wygodnie będzie dalej oznaczać jednym indeksem, np.  $\lambda$ . Przypadek, gdy  $\lambda$  przyjmuje wartości 1,2 odpowiada polaryzacji liniowej, gdy  $\lambda$  przyjmuje wartości  $+, -$ , mamy do czynienia z polaryzacją kołową. Zatem dowolne transwersalne pole wektorowe  $\tilde{\mathbf{V}}^T$  ma składowe  $\tilde{\mathbf{V}}_{\lambda}^T$  przy odpowiednio wybranej bazie. W szczególności przy pomocy składowych polaryzacyjnych równania (7.29) można przepisać w postaci

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{A}}}_{\lambda}^T(\mathbf{k}) &= -\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}), \\ \epsilon_0 \mu_0 \dot{\tilde{\mathbf{E}}}_{\lambda}^T(\mathbf{k}) &= k^2 \tilde{\mathbf{A}}_{\lambda}^T(\mathbf{k}) - \mu_0 \tilde{\mathbf{J}}^T(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (7.38)$$

W ten sposób niezależne okazują się nie tylko zmienne dynamiczne odpowiadające różnym wartościom  $\mathbf{k}$ , ale i różnym polaryzacom. Z równań (7.38) natychmiast wynika związek

$$k^2 \tilde{\mathbf{A}}_{\lambda}^T(\mathbf{k}) + \epsilon_0 \mu_0 \ddot{\tilde{\mathbf{A}}}_{\lambda}^T(\mathbf{k}) = \mu_0 \tilde{\mathbf{J}}_{\lambda}^T(\mathbf{k}). \quad (7.39)$$

Dalej będziemy rozważali jedynie pole transwersalne, zatem możemy bez obawy pomyłek opuszczać indeks  $T$ .

### 7.3 Relacje komutacji dla wielkości charakteryzujących pole elektromagnetyczne

Należy teraz sformułować warunki graniczne, które powinny spełniać rozwiązanie równania (7.39). Warunki graniczne w teorii klasycznej stanowią po prostu wartości początkowe  $\tilde{\mathbf{A}}_{\lambda}$  (lub  $\tilde{\mathbf{E}}_{\lambda}$ ). W teorii kwantowej zarówno  $\tilde{\mathbf{E}}_{\lambda}$ , jak i  $\tilde{\mathbf{A}}_{\lambda}$  są operatorami i ich reguły komutacji powinny odpowiadać kanonicznym regułom komutacji.

Założmy teraz, że rozwiązania, których szukamy, spełniają periodyczne warunki graniczne. Aby te warunki były spełnione, w transformatach Fouriera (7.23) mogą występować tylko wektory  $\mathbf{k}$  o składowych spełniających równości

$$k_j = \frac{2\pi}{L} n_j, \quad (7.40)$$

gdzie  $n_j, j = 1, 2, 3$  - są dowolnymi liczbami całkowitymi, a  $L$  jest krawędzią sześcianu, w którym zawarte jest badane pole. Na podstawie (7.34) wiemy, że niezależne zmienne dynamiczne są numerowane tylko połową punktów przestrzeni pędów. Odrzucając przypadek  $\mathbf{k} = 0$ , rozważać będziemy tylko takie  $\mathbf{k}$  postaci (7.40), które należą do danej półprzestrzeni. W wybranej półprzestrzeni możemy napisać następujące reguły komutacyjne, odpowiadające kanonicznym regułom

komutacji:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[ \tilde{\mathbf{E}}_\lambda(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{E}}_\lambda^*(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{A}}_{\lambda'}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{A}}_{\lambda'}^*(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \right] \\ &= i\hbar \delta_{\mathbf{k} \mathbf{k}'} \delta_{\lambda\lambda'}. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Wydzielając w sposób jawny zależność od czasu, łatwo sprawdzić, że te relacje będą spełnione dla wszystkich  $\mathbf{x}$  tylko w tym przypadku, gdy

$$\left[ \tilde{\mathbf{E}}_\lambda^*(\mathbf{k}, t), \tilde{\mathbf{A}}_{\lambda'}(\mathbf{k}', t) \right] = \left[ \tilde{\mathbf{E}}_\lambda(\mathbf{k}, t), \tilde{\mathbf{A}}_{\lambda'}^*(\mathbf{k}', t) \right] = i\hbar \delta_{\mathbf{k} \mathbf{k}'} \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (7.42)$$

a wszystkie pozostałe komutatory brane w tej samej chwili czasu są równe zero. Zakładamy, że relacje powyższe są prawdziwe w dowolnej chwili czasu: w szczególności stanowią one warunki początkowe dla rozwiązań układu (7.38).

Jednocześnie zakładamy następujące relacje komutacji dla operatora prądu  $\tilde{\mathbf{J}}_\lambda(\mathbf{k})$

$$\begin{aligned} \left[ \tilde{\mathbf{A}}_\lambda(\mathbf{k}, t), \tilde{\mathbf{J}}_{\lambda'}(\mathbf{k}', t) \right] &= 0, \\ \left[ \tilde{\mathbf{A}}_\lambda(\mathbf{k}, t), \tilde{\mathbf{J}}_{\lambda'}(\mathbf{k}, t) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (7.43)$$

Oczywiście w różnych chwilach czasu  $t$  i  $t'$  operatory  $\tilde{\mathbf{A}}_\lambda(\mathbf{k}, t')$  i  $\tilde{\mathbf{E}}_\lambda(\mathbf{k}, t')$  mogą nie komutować z operatorem  $\tilde{\mathbf{J}}_{\lambda'}(\mathbf{k}', t)$ .

Odpowiedni dla zagadnienia hamiltonian kwantowy nietrudno znaleźć, wychodzą ze znanego klasycznego wyrażenia na gęstość energii pola. W naszym przypadku gęstość energii  $W$  dana jest wzorem

$$W = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 (\mathbf{E}^T)^2 + \mu_0 (\mathbf{H}^T)^2 \right). \quad (7.44)$$

Dokonując transformaty Fouriera i wykorzystując równości  $c^2 = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1}$  oraz  $k^2 = \omega^2 c^2$  ( $c$  – prędkość światła), można ogólny hamiltonian (po wprowadzeniu oddizływania) napisać w postaci

$$\begin{aligned} H &= \frac{\epsilon}{2} \left[ \mathbf{E}_\lambda^*(\mathbf{k}) \mathbf{E}_\lambda(\mathbf{k}) + \omega^2 \mathbf{A}_\lambda^*(\mathbf{k}) \mathbf{A}_\lambda(\mathbf{k}) - \frac{\hbar\omega}{\epsilon_0} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{J}_\lambda^*(\mathbf{k}) \mathbf{A}_\lambda(\mathbf{k}) - \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{J}_\lambda(\mathbf{k}) \mathbf{A}_\lambda^*(\mathbf{k}) \right]. \end{aligned} \quad (7.45)$$

przy czym odjęliśmy nieskończoną stałą  $\hbar\omega/\epsilon_0$  (energię drgań zerowych), aby hamiltonian był dobrze określony. Łatwo można przekonać się, dokonując prostych przeliczeń, że równania (7.38) są równoważne równaniom Heisenberga (7.8) dla operatorów  $\tilde{\mathbf{A}}_\lambda^T(\mathbf{k})$  oraz  $\tilde{\mathbf{E}}_\lambda^T(\mathbf{k})$  z hamiltonianem postaci (7.45).

Analogicznie jak to robiliśmy dla zmiennych  $\hat{p}$  i  $\hat{q}$  (operatory pędu i położenia) w przypadku oscylatora, możemy obecnie przejść od operatorów  $\tilde{\mathbf{A}}_\lambda^T(\mathbf{k})$  oraz  $\tilde{\mathbf{E}}_\lambda^T(\mathbf{k})$  do operatorów kreacji i anihilacji i wyrazić poprzez nie wielkości opisujące pole.

Definiujemy operatory  $a_\lambda$  i  $a_\lambda^*$ :

$$\begin{aligned} a_\lambda(\mathbf{k}) &= \left( \frac{2\hbar\omega}{\epsilon_0} \right)^{-1/2} \left[ \omega \tilde{\mathbf{A}}_\lambda(\mathbf{k}) - i \tilde{\mathbf{E}}_\lambda(\mathbf{k}) \right], \\ a_\lambda^*(\mathbf{k}) &= \left( \frac{2\hbar\omega}{\epsilon_0} \right)^{-1/2} \left[ \omega \tilde{\mathbf{A}}_\lambda^*(\mathbf{k}) + i \tilde{\mathbf{E}}_\lambda^*(\mathbf{k}) \right]. \end{aligned} \quad (7.46)$$

W oparciu o reguły komutacji dla  $\tilde{\mathbf{A}}_\lambda(\mathbf{k})$  i  $\tilde{\mathbf{E}}_\lambda(\mathbf{k})$  otrzymujemy reguły komutacji dla  $a_\lambda(\mathbf{k})$  i  $a_\lambda^*(\mathbf{k})$

$$\begin{aligned} [a_\lambda(\mathbf{k}, t), a_\lambda^*(\mathbf{k}', t)] &= \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \\ [a_\lambda(\mathbf{k}, t), a_\lambda(\mathbf{k}', t)] &= [a_\lambda^*(\mathbf{k}, t), a_\lambda^*(\mathbf{k}', t)] = 0. \end{aligned} \quad (7.47)$$

W tak wprowadzonych oznaczeniach hamiltonian (7.47) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\lambda, \mathbf{k}} \left\{ \hbar\omega N_\lambda(\mathbf{k}) - \left( \frac{\hbar}{2\omega\epsilon_0} \right) \left[ \mathbf{J}_\lambda^*(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mathbf{J}_\lambda(\mathbf{k}) a_\lambda^*(\mathbf{k}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (7.48)$$

gdzie

$$N_\lambda(\mathbf{k}) = a_\lambda^*(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}), \quad (7.49)$$

jest operatorem ilości cząstek w modzie opisanym polaryzacją  $\lambda$  i wektorem  $\mathbf{k}$ . W ten sposób wyraziliśmy hamiltonian pola w postaci sumy hamiltonianów niezależnych oscylatorów, przy czym z każdą polaryzacją  $\lambda$  i z każdym wektorem  $\mathbf{k}$  został związany jeden oscylator.

W Rozdziale 6 wskazywaliśmy, że operator energii  $H$  jest dobrze określony, jeśli jest określony operator całkowitej ilości cząstek

$$N = \sum_{\lambda, \mathbf{k}} N_\lambda(\mathbf{k}) \quad (7.50)$$

Udowodnimy obecnie, że swobodne pole promieniowania w kubicznej wnęce spełnia warunek

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega_k} < \infty$$

z poprzedniego rozdziału. Warunek ten jest konieczny i dostateczny dla poprawnego określenia macierzy gęstości. Wiemy, że  $\omega^2 = c^2 \mathbf{k}^2$  oraz  $\mathbf{k} = (2\pi/L)\mathbf{n}$ , gdzie  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ . Z oczywistej nierówności

$$(|n_1| - |n_2|)^2 + (|n_1| - |n_3|)^2 + (|n_2| - |n_3|)^2 \geq 0, \quad (7.51)$$

natychmiast wynika, że

$$|n| = (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{1/2} \geq \frac{1}{\sqrt{3}} (|n_1| + |n_2| + |n_3|) := \sum(\mathbf{n}). \quad (7.52)$$

Zatem

$$\omega_k = \frac{2\pi c}{L} |\mathbf{n}| \geq \frac{2\pi c}{L} \sum(\mathbf{n})$$

oraz

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda, \mathbf{k}} e^{-\beta \hbar \omega_k} &= 2 \sum_{\mathbf{n}} \exp \left( -\frac{2\pi \beta \hbar c |\mathbf{n}|}{L} \right) \\ &\leq 2 \sum_{\mathbf{n}} \exp \left( -\frac{2\pi \beta \hbar c}{L} \sum(\mathbf{n}) \right) = 2 \left[ \left( \tanh \frac{\pi \beta \hbar c}{\sqrt{3} L} \right)^{-3} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (7.53)$$

Widzimy, że rozważana suma jest skończona. Jest to twierdzenie ogólnie ważne dla dowolnej skończonej objętości.

## 7.4 Ewolucja w czasie operatorów pola

W podrozdziale 7.2 pokazaliśmy, że operator  $\tilde{\mathbf{A}}_\lambda(\mathbf{k})$  spełnia równanie

$$k^2 \tilde{\mathbf{A}}_\lambda(\mathbf{k}) + \epsilon_0 \mu_0 \ddot{\tilde{\mathbf{A}}}_\lambda(\mathbf{k}) = \mu_0 \tilde{\mathbf{J}}_\lambda(\mathbf{k}), \quad (7.54)$$

lub równoważne

$$\ddot{\tilde{\mathbf{A}}}_\lambda(\mathbf{k}) + \omega_k^2 \tilde{\mathbf{A}}_\lambda(\mathbf{k}) = \frac{1}{\epsilon_0} \tilde{\mathbf{J}}_\lambda(\mathbf{k}). \quad (7.55)$$

Jest to podstawowe równanie oscylatora, na który działają siły zewnętrzne.

Wykorzystując równości (7.46) oraz (7.38), łatwo można sprawdzić, że operator niszczenia  $a_\lambda(\mathbf{k})$  spełnia równanie

$$i \dot{a}_\lambda(\mathbf{k}) = \omega a_\lambda(\mathbf{k}) - (2\hbar\omega_k\epsilon_0)^{-1/2} \tilde{\mathbf{J}}_\lambda(\mathbf{k}), \quad (7.56)$$

a operator niszczenia  $a_\lambda^*(\mathbf{k})$  spełnia równanie

$$-i \dot{a}_\lambda^*(\mathbf{k}) = \omega a_\lambda^*(\mathbf{k}) - (2\hbar\omega_k\epsilon_0)^{-1/2} \tilde{\mathbf{J}}_\lambda^*(\mathbf{k}). \quad (7.57)$$

Rozwiązanie równania (7.56), gdy jako chwilę początkową wybierzemy  $t_0 = 0$ , ma postać

$$\begin{aligned} a_\lambda(\mathbf{k}) &= e^{-i\omega_k t} a_\lambda(\mathbf{k}, 0) \\ &+ i(2\hbar\omega_k\epsilon_0)^{-1/2} e^{-i\omega_k t} \int_0^t e^{i\omega_k t'} \tilde{\mathbf{J}}_\lambda(\mathbf{k}, t') dt'. \end{aligned} \quad (7.58)$$

Gdybyśmy wybrali chwilę początkową w  $-\infty$ , tzn  $t_0 = -\infty$ , wówczas rozwiązanie (7.56) miałoby postać

$$a_\lambda(\mathbf{k}) = a_\lambda^{in}(\mathbf{k}, t) + i(2\hbar\omega_k\epsilon_0)^{-1/2} e^{-i\omega_k t} \int_{-\infty}^t e^{i\omega_k t'} \tilde{\mathbf{J}}_\lambda(\mathbf{k}, t') dt', \quad (7.59)$$

gdzie

$$a_\lambda^{in}(\mathbf{k}, t) = e^{-i\omega_k t} a_\lambda^{in}(\mathbf{k})$$

i  $a_\lambda^{in}(\mathbf{k})$  oznacza postać operatora w przeszłości, gdy jeszcze nie uwzględniony był wpływ źródeł.

Wyżej założyliśmy, że prąd  $\tilde{\mathbf{J}}_\lambda(\mathbf{k}, t)$  jest zadany, wobec czego można założyć, że zadany jest również operator  $K_\lambda(\mathbf{k}, t)$  wchodzący do wzoru

$$a_\lambda(\mathbf{k}) = a_\lambda^{in}(\mathbf{k}) + K_\lambda(\mathbf{k}, t) \quad (7.60)$$

i związany jest z prądem relacją

$$K_\lambda(\mathbf{k}, t) = i(2\hbar\omega_k\epsilon_0)^{-1/2} \int_{-\infty}^t e^{i\omega_k(t'-t)} \tilde{\mathbf{J}}_\lambda(\mathbf{k}, t') dt'. \quad (7.61)$$

Rozwiązanie dla  $a_\lambda(\mathbf{k})$  powinno spełniać relacje komutacji (7.49) dla wszystkich czasów  $t$ . Ponieważ  $a_\lambda^{in}(\mathbf{k})$  spełnia te relacje, zatem operator  $K_\lambda(\mathbf{k}', t)$  powinien spełniać warunki

$$\begin{aligned} &[a_\lambda^{in}(\mathbf{k}, t), K_{\lambda'}^*(\mathbf{k}', t)] + [K_\lambda(\mathbf{k}, t), a_\lambda^{in*}(\mathbf{k}', t)] \\ &+ [K_\lambda(\mathbf{k}, t), K_{\lambda'}^*(\mathbf{k}', t)] = 0 \end{aligned} \quad (7.62)$$

oraz

$$\begin{aligned} & [a_\lambda^{in}(\mathbf{k}, t), K_{\lambda'}(\mathbf{k}', t)] + [K_\lambda(\mathbf{k}, t), a_\lambda^{in}(\mathbf{k}', t)] \\ & + [K_\lambda(\mathbf{k}, t), K_{\lambda'}(\mathbf{k}', t)] = 0. \end{aligned} \quad (7.63)$$

Powyższe relacje są ograniczeniami nakładanymi na prąd  $\tilde{\mathbf{J}}_\lambda(\mathbf{k}, t)$  w różnych chwilach czasu.

Rozważmy teraz dwa przypadki szczególne:

1. Jeżeli zachodzi  $\tilde{\mathbf{J}}_\lambda(\mathbf{k}, t) = 0$  dla każdego  $t$ , to również  $K_\lambda(\mathbf{k}, t) = 0$  i dla swobodnego pola otrzymujemy rozwiązanie

$$a_\lambda(\mathbf{k}, t) = e^{-i\omega_k t} = a_\lambda^{in}(\mathbf{k}). \quad (7.64)$$

2. Jeżeli prąd  $\tilde{\mathbf{J}}_\lambda$  jest proporcjonalny do operatora jednostkowego  $I$  dla wszystkich  $t$ , wówczas operator  $K_\lambda(\mathbf{k}, t)$  jest proporcjonalny do wektora jednostkowego, tak że

$$K_\lambda(\mathbf{k}, t) = c_\lambda(\mathbf{k}, t), \quad (7.65)$$

gdzie  $c_\lambda(\mathbf{k}, t)$  jest  $c$ -liczbową funkcją.

Rozwiązanie dla  $a_\lambda(\mathbf{k}, t)$  ma teraz postać

$$a_\lambda(\mathbf{k}, t) = e^{-i\omega_k t} = a_\lambda^{in}(\mathbf{k}) + c_\lambda(\mathbf{k}, t). \quad (7.66)$$

Z równań (7.60) oraz (7.61) można otrzymać zależność od czasu innych wielkości. Na przykład dla operatora  $\tilde{\mathbf{A}}_\lambda(\mathbf{k}, t)$  mamy

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_\lambda(\mathbf{k}, t) &= \left( \frac{\hbar}{2\omega_k \epsilon_0} \right)^{1/2} [e^{-i\omega_k t} a_\lambda^{in}(\mathbf{k}) + e^{i\omega_k t} a_\lambda^{in*}(\mathbf{k})] \\ &+ \left( \frac{\hbar}{2\omega_k \epsilon_0} \right)^{1/2} [K_\lambda(\mathbf{k}, t) + K_\lambda^*(-\mathbf{k}, t)] \\ &= \cos(\omega_k t) \tilde{\mathbf{A}}_\lambda^{in}(\mathbf{k}) - \omega_k^{-1} \sin(\omega_k t) \tilde{\mathbf{E}}_\lambda^{in}(\mathbf{k}) \\ &+ \frac{1}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^t \omega_k^{-1} \sin \omega_k(t - t') \tilde{\mathbf{J}}_\lambda(\mathbf{k}, t') dt'. \end{aligned} \quad (7.67)$$

Ostatecznie możemy napisać

$$\tilde{\mathbf{A}}_\lambda(\mathbf{k}, t) = \tilde{\mathbf{A}}_\lambda^{in}(\mathbf{k}, t) + \frac{1}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^t \omega_k^{-1} \sin \omega_k(t - t') \tilde{\mathbf{J}}_\lambda(\mathbf{k}, t') dt'. \quad (7.68)$$

Wzór (7.68) daje rozwiązanie równania (7.54). Rozwiązania dla pola elektrycznego  $\tilde{\mathbf{A}}_\lambda(\mathbf{k}, t)$  zgodnie z (7.38) dostajemy różniczkując (7.68):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_\lambda(\mathbf{k}, t) &= \cos(\omega_k t) \tilde{\mathbf{E}}_\lambda^{in}(\mathbf{k}) + \omega_k \sin(\omega_k t) \tilde{\mathbf{A}}_\lambda^{in}(\mathbf{k}) \\ &- \frac{1}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^t \omega_k^{-1} \cos \omega_k(t - t') \tilde{\mathbf{J}}_\lambda(\mathbf{k}, t') dt'. \end{aligned} \quad (7.69)$$

Ostatnią równość przepisać można w postaci

$$\tilde{\mathbf{E}}_\lambda(\mathbf{k}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_\lambda^{in}(\mathbf{k}, t) - \frac{1}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^t \cos \omega_k(t - t') \tilde{\mathbf{J}}_\lambda(\mathbf{k}, t') dt'. \quad (7.70)$$

Wartości średnie operatorów pola otrzymujemy poprzez średniowanie z macierzą gęstości danego stanu. Na przykład

$$\langle \tilde{\mathbf{E}}_\lambda(\mathbf{k}, t) \rangle = \text{Tr}[\rho \tilde{\mathbf{E}}_\lambda(\mathbf{k}, t)]. \quad (7.71)$$

Dla operatora  $a_\lambda(\mathbf{k}, t)$  mamy

$$\begin{aligned} \langle a_\lambda(\mathbf{k}, t) \rangle &= e^{-i\omega_k t} \langle a_\lambda^{in}(\mathbf{k}, t) \rangle \\ &+ i(2\hbar\omega_k\epsilon_0)^{-1/2} e^{-i\omega_k t} \int_{-\infty}^t e^{i\omega_k t'} \langle \tilde{\mathbf{J}}_\lambda(\mathbf{k}, t') \rangle dt'. \end{aligned} \quad (7.72)$$

Transformata Fouriera po czasie przeprowadza ostatnie równanie do postaci

$$\begin{aligned} \langle a_\lambda(\mathbf{k}, \nu) \rangle &= \delta(\nu - \nu_k) \langle a_\lambda^{in}(\mathbf{k}, t) \rangle \\ &+ \frac{i}{2\pi} (2\hbar\omega_k\epsilon_0)^{-1/2} \left[ \pi \delta(\nu - \nu_k) + \frac{i}{\nu - \nu_k} \right] \langle \tilde{\mathbf{J}}_\lambda(\mathbf{k}, \nu) \rangle, \end{aligned} \quad (7.73)$$

gdzie  $\nu_k = \omega_k/2\pi$ .

Dokonując transformacji naszych podstawowych rozwiązań operatorowych do przestrzeni konfiguracyjnej (przestrzeni  $\mathbf{x}$ -ów), przyjmujemy następującą normalizację w (7.23):  $\Omega = (2\pi)^3$ . Przyjęcie takiej normalizacji jest równoważne z przyjęciem, że objętością kwantowania jest cała przestrzeń. Mamy teraz na przykład

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-3/2} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t) d^3k. \quad (7.74)$$

Wykorzystując równość (7.67), możemy napisać

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= - \int \left[ D(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) \dot{\mathbf{A}}^{in}(\mathbf{y}) + \dot{D}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) \mathbf{A}(\mathbf{y}) \right] d^3y \\ &+ \frac{1}{\epsilon_0} \int D_R(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - t') \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{y}, t') dt', \end{aligned} \quad (7.75)$$

gdzie

$$\begin{aligned} D(x, t) &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \frac{\sin ckt}{ck} d^3k \\ &= -(4\pi|\mathbf{x}|)^{-1} [\delta(|\mathbf{x}| - t) - \delta(|\mathbf{x}| + t)] \end{aligned} \quad (7.76)$$

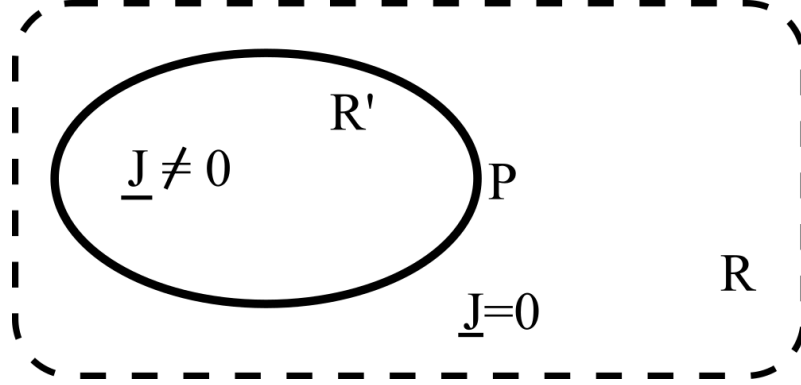
oraz

$$D_R(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 4\pi|\mathbf{x}|^{-1} \delta(|\mathbf{x}| - t), & \text{dla } t > 0, \\ 0, & \text{dla } t < 0. \end{cases} \quad (7.77)$$

Funkcje określone równościami (7.76) oraz (7.77) są funkcjami Greena dla równania falowego.

Pierwsze dwa człony w (7.75) przepisać można w postaci

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}^{in}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\epsilon_0} \int D_R(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - t') \mathbf{J}(\mathbf{y}, t') d^3y dt'. \quad (7.78)$$



Rysunek 7.1: Obszary w rozwiązaniu równania (7.82)

Jak wskazywaliśmy wyżej, jeżeli prąd  $\mathbf{J}(\mathbf{y}, t)$  jest proporcjonalny do operatora jednostkowego dla wszystkich  $\mathbf{y}$  i  $t$ , to rozwiązanie ma postać

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}^{in}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{c}(\mathbf{x}, t), \quad (7.79)$$

gdzie  $\mathbf{c}(\mathbf{x}, t)$  jest pewnym  $c$ -liczbowym polem.

Mówiąc ściśle, operatory  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$  nie są hermitowskie - pola  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$  są dystrybucjami. Aby otrzymać rzeczywiście operatory hermitowskie, należy brać całki postaci

$$\mathbf{A}_f(t) = \int f(\mathbf{x}) \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) d^3x, \quad (7.80)$$

gdzie  $f(\mathbf{x})$  jest dostatecznie gładką funkcją próbną, której nośnik może być silnie zlokalizowany wokół wybranego punktu.

Aby badać zachowanie się w przestrzeni rozwiązań naszych równań ruchu, dokonajmy transformaty Fouriera po czasie równań (7.38). Dostajemy

$$\begin{aligned} i\omega \check{\mathbf{A}} &= \check{\mathbf{E}}, \\ i\omega \check{\mathbf{E}} &= \nabla^2 \check{\mathbf{A}} + \mu_0 \check{\mathbf{J}}. \end{aligned} \quad (7.81)$$

Rugując z tych równań  $\check{\mathbf{E}}$ , dostajemy

$$(\nabla^2 + \omega^2) \check{\mathbf{A}} = -\mu_0 \check{\mathbf{J}}, \quad (7.82)$$

tzn. równanie niejednorodne typu Kirchhoffa.<sup>3</sup> Będziemy szukali rozwiązań tego równania w tych punktach przestrzeni, gdzie  $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = 0$  dla wszystkich  $t$ , a zatem, gdzie  $\check{\mathbf{J}}(\mathbf{x}, \nu) \equiv 0$ . Zakładamy, że powierzchnia  $\mathcal{P}$  jest na tyle regularna, aby można było stosować twierdzenie Stokesa. Dla punktów leżących wewnątrz interesującej nas części przestrzeni  $\mathcal{R}$  (p. Rys. 7.1), gdzie  $\mathbf{J} = 0$ , mamy oczywiście

$$\check{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \nu) = \int_{\mathcal{R}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \check{\mathbf{A}}(\mathbf{y}, \nu) d^3y, \quad (7.83)$$

<sup>3</sup>G. Kirchhoff (1824-1887).

gdzie całkowanie przeprowadza się po przestrzeni  $\mathcal{R}$ . Definiujemy teraz funkcję Greena  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \nu)$ , która spełnia równanie

$$(\nabla_x^2 + \omega^2)G(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \nu) = (\nabla_y^2 + \omega^2)G(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \nu) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (7.84)$$

Pamiętając, że w obszarze  $\mathcal{R}$  zachodzi równość  $J = 0$ , czyli z  $(\nabla^2 + \omega^2)\check{\mathbf{A}} = 0$ , co możemy napisać

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \nu) &= \int_{\mathcal{R}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \nu) (\nabla_y^2 + \omega^2) \check{\mathbf{A}}(\mathbf{y}, \nu) d^3y \\ &- \int_{\mathcal{R}} \check{\mathbf{A}}(\mathbf{y}, \nu) (\nabla_y^2 + \omega^2) (\nabla_y^2 + \omega^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \nu)) d^3y \\ &= \int_{\mathcal{R}} \frac{\partial}{\partial y_i} \left[ G(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \nu) \frac{\partial}{\partial y_i} \check{\mathbf{A}}(\mathbf{y}, \nu) - \check{\mathbf{A}}(\mathbf{y}, \nu) \frac{\partial}{\partial y_i} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \nu) \right] d^3y \\ &= \int_{\mathcal{P}} \left[ G(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \nu) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \check{\mathbf{A}}(\mathbf{y}, \nu) - \check{\mathbf{A}}(\mathbf{y}, \nu) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \nu) \right] d\mathcal{P}, \end{aligned} \quad (7.85)$$

gdzie ostatnią równość napisaliśmy na podstawie twierdzenia Gaussa. Szczególnie korzystne jest wybranie spośród wielu funkcji spełniających (7.84) takiej, która znika na powierzchni  $\mathcal{P}$  obszaru  $\mathcal{R}$ . Dla skonstruowania takiej funkcji szukamy funkcji własnych (fal stojących) spełniających równanie

$$\nabla^2 \psi_n(\mathbf{x}) + \omega_n^2 \psi_n(\mathbf{x}) = 0 \quad (7.86)$$

oraz warunek graniczny  $\psi_n(\mathbf{x}) = 0$ , dla  $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ .

Tego typu zagadnienia odgrywają podstawową rolę w mechanice kwantowej i, jak wiemy, istnieje zupełny układ ortonormalnych funkcji własnych  $\psi_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  spełniających relacje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\psi}_n(\mathbf{x}) \psi_n(\mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (7.87)$$

Wykorzystując tę informację, możemy napisać szukaną funkcję Greena

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\psi}_n(\mathbf{x}) \psi_n(\mathbf{y})}{\omega_n^2 - \omega^2}. \quad (7.88)$$

Funkcja  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \nu)$  dana wzorem (7.88) znika, gdy  $\mathbf{y}$  (lub  $\mathbf{x}$ ) należy do  $\mathcal{P}$  oraz spełnia równanie (7.84). Rzeczywiście

$$\begin{aligned} (\nabla_x^2 + \omega^2)G &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\omega_n^2 - \omega^2) \bar{\psi}_n(\mathbf{x}) \psi_n(\mathbf{y})}{(\omega_n^2 - \omega^2)} \\ &= -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (7.89)$$

Dla tak wybranej funkcji  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \nu)$  równość (7.85) przybiera postać

$$\check{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \nu) = - \int_{\mathcal{P}} \check{\mathbf{A}}(\mathbf{y}, \nu) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \nu) d\mathcal{P}. \quad (7.90)$$

Widzimy, że operator potencjału w dowolnym punkcie  $\mathbf{x}$  objętości  $\mathcal{R}$  jest liniowo związany z operatorami potencjału na powierzchni  $\mathcal{P}$ . Analogicznie można znaleźć rozwiązanie dla  $\check{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, \nu)$ :

$$\check{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \nu) \check{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, \nu) - \int_{\mathcal{P}} \check{\mathbf{E}}(\mathbf{y}, \nu) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \nu) d\mathcal{P}. \quad (7.91)$$

## Rozdział 8

# Stany koherentne

### 8.1 Podstawowe własności stanów koherentnych

Niech tak jak poprzednio  $Q$  i  $P$  oznaczają parę operatorów kanonicznie sprzężonych spełniających relację  $[Q, P] = i\hbar$ . Przyjmując częstość kołową  $\omega = 1$ , możemy napisać równości

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(Q + iP), \\ a^* &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(Q - iP), \end{aligned} \quad (8.1)$$

definiujące operatory kreacji i anihilacji.

**Stanami koherentnymi** będziemy nazywali wektory postaci

$$|z\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^{1/2}} |n\rangle, \quad (8.2)$$

gdzie  $z$  jest dowolną liczbą zespoloną, a wektory  $|n\rangle$  są stanami własnymi operatora  $N = a^*a$ . Czynniki  $\exp(-(1/2)|z|^2)$  wprowadzony jest ze względów normalizacyjnych. Powyższą notację wprowadził R. J. Glauber (1961). Pewne nieporozumienia mogą się pojawić dla  $z = 1$ . Oczywiście stan koherentny  $|z\rangle$  dla  $z = 1$  różni się od stanu  $|n\rangle$  dla  $n = 1$ .

Można wprowadzić również inne oznaczenia dla stanów  $|z\rangle$ , tak aby była jawnie wydzielona część rzeczywista i zespolona liczby  $z$ . Kładąc

$$z = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(q + ip), \quad (8.3)$$

gdzie  $p$  oraz  $q$  - to dwie dowolne liczby rzeczywiste, możemy (8.2) przepisać w postaci

$$|z\rangle = |p, q\rangle = \exp\left[-\frac{1}{4\hbar}(p^2 + q^2)\right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q + ip)^n}{(2\hbar)^{n/2} (n!)^{1/2}} |n\rangle. \quad (8.4)$$

**Stany koherentne sprzężone** określa się analogicznymi formułami

$$\langle z| = \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^{1/2}} \langle n|, \quad (8.5)$$

$$\langle z| = \langle p, q| = \exp \left[ -\frac{1}{4\hbar} (p^2 + q^2) \right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q + ip)^n}{(2\hbar)^{n/2} (n!)^{1/2}} \langle n|.$$

Wektory  $|z\rangle$  są unormowane:

$$\begin{aligned} \langle z|z\rangle &= e^{-|z|^2} \sum_{n,m} \frac{\bar{z}^m z^n}{(n!)^{1/2} (m!)^{1/2}} \langle m|n\rangle \\ &= e^{-|z|^2} \sum_{n,m} \frac{\bar{z}^m z^n}{(n!)^{1/2} (m!)^{1/2}} \delta_{mn} = e^{-|z|^2} \sum_n \frac{|z|^{2n}}{n!} = 1. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Zatem stany  $|z\rangle$  należą do  $\mathcal{H}$ . Wektory  $|z\rangle$  nie są jednak ortogonalne.

Rozpatrzmy teraz rozwiązania dla stanu podstawowego oscylatora harmonicznego, przy czym przyjmujemy  $m = \omega = 1$ . Możemy napisać

$$H|0\rangle = \frac{1}{2} \{P^2 + Q^2 - \hbar\} |0\rangle = 0. \quad (8.7)$$

Dla stanu podstawowego badanego układu zachodzą równości

$$\langle 0|Q|0\rangle = \langle 0|Q|0\rangle = 0. \quad (8.8)$$

Wprowadźmy operator unitarny

$$U(p, q) \equiv \exp[i\hbar(pQ - qP)]. \quad (8.9)$$

Można pokazać, że zachodzi równość

$$U(p, q)^{-1} (\alpha P + \beta Q) U(p, q) = \alpha(P + p) + \beta(Q + q), \quad (8.10)$$

gdzie  $\alpha$  i  $\beta$  są dowolnymi parametrami. Oczywiście  $U(p, q)^{-1} = U(-p, -q)$ . Równość (8.10) łatwo udowodnić, wykorzystując formułę

$$e^Y X e^Y = X + [Y, X] + \frac{1}{2} [Y, [Y, X]] + \dots \quad (8.11)$$

zachodzącą dla dowolnych operatorów  $X, Y$ . Kładąc  $X = \alpha P + \beta Q$  i  $Y = -(i/\hbar)(pQ - qP)$ , widzimy, że powyższy szereg obrywa się po drugim wyrazie, ponieważ komutator  $[Y, X]$  jest już c-liczbą

$$[Y, X] = \alpha p + \beta q.$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned} &\exp \left[ -\frac{i}{\hbar} (pQ - qP) \right] (\alpha P + \beta Q) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (pQ - qP) \right] \\ &= \alpha P + \beta Q + \alpha p + \beta q = \alpha(P + p) + \beta(Q + q). \end{aligned} \quad (8.12)$$

Jak widać, operator  $U(p, q)$  w działaniu na operatory  $Q$  i  $P$  "przesuwa" je odpowiednio o liczby  $q$  i  $p$ . Działając na hamiltonian układu, operator  $U(p, q)$  przeprowadza go do postaci

$$\begin{aligned} &U(p, q) \frac{1}{2} (P^2 + Q^2 - \hbar) U^{-1}(p, q) \\ &= \frac{1}{2} [(P - p)^2 + (Q - q)^2 - \hbar]. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Ostatnią równość łatwo otrzymać z (8.11), kładąc  $X = (1/2)(P^2 + Q^2 - \hbar)$  oraz  $Y = (i/\hbar)(pQ - qP)$ . Możemy obecnie napisać

$$\begin{aligned} 0 &= U(p, q)H|0\rangle = U(p, q) H U^{-1}(p, q)U(p, q)|0\rangle \\ &= \frac{1}{2} [(P - p)^2 + (Q - q)^2 - \hbar] U(p, q)|0\rangle. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Zatem stan

$$|p, q\rangle \equiv U(p, q)|0\rangle \quad (8.15)$$

jest stanem własnym oscylatora, którego współrzędna jest przesunięta o  $q$ , a pęd o  $p$ . Średnie wartości współrzędnej i pędu dla takiego oscylatora nie są równe zeru, lecz równają się odpowiednio

$$\begin{aligned} \langle p, q|Q|p, q\rangle &= \langle 0|U^{-1}(p, q)QU(p, q)|0\rangle \\ &= \langle 0|Q + q|0\rangle = q, \end{aligned} \quad (8.16)$$

oraz

$$\langle p, q|P|p, q\rangle = p.$$

Badanie stanów koherentnych jest również istotne z punktu widzenia minimalnej nieokreśloności. Wprowadzając oznaczenia

$$\begin{aligned} \Delta P &= P - \langle P \rangle, \\ \Delta Q &= Q - \langle Q \rangle, \end{aligned} \quad (8.17)$$

gdzie  $\langle \mathcal{O} \rangle = \langle \psi|\mathcal{O}|\psi \rangle$  i wykorzystując nierówności trójkąta oraz nierówność Schwartza, możemy napisać<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\hbar &= \frac{1}{2}|\langle [Q, P] \rangle| = \frac{1}{2}|\langle [\Delta Q, \Delta P] \rangle| \\ &\leq |\langle \Delta Q, \Delta P \rangle| \leq \langle \Delta Q^2 \rangle^{1/2} \langle \Delta P^2 \rangle^{1/2}, \end{aligned} \quad (8.18)$$

przy czym ostatnia nierówność jest oczywista, jeżeli rozisać wyrażenie  $|\langle \Delta Q, \Delta P \rangle|$

$$\begin{aligned} |\langle \Delta Q, \Delta P \rangle| &= |\langle \psi, \Delta Q \Delta P \psi \rangle| \\ &\leq \langle \Delta Q \psi, \Delta Q \psi \rangle^{1/2} \langle \Delta P \psi, \Delta P \psi \rangle^{1/2} \\ &= \langle \psi, \Delta Q^2 \psi \rangle^{1/2} \cdot \langle \psi, \Delta P^2 \psi \rangle^{1/2} = \langle \Delta Q^2 \rangle^{1/2} \langle \Delta P^2 \rangle^{1/2}. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Nierówność (8.18) wyraża **relację nieokreśloności (nieoznaczoności) Heisenberga**. Aby otrzymać stany z minimalną nieokreślonością, należy znaki nierówności w (8.18) zastąpić znakami równości. Nierówność Schwartza wykorzystana w (8.19) przechodzi w równość, gdy

$$\Delta Q|\psi\rangle = -i r \Delta P|\psi\rangle, \quad (8.20)$$

---

<sup>1</sup>Łatwo sprawdzić, że  $[\Delta Q, \Delta P] = [Q, P] = i\hbar$ .

gdzie  $r$  jest dowolną liczbą zespoloną. Pierwsza nierówność w (41.18) przechodzi w równość, jeśli czynnik  $r$  jest rzeczywisty. Warunek  $[\Delta Q, \Delta P] = i\hbar$  implikuje dodatniość  $r$ . Rzeczywiście,

$$\langle \psi | \Delta Q \Delta P - \Delta P \Delta Q | \psi \rangle = \left\langle \psi \left| i \frac{\Delta Q^2}{r} + i r \Delta P^2 \right| \right\rangle,$$

zatem

$$i\hbar \langle \psi | \psi \rangle = \frac{i}{r} \langle \Delta Q \psi | \Delta Q \psi \rangle + i r \langle \Delta P \psi | \Delta P \psi \rangle,$$

stąd zaś natychmiast wynika  $r > 0$ . Kładąc  $r = 1$ ,  $\omega = 1$ , przepisujemy (8.20) w postaci

$$\frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(Q + iP)|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\langle Q \rangle + i\langle P \rangle)|\psi\rangle, \quad (8.21)$$

czyli

$$a|\psi\rangle = \langle a \rangle |\psi\rangle.$$

Zatem stan o najmniejszych nieokreślonościach  $\langle \Delta Q^2 \rangle^{1/2}$  i  $\langle \Delta P^2 \rangle^{1/2}$  jest stanem własnym operatora niszczenia  $a$ .

Znając jeden wektor własny operatora  $a$ , mianowicie stan podstawowy  $|0\rangle$ , możemy otrzymywać inne przy pomocy wektora  $U(p, q)$ . Istotnie,

$$\begin{aligned} 0 &= U(p, q)a|0\rangle = U(p, q)aU^{-1}(p, q)U(p, q)|0\rangle \\ &= \left( a - \frac{(q + ip)}{\sqrt{2\hbar}} \right) |p, q\rangle. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Wykorzystaliśmy tu (8.10) oraz definicję operatora  $a$ . Ostatnią równość przepisać można w postaci

$$a|z\rangle \equiv a|p, q\rangle = \frac{(q + ip)}{\sqrt{2\hbar}}|p, q\rangle \equiv z|z\rangle. \quad (8.23)$$

Stany  $|p, q\rangle = U(p, q)|0\rangle$  są zatem wektorami własnymi operatora niszczenia.

Obecnie pokażemy, że stany  $p, q$  są stanami koherentnymi w sensie definicji (8.2). Najprostszy sposób dowodu równości

$$|p, q\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^{1/2}} |n\rangle$$

opiera się na formule Bakera-Hausdorffa która, gdy komutator  $[\dots, Y]$  komutuje z  $X$  i  $Y$ , ma postać<sup>2</sup>

$$e^{X+Y} = e^{-(1/2)[X,Y]} e^X e^Y. \quad (8.24)$$

Operator  $U(p, q)$  można przedstawić następująco:

$$\begin{aligned} U(p, q) &= \exp\left[\frac{i}{\hbar}(Qp - Pq)\right] = \exp\left\{\frac{i[p(a + a^*) + iq(a - a^*)]}{\sqrt{2\hbar}}\right\} \\ &= \exp\left[\frac{q + ip}{\sqrt{2\hbar}}a^* - \frac{q - ip}{\sqrt{2\hbar}}a\right] = \exp(za^* - \bar{z}a), \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Dowód formuły Bakera-Hausdorffa znajduje się np. w monografii: I. Białynicki-Birula, Z. Białynicka-Birula, "Elektrodynamika kwantowa", PWN, Warszawa 1969.

a stąd i z równości (8.24) wynika, że

$$U(p, q) = \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \exp(za^*) \exp(-\bar{z}a). \quad (8.25)$$

Ostatecznie pamiętając, że  $a^p|0\rangle = 0$  dla  $p = 1, 2, \dots$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} |p, q\rangle &= U(p, q)|0\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \exp(za^*) \exp(-\bar{z}a)|0\rangle \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \exp(za^*)|0\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} (a^*)^n |0\rangle \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^{1/2}} |n\rangle. \end{aligned} \quad (8.26)$$

Wiemy, że wektory odpowiadające stanom koherentnym, są unormowane. Zbadamy teraz ogólniejszy element macierzowy  $\langle z|z'\rangle$  dla dwóch stanów koherentnych:

$$\begin{aligned} \langle z|z'\rangle &= e^{-(1/2)|z|^2 - (1/2)|z'|^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^m z'^n}{(m!n!)^{1/2}} \langle m|n\rangle \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2 - \frac{1}{2}|z'|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n z'^n}{n!} \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2 - \frac{1}{2}|z'|^2 + \bar{z}z'\right). \end{aligned} \quad (8.27)$$

Oczywiście, gdy  $z = z'$ , wówczas z powyższego wynika, że  $\langle z|z'\rangle = \langle z|z\rangle = 1$ . Wyrażenie (8.27) można przepisać w postaci

$$\begin{aligned} \langle z|z'\rangle &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[|z|^2 - \bar{z}z' - \bar{z}'z + |z'|^2 - (\bar{z}z' - \bar{z}'z)\right]\right\} \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}|z - z'|^2 + \frac{1}{2}(\bar{z}z' - \bar{z}'z)\right] \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}|z - z'|^2 + i \operatorname{Im}(\bar{z}z')\right], \end{aligned}$$

stąd zaś natychmiast wynika równość

$$|\langle z|z'\rangle| = \exp\left(-\frac{1}{2}|z - z'|^2\right). \quad (8.28)$$

Ostatnie wyrażenie nigdy nie jest równe zero. Zatem zbiór stanów koherentnych jest rodziną wektorów unormowanych, z których żadne dwa nie są ortogonalne. Dla dowolnych  $z, z'$  zachodzi bowiem

$$0 < |\langle z|z'\rangle| \leq 1.$$

Praktycznie jednak  $\langle z|0\rangle \approx 0$  dla  $|z| \gg 1$ .

## 8.2 Dalsze własności stanów koherentnych

Wiemy, że stany koherentne  $|z\rangle$  są wektorami własnymi operatora niszczenia  $a$ . Zachodzi przy tym równość

$$a|z\rangle = z|z\rangle. \quad (8.29)$$

Można również pokazać, że są to jedyne stany własne operatora  $a$ . Z (8.29) wynika, że

$$\langle z'|a|z\rangle = z\langle z'|z\rangle, \quad (8.30)$$

oraz

$$\langle z|a^*|z'\rangle = \bar{z}\langle z|z'\rangle. \quad (8.31)$$

Formalnie z ostatniej równości wynika związek

$$\langle z|a^* = \bar{z}\langle z|, \quad (8.32)$$

który jest odpowiednikiem (8.29).

Rozważmy funkcje operatorowe  $F(a)$  i  $G(a^*)$ . Wówczas z równości (8.29) i (8.32) wynika odpowiednio

$$F(a)|z\rangle = F(z)|z\rangle, \quad (8.33)$$

oraz

$$\langle z|G(a^*) = G(\bar{z})\langle z|, \quad (8.34)$$

jeśli wyrażenia  $F(a)$  i  $G(a^*)$  są określone. Można pokazać, że nie istnieją stany własne  $|\tilde{\lambda}\rangle$  dla operatora  $a^*$ , takie że

$$a^*|\tilde{\lambda}\rangle = \lambda|\tilde{\lambda}\rangle. \quad (8.35)$$

Istotnie, uwzględniając (8.35) oraz własności operatora  $a^*$ , mamy

$$\langle n|a^*|\tilde{\lambda}\rangle = \sqrt{n}\langle n-1|\tilde{\lambda}\rangle = \lambda\langle n|\tilde{\lambda}\rangle, \quad (8.36)$$

dla  $n = 1, 2, \dots$ , natomiast dla  $n = 0$

$$\langle 0|a^*|\tilde{\lambda}\rangle = \lambda\langle 0|\tilde{\lambda}\rangle = 0. \quad (8.37)$$

Jeżeli  $\lambda = 0$ , to z (8.36) wynika, że  $\langle n-1|\tilde{\lambda}\rangle = 0$  dla  $n = 1, 2, \dots$ , tzn.  $|\tilde{\lambda}\rangle = 0$ . Jeśli  $\lambda \neq 0$ , to  $\langle 0|\tilde{\lambda}\rangle = 0$ , stąd po ponownym zastosowaniu (8.36) wynika  $\langle n|\tilde{\lambda}\rangle = 0$  dla  $n = 1, 2, \dots$ , a zatem  $|\tilde{\lambda}\rangle = 0$ . Nie istnieją więc wektory własne  $|\tilde{\lambda}\rangle$  różne od zerowego i spełniające związek (8.35). Rozpatrzmy obecnie następujący problem: czy dla  $z \rightarrow z'$  zachodzi również  $|z\rangle \rightarrow |z'\rangle$  (oczywiście w sensie normy), tzn. rozważamy problem ciągłości stanów koherentnych. Możemy napisać

$$\begin{aligned} \| |z\rangle - |z'\rangle \|^2 &= \langle z|z\rangle - \langle z'|z\rangle + \langle z'|z'\rangle \\ &= 2(1 - \operatorname{Re} \langle z|z'\rangle). \end{aligned} \quad (8.38)$$

Poprzednio mieliśmy  $\langle z|z'\rangle = e^{-A}$ , gdzie

$$A = -\ln \langle z|z'\rangle = \frac{1}{2}|z - z'|^2 - i \operatorname{Im}(\bar{z}z'),$$

zatem

$$\begin{aligned}
\| |z\rangle - |z'\rangle \|^2 &= 2[1 - \operatorname{Re} \langle z | z' \rangle] \\
&= 2 - e^{-A} - e^{-\bar{A}} = \int_0^A e^{-x} dz + \int_0^{\bar{A}} e^{-x} d\bar{x} = \int_0^1 (Ae^{-Ax} + \bar{A}e^{-A\bar{x}}) \\
&\leq 2 \int_0^1 |Ae^{-Ax}| dx \leq 2 \int_0^1 |A| dx \leq 2(|\operatorname{Re} A| + |\operatorname{Im} A|) \\
&= |z - z'|^2 + |\bar{z}z' - \bar{z}'z| \leq 2(|z| + |z'|)|z - z'|.
\end{aligned}$$

Nierówność

$$\| |z\rangle - |z'\rangle \| \leq 2(|z| + |z'|)|z - z'| \quad (8.39)$$

implikuje zbieżność według normy (silną zbieżność)  $|z\rangle \rightarrow |z'\rangle$ , gdy  $z \rightarrow z'$ .

Niech teraz  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ . Zbadamy własności funkcji postaci

$$\psi(z) \equiv \langle z | \psi \rangle = e^{-(1/2)|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n}{(n!)^{(1/2)}} \langle n | \psi \rangle, \quad (8.40)$$

gdzie  $z \in C$ .

Przedtem wszystkim dowolna funkcja postaci (8.40) jest ograniczona,

$$\begin{aligned}
|\psi(z)| &= |\langle z | \psi \rangle| \leq \langle z | z \rangle^{1/2} \langle \psi | \psi \rangle^{1/2} \\
&= \langle \psi | \psi \rangle^{1/2} < \infty
\end{aligned} \quad (8.41)$$

oraz ciągła, gdyż z nierówności

$$\begin{aligned}
|\psi(z) - \psi(z')| &= |(\langle z | - \langle z' |) \psi\rangle| \\
&\leq \| |z\rangle - |z'\rangle \| \cdot \| |\psi\rangle \| \leq [2(|z| + |z'|)|z - z'|]^{1/2} \| |\psi\rangle \|
\end{aligned} \quad (8.42)$$

wynika zbieżność  $\psi(z) \rightarrow \psi(z')$  dla  $z \rightarrow z'$ .

Funkcja postaci (42.10) jest również analityczna. Udowodnimy, że suma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n}{(n!)^{(1/2)}} \langle n | \psi \rangle$$

jest bezwzględnie zbieżna, ponieważ  $|\langle n | \psi \rangle| \leq \| |\psi\rangle \|$ . Uwzględniając nierówność  $|\langle n | \psi \rangle| \leq \| |\psi\rangle \|$ , otrzymujemy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n}{(n!)^{(1/2)}} |\langle n | \psi \rangle| \leq \| |\psi\rangle \| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n}{(n!)^{(1/2)}}. \quad (8.43)$$

Stąd zaś, stosując kryterium d'Alemberta, łatwo przekonujemy się, że ostatni szereg jest zbieżny, gdyż stosunek  $a_n/a_{n-1} = |\bar{z}|/\sqrt{n}$  dąży do zera dla  $n \rightarrow \infty$  oraz dla dowolnego  $z \in C$ . Szereg względem zmiennej zespolonej, który jest wszędzie bezwzględnie zbieżny, określa **funkcję całkowitą**.

Wyrażenie

$$f(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n}{(n!)^{(1/2)}} \langle n | \psi \rangle = \exp\left(\frac{1}{2}|z|^2\right) \psi(z) \quad (8.44)$$

jest więc funkcją całkowitą zmiennej  $\bar{z}$  dla dowolnego wektora  $|\psi\rangle$ . Dowolna funkcja postaci (8.40) może być zatem przedstawiona w postaci

$$\psi(z) = \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) f(\bar{z}) \quad (8.45)$$

i jest funkcją nieskończenie różniczkowalną zmiennych  $z$  i  $\bar{z}$ .

### 8.3 Reprezentacje ciągłe

Przejdziemy teraz do omówienia tzw. reprezentacji ciągłych opatrtych na stanach koherentnych. Wektory własne operatorów niehermitowskich w ogólności nie rozpinają całej przestrzeni Hilberta. Operator niszczenia  $a$  nie jest operatorem hermitowskim, zatem powstaje problem, czy jego wektory własne (stany koherentne  $|z\rangle$ ) rozpinają przestrzeń Hilberta. Okazuje się, że stany koherentne  $|z\rangle$ , dla  $z \in C$  rozpinają całą przestrzeń Hilberta. Zachodzi mocniejsze twierdzenia. Mianowicie, jak sugerował von Neumann, a udowodnili V. Bargmann i inni,<sup>3</sup> już podzbiór wszystkich stanów koherentnych  $|z\rangle$  z wartościami  $z = \sqrt{\pi}(\ell + im)$ , gdzie  $\ell$  i  $m$  - to dowolne liczby całkowite, a  $i$  jest jednostką urojoną, jest **zbiorem wypukłym w przestrzeni Hilberta**. Fizycznie oznacza to, że zbiór wszystkich stanów rozpiany jest przez takie wektory  $|p, q\rangle$ , dla których punktu  $p$  i  $q$  tworzą prostokątną sieć w przestrzeni fazowej o polach komórek równych  $h = 2\pi\hbar$ . W ten sposób otrzymujemy odwzorowanie przestrzeni Hilberta na przestrzeń funkcji całkowitych (Bargmanna)

$$\mathcal{H} \ni |\psi\rangle \rightarrow \langle p, q | \psi \rangle. \quad (8.46)$$

Można pokazać, że operator jednostkowy  $I$  daje się wyrazić poprzez stany koherentne w następujący sposób:

$$I = \frac{1}{\pi} \int d^2 z |z\rangle \langle z|, \quad (8.47)$$

gdzie  $d^2(z) = d(\text{Re } z) d(\text{Im } z)$  i całkowanie jest rozciągnięte na całą płaszczyznę zespoloną. Rozkład (8.47) jest odpowiednikiem rozkładu  $I = \sum_n |n\rangle \langle n|$ . Dowód relacji (8.47) znajduje się w skrypcie R.S. Ingardena "Elektrodynamika klasyczna i kwantowa" (Cz.II, Rozdz.2).

Dla elementów macierzowych  $\langle \lambda | \psi \rangle$  mamy natomiat rozkład

$$\langle \lambda | \psi \rangle = \frac{1}{\pi} \int \langle \lambda | z \rangle \langle z | \psi \rangle d^2 z, \quad (8.48)$$

gdzie  $|\lambda\rangle$  i  $|\psi\rangle$  są dowolne. Udowodnimy ostnią równość. Wykorzystując (8.40) możemy napisać związek

$$\langle \lambda | \psi \rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2 z \exp(-|z|^2) \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^m z^n}{(m!n!)^{1/2}} \langle \lambda | m \rangle \langle n | \psi \rangle.$$

---

<sup>3</sup>V. Bargmann, P. Butera, L. Girardello, J.R. Klauder, On the completeness of the coherent states, Reports on Mathematical Physics 2 (1971) 221-228.

Zmieniając kolejność całkowania i sumowania i wprowadzając zmienne biegunowe:  $z = re^{i\theta}$ ,  $d^2z = r dr d\theta$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\langle \lambda|m \rangle \langle n|\psi \rangle}{(m!n!)^{1/2}} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} r^{m+n} e^{i\theta(n-m)} e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle \lambda|m \rangle \langle n|\psi \rangle}{(n!)} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{2n+1} dr \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle \lambda|m \rangle \langle n|\psi \rangle = \langle |\psi \rangle, \end{aligned} \quad (8.49)$$

co należało wykazać.

Pomiędzy abstrakcyjną przestrzenią Hilberta  $\mathcal{H}$  a przestrzenią Bargmanna  $\mathcal{B}$  można ustalić odpowiedniości według następującego schematu:

dla wektorów:

$$|\psi\rangle \longleftrightarrow \langle z|\psi\rangle, \quad (8.50)$$

dla iloczynu skalarnego

$$\langle \varphi|\psi \rangle \longleftrightarrow \frac{1}{\pi} \int d^2z \langle \varphi|z \rangle \langle z|\psi \rangle, \quad (8.51)$$

dla operatorów

$$\mathcal{O} \longleftrightarrow \langle z|\mathcal{O}|z' \rangle, \quad (8.52)$$

dla działania operatora

$$\mathcal{O}|\psi\rangle \longleftrightarrow \langle z|\mathcal{O}|\psi\rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2z' \langle z|\mathcal{O}|z' \rangle \langle z'|\psi \rangle. \quad (8.53)$$

Dla dowolnego wektora i dowolnego operatora zachodzą związki

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2z |z\rangle \langle z|\psi\rangle, \quad (8.54)$$

i

$$\mathcal{O} = \frac{1}{\pi^2} \int d^2z_1 d^2z_2 |z_1\rangle \langle z_1|\mathcal{O}|z_2\rangle \langle z_2|.$$

Niech operator  $\mathcal{O}$  w (8.53) będzie operatorem jednostkowym. Wówczas

$$\langle z|\psi\rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2z' \langle z|z' \rangle \langle z'|\psi\rangle. \quad (8.55)$$

Zatem reprezentant dowolnego wektora  $|\psi\rangle$  spełnia równanie całkowe z jądrem postaci

$$\kappa(z, z') = \langle z|z' \rangle = \exp \left[ -\frac{1}{2}|z|^2 + \bar{z}z' - \frac{1}{2}|z'|^2 \right]. \quad (8.56)$$

Łatwo zauważyć, że

$$\kappa(z, z') = \overline{\kappa(z', z)}. \quad (8.57)$$

Dalej, kładąc  $|\psi\rangle = |z''\rangle$ , otrzymujemy z (8.55) zależność

$$\langle z|z'' \rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2z' \langle z|z' \rangle \langle z'|z'' \rangle \quad (8.58)$$

lub, w innych oznaczeniach,

$$\kappa(z, z'') = \frac{1}{\pi} \int d^2 z' \kappa(z, z') \kappa(z', z''). \quad (8.59)$$

Widzimy, że jądro całkowe spełnia równanie, przez które jest generowane. W istocie równanie (8.59) jest warunkiem **idempotencji** dla jądra  $\kappa(z, z')$ .

Druga równość w (8.54) dla  $\mathcal{O} = I$  przyjmuje postać

$$I = \frac{1}{\pi^2} \int d^2 z_1 d^2 z_2 |z_1\rangle \langle z_1| |z_2\rangle \langle z_2|. \quad (8.60)$$

Jeżeli porównamy ten rozkład jedności z rozkładem (8.47), wówczas widać, że istnieją dwa istotnie różne rozkłady jednego i tego samego operatora względem danego układu stanów. Możliwość istnienia dużej liczby istotnie różnych rozkładów wiąże się z **nadzupełnością** zbioru wszystkich stanów koherentnych (zupełny jest już zbiór stanów koherentnych postaci  $|\sqrt{\pi}(1 + im)\rangle$ ). Efektem nadzupełności zbioru wektorów jest istnienie liniowych zależności między wektorami bazowymi. Z (8.54) otrzymujemy

$$|z'\rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2 z |z\rangle \langle z| z', \quad (8.61)$$

gdzie  $z$  i  $z'$  są dowolnymi stanami koherentnymi. Ostatnia równość wyraża  $|z'\rangle$  poprzez wszystkie stany koherentne. Przedstawimy teraz  $z$  we współrzędnych biegunowych

$$|z\rangle = |re^{i\theta}\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n e^{in\theta}}{(n!)^{1/2}} |n\rangle. \quad (8.62)$$

Stąd

$$\int_0^{2\pi} e^{ip\theta} |re^{i\theta}\rangle d\theta = 0, \quad \text{dla } p = 1, 2, \dots, \quad (8.63)$$

a mnożąc tę równość przez  $r^p r$  i całkując po wszystkich  $r$ , otrzymujemy wynik

$$\int z^p |z\rangle d^2 z = 0, \quad p = 1, 2, \dots \quad (8.64)$$

Z drugiej jednak strony dowolny skończony zbiór stanów koherentnych jest zbiorem liniowo niezależnym, tzn. z równości

$$\sum_{k=1}^N c_k |z_k\rangle = 0$$

wynika, że  $c_k = 0$  dla wszystkich  $k$ . Dopiero dla niekończonej ilości stanów koherentnych pojawiają się związki liniowe między nimi,

Problemy zupełności i nadzupełności zbiorów stanów koherentnych były szczegółowo badane przez V. Bargmanna i współpracowników w cytowanej wyżej pracy "On the completeness of coherent states". Pokazali oni, że jeżeli wprowadzimy oznaczenie

$$c_\gamma = \{|z\rangle : z = \gamma(m + in)\},$$

przy czym  $m, n$  - to dowolne liczby całkowite, wówczas zachodzi następujące twierdzenie:

1. Jeżeli  $0 < \gamma < \sqrt{\pi}$ , wówczas  $c_\gamma$  jest zbiorem nadzupełnym;
2. Jeżeli  $\gamma > \sqrt{\pi}$ , wówczas  $c_\gamma$  nie jest zbiorem zupełnym;
3. Jeżeli  $\gamma = \sqrt{\pi}$ , wówczas  $c_\gamma$  jest zbiorem zupełnym.

Bez dowodu punkt 3 był już podany przez J. von Neumanna.<sup>4</sup>

## 8.4 Przykłady reprezentacji wektorów i operatorów w stanach koherentnych

Rozpatrzmy obecnie kilka przykładów znanych układów kwantowych, aby pokazać wykorzystanie ciągłej reprezentacji w stanach koherentnych. Weźmy stany własne oscylatora harmonicznego w rozwinięciu na stany koherentne:

$$\langle z|z \rangle = (n!)^{-1/2} \bar{z}^n \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right). \quad (8.65)$$

Powyższe funkcje odpowiadają funkcjom Hermite'a będące funkcjami własnymi oscylatora w reprezentacji Schrödingera. W tej reprezentacji operatorowi  $Q$  odpowiada mnożenie przez  $x$ , a operator  $P$  ma postać  $-i\hbar\partial/\partial x$ . Operator Hamiltona dla oscylatora z jednostkową częstością i masą ma postać

$$H = \frac{1}{2} \left( -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2 - \hbar \right). \quad (8.66)$$

Rozwiązania zagadnienia własnego dla operatora w prosty sposób wyrażają się poprzez funkcje Hermite'a

$$h_n(\xi) \equiv \frac{(-1)^n}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{1/2}} \exp\left(\frac{\xi^2}{2}\right) \frac{d^n}{d\xi^n} \exp(-\xi^2). \quad (8.67)$$

Stosując regułę Bakera-Hausdorffa, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \langle z|\psi \rangle &= \langle p, q|\psi \rangle = \langle 0|e^{i(qP-pQ)/\hbar}|\psi \rangle \\ &= \langle 0|e^{(i/2\hbar)qP-(i/\hbar)pQ+(i/2\hbar)P}|\psi \rangle \\ &= \langle 0|e^{(i/2\hbar)qP}e^{-(i/\hbar)pQ+(i/2\hbar)P}|\psi \rangle. \end{aligned} \quad (8.68)$$

W reprezentacji Schrödingera (8.68) przyjmuje postać

$$\langle p, q|\psi \rangle = \int \bar{\varphi}_0 \left( x - \frac{q}{2} \right) e^{-ipx/\hbar} \psi \left( x + \frac{q}{2} \right), \quad (8.69)$$

gdzie  $\varphi_0(x) = (\pi\hbar)^{-1/4} \exp(-x^2/2\hbar)$  jest unormowanym stanem własnym hamiltonianu (8.66) oraz wykorzystaliśmy równość

$$\exp\left(\frac{iqP}{2\hbar}\right) \psi(x) = \exp\left(\frac{1}{2}q\frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x) = \psi\left(x + \frac{q}{2}\right) \quad (8.70)$$

---

<sup>4</sup>J. von Neumanna, Mathematical Foundations of Quantum Mechanics, Princeton 1955, s. 406.

wynikającą z rozwinięcia  $\exp[(1/2)q\partial/\partial x]$  na szereg i prawdziwą dla każdej odpowiednio regularnej funkcji. Tak więc otrzymaliśmy związek

$$\langle p, q | \psi \rangle = (\pi\hbar)^{-1/4} \int \exp \left[ -\frac{(x - q/2)^2}{2\hbar} - \frac{i}{\hbar} p x \right] \psi \left( x + \frac{q}{2} \right) dx. \quad (8.71)$$

Ostatni wzór ustala odpowiedniość pomiędzy funkcjami w reprezentacji Schrödingera i funkcjami rozwiniętymi w reprezentacji stanów koherentnych. Dokonując zamiany zmiennych, można przepisać (8.71) w postaci

$$\langle p, q | \psi \rangle = (\pi\hbar)^{-1/4} \int \exp \left[ -\frac{(y - q)^2}{2\hbar} - i\hbar p \left( y - \frac{q}{2} \right) \right] \psi(y) dy. \quad (8.72)$$

Przy pomocy transformacji Fouriera możemy otrzymać związek odwrotny

$$\psi(y) = [2\pi\hbar\varphi_0(-y)]^{-1} \int \langle p, 2y | \psi \rangle dp. \quad (8.73)$$

Jeżeli będziemy rozważali cząstkę materialną w jednowymiarowej przestrzeni, wówczas funkcja falowa  $\psi(x)$  jest amplitudą prawdopodobieństwa, tzn.  $\rho(x) = |\psi(x)|^2$  jest gęstością prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w punkcie  $x$ . Należy podkreślić, że wielkość  $|\langle p, q | \psi \rangle|^2$  nie jest gęstością prawdopodobieństwa tego, że cząstka znajduje się w punkcie  $q$  i ma pęd  $p$ . W tym przypadku poszczególne zdarzenia nie są niezależne: rozkłady  $p$  i  $q$  zachodzą na siebie.

Przejdziemy obecnie do rozpatrzenia postaci i działania operatorów w reprezentacji stanów koherentnych. Niech operator  $B$  będzie diagonalny w reprezentacji liczby obsadzeń:

$\langle n | B | m \rangle = b_n \delta_{nm}$ . Taki operator działa następująco na stany koherentne:

$$B | z' \rangle = e^{-(1/2)|z'|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z')^n}{(n!)^{1/2}} b_n | n \rangle, \quad (8.74)$$

a jego elementy macierzowe mają postać

$$\langle z | B | z' \rangle = e^{-(1/2)|z|^2} e^{-(1/2)|z'|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n (\bar{z} z')^n}{n!}. \quad (8.75)$$

W szczególności dla operatora ewolucji w czasie oscylatora  $\exp(-itN)$  mamy  $b_n = \exp(-int)$  i elementy macierzowe mają postać

$$\begin{aligned} \langle z | e^{-itN} | z' \rangle &= e^{-(1/2)|z|^2} e^{-(1/2)|z'|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\bar{z} e^{-it} z')^n}{n!} \\ &= \exp \left( -\frac{1}{2}|z|^2 + \bar{z} e^{-it} - \frac{1}{2}|z'|^2 \right) = \langle z | e^{-it} z' \rangle = \langle e^{it} z | z \rangle. \end{aligned} \quad (8.76)$$

Widzimy, że podczas ewolucji w czasie stany koherentne przechodzą w stany koherentne.

Niech operator  $B$  zależy od  $a^*$  i  $a$  w ten sposób, że wszystkie operatory tworzenia  $a^*$  stoją na lewo od wszystkich operatorów niszczenia  $a$ . Operatory tej postaci nazywamy **normalnie uporządkowanymi**. rozkłada się na szereg potęgowy względem  $a$  i  $a^*$ , to szereg ten ma postać

$$B(a^*, a) = \sum_{r,s=0}^{\infty} b_{rs}(a^*)^r a^s \quad (8.77)$$

z odpowiednimi współczynnikami  $b_{rs} \in C$ . Elementy macierzowe takiego operatora mają postać

$$\begin{aligned}\langle z|B(a^*, a)|z'\rangle &= B(\bar{z}, z')\langle z|z'\rangle \\ &= \sum_{r,s=0}^{\infty} b_{rs}(\bar{z})^r (z')^s \langle z|z'\rangle.\end{aligned}\quad (8.78)$$

Jeżeli operator  $B$  nie jest normalnie uporządkowany, wówczas można mu przyporządkować nowy operator, który będziemy oznaczali  $:B:$ , w którym już wszystkie operatory  $a^*$  stoją na lewo od wszystkich operatorów  $a$ . Zazwyczaj dla dowolnego operatora  $\mathcal{O} : \mathcal{O} \neq \mathcal{O}$ . Na przykład, jeżeli  $\mathcal{O} = a a^*$ , to  $:a a^* := a a^* - 1 \neq a a^*$ , co wynika z relacji komutacji  $[a, a^*] = 1$ . Oczywiście zachodzi  $: \mathcal{O} := \mathcal{O} :$ . Normalne uporządkowanie zależy od wyjściowej postaci operatora, np.  $[a, a^*] = 1$  i  $: [a, a^*] := 0$ , lecz  $: 1 := 1$ . Dla pewnych  $\mathcal{O}$  możemy zapisać  $: \mathcal{O} :$  w jawnej postaci przy pomocy zwykłych wyrażeń. Zachodzi

$$: e^{z a^* - \bar{z} a} := e^{z a^* - \bar{z} a} = e^{(1/2)|z|^2} e^{z a^* - \bar{z} a}. \quad (8.79)$$

W tym przypadku uporządkowanie normalne zmienia operator o czynnik multiplikatywny. Rozpatrzymy teraz operator  $\mathcal{O}(a^*, a) = \exp(\tau a^* a)$

$$\begin{aligned}\langle z| : e^{\tau a^* a} : |z'\rangle &= e^{\tau \bar{z} z'} \langle z|z'\rangle \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}|z|^2 + (1 + \tau)\bar{z} z' - \frac{1}{2}|z'|^2\right).\end{aligned}\quad (8.80)$$

Porównując to wyrażenie z (8.76) i kładąc  $1 + \tau \equiv \exp(-it)$ , czyli  $-it = \ln(1 + \tau)$ , otrzymujemy

$$: \exp(\tau a^* a) := \exp[\ln(1 + \tau)(a^* a)], \quad (8.81)$$

to znaczy uporządkowanie normalne zmieniło stałą. Równoważną postacią do (8.81) jest

$$: \exp[(e^{-it} - 1) a^* a] := \exp[-it(a^* a)]. \quad (8.82)$$

Kładąc  $\tau \rightarrow -1$  (lub  $it \rightarrow +\infty$ ) otrzymujemy

$$: \exp(-a^* a) := |0\rangle\langle 0|. \quad (8.83)$$

Rozpatrzymy teraz działanie operatora  $a^*$ . Wiemy, że  $\langle z|a^* = \bar{z}\langle z|$ , zatem

$$\langle z|a^*|\psi\rangle = \bar{z}\langle z|\psi\rangle, \quad (8.84)$$

czyli w przestrzeni funkcji  $\langle z|\psi\rangle$  operator  $a^*$  sprowadza się do mnożenia przez  $\bar{z}$ . Dla operatora  $a$  mamy

$$\begin{aligned}\langle z|a|z'\rangle &= z'\langle z|z'\rangle = z' \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2 + \bar{z} z' - \frac{1}{2}|z'|^2\right) \\ &= \left(\frac{z}{2} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2 + \bar{z} z' - \frac{1}{2}|z'|^2\right) \\ &= \left(\frac{z}{2} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) \langle z|z'\rangle.\end{aligned}\quad (8.85)$$

Ostatnia równość będzie oczywiście prawdziwa dla dowolnej kombinacji liniowej  $\sum_p c_p |z'_p\rangle$ , stąd zaś wynika równość

$$\langle z|a|\psi\rangle = \left(\frac{z}{2} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) \langle \tau|\psi\rangle. \quad (8.86)$$

Widać stąd, że w przestrzeni funkcji  $\langle z|\psi\rangle$  operatorowi  $a$  odpowiada operator różniczkowy  $(z/2 + \partial/\partial \bar{z})$ . W tej reprezentacji mamy np.

$$\langle z|[a, a^*]|\psi\rangle = \left[\frac{z}{2} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \bar{z}\right] \langle z|\psi\rangle = \langle z|\psi\rangle, \quad (8.87)$$

a ogólniej działanie dowolnego operatora  $W = W(a^*, a)$  można przedstawić w postaci

$$\langle z|W(a^*, a)|\psi\rangle = W\left(\bar{z}, \frac{z}{2} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) \langle z|\psi\rangle. \quad (8.88)$$

Posługując się przedstawieniem

$$\langle z|\psi\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) f(\bar{z})$$

i tożsamością

$$\exp\left(\frac{1}{2}|z|^2\right) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{z}{2}, \quad (8.89)$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \langle z|W(a^*, a)|\psi\rangle &= \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) W\left(\bar{z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) \exp\left(\frac{1}{2}|z|^2\right) \langle z|a|\psi\rangle \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) W\left(\bar{z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) f(\bar{z}). \end{aligned} \quad (8.90)$$

Jako przykład rozważmy operator  $\exp(-ita^*a)$ . Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \langle z|e^{-ita^*a}|\psi\rangle &= \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \exp\left(-it\bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) f(\bar{z}) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \exp\left(-it\frac{\partial}{\partial \ln \bar{z}}\right) f[\exp(\ln \bar{z})] = \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) f[\exp(\ln \bar{z} - it)] \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) f(e^{-it}\bar{z}) = \langle e^{it}z|\psi\rangle. \end{aligned} \quad (8.91)$$

Podstawiając w (8.88)  $|z'\rangle$  zamiast  $|\psi\rangle$ , otrzymujemy

$$\langle z|W(a^*, a)|z'\rangle = W\left(\bar{z}, \frac{z}{2} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) \langle z|z'\rangle. \quad (8.92)$$

Ponieważ

$$\langle z|z'\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2 + \bar{z}|z'| - \frac{1}{2}|z'|^2\right),$$

zatem z tożsamości

$$(\langle z|z'\rangle)^{-1} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \langle z|z'\rangle = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{z}{2} + z'$$

wynika, że

$$W\left(\bar{z}, \frac{z}{2} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = \langle z|z'\rangle W\left(\bar{z}, \frac{z'}{2} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right), \quad (8.93)$$

gdzie pozostała pochodna działa na te  $\bar{z}$ , które zawarte są w samym  $W$ . Gdy  $W := W$ , wówczas

$$\langle |W(a^*, a)|z' \rangle = W(\bar{z}, z') \langle z|z' \rangle. \quad (8.94)$$

Jeżeli diagonalne elementy macierzowe operatora  $W$  są równe zero,

$$\langle z|W|z \rangle = 0, \quad (8.95)$$

dla wszystkich  $z$ , wówczas dla operatorów  $W$  dowolne elementy macierzowe są równe

$$\begin{aligned} \langle z|W|z' \rangle &= \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2 - \frac{1}{2}|z'|^2\right) \\ &\times \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(\bar{z})^n (z')^m}{(n!m!)^{1/2}} \langle n|W|m \rangle. \end{aligned} \quad (8.96)$$

Widzimy, że dla spełnienia warunku (8.95) powyższa funkcja całkowita dwóch zmiennych  $\bar{z}$  i  $z'$  powinna zerować się na podzbiorze  $\{z' = z\}$ . Z teorii funkcji wielu zmiennych zespolonych wynika jednak, że funkcja dwu zmiennych równa się zero na podzbiorze  $\{z' = z\}$  dla wszystkich  $z$  jest równa zero tożsamościowo. Zatem, jeżeli  $\langle z|W|z \rangle = 0$  dla wszystkich  $z$ , to  $\langle z|W|z' \rangle = 0$  dla wszystkich  $z$  oraz  $z'$ . Operator  $W$  jest zatem jednoznacznie określony przez swoje elementy diagonalne, jednocześnie zaś może być przedstawiony przez odpowiednią funkcję  $W(z)$ .

Dla danego operatora  $W(a^*, a)$  diagonalne elementy macierzowe można otrzymać z (8.93) kładąc  $z' = z$ :

$$\langle z|W(a^*, a)|z \rangle = W\left(\bar{z}, z + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right). \quad (8.97)$$

## 8.5 Stany koherentne układu o wielu stopniach swobody

Własności stanów koherentnych dla wielu stopni swobody są prostym uogólnieniem własności dla jednego stopnia swobody. Niech układ ma  $K$  stopni swobody, którym odpowiadają operatory ilości kwantów  $N_k = a_k^* a_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$  i zbiór unormowanych wektorów własnych

$$|n_1, n_2, \dots, n_k \rangle = |\{n_k\}\rangle. \quad (8.98)$$

Stany koherentne definiujemy teraz wzorem

$$\begin{aligned} |n_1, n_2, \dots, n_k \rangle &= |\{z_k\}\rangle \\ &= \sum_{\{n_k\}=0}^{\infty} \left\{ \prod_{k'=1}^K \exp\left(-\frac{1}{2}|z'_k|^2\right) \frac{(z'_{k'})^{n_{k'}}}{(n_{k'}!)^{1/2}} \right\} |\{n_k\}\rangle. \end{aligned} \quad (8.99)$$

Sposób tworzenia stanów sprzężonych jest oczywisty.

Stany  $|\{z_k\}\rangle$  okazują się stanami własnymi operatorów  $a_{k'}$

$$a_{k'} |\{z_k\}\rangle = z_{k'} |\{z_k\}\rangle \quad (8.100)$$

dla wszystkich  $k' = 1, 2, \dots, K$ . Utwórzmy teraz iloczyn skalarny dwóch stanów koherentnych

$$\begin{aligned}
\langle \{z_k\} | \{z'_k\} \rangle &= \prod_{k=1}^K \exp \left( -\frac{1}{2} |z_k|^2 + \bar{z}_k z'_k - \frac{1}{2} |z'_k|^2 \right) \\
&= \exp \left[ -\sum_{k=1}^K \left( \frac{1}{2} |z_k|^2 - \bar{z}_k z'_k + \frac{1}{2} |z'_k|^2 \right) \right] \\
&= \exp \left\{ -\sum_{k=1}^K \left[ \frac{1}{2} |z_k - z'_k|^2 + i \operatorname{Im} (\bar{z}_k z'_k) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{8.101}$$

Stąd łatwo widać, że stany  $|\{z_k\}\rangle$  są unormowane.

Operator jednostkowy może być obecnie przedstawiony w postaci

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{\pi^K} \int \dots \int |\{z_k\}\rangle \langle \{z_k\}| \prod_{k=1}^K d^2 z_k \\
&= \int \dots \int |\{z_k\}\rangle \langle \{z_k\}| d\mu(\{z_k\}),
\end{aligned} \tag{8.102}$$

gdzie

$$d\mu(\{z_k\}) = \pi^{-K} \prod_{k=1}^K d^2 z_k$$

a  $d^2 z_k = d(\operatorname{Re} z_k) d(\operatorname{Im} z_k)$ . Iloczyn skalarny dwóch stanów  $|\psi\rangle$  i  $|\varphi\rangle$  ma teraz postać

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \int \langle \varphi | \{z_k\} \rangle \langle \{z_k\} | \psi \rangle d\mu(\{z_k\}). \tag{8.103}$$

Przestrzeń fazowa dla  $K$  stopni swobody wprowadza się przy pomocy rozkładu

$$z_k = \left( \frac{\omega_k}{2\pi} \right)^{1/2} q_k + i \left( \frac{1}{2\hbar\omega_k} \right)^{1/2} p_k \tag{8.104}$$

dla  $k = 1, 2, \dots, K$ . Jak zwykle, oznaczamy  $|\{p_k, q_k\}\rangle = |\{z_k\}\rangle$ .

Teraz reprezentant stanu podstawowego  $|0\rangle = |\{0\}\rangle$  ma postać

$$\begin{aligned}
\varphi_0(\{p_k, q_k\}) &= \langle \{p_k, q_k\} | 0 \rangle \\
&= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \left[ \frac{(1/2)(p_k^2 + \omega_k^2 q_k^2)}{\hbar\omega_k} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{8.105}$$

Rozkład jedności w przestrzeni fazowej wygląda następująco:

$$I = \int |\{p_k, q_k\}\rangle \langle \{p_k, q_k\}| d\mu(\{p_k, q_k\}), \tag{8.106}$$

gdzie

$$d\mu(\{p_k, q_k\}) = \prod_{k=1}^K \frac{dp_k dq_k}{2\pi\hbar}, \tag{8.107}$$

a całkowanie rozciąga się na całą  $K$ -wymiarową przestrzeń fazową. Łatwo można sprawdzić, że funkcja zdefiniowana wzorem (8.105) spełnia równość

$$\begin{aligned}
&\int \langle 0 | \{p_k, q_k\} \rangle \langle \{p_k, q_k\} | 0 \rangle d\mu(\{p_k, q_k\}) \\
&= \int |\varphi_0(\{p_k, q_k\})|^2 d\mu(\{p_k, q_k\}) = 1.
\end{aligned} \tag{8.108}$$

Obecnie przedyskutujemy przejście  $K \rightarrow \infty$ . Przejście to jest niezbędne przy opisie pola elektromagnetycznego. Zakładamy, że operatory

$$N = \sum_{k=1}^{\infty} N_k, \quad H = \sum_{k=1}^{\infty} \hbar \omega_k N_k \quad (8.109)$$

mają sens (są określone). Dla ich określoności wystarczy, by każdy z ogólnych stanów własnych operatorów liczby kwantów:

$$|n_1, n_2, \dots\rangle = |\{n_k\}\rangle, \quad (8.110)$$

spełniał nierówność  $\sum_{k=1}^{\infty} n_k < \infty$ .

Chcąc określić stany koherentne dla nieskończonej ilości stopni swobody, rozpatrzmy najpierw stany postaci

$$|A\rangle = \sum_{\{n_k\}=0}^{\infty} \left\{ \prod_{k'=1}^{\infty} \frac{(z_{k'})^{n_{k'}}}{(n_{k'})^{1/2}} \right\} |\{n_k\}\rangle. \quad (8.111)$$

Powyższe stany nie dla wszystkich  $z_k$  są normowalne, ponieważ norma wektora  $|A\rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle A|A\rangle &= \sum_{\{n_k\}} \{n_k\} = 0^\infty \prod_{k'=1}^{\infty} \frac{|z_{k'}|^{2n_{k'}}}{(n_{k'})} \\ &= \prod_{k'=1}^{\infty} \sum_{n_{k'}=0}^{\infty} \frac{|z_{k'}|^{2n_{k'}}}{(n_{k'})} = \exp \left\{ \sum_{k'=1}^{\infty} |z_{k'}|^2 \right\} \end{aligned} \quad (8.112)$$

jest skończona, jeśli zachodzi nierówność

$$\sum_{k'=1}^{\infty} |z_{k'}|^2 < \infty. \quad (8.113)$$

Dalej będziemy zakładali, że ostatni warunek jest spełniony. Stąd wynika, że dopuszczalne ciągi  $\{z_k\}$  sama tworzą przestrzeń Hilberta  $\mathcal{Z}$  (różną od kwantowomechanicznej przestrzeni  $\mathcal{H}$ ). W przestrzeni  $\mathcal{Z}$  iloczyn skalarny zdefiniowany jest wzorem

$$(\{z_k\}, \{z_{k'}\}) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \bar{z}_k z_{k'}, \quad (8.114)$$

a kwadrat normy jako

$$\|\{z_k\}\|^2 = (\{z_k\}, \{z_k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^2. \quad (8.115)$$

Stany koherentne dla  $K \rightarrow \infty$  określamy wzorami

$$\begin{aligned} |z_1, z_2, \dots\rangle &= |\{z_k\}\rangle = \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{k'=1}^{\infty} |z_{k'}|^2 \right) |A\rangle \\ &= \sum_{\{n_k\}=0}^{\infty} \left\{ \prod_{k'=1}^{\infty} \exp \left( -\frac{1}{2} |z_{k'}|^2 \right) \frac{(z_{k'})^{n_{k'}}}{(n_{k'})^{1/2}} \right\} |\{n_k\}\rangle, \end{aligned} \quad (8.116)$$

przy założeniu, że zachodzi warunek (8.113). Sposób tworzenia stanów koherentnych sprzężonych jest oczywisty. Iloczyn skalarny takich dwóch stanów koherentnych ma teraz postać

$$\langle \{z_k\} | \{z'_k\} \rangle = \prod_{k=1}^{\infty} \exp \left( -\frac{1}{2} |z_k|^2 + \bar{z}_k z'_k - \frac{1}{2} |z'_k|^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \left[ - \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} |z_k|^2 - \bar{z}_k z'_k + \frac{1}{2} |z'_k|^2 \right) \right] \\
&= \exp \left\{ - \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} |z_k - z'_k|^2 - i \operatorname{Im} (\bar{z}_k z'_k) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{8.117}$$

Zbieżność nieskończonych iloczynów i sum zapewniona jest warunkiem (8.113). Analogicznie można dowieść, że

$$\| |\{z_k\}\rangle - |\{z'_k\}\rangle \|^2 \leq 2 (\| \{z_k\} \|^2 + \| \{z'_k\} \|^2) \| \{z_k - z'_k\} \|. \tag{8.118}$$

Zatem "bliskim" wektorom w przestrzeni  $\mathcal{Z}$  odpowiadają bliskie wektory w przestrzeni  $\mathcal{H}$ .

Niech będzie zadany wektor  $|\{z_k\}\rangle$  o składowych  $z_k \neq 0$  dla wszystkich  $k$ . Ze względów fizycznych stan ten można zastąpić stanem  $|\{z'_k\}\rangle$ , dla którego  $z_k = z'_k$  dla wszystkich  $k \leq M$  i  $z'_k = 0$  dla  $k > M$  przy dostatecznie dużym  $M$ . Taki "obcięty" ciąg oznaczmy przez  $\{z_{k,M}\}$ . Wobec tego z (8.118) i z nierówności  $\| \{z_{k,M}\} \| \leq \| \{z_k\} \|^2$  wynika nierówność

$$\| |\{z_k\}\rangle - |\{z_{k,M}\}\rangle \|^2 \leq 4 \| \{z_k\} \|^2 \left\{ \sum_{k=M+1}^{\infty} |z_k|^2 \right\}. \tag{8.119}$$

Prawa strona ostatniej nierówności dąży do zera, gdy  $M$  dąży do nieskończoności, a stąd wynika ciągłość przyporządkowania  $\{z_k\} \rightarrow \{z_{k,M}\}$ .

Rozwinięcia na stany koherentne wprowadzamy przez równość

$$\psi(\{z_k\}) = \langle \{z_k\} | \psi \rangle. \tag{8.120}$$

Niech  $\psi(\{z_{k,M}\}) = 0$  dla wszystkich  $\{z_k\}$  i dla wszystkich  $M$ , tzn. dla wszystkich "obciętych" ciągów. Wówczas dla dowolnego stanu  $|\{z_k\}\rangle$  spełnione są nierówności

$$\begin{aligned}
|\langle \{z_k\} | \psi \rangle| &\leq |\langle \{z_{k,M}\} | \psi \rangle| + |(\langle \{z_k\} | - \langle \{z_{k,M}\} |) \psi| \\
&\leq \| |\{z_k\}\rangle - |\{z_{k,M}\}\rangle \| \cdot \| \psi \| \\
&\leq 2 \| \psi \| \cdot \| \{z_k\} \|^{1/2} \cdot \left\{ \sum_{k=M+1}^{\infty} |z_k|^2 \right\}^{1/4}.
\end{aligned} \tag{8.121}$$

Ostatnią wielkość można uczynić dowolnie małą poprzez wybór odpowiednio dużego  $M$ . Inaczej mówiąc, z (8.121) wynika, że  $\psi(\{z_k\})$ , a zatem i  $|\psi\rangle$ , staje się zerem dla wszystkich ciągów  $\{z_k\}$ .

Formalnie iloczyn skalarny miałby obecnie ( $K = \infty$ ) postać

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \int \langle \varphi | \{z_k\} \rangle \langle \{z_k\} | \psi \rangle d\mu(\{z_k\}). \tag{8.122}$$

W powyższym wyrażeniu należałoby liczyć całkę względem nieskończonej ilości zmiennych. Równość (8.122) należy interpretować następująco

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \lim_{M \rightarrow \infty} \int \langle \varphi | \{z_{k,M}\} \rangle \langle \{z_{k,M}\} | \psi \rangle d\mu(\{z_{k,M}\}), \tag{8.123}$$

gdzie  $d\mu(\{z_{k,M}\}) = \lim_{M \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^M d^2 z_k$ . Rzeczywiście, jeżeli zdefiniujemy ciąg operatorów rzutowych  $P_M$ ,  $M = 1, 2, \dots$

$$\langle \{z_k\} | P_M \{z'_k\} \rangle = \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (|z_k|^2 + |z'_k|^2) + \sum_{k=1}^M \bar{z}_k z'_k \right]. \quad (8.124)$$

to łatwo można sprawdzić, że  $P_M P_{M'} = P_{M'} P_M = P_M$  dla  $M \leq M'$  oraz  $\lim_{M \rightarrow \infty} P_M = I$ . Dalej można pokazać, że na podstawie (8.124) zachodzi równość

$$\int \langle \{z'_k\} | \{z_{k,M}\} \rangle \langle \{z_{k,M}\} | \{z''_k\} \rangle d\mu(\{z_{k,M}\}) = \langle \{z'_k\} | P_M | \{z''_k\} \rangle, \quad (8.125)$$

stąd zaś wynika następujące przedstawienie operatora  $P_M$ :

$$P_M = \int |\{z_{k,M}\}\rangle \langle \{z_{k,M}\}| d\mu(\{z_{k,M}\}). \quad (8.126)$$

Zatem iloczyn skalarny dowolnych wektorów  $|\psi\rangle$  i  $|\varphi\rangle$  przyjmie postać

$$\begin{aligned} \langle \varphi | \psi \rangle &= \lim_{M \rightarrow \infty} \langle \varphi | P_M | \psi \rangle \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int \langle \varphi | \{z_{k,M}\} \rangle \langle \{z_{k,M}\} | \psi \rangle d\mu(\{z_{k,M}\}), \end{aligned} \quad (8.127)$$

a operator jednostkowy zapiszemy w postaci

$$I = \lim_{M \rightarrow \infty} \int |\{z_{k,M}\}\rangle \langle \{z_{k,M}\}| d\mu(\{z_{k,M}\}). \quad (8.128)$$

## 8.6 Zastosowanie stanów koherentnych dla opisu pola elektromagnetycznego

Obecnie ograniczymy się do rozpatrzenia swobodnego pola promieniowania oraz do pola ze źródłami typu klasycznego (źródło  $c$ -liczbowe). W tym drugim przypadku operator niszczenia  $(\lambda, \mathbf{k})$ -tego modu ma postać

$$a_\lambda(\mathbf{k}, t) = e^{-i\omega t} a_\lambda^{in}(\mathbf{k}) + c_\lambda(\mathbf{k}, t), \quad (8.129)$$

gdzie  $\omega = \omega_{\lambda, \mathbf{k}} = |\mathbf{k}|$ . Tutaj  $c_\lambda(\mathbf{k}, t)$  wyraża się przez  $c$ -liczbowy prąd  $J_\lambda(\mathbf{k}, t)$  wzorem

$$c_\lambda(\mathbf{k}, t) = i(2\hbar\omega)^{-1/2} e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^t e^{i\omega t'} J_\lambda(\mathbf{k}, t') dt'. \quad (8.130)$$

Jeżeli przez  $|\{n_\lambda(\mathbf{k})\}\rangle$  oznaczmy stany własne operatorów

$$N_\lambda^{in}(\mathbf{k}) = a_\lambda^{in}(\mathbf{k}) a_\lambda^{in}(\mathbf{k}), \quad (8.131)$$

wówczas stany koherentne  $|\{z_\lambda(\mathbf{k})\}\rangle$  spełniają warunki

$$a_\lambda^{in}(\mathbf{k}) |\{z_\lambda(\mathbf{k})\}\rangle = z_\lambda(\mathbf{k}) |\{z_\lambda(\mathbf{k})\}\rangle. \quad (8.132)$$

Z drugiej strony zależne od czasu operatory anihilacji spełniają równość

$$a_\lambda(\mathbf{k}, t)|\{z_\lambda(\mathbf{k})\}\rangle = [e^{-i\omega t}z_\lambda(\mathbf{k}) + c_\lambda(\mathbf{k}, t)]|\{z_\lambda(\mathbf{k})\}\rangle, \quad (8.133)$$

zatem stany koherentne są także stanami własnymi operatora  $a_\lambda(\mathbf{k}, t)$ .

Założmy, że operator ewolucji w czasie ma postać analogiczną do (7.13):

$$U(t) = T \left\{ \exp \left[ - \left( \frac{i}{\hbar} \right) \int_{-\infty}^t H(t') dt' \right] \right\}, \quad (8.134)$$

gdzie hamiltonian  $H$  określony jest wzorem

$$\begin{aligned} H(t) &= \sum_{\lambda, \mathbf{k}} \epsilon_0 \hbar \omega_k a_\lambda^*(\mathbf{k}, t) a_\lambda(\mathbf{k}, t) \\ &- \left( \frac{\hbar}{2\omega_k \epsilon_0} \right)^{1/2} \left[ \tilde{J}_\lambda(\mathbf{k}, t) a_\lambda(\mathbf{k}, t) + J_\lambda(\mathbf{k}, t) a_\lambda^*(\mathbf{k}, t) \right]. \end{aligned} \quad (8.135)$$

Wówczas zachodzi związek

$$a_\lambda(\mathbf{k}, t) = U(t)^{-1} a_\lambda^{in}(\mathbf{k}) U(t). \quad (8.136)$$

Mnożąc (8.133) przez  $U(t)$ , otrzymujemy

$$a_\lambda^{in}(\mathbf{k}) U(t) |\{z_\lambda(\mathbf{k})\}\rangle = z_\lambda(\mathbf{k}, t) U(t) |\{z_\lambda(\mathbf{k})\}\rangle, \quad (8.137)$$

to zaś oznacza, że

$$U(t) |\{z_\lambda(\mathbf{k})\}\rangle = e^{i\varphi} \{z_\lambda(\mathbf{k}, t)\}, \quad (8.138)$$

gdzie  $\varphi(t)$  jest pewną funkcją fazową. Zatem w obecności zewnętrznych  $c$ -liczbowych źródeł  $J_\lambda(\mathbf{k}, t)$  stany koherentne przechodzą w stany koherentne. (Dla źródeł kwantowych nie musi tak być). Obliczmy teraz prawdopodobieństwo znalezienia  $n$  fotonów dla danego  $\lambda, \mathbf{k}$ :

$$\begin{aligned} p(\{n_\lambda(\mathbf{k})\}|t) &= |\langle \{n_\lambda(\mathbf{k})\} U(t) | \{z_\lambda(\mathbf{k}, t)\} \rangle|^2 \\ &= |\langle \{n_\lambda(\mathbf{k})\} | \{z_\lambda(\mathbf{k}, t)\} \rangle|^2 \\ &= \prod_{\lambda, \mathbf{k}} \frac{|z_\lambda(\mathbf{k}, t)|^{2n_\lambda(\mathbf{k})}}{[n_\lambda(\mathbf{k})]!} \exp[-|z_\lambda(\mathbf{k}, t)|], \end{aligned} \quad (8.139)$$

otrzymany rozkład jest iloczynem rozkładów niezależnych, z których każdy ma postać rozkładu Poissona.

W przypadku pola swobodnego bez zewnętrznych prądów dla każdego modu mamy

$$\begin{aligned} a_\lambda(\mathbf{k}, t) &= e^{-i\omega t} a_\lambda^{in}(\mathbf{k}), \\ z_\lambda(\mathbf{k}, t) &= e^{-i\omega t} z_\lambda^{in}(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (8.140)$$

Niech  $\mathbf{e}_\lambda(\mathbf{k})$ , ( $\lambda = 1, 2$ ) będą wektorami jednostkowymi wyznaczającymi polaryzację; możemy zdefiniować nowe wektory

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{k}, t) &= \sum_{\lambda} \mathbf{e}_\lambda(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}, t), \\ \mathbf{z}(\mathbf{k}, t) &= \sum_{\lambda} \mathbf{e}_\lambda(\mathbf{k}) z_\lambda(\mathbf{k}, t), \end{aligned} \quad (8.141)$$

które spełniają relację

$$\mathbf{a}(\mathbf{k}, t)|\{z\}\rangle = \mathbf{z}(\mathbf{k}, t)|\{z\}\rangle, \quad (8.142)$$

gdzie  $|\{z\}\rangle = |\{z_\lambda(\mathbf{k})\}\rangle$ . W przestrzeni położeń poprzez transformację Fouriera otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \left( \frac{\hbar}{2\omega\epsilon_0} \right)^{1/2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \mathbf{a}(\mathbf{k}, t), \\ \mathbf{V}^{(+)}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \left( \frac{\hbar}{2\omega\epsilon_0} \right)^{1/2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \mathbf{z}(\mathbf{k}, t); \end{aligned} \quad (8.143)$$

$\mathbf{A}^\dagger(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{V}^{(+)}(\mathbf{x}, t)$  są sygnałami analitycznymi wprowadzonymi w podrozdz. 3.2 (Rozd. III). Pole elektryczne ma postać

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{x}, t) = -\dot{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \left( \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0} \right)^{1/2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \mathbf{a}(\mathbf{k}, t). \quad (8.144)$$

Analogicznie wprowadzamy pole

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = -\dot{\mathbf{V}}^{(+)}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \left( \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0} \right)^{1/2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \mathbf{z}(\mathbf{k}, t). \quad (8.145)$$

Pole magnetyczne określone jest wzorem

$$\mathbf{H}^{(+)}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{x}, t), \quad (8.146)$$

a dodatkowo wprowadzamy pole

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{V}^{(+)}(\mathbf{x}, t). \quad (8.147)$$

Stany koherentne stanowią stany własne dla wszystkich powyższych operatorów, mianowicie:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{x}, t)|\{z\}\rangle &= \mathbf{V}(\mathbf{x}, t)|\{z\}\rangle, \\ \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{x}, t)|\{z\}\rangle &= \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)|\{z\}\rangle, \\ \mathbf{H}^{(+)}(\mathbf{x}, t)|\{z\}\rangle &= \mathbf{n}(\mathbf{x}, t)|\{z\}\rangle. \end{aligned} \quad (8.148)$$

Operatory te opisują pola o dodatnich częstościach. Pola o częstościach ujemnych są opisywane przez operatory sprzężone:

$$\begin{aligned} \left[ \mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{x}, t) \right]^* &= \mathbf{A}^{(-)}(\mathbf{x}, t), \\ \left[ \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{x}, t) \right]^* &= \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{x}, t) \\ \left[ \mathbf{H}^{(+)}(\mathbf{x}, t) \right]^* &= \mathbf{H}^{(-)}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (8.149)$$

Wektor  $\mathbf{z}(\mathbf{k}, t)$  można przedstawić w postaci

$$\mathbf{z}(\mathbf{k}, t) = \left( \frac{\omega\epsilon_0}{2\hbar} \right)^{1/2} \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{k}, t) - i \left( \frac{\epsilon_0}{2\omega\hbar} \right)^{1/2} \hat{\mathbf{e}}(\mathbf{k}, t). \quad (8.150)$$

przy czym

$$\begin{aligned}\bar{\tilde{\mathbf{a}}}(\mathbf{k}, t) &= \tilde{\mathbf{a}}(-\mathbf{k}, t), \\ \bar{\tilde{\mathbf{e}}}(\mathbf{k}, t) &= \tilde{\mathbf{e}}(-\mathbf{k}, t)\end{aligned}\tag{8.151}$$

Na podstawie tych warunków funkcje

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{k}, t), \\ \mathbf{e}(\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{k}, t)\end{aligned}\tag{8.152}$$

są rzeczywiste. Zachodzi również związek

$$\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{k}, t) = i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{k}, t)\tag{8.153}$$

i jego przedstawienie w przestrzeni położeń

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{k}, t).\tag{8.154}$$

Funkcje  $\mathbf{e}(\mathbf{x})$  i  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  określają ciąg  $\{z_\lambda(\mathbf{k})\}$ , a zatem i stan koherentny. Dla podkreślenia tego faktu wprowadza się również dla stanów koherentnych oznaczenia

$$|\mathbf{e}, \mathbf{a}\rangle = |\mathbf{e}, \mathbf{h}\rangle = |\{z_\lambda(\mathbf{k})\}\rangle.\tag{8.155}$$

Dla przykładu wyprowadzimy wyrażenie dla stanu podstawowego w zależności od  $\mathbf{e}$  i  $\mathbf{h}$ . Z (8.141) oraz (8.150) wynikają zależności

$$\begin{aligned}\exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{\lambda, \mathbf{k}} |z_\lambda(\mathbf{k})|^2\right) &= \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} |z(\mathbf{k})|^2\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{4\hbar\omega} \sum_{\mathbf{k}} [|\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{k})|^2 + \omega^2 |\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{k})|^2]\right).\end{aligned}\tag{8.156}$$

Wykorzystując relację

$$|\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{k})|^2 = [\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{k})] \cdot [\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{k})] = \mathbf{k}^2 |\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{k})|^2\tag{8.157}$$

i równość  $\omega^2 = \mathbf{k}^2$ , można przepisać (8.156) w postaci

$$\exp\left(-\frac{1}{4\hbar} \sum_{\mathbf{k}} \omega^{-1} [|\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{k})|^2 + |\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{k})|^2]\right).\tag{8.158}$$

Ostatnie wyrażenie można również przepisać w postaci zależnej od zmiennych przestrzennych; wykorzystując relacje

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{L^{3/2}} \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \mathbf{e}(\mathbf{x}) d^3x, \\ \tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{L^{3/2}} \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) d^3x,\end{aligned}\tag{8.159}$$

oraz

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{|\mathbf{k}|} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{|\mathbf{k}|} d^3k \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}, \end{aligned} \quad (8.160)$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \varphi_0(\mathbf{e}, \mathbf{h}) &= \langle \mathbf{e}, \mathbf{h} | 0 \rangle \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{8\pi^2\hbar} \int \int \frac{[\mathbf{e}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}(\mathbf{y}) + \mathbf{h}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}(\mathbf{y})]}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} d^3x d^3y \right\}. \end{aligned} \quad (8.161)$$

Fizycznie ostatni wynik przedstawia amplitudę prawdopodobieństwa w stanie, dla którego

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{x}) \rangle = \mathbf{e}(\mathbf{x}), \quad \langle \mathbf{H}(\mathbf{x}) \rangle = \mathbf{h}(\mathbf{x}). \quad (8.162)$$

Dla iloczynu  $\langle \mathbf{e}, \mathbf{h} | \mathbf{e}', \mathbf{h}' \rangle$  można znaleźć wyrażenie następujące:

$$\langle \mathbf{e}, \mathbf{h} | \mathbf{e}', \mathbf{h}' \rangle = \exp \left\{ \sum_{\mathbf{k}} [|\mathbf{z}(\mathbf{k}) - \mathbf{z}'(\mathbf{k})|^2 - i \operatorname{Im} \bar{\mathbf{z}}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{z}'(\mathbf{k})] \right\}. \quad (8.163)$$

Funkcję  $\Phi = \sum_{\mathbf{k}} \operatorname{Im} \bar{\mathbf{z}}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{z}'(\mathbf{k})$  można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2\hbar} \sum_{\mathbf{k}} [\bar{\mathbf{e}}(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{a}}'(\mathbf{k}) - \bar{\mathbf{a}}(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{e}}'(\mathbf{k})] \\ &= \frac{i}{2\hbar} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\omega^2} [\bar{\mathbf{e}}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{h}}'(\mathbf{k}) + \mathbf{k} \times \bar{\mathbf{h}} \cdot \tilde{\mathbf{e}}'(\mathbf{k})] \end{aligned} \quad (8.164)$$

. W przestrzeni konfiguracyjnej oraz w granicy  $L \rightarrow \infty$ , wykorzystując równość

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} \frac{i \mathbf{k} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{\omega^2} \quad (8.165)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{i \mathbf{k} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{|\mathbf{k}|^2} d^3k = \nabla \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}, \quad (8.166)$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{8\pi\hbar} \int \int \left[ \mathbf{e}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \times \mathbf{h}'(\mathbf{y}) \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{h}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \times \mathbf{e}'(\mathbf{y}) \right] d^3x d^3y. \end{aligned} \quad (8.167)$$

Dalsze własności stanów koherentnych pola promieniowania podamy w następnych rozdziałach.



## Rozdział 9

# Funkcje korelacyjne

### 9.1 Funkcje korelacyjne pola kwantowego

Rozważamy pole promieniowania oddziałujące z materią, dążąc do stworzenia licznika fotonów. Dla prostoty posłużymy się fenomenologiczną metodą opisu, podaną w pracach Glaubera.<sup>1</sup> Zakładamy, że proces detekcji fotonów polega na ich absorpcji przez układ zliczający (detektor), tak że absorpcja fotonu zmienia odpowiednio stan detektora. W procesie tym detektor przechodzi ze swego stanu podstawowego do stanu wzbudzonego. Hamiltonian oddziaływania pola promieniowania i atomu (jako element detektora) ma postać

$$H = -\frac{1}{2} [\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{p}], \quad (9.1)$$

gdzie  $\mathbf{p}$  oznacza operator pędu (odpowiedzialny za przejścia atomowe), a  $\mathbf{A}$  - operator pola, któremu odpowiada przejście 1-fotonowe.

Dla przykładu rozpatrzmy proces absorpcji fotonu o wektorze polaryzacji  $\mathbf{e}$  w punkcie  $\mathbf{r}$  i w chwili  $t$ . Operator  $A^{(+)}(r, t)$ , określony związkiem (8.144), jest operatorem anihilacji, który opisuje anihilację fotonu w punkcie  $\mathbf{r}$  i w chwili  $t$ . Operator, wydzielający fotony o polaryzacji  $\mathbf{e}$ , będzie miał postać

$$A^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e} \cdot \mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r}, t). \quad (9.2)$$

Prawdopodobieństwo przejścia w jednostce czasu ze stanu  $|i\rangle$  w stan  $|f\rangle$  pola promieniowania wywołanego absorpcją fotonu przez detektor, liczone na jednostkę czasu, jest proporcjonalne do kwadratu modułu

$$\left| \langle f | A^{(+)}(\mathbf{r}, t) | i \rangle \right|^2 \quad (9.3)$$

ze współczynnikiem proporcjonalności  $\alpha$ . Współczynnik ten zależy od kwadratu modułu macierzowego elementu przejścia dla układu atomowego. Można założyć, że współczynnik  $\alpha$  nie zależy

---

<sup>1</sup>p. np. artykuł R. J. Glaubera w książce: Quantum Optics and Electronics, edit. C. de Witt, A. Blandin, C. Cohen-Tannoudji, New York, 1964, istn. tłum. rosyjskie.

od początkowego czy też końcowego stanu pola promieniowania, ani od wyboru chwili czasu, w której dokonywana jest detekcja. Pełne prawdopodobieństwo przejścia w jednostce czasu ze stanu  $|i\rangle$  ma postać

$$\begin{aligned} \sum_f \alpha \left| \langle f | A^{(+)}(\mathbf{r}, t) | i \rangle \right|^2 &= \alpha \sum_f \langle i | A^{(-)}(\mathbf{r}, t) | f \rangle \langle f | A^{(+)}(\mathbf{r}, t) | i \rangle \\ &= \alpha \langle i | A^{(-)}(\mathbf{r}, t) A^{(+)}(\mathbf{r}, t) | i \rangle. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Rozważmy proces detekcji przez więcej detektorów. Amplituda prawdopodobieństwa przejścia dla absorpcji fotonu w punkcie  $(\mathbf{r}_1, t_1)$  i drugiego fotonu w punkcie  $(\mathbf{r}_2, t_2)$  jest równa

$$\langle f | A^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) A^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) | i \rangle. \quad (9.5)$$

Modelem takiej detekcji złożonej było doświadczenie Hunbury-Twissa, opisane przez nas uprzednio. Analogicznie, prawdopodobieństwo absorpcji  $n$  fotonów o polaryzacji  $\mathbf{e}$  w punktach  $r_k, t_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  jest równa

$$\left\langle i \left| \prod_{k=1}^n A^{(-)}(\mathbf{r}_k, t_k) \prod_{\ell=1}^n A^{(+)}(\mathbf{r}_\ell, t_\ell) \right| i \right\rangle. \quad (9.6)$$

Wyrażenie (9.6) jest średnią wartością operatora normalnie uporządkowanego i w ogólności różne jest od wyrażenia

$$\left\langle i \left| \prod_{k=1}^n A^{(-)}(\mathbf{r}_k, t_k) A^{(+)}(\mathbf{r}_k, t_k) \right| i \right\rangle. \quad (9.7)$$

Dalsze uogólnienie wyrażenia typu (9.6) polega na uwzględnieniu fotonów o różnych polaryzacjach. Oznaczając indeksem  $j_k$  składowe wektorów pola, otrzymamy zamiast (9.6)

$$\left\langle i \left| \prod_{k=1}^n A_{j_k}^{(-)}(\mathbf{r}_k, t_k) \prod_{\ell=1}^n A_{j_\ell}^{(+)}(\mathbf{r}_\ell, t_\ell) \right| i \right\rangle. \quad (9.8)$$

Wprowadzając dla trójki zmiennych  $(\mathbf{r}_k, t_k, j_k)$  oznaczenie  $x_k$ , zapiszemy (9.8) w prostrzej postaci

$$\left\langle i \left| \prod_{k=1}^n A^{(-)}(x_k) \prod_{\ell=1}^n A^{(+)}(x_\ell) \right| i \right\rangle. \quad (9.9)$$

Wyrażenie to oznacza gęstość prawdopodobieństwa w wypadku, gdy układ znajduje się w stanie czystym. Jeżeli układ znajduje się w stanie mieszanym, opisanym operatorem gęstości  $\rho$ , wówczas zamiast (9.9) rozważamy wyrażenie

$$\left\langle \prod_{k=1}^n A^{(-)}(x_k) \prod_{\ell=1}^n A^{(+)}(x_\ell) \right\rangle \equiv \text{Tr} \left\{ \rho \prod_{k=1}^n A^{(-)}(x_k) \prod_{\ell=1}^n A^{(+)}(x_\ell) \right\}. \quad (9.10)$$

W wypadku liczników o skończonej czułości należy użyć funkcji rozmywających (p. 4.10). Podobnie jak w 4.10 rozważamy pole efektywne

$$A_e^{(+)}(x) \equiv A_e^{(+)\text{ef}}(\mathbf{r}, t) = \sum \int \bar{S}_{jj'}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') A_{j'}^{(+)}(\mathbf{r}', t') d^3 x' dt', \quad (9.11)$$

gdzie tensor  $\bar{S}_{jj'}$  jest uogólnioną admitancją  $k$ -tego detektora, określającą pole efektywne. Ostatecznie więc liczniki dowolnego typu opisane są funkcjami korelacyjnymi

$$\begin{aligned} G^{(n,n)}(x_1, \dots, x_n; x_{n+2}, \dots, x_{2n}) &\equiv \left\langle \prod_{k=1}^n A^{(-)}(x_k) \prod_{\ell=n+1}^{2n} A^{(+)}(x_\ell) \right\rangle \\ &= \text{Tr} \left\{ \prod_{k=1}^n A^{(-)}(x_k) \prod_{\ell=n+1}^{2n} A^{(+)}(x_\ell) \right\}. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Znając wszystkie funkcje korelacyjne i admitancje detektorów, obliczać można prędkości zliczeń korelacji  $n$ -fotonowych. Jednocześnie za pośrednictwem funkcji (9.12) obliczać można średnie

$$\left\langle \prod_{k=1}^n E^{(-)}(x_k) \prod_{\ell=n+1}^{2n} E^{(+)}(x_\ell) \right\rangle, \quad (9.13)$$

$$\left\langle \prod_{k=1}^n H^{(-)}(x_k) \prod_{\ell=n+1}^{2n} H^{(+)}(x_\ell) \right\rangle, \quad (9.14)$$

gdyż wektory elektryczny i magnetyczny związane są z wektorem  $\mathbf{A}$  równaniami

$$\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}} \text{ i } \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Dotychczas rozważaliśmy funkcje korelacyjne typu (9.12), 2w których ilości operatorów kreacji i anihilacji były równe. Jest to szczególny przypadek funkcji korelacyjnych ogólniejszego typu:

$$\begin{aligned} G^{(n,m)}(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) &\equiv \left\langle \prod_{k=1}^n A^{(-)}(x_k) \prod_{\ell=n+1}^m A^{(+)}(x_\ell) \right\rangle \\ &= \text{Tr} \left\{ \rho \prod_{k=1}^n A^{(-)}(x_k) \prod_{\ell=n+1}^m A^{(+)}(x_\ell) \right\}. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Zachodzi również związek

$$\overline{G^{(n,m)}}(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = G^{(n,m)}(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) \quad (9.16)$$

(kreska u góry oznacza, jak zwykle, sprzężenie zespolone, który wynika stąd, że

$$\left[ A^{(+)}(x) \right]^* = A^{(-)}(x).$$

Dla pola swobodnego każda z funkcji  $G^{(n,m)}$  względem każdego z argumentów spełnia równanie falowe

$$\left( \nabla_1^2 - \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \right) G^{(mn,m)}(\dots, \mathbf{r}_1, t_1, \dots) = 0. \quad (9.17)$$

Odpowiednio do rozważań 8.6, operatory anihilacji dla pola w objętości  $L^3$  przedstawić można w postaci

$$a_\lambda(\mathbf{k}, t) = \tilde{\mathbf{e}}_\lambda(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \left( \frac{2\omega}{\hbar} \right)^{1/2} \int e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x})} \tilde{\mathbf{e}}_\lambda(\mathbf{k}) A^{(+)}(\mathbf{x}, t) d^3x. \quad (9.18)$$

Dla operatorów kreacji analogiczny związek ma postać

$$a_\lambda^*(\mathbf{k}, t) = \tilde{\mathbf{e}}_\lambda(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}^*(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \left( \frac{2\omega}{\hbar} \right)^{1/2} \int e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x})} \tilde{\mathbf{e}}_\lambda(\mathbf{k}) A^{(-)}(\mathbf{x}, t) d^3x. \quad (9.19)$$

Oznaczając  $a_k(t) = a_\lambda(\mathbf{k}, t)$ ,  $a^*(t) = a_\lambda^*(\mathbf{k}, t)$ , wprowadzamy funkcje korelacyjne

$$\begin{aligned} & \mathcal{G}^{(n,m)}(k_1, t_1, \dots, k_n, t_n; k_{n+1}, t_{n+1}, \dots, k_{n+m}, t_{n+m}) \\ &= \text{Tr} \left\{ \rho \prod_{r=1}^n a_{k_r}^*(t_r) \prod_{s=n+1}^{m+n} a_{k_s}(t_s) \right\}. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Zależność od czasu wyrażenia (9.20) wyprowadzimy ze związków (8.140):

$$a_k(t) = \exp(-i\omega_k t) a_k(0) =: \exp(-i\omega_k t) a_k. \quad (9.21)$$

Stąd

$$\begin{aligned} & \mathcal{G}^{(n,m)}(k_1, t_1, \dots, k_n, t_n; k_{n+1}, t_{n+1}, \dots, k_{n+m}, t_{n+m}) \\ &= \prod_{r=1}^n \exp(i\omega_{k_r} t_r) \prod_{s=n+1}^{m+n} \exp(-i\omega_{k_s} t_s) \mathcal{G}^{(n,m)}(k_1, 0, \dots, k_n, 0; k_{n+1}, 0, \dots, k_{n+m}, 0). \end{aligned} \quad (9.22)$$

Z (9.22) wynika, że wystarczy rozpatrywać wyrażenia  $\mathcal{G}^{(n,m)}$  dla zerowych argumentów czasowych

$$\begin{aligned} & \mathcal{G}^{(n,m)}(k_1, \dots, k_n; k_{n+1}, \dots, k_{n+m}) \\ & \equiv \left\langle \prod_{r=1}^n a_{k_r}^+ \prod_{s=n+1}^{m+n} a_{k_s} \right\rangle = \text{Tr} \left\{ \rho \prod_{r=1}^n a_{k_r}^* \prod_{s=n+1}^{m+n} a_{k_s} \right\}. \end{aligned} \quad (9.23)$$

Podobnie jak funkcje  $G^{(n,m)}$ , funkcje korelacyjne  $\mathcal{G}^{(n,m)}$  posiadają własność

$$\overline{\mathcal{G}^{(n,m)}}(k_1, \dots, k_n; k_{n+1}, \dots, k_{n+m}) = \mathcal{G}^{(n,m)}(k_1, \dots, k_n; k_{n+1}, \dots, k_{n+m}). \quad (9.24)$$

Korelacje dowolnego rzędu obliczać można znając **funkcję tworzącą**

$$\begin{aligned} C_N(\{u_k\}) &= \left\langle \exp \left( \sum_{k=1}^{\infty} u_k a_k^* \right) \exp \left( - \sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}_k a_k^* \right) \right\rangle \\ &= \text{Tr} \left[ \rho \exp \left( \sum_{k=1}^{\infty} u_k a_k^* \right) \exp \left( - \sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}_k a_k^* \right) \right], \end{aligned} \quad (9.25)$$

gdzie  $\{u_k\}$  jest ciągiem liczb zespolonych o własności  $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^2 < \infty$ . Funkcję korelacyjną  $\mathcal{G}^{(n,m)}$  obliczamy za pośrednictwem funkcji tworzącej poprzez różniczkowanie

$$\begin{aligned} & \mathcal{G}^{(n,m)}(k_1, \dots, k_n; k_{n+1}, \dots, k_{n+m}) \\ &= \left\{ \prod_{r=1}^n \frac{\partial}{\partial u_{k_r}} \prod_{s=n+1}^{n+m} \left( - \frac{\partial}{\partial \bar{u}_{k_s}} \right) \right\} C_N(\{u_k\})|_{\{u_k\}=0}. \end{aligned} \quad (9.26)$$

Z funkcją tworzącą, będącą funkcjonalem normalnie uporządkowanym (wszystkie  $a_k^*$  są na lewo od  $a_k$ ), związany jest funkcjonał charakterystyczny  $C(\{u_k\})$ :

$$\begin{aligned} C(\{u_k\}) &= \left\langle \exp \left[ \sum_{k=1}^{\infty} (u_k a_k^* - \bar{u}_k a_k) \right] \right\rangle \\ &= \exp \left( - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^2 \right) C(\{u_k\}). \end{aligned} \quad (9.27)$$

Powyższą zależność otrzymaliśmy korzystając z formuły Bakera-Hausdorffa (p. również (8.24)). Wyrażenia na  $C_N(\{u_k\})$  i  $C(\{u_k\})$  zapisać można w przestrzeni położeń jako

$$\begin{aligned} C_N\{S\} &= \left\langle \exp\left(\mathbf{S}\mathbf{A}^{(-)}\right) \exp\left(-\bar{\mathbf{S}}\mathbf{A}^{(+)}\right) \right\rangle, \\ C\{\mathbf{S}\} &= \left\langle \exp\left(\mathbf{S}\mathbf{A}^{(-)} - \bar{\mathbf{S}}\mathbf{A}^{(+)}\right) \right\rangle, \end{aligned} \quad (9.28)$$

gdzie

$$\bar{\mathbf{S}}\mathbf{A}^{(+)} = \int \bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r})\mathbf{A}^{(+)}d^3r = \left(\mathbf{S}\mathbf{A}^{(-)}\right)^*,$$

a  $\mathbf{S}(\mathbf{r})$  jest funkcją całkowalną z kwadratem, tzn.

$$|\mathbf{S}(\mathbf{r})|^2 d^3r < \infty.$$

Zauważmy, że w dotychczasowych rozważaniach, w szczególności, w określeniach średnich typu (9.4) i dalszych ((9.4-9.15), (9.23), (9.25) itd.) nic nie mówi się o rozkładzie prawdopodobieństwa, z jakim liczy się daną średnią. Zgodnie z duchem metody teoriiinformacyjnej stosowanej przez nas w niniejszym skrypcie, począwszy od Rozdz. II, rozkład prawdopodobieństwa (klasyczny lub kwantowy) wyznaczony jest jednoznacznie (o ile oczywiście zagadnienie jest regularne) poprzez procedurę maksymalizowania entropii (informacji). W danym przypadku za zadane średnie uważać można korelacje różnych rzędów pola elektromagnetycznego. Z kolei, mając wyznaczony rozkład reprezentatywny dla makrostanu generowanego np. przez określony zbiór korelacji niższego rzędu, obliczyć można korelacje wyższych rzędów jako funkcje zadanych korelacji niższego rzędu. Dla ilustracji rozważmy następujący przykład.<sup>2</sup> Niech badane pole elektromagnetyczne (np. we wnęce o skończonej objętości) opisane będzie skończoną ilością modów o operatorach tworzenia i niszczenia  $a_1, \dots, a_N; a_1^*, \dots, a_N^*$ . Jak już powiedzieliśmy, funkcje korelacyjne pola dają się sprowadzić do postaci (9.23). Załóżmy, że znane są (np. z doświadczenia) wszystkie funkcje korelacyjne 1-go i 2-go rzędu

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{(1,0)}(j) &= \langle a_j^* \rangle =: \bar{\alpha}_j, \quad (j = 1, \dots, N), \\ \mathcal{G}^{(0,1)}(j) &= \langle a_j \rangle = \alpha_j, \\ \mathcal{G}^{(2,0)}(i, j) - \mathcal{G}^{(1,0)}(i)\mathcal{G}^{(1,0)}(j) &= \langle a_i^* a_j^* \rangle - \langle a_i^* \rangle \langle a_j^* \rangle =: \bar{R}_{ij}, \\ \mathcal{G}^{(0,2)}(i, j) - \mathcal{G}^{(0,1)}(i)\mathcal{G}^{(0,1)}(j) &= \langle a_i a_j \rangle - \langle a_i \rangle \langle a_j \rangle = R_{ij}, \\ \mathcal{G}^{(1,1)}(i, j) - \mathcal{G}^{(1,0)}(i)\mathcal{G}^{(0,1)}(j) &= \langle a_i^* a_j \rangle - \langle a_i^* \rangle \langle a_j \rangle =: S_{ij}, \quad (i, j = 1, \dots, N). \end{aligned} \quad (9.29)$$

Korelacje te generują następujący makrostan  $\Phi$ :

$$\begin{aligned} \Phi &= \left\{ \rho : \text{Tr}(\rho a_i) =: \alpha_i, \quad \langle a_i^* \rangle = \alpha_i, \right. \\ &\quad \left. \langle a_i^* a_j^* \rangle - \langle a_i^* \rangle \langle a_j^* \rangle = \bar{R}_{ij}, \right. \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>przykład dotąd nie publikowany

$$\left. \begin{aligned} \langle a_i a_j \rangle - \langle a_i \rangle \langle a_j \rangle &= R_{ij}, \\ \langle a_i^* a_j \rangle - \langle a_i^* \rangle \langle a_j \rangle &= S_{ij}, \\ \rho &\geq 0, \quad \text{Tr } \rho = 1 \end{aligned} \right\}. \quad (9.30)$$

Jeśli makrostan  $\Phi$  jest regularny, wówczas istnieje operator gęstości  $\rho_0 \in \Phi$ , taki że

$$S(\rho_0) = \sup_{\rho \in \Phi} S(\rho), \quad S(\rho) =: -\text{Tr}(\rho \ln \rho). \quad (9.31)$$

Stawiamy następujący problem: jak wyznaczyć korelacje wyższych rzędów (tzn.  $(\mathcal{G}^{(n,m)}, n+m > 2)$ ) jako funkcje zadanych korelacji rzędu 1-go i 2-go, czyli, jak mówimy, estymować je na makro stanie (9.50). Zgodnie z zasadami termodynamiki informacyjnej wartość średnia estymowana funkcji  $(f(a_1^*, \dots, a_N^*, a_1, \dots, a_N))$  na makro stanie (9.50) jest równa

$$\langle f \rangle_\Phi = \text{Tr}(\rho_0 f),$$

gdzie  $\rho_0$  jest operatorem reprezentatywnym dla  $\Phi$ , tzn. spełniającym (9.31). W przypadku korelacji dogodnie posłużyć się funkcją tworzącą (9.25) i formułą (9.26). Dla rozwiązania naszego problemu wystarczy znaleźć estymowaną funkcję tworzącą

$$C_N(\sigma, \tau) = \left\langle \exp \left( \sum_{i=1}^N \sigma_i a_i^* \right) \exp \left( \sum_{j=1}^N \tau_j a_j \right) \right\rangle_\Phi, \quad (9.32)$$

wówczas korelacje dowolnego rzędu wyznaczamy za pośrednictwem formuły (9.26), przy zastąpieniu  $u_{k_r} \rightarrow \sigma_{k_r}$ ,  $-\bar{u}_{k_r} \rightarrow \sigma_{k_r}$ . Operator reprezentatywny dla makro stanu (9.50) ma postać

$$\begin{aligned} \rho_0 &= Z^{-1} \exp \left\{ - \sum_{i,j=1}^N (\lambda_{ij} a_i^* a_j + \bar{\mu}_{ij} a_i^* a_j^* + \mu_{ij} a_i a_j) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\ell=1}^N (\kappa_\ell a_\ell + \bar{\kappa}_\ell a_\ell^*) \right\}, \end{aligned} \quad (9.33)$$

gdzie

$$\begin{aligned} Z &= \text{Tr} \exp \exp \left\{ - \sum_{i,j=1}^N (\lambda_{ij} a_i^* a_j + \bar{\mu}_{ij} a_i^* a_j^* + \mu_{ij} a_i a_j) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\ell=1}^N (\kappa_\ell a_\ell + \bar{\kappa}_\ell a_\ell^*) \right\}. \end{aligned} \quad (9.34)$$

Makrostan  $\Phi$  jest regularny, o ile zachodzi  $Z < \infty$ . Wówczas nieoznaczone mnożniki Lagrange'a  $\lambda_{ij}, \mu_{ij}, \kappa_i$  i odpowiednio ich sprzężone związane są z zadanymi wielkościami  $R_{ij}, S_{ij}, \alpha_i$  poprzez relacje

$$\begin{aligned} \alpha_i &= -\frac{\partial \ln Z}{\partial \kappa_i}, \quad \bar{\alpha}_i = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \bar{\kappa}_i}, \\ R_{ij} + \alpha_i \alpha_j &= -\frac{\partial \ln Z}{\partial \mu_{ij}}, \quad \bar{R}_{ij} + \bar{\alpha}_i \bar{\alpha}_j = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \bar{\mu}_{ij}}, \\ S_{ij} + \bar{\alpha}_i \alpha_j &= -\frac{\partial \ln Z}{\partial \lambda_{ij}}, \quad i, j = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (9.35)$$

Suma stanów  $Z$  (9.34) jest zbieżna, jeśli spełnione są 2 warunki:

1. istnieje unitarna transformacja  $U$ , która diagonalizuje formę kwadratową występującą w (9.34), tzn. jeśli  $a_i^*$ ,  $a_i$  dadzą się przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} a_i &= \sum_m (A_{im} b_m + B_{im} b_m^*) + \alpha_i, \\ a_i^* &= \sum_m (\bar{A}_{im} b_m + \bar{B}_{im} b_m^*) + \bar{\alpha}_i, \end{aligned} \quad (9.36)$$

(sumacja przebiega od 1 do  $N$ )), takiej, że

$$Z \rightarrow \text{Tr} \exp \left[ - \sum_{j=1}^N \Lambda_j b_j^* b_j + C \right]; \quad (9.37)$$

2. dla operatorów  $b_i$  i liczb  $\Lambda_i$  zachodzi nierówność

$$\sum_{k=1}^N \text{Tr} \left\{ b_k^* b_k \exp \left( - \sum_{i=1}^N \Lambda_i b_i^* b_i \right) \right\} < \infty. \quad (9.38)$$

Jeśli warunki (9.36-9.38) są spełnione, wówczas operator reprezentatywny  $\rho_0$  sprowadza się do postaci

$$\rho_0 = \tilde{Z}^{-1} \exp \left( - \sum_{i=1}^N \Lambda_i b_i^* b_i \right), \quad (9.39)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \tilde{Z} &= \tilde{Z}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_N) = \text{Tr} \exp \left( - \sum_{i=1}^N \Lambda_i b_i^* b_i \right) \\ &= \prod_{i=1}^N [1 - \exp(-\Lambda_i)]^{-1}. \end{aligned} \quad (9.40)$$

Operatory  $b_i^*$ ,  $b_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) są operatorami bozonowymi spełniającymi te same, co  $a_i^*$ ,  $a_i$ , relacje komutacji

$$[b_i, b_j^*]_- = \delta_{ij}, \quad [b_i, b_j]_- = [b_i^*, b_j^*]_- = 0, \quad (9.41)$$

dla  $i, j = 1, \dots, N$ . Oznaczając

$$[b_k^* b_k] = n_k = \tilde{Z}^{-1} \text{Tr} \left[ b_k^* b_k \exp \left( - \sum_{i=1}^N \Lambda_i b_i^* b_i \right) \right], \quad k = 1, \dots, N, \quad (n_k > 0) \quad (9.42)$$

mamy

$$-\frac{\partial \ln \tilde{Z}}{\partial \Lambda_k} = n_k = e^{\Lambda_k} - 1, \quad (9.43)$$

a stąd

$$\tilde{Z} = \prod_{k=1}^N (1 + n_k). \quad (9.44)$$

Jak wiadomo, iloczyn powyższy jest zbieżny, o ile zachodzi

$$\sum_{k=1}^N n_k < \infty, \quad (9.45)$$

którą to zbieżność założyliśmy w (9.38). Ze względu na zachowanie relacji komutacji współczynniki transformacji  $A_{ij}, B_{ij}$  mają następujące własności

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^N (A_{ip} B_{jp} - A_{jp} B_{ip}) &= \sum_{p=1}^N (\bar{A}_{ip} \bar{B}_{jp} - \bar{A}_{jp} \bar{B}_{ip}) = 0, \\ \sum_{p=1}^N (A_{ip} \bar{A}_{jp} - B_{ip} \bar{B}_{jp})_- &= \delta_{jp} \end{aligned} \quad (9.46)$$

Związki (9.36) narzucają pewne ograniczenia na dopuszczalne wartości średnich  $R_{ij}, S_{ij}$ , mamy bowiem

$$\begin{aligned} R_{k\ell} &= \sum_{p=1}^N (A_{kp} B_{\ell p} + A_{\ell p} B_{kp}) \gamma_p; \\ S_{k\ell} &= \sum_{p=1}^N (\bar{A}_{kp} A_{\ell p} + \bar{B}_{kp} B_{\ell p}) \gamma_p - \delta_{k\ell}, \end{aligned} \quad (9.47)$$

i odpowiednio dla wielkości sprzężonych,  $\gamma_p$  zdefiniowane jest jako

$$\gamma_p = \frac{1}{2} \langle b_p^* b_p + b_p b_p^* \rangle = n_p + \frac{1}{2}. \quad (9.48)$$

Ponieważ  $\gamma_p > 0$  dla  $p = 1, \dots, N$ , więc by relacje (9.47) mogły być spełnione, musi zachodzić nierówność

$$\sum_{i,j=1}^N [\eta_i \eta_j \bar{R}_{ij} + \bar{\eta}_i \bar{\eta}_j R_{ij} + \eta_i \bar{\eta}_j (S_{ij} + S_{ji}^*)] > 0 \quad (9.49)$$

dla dowolnego ciągu liczb zespolonych  $\eta_1, \dots, \eta_N$  takich, że

$$\sum_{i=1}^N |\eta_i|^2 > 0.$$

Po tych spostrzeżeniach można przystąpić do rozwiązania głównego problemu, tzn. wyznaczenia estymowanej funkcji tworzącej. Skorzystamy z następujących relacji: jeśli operatory  $a$  i  $a^*$  komutują z komutatorem  $[a, a^*]$ , wówczas

$$\exp(\chi a^*) \exp(\varphi a) = \exp\left(\varphi a + \chi a^* - \frac{1}{2} \varphi \chi [a, a^*]\right); \quad (9.50)$$

p. również (8.79). W naszym przypadku

$$\begin{aligned} C_N(\sigma, \tau) &= \left\langle \exp\left(\sum_i \sigma_i a_i^*\right) \exp\left(\sum_j \tau_j a_j\right) \right\rangle \\ &= \left\langle \exp\left\{\sum_i (\sigma_i a_i^* + \tau_i a_i) - \frac{1}{2} \sum_i \sigma_i \tau_i\right\} \right\rangle \\ &= \exp\left\{\sum_i \left(\sigma_i \bar{\alpha}_i + \tau_i \alpha_i - \frac{1}{2} \sigma_i \tau_i\right)\right\} \exp\left(\sum_i \tilde{\sigma}_i \tilde{\tau}_i \gamma_i\right), \end{aligned} \quad (9.51)$$

gdzie, przy wykorzystaniu (9.36), zastosowaliśmy formułę

$$\frac{\text{Tr}(e^{\varphi b^*} e^{\chi b} e^{-\gamma b^* b})}{\text{Tr} \exp(-\gamma b^* b)} = \exp(\varphi \chi \langle b^* b \rangle), \quad (9.52)$$

$$\langle b^* b \rangle := \frac{\text{Tr}[b^* b \exp(-\gamma b^* b)]}{\text{Tr} \exp(-\gamma b^* b)}$$

oraz

$$\sum_i \tilde{\sigma}_i \tilde{\tau}_i \gamma_i = \sum_{i,k,\ell} (\sigma_k \bar{A}_{ki} + \tau_k B_{ki}) (\sigma_\ell \bar{B}_{\ell i} + \tau_\ell A_{\ell i}) \gamma_i.$$

W powyższych wzorach sumowanie przebiega od 1 do  $N$ . Ostatecznie, uwzględniając (9.47) i (9.46), otrzymujemy wyrażenie na funkcję tworzącą w następującej postaci:

$$\begin{aligned} C_N(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) &= \exp \left\{ \sum_{i=1}^N (\sigma_i \bar{\alpha}_i + \tau_i \alpha_i) + \frac{1}{2} \sum_{k,\ell}^N \sigma_k \sigma_\ell \bar{R}_{k\ell} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{k,\ell}^N \tau_k \tau_\ell R_{k\ell} + \sum_{k,\ell}^N \sigma_k \tau_\ell S_{k\ell} \right\}. \end{aligned} \quad (9.53)$$

Formuła powyższa, w połączeniu z (9.26), pozwala na obliczenie korelacji dowolnego rzędu, jako funkcji zadanych  $\alpha_i, \bar{\alpha}_i, R_{ij}, S_{ij}$  i ich sprzężonych. Dla przykładu obliczmy następującą funkcję korelacyjną 4-go rzędu:

$$\mathcal{G}^{(2,2)}(m, n, p, q) = \langle a_m^* a_n^* a_p a_q \rangle = \frac{\partial^4}{\partial \sigma_m \partial \sigma_n \partial \tau_p \partial \tau_q} C_N(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}). \quad (9.54)$$

Dla uproszczenia połóżmy  $\alpha_i = \bar{\alpha}_i = 0$ . Otrzymamy wówczas

$$\begin{aligned} \langle a_m^* a_n^* a_p a_q \rangle &= \langle a_n^* a_q \rangle \langle a_m^* a_p \rangle + \langle a_n^* a_p \rangle \langle a_m^* a_q \rangle \\ &\quad + \langle a_m^* a_n^* \rangle \langle a_p a_q \rangle. \end{aligned} \quad (9.55)$$

Otrzymany wzór jest szczególnym przypadkiem formuły Wicka-Blocha - de Dominicisa, o której mowa w następnym podrozdziale.

## 9.2 Koherencja pola kwantowego

Koherencji pola klasycznego poświęciliśmy Rozdział 3. Do opisu koherencji wprowadzono tam pojęcia: **funkcji koherencji wzajemnej**  $\Gamma^{(i,j)}$  (używamy tu wskaźników górnych w analogii do wprowadzonych w poprzednim podrozdziale funkcji korelacyjnych), gdzie np.

$$\Gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') =: \Gamma(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \langle \bar{V}(\mathbf{r}', t') V(\mathbf{r}, t) \rangle,$$

oraz **zespolonego stopnia koherencji**  $\gamma$ :

$$\gamma(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{\Gamma(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')}{[\Gamma(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}, t) \Gamma(\mathbf{r}', t'; \mathbf{r}', t')]^{1/2}}, \quad (9.56)$$

przy czym, jak widać,  $0 \leq \gamma \leq 1$ . Funkcje  $V(\mathbf{r}, t)$  są odpowiednimi sygnałami analitycznymi. Rozróżniliśmy pole:

1. całkowicie koherentne, gdy  $|\gamma| = 1$ ,
2. częściowo koherentne, gdy  $0 < |\gamma| < 1$ , oraz
3. całkowicie niekoherentne, gdy  $|\gamma| = 0$ .

W przypadku kwantowym rolę funkcji  $\Gamma^{(1,1)}$  przejmuje funkcja korelacyjna  $G^{(1,1)}$ .

Rozważmy układ  $M$  detektorów rejestrujących fotony i zmienną losową  $a$  przyporządkowaną temu układowi i przyjmującą wartości  $z_\mu, \mu = 1, \dots, M$ . Przypadek całkowitej koherencji odpowiada przypadkowi dynamicznemu rozważanemu w podrozdz. 3.2 - wszystkie fluktuacje zmiennej  $a$  są równe 0, tzn. zmienna może przyjmować tylko jedna wartość  $z_\mu \equiv z, \mu = 1, \dots, M$ . W tym przypadku

$$\frac{1}{M} \sum_{\mu=1}^M z_\mu^n = \langle a^n \rangle = z^n = \langle a \rangle^n$$

oraz

$$\langle (a - \langle a \rangle)^n \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k \langle a \rangle^{n-k} \right\rangle = \langle a \rangle^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}.$$

Z drugiej strony, jeżeli założyć, że obserwowalny jest tylko moduł zmiennej losowej, wówczas rozważać można przypadek całkowitej koherencji "modułowej". W tym wypadku zachodzi faktoryzacja typu

$$\langle \bar{a}^n a^m \rangle = \langle \bar{a} \rangle^n \langle a \rangle^m.$$

W wypadku pola kwantowego mówimy o **stanie całkowitej koherencji pola**, jeśli funkcje korelacyjne  $G^{(n,m)}$  faktoryzują się w następujący sposób:

$$G^{(n,m)}(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = \prod_{k=1}^n \bar{V}(x_k) \prod_{\ell=n+1}^{n+m} V(x_\ell), \quad (9.57)$$

dla każdego  $n$  i  $m$ , gdzie  $V(x_k)$  są pewnymi funkcjami. Liczby  $n, m$  przybierają wartości  $0, 1, 2, \dots$ , gdzie

$$\begin{aligned} G^{(0,0)} &= 1, \\ G^{(1,0)}(x_1) &= \langle A^{(-)}(x_1) \rangle =: \bar{V}(x_1), \\ G^{(0,1)}(x_1) &= \langle A^{(+)}(x_1) \rangle =: V(x_1), \end{aligned} \quad (9.58)$$

p. również wzory (9.15). Najczęściej używane są funkcje korelacyjne typu  $G^{(n,n)}$ : dla nich wzór (9.57) przybiera postać

$$G^{(n,n)}(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = \prod_{k=1}^n \bar{V}(x_k) \prod_{\ell=n+1}^{2n} V(x_\ell). \quad (9.59)$$

Dla funkcji  $\mathcal{G}^{(n,n)}$  będących przestrzennymi transformatami Fouriera funkcji  $G^{(n,n)}$  (p. wzór (9.20)), warunki pełnej koherencji zapiszmy w postaci

$$\begin{aligned} & \mathcal{G}^{(n,m)}(k_1, \dots, k_n; k_{n+1}, \dots, k_{n+m}) \\ &= \left\langle \prod_{r=1}^n a_{kr}^* \prod_{s=1}^{n+m} a_{ks} \right\rangle = \prod_{r=1}^n \bar{z}_{kr} \prod_{s=1}^{n+m} z_{ks}. \end{aligned} \quad (9.60)$$

Warunki pełnej koherencji pola zapisać można również w postaci

$$\left| G^{(n,n)}(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) \right|^2 = \prod_{k=1}^{2n} G^{(1,1)}(x_k, x_k), \quad (9.61)$$

dla każdego  $n$ .

Jeśli warunki na pełną koherencję pola nie są spełnione, wówczas mamy do czynienia ze stanem częściowej koherencji pola. Załóżmy, że znane są tylko koherencje I rzędu postaci

$$G^{(1,1)}(x, y) = \bar{V}(x)V(y) \quad (9.62)$$

dla każdego  $x$  i  $y$ . Rozważmy problem wyrażenia koherencji wyższych rzędów  $G^{(n,n)}$  poprzez koherencje I rzędu. Uwzględniając (9.62) otrzymujemy

$$\left| G^{(1,1)}(x, y) \right|^2 = G^{(1,1)}(x, x) G^{(1,1)}(y, y). \quad (9.63)$$

W dalszym ciągu opuszczamy wskaźniki (1,1). Kładąc

$$G(x, y) = \exp[w(x, y) + i\varphi(x, y)] \quad (9.64)$$

i uwzględniając, że  $G(x, y) = \bar{G}(y, x)$ , co wynika z (9.62), otrzymujemy warunki na funkcje  $w(x, y)$  i  $\varphi(x, y)$

$$\begin{aligned} w(x, y) &= w(y, x), \\ \varphi(x, y) &= -\varphi(y, x), \end{aligned} \quad (9.65)$$

a stąd

$$w(x, y) = \frac{1}{2} [w(x, x) + w(y, y)]. \quad (9.66)$$

Wprowadzając oznaczenie

$$B(x) := \exp \left[ \frac{1}{2} w(x, x) \right],$$

zapiszemy (9.64) i (9.66) w postaci

$$G(x, y) = B(x) B(y) \exp[i\varphi(x, y)]. \quad (9.67)$$

Z definicji mamy

$$G(x, y) = \left\langle A^{(-)}(x) A^{(+)}(y) \right\rangle$$

i następująca forma kwadratowa jest dodatnio określona

$$\sum_{j,k} \bar{c}_j c_k G(x_j, x_k) = \sum_{j,k} B(x_j) B(x_k) \bar{c}_j c_k \exp[i\varphi(x_j, x_k)] \geq 0, \quad (9.68)$$

co można zapisać w postaci nierówności

$$\sum_{j,k} \bar{d}_j d_k M_{jk} \geq 0, \quad (9.69)$$

gdzie wielkości  $M_{jk} := \exp[i\varphi(x_j, x_k)]$  są elementami macierzowymi pewnej macierzy  $\underline{\underline{M}}$ . Z określenia elementów  $M_{jk}$  oraz z nierówności (9.69) wynika, że  $|M_{jk}| = 1$  dla dowolnej pary wskaźników  $(j, k)$  oraz że macierz  $\underline{\underline{M}}$  jest dodatnio określona i hermitowska. Dla dowolnej macierzy dodatnio określonej  $\underline{\underline{A}}$  każdy jej podwyznacznik główny musi być nieujemny, tzn. spełnione są nierówności

$$a_{11} \geq 0, \quad \left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right|, \dots, \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ & \dots & \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{array} \right| \geq 0, \dots \quad (9.70)$$

( $a_{jk}$  to elementy macierzy  $\underline{\underline{A}}$ ). Rozważmy macierz  $\underline{\underline{M}}$  rzędu  $3 \times 3$ . Jej wyznacznik jest równy

$$\det \underline{\underline{M}} = 2 \operatorname{Re} (M_{12} M_{23} M_{31} - 1) \quad (9.71)$$

co do modułu,  $|M_{12} M_{23} M_{31}| = 1$ , więc  $\det \underline{\underline{M}} \leq 0$ , ale z drugiej strony, z dodatniej określoności macierzy  $\underline{\underline{M}}$  wynika, że  $\det \underline{\underline{M}} \geq 0$ , musi więc zachodzić  $\det \underline{\underline{M}} = 0$ , a stąd

$$M_{12} M_{23} M_{31} = 1. \quad (9.72)$$

Z (9.72) wynika, że funkcje  $\varphi(x, y)$ ,  $\varphi(y, z)$  i  $\varphi(z, x)$  (ozna.  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ ) spełniają warunek

$$\varphi(x, y) + \varphi(y, z) + \varphi(z, x) = 0. \quad (9.73)$$

Oznaczając  $\alpha_z(y) = -\varphi(y, z)$ , warunek powyższy zapiszemy jako

$$\varphi(x, y) = \alpha_z(y) - \alpha_z(x). \quad (9.74)$$

Lewa strona tej równości nie zależy od  $z$ , więc i prawa strona nie zależy od  $z$ , co zapiszemy w postaci

$$\varphi(x, y) = \alpha(y) - \alpha(x). \quad (9.75)$$

Funkcja  $\alpha(y)$  równa jest  $\alpha_z(y)$  z dokładnością do stałej addytywnej. Ostatecznie otrzymujemy zależność

$$G(x, y) = B(x) e^{-i\alpha(x)} B(y) e^{i\alpha(y)} = \bar{V}(x) V(y). \quad (9.76)$$

Załóżmy teraz, że znamy koherencje  $\langle a_k^* a_\ell \rangle$  pełnego pola kwantowego, przy czym

$$\langle a_k^* a_\ell \rangle = \bar{z}_k z_\ell \quad (9.77)$$

dla każdego  $k$  i  $\ell$  ( $k, \ell = 1, \dots$ ). Operatory  $a_k^*$ ,  $a_\ell$  są odpowiednio operatorami tworzenia i niszczenia dla pewnego pola oscylatorów. W związku z tym zachodzi nierówność  $\sum_{k=1}^{\infty} \bar{z}_k z_k < \infty$ , gdyż inaczej w rozważanym polu znajdowałyby się nieskończoność cząstek. Układ nieskończenie wielu cząstek zastąpić można jednym oscylatorem, opisanym przez operator  $b$ , gdzie

$$b = \sum_{\ell=1}^{\infty} u_\ell a_\ell = \sum_{\ell=1}^{\infty} \bar{z}_\ell a_\ell \left( \sum_{m=1}^{\infty} \bar{z}_m z_m \right)^{-1/2} \quad (9.78)$$

oraz

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \bar{u}_\ell u_\ell = \delta_{\ell k}.$$

Operatory  $b$  i odpowiednio zdefiniowany operator  $b^*$  spełniają te same relacje komutacji co operatory  $a_\ell^*$ ,  $a_\ell$ , gdyż

$$[b, b^*] = \sum_{\ell, k=1}^{\infty} u_\ell \bar{u}_k [a_\ell, a_k^*] = \sum_{\ell} u_\ell \bar{u}_\ell = 1. \quad (9.79)$$

Średnia wartość operatora ilości cząstek dla oscylatora  $b$  jest równa

$$\begin{aligned} \langle b^* b \rangle &= \sum_{\ell, k=1}^{\infty} u_\ell \bar{u}_k \langle a_\ell a_k^* \rangle \\ &= \sum_{\ell, k=1}^{\infty} u_\ell \bar{u}_k \bar{z}_k z_\ell = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{z}_m z_m > 0. \end{aligned} \quad (9.80)$$

Wprowadzamy teraz, oprócz modu  $b$ , nieskończenie wiele innych modów  $b_2, b_3, \dots$ , traktując wprowadzone wyżej  $b$  jako  $b_1$ , tzn.

$$b_n = \sum_{\ell=1}^{\infty} u_{n\ell} a_\ell, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.81)$$

Założmy, że  $\{u_{n\ell}\}$  jest transformacją unitarną, czyli

$$\sum_{\ell} u_{n\ell} \bar{u}_{m\ell} = \delta_{nm}.$$

W tym wypadku, oznaczając

$$z_\ell = \bar{z}_\ell \left( \sum_{\ell, k=1}^{\infty} \bar{z}_k z_\ell \right)^{-1/2} = \bar{u}_{\ell 1} \left( \sum_{\ell, k=1}^{\infty} \bar{z}_k z_\ell \right)^{-1/2},$$

obliczamy średnią  $\langle b_m^* b^n \rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle b_m^* b^n \rangle &= \sum_{k, \ell=1}^{\infty} \bar{u}_{mk} u_{n\ell} \langle a_k^* a_\ell \rangle \\ &= \sum_{k, \ell=1}^{\infty} \bar{u}_{mk} u_{n\ell} u_{1k} \bar{u}_{1\ell} \left( \sum_{r=1}^{\infty} \bar{z}_r z_r \right) = \delta_{m1} \delta_{n1} \left( \sum_{r=1}^{\infty} \bar{z}_r z_r \right), \end{aligned} \quad (9.82)$$

a stąd

$$\langle b_m^* b_n \rangle = 0 \quad (9.83)$$

dla  $m, n \neq 1$ . Innymi słowy, pole dysponuje tylko jednym modem efektywnym (obsadzonym), spełniającym warunek (9.80). Dla tego modu wprowadzamy stany

$$|\tilde{n}\rangle := (n!)^{-1/2} (b^*)^n |0\rangle. \quad (9.84)$$

Macierz gęstości  $\rho$  w reprezentacji  $|\tilde{n}\rangle$  postać

$$\rho = \sum_{n,m=0}^{\infty} |\tilde{n}\rangle \rho_{nm} \langle \tilde{m}|, \quad (9.85)$$

przy czym

$$\langle b^* b \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n \rho_{nn} = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{z}_k z_k > 0. \quad (9.86)$$

Wprowadźmy czynnik liczbowy

$$g_{n,m} = \frac{\langle b^{*n} b^m \rangle}{\langle b^* b \rangle^{(n+m)/2}} \quad (9.87)$$

oznaczający stosunek korelacji wyższego rzędu do odpowiedniej potęgi korelacji I rzędu. Jeśli stan pola jest stanem czystym (całkowicie koherentnym), wówczas  $g_{n,m} = 1$  dla dowolnych  $m$  i  $n$ .

Wykorzystując transformację

$$a_\ell = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{u}_{m\ell} b_m, \quad (9.88)$$

będącą odwróceniem transformacji (9.81), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \langle a_{k_1}^* \dots a_{k_n}^* a_{\ell_1} \dots a_{\ell_m} \rangle &= u_{k_1} \dots u_{k_n} \bar{u}_{\ell_1} \dots \bar{u}_{\ell_m} \langle b^{*n} b^m \rangle \\ &= \bar{z}_{k_1} \dots \bar{z}_{k_n} z_{\ell_1} \dots z_{\ell_m} \frac{\langle b^{*n} b^m \rangle}{(\sum_{p=1}^{\infty} z_p^* z_p)^{(n+m)/2}} \\ &= g_{n,m} (\bar{z}_{k_1} \dots \bar{z}_{k_n} z_{\ell_1} \dots z_{\ell_m}). \end{aligned} \quad (9.89)$$

Stąd otrzymujemy związek

$$\begin{aligned} G^{(n,m)}(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) \\ = g_{n,m} \prod_{k=1}^n \bar{V}(x_k) \prod_{\ell=n+1}^{n+m} V(x_\ell) \end{aligned} \quad (9.90)$$

zachodzący dla polas, w którym zadano koherencję I rzędu typu (9.62). Warunek 1-modowości pola odgrywa przy wyprowadzeniu związku (9.90) bardzo ważną rolę. Mieliśmy bowiem

$$\langle b_m^* b_n \rangle = 0$$

dla  $m, n \neq 1$  (p. (9.83). Załóżmy teraz, że zamiast  $\langle b_2^* b_2 \rangle = 0$  mamy warunek

$$\langle b_2^* b_2 \rangle = \varepsilon \ll 1. \quad (9.91)$$

Liczba  $\varepsilon$  może być dowolnie mała, np. niech  $\varepsilon = 10^{-137}$ . Macierz gęstości  $\rho$  spełnia teraz następujące warunki

$$\text{Tr } \rho = 1, \quad (9.92)$$

$$\text{Tr } (\rho b_2^* b_2) = \varepsilon, \quad (9.93)$$

które wyznaczają współczynniki  $\alpha, \beta$ , występujące w rozwinięciu

$$\rho = \alpha|0\rangle\langle 0| + \beta \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{1}{n_2^3} |\tilde{n}_2\rangle\langle \tilde{n}| \quad (9.94)$$

(p. (9.85). (Przy wyznaczaniu macierzy  $\rho$  na podstawie warunków (9.92) można by korzystać z zasady maksimum entropii). Macierz  $\rho$  wyznaczona przez (9.94) posiada następującą własność

$$\text{Tr}(\rho b_2^{*2} b_2^2) = -\varepsilon + \beta \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{1}{n_2} = \infty. \quad (9.95)$$

Widać stąd, że nawet niewiele różne od zera korelacje modów  $\langle b_m^* b_m \rangle$ ,  $m \geq 2$  powodują, że wynik (9.90) przestaje być słuszny.

Zauważmy, że przy obliczaniu średniej we wzorze (9.89) nic nie powiedziano o rozkładzie prawdopodobieństwa, z jakim liczono tę średnią. Zgodnie z duchem metody teorii informacyjnej, rozkład prawdopodobieństwa wyznaczony jest jednoznacznie przez zadane średnie, w tym wypadku - korelacje I rzędu. Średnia (9.89) jest więc średnią estymowaną z rozkładem prawdopodobieństwa reprezentatywnym dla makrostanu generowanego przez zbiór korelacji I rzędu. Jeśli np. założyć, że znany jest średni hamiltonian układu oscylatorów, oraz średnie ilości cząstek

$$\langle H \rangle = \left\langle \sum_k a_k^* a_k \epsilon_k \right\rangle, \quad n_k = \langle a_k^* a_k \rangle,$$

wówczas rozkład reprezentatywny dla makrostanu generowanego przez te średnie jest wielkim rozkładem kanonicznym typu

$$\rho = \frac{\exp[-\beta(\sum_k \epsilon_k a_k^* a_k - \mu \sum_k a_k^* a_k)]}{\text{Tr} \exp[-\beta(\sum_k \epsilon_k a_k^* a_k - \mu \sum_k a_k^* a_k)]}.$$

Dla średnich liczonych z tym rozkładem zachodzi tzw. twierdzenie Wicka-Blocha-de Dominicis:<sup>3</sup> Wartość średnia iloczynu operatorów kreacji i anihilacji  $\langle A_{k_1} A_{k_2} \dots A_{k_{2m}} \rangle$  jest równa sumie wszystkich możliwych zupełnych układów połączeń tego iloczynu. Jeżeli w iloczynie  $2m$  operatorów  $A_{k_1} A_{k_2} \dots A_{k_{2m}}$  wszystkie operatory są podzielone na grupy po dwa ze sobą połączone, tak że każdy operator wchodzi w skład jakiegoś połączenia (połączenie = średnia iloczynu 2 operatorów), to iloczyn wszystkich połączeń będziemy nazywali zupełnym układem połączeń iloczynu  $A_{k_1} A_{k_2} \dots A_{k_{2m}}$ . Na przykład dla układu 4 operatorów  $A_{k_1} A_{k_2} A_{k_3} A_{k_4}$  możliwe są 3 zupełne układy połączeń:  $\langle A_{k_1} A_{k_2} \rangle \langle A_{k_3} A_{k_4} \rangle$ ,  $\eta \langle A_{k_1} A_{k_3} \rangle \langle A_{k_2} A_{k_4} \rangle$ ,  $\langle A_{k_1} A_{k_4} \rangle \langle A_{k_2} A_{k_3} \rangle$  ( $\eta = +1$  dla operatorów opisujących pole bosonowe i  $\eta = -1$  dla operatorów opisujących pole fermionowe).

W rozważanym przypadku rozkładu prawdopodobieństwa estymowanego na makro stanie generowanym przez korelacje I rzędu, funkcje korelacyjne  $G^{(n,n)}$  zapiszemy w postaci

$$G^{(n,n)}(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_{2n}) = g_n \prod_{k=1}^n \bar{V}(x_k) \prod_{\ell=n+1}^{2n} V(x_\ell), \quad (9.96)$$

<sup>3</sup>G.C. Wick, Phys. Rev. **80**(1950),268.

C. Bloch, Nucl. Phys. **7**(1958), 459,

p. również J. Łopuszański i A. Pawlikowski, Fizyka statystyczna, PWN, Warszawa 1969, s. 376.]

gdzie

$$g_n := g_{n,n} = \frac{\langle b^{*n} b^n \rangle}{\langle b^* b \rangle^n} \geq 0. \quad (9.97)$$

Jesli  $g_n = 1$  dla  $n = 1, \dots, M$ , wówczas mówimy, że pole kwantowe posiada koherencję  $M$ -tego rzędu (pojęcie wprowadzone przez Glaubera). Jesli  $g_n = 1$  dla dowolnego  $n = 1, \dots$ , wówczas pole posiada całkowitą koherencję modułową (koherencja całkowita istnieje wtedy, gdy  $g_{n,m} = 1$  dla dowolnego  $n, m \geq 2$ ).

Rozważmy dla przykładu operator  $b^*b = \tilde{N}$ . Zgodnie z (6.68) mamy

$$g_n = \frac{\langle b^{*n} b^n \rangle}{\langle b^* b \rangle^n} = \frac{\langle \tilde{N}(\tilde{N}-1) \dots (\tilde{N}-n+1) \rangle}{\langle \tilde{N} \rangle^n} = \left\langle \frac{\tilde{N}!}{(\tilde{N}-n)!} \right\rangle \frac{1}{\langle \tilde{N} \rangle^n}. \quad (9.98)$$

Średnie występujące w (9.98) obliczymy dla 2 typów macierzy gęstości.

1. Niech  $\rho = |\tilde{m}\rangle\langle\tilde{m}|$ . Wówczas

$$g_n = \begin{cases} \frac{m!}{m^n(m-n)!} & \text{dla } n \leq m, \\ 0 & \text{dla } n > m \end{cases} \quad (9.99)$$

W tym stanie pola jest dokładnie  $m$  wzbudzeń. Dla skończonej liczby modów współczynniki  $g_n$  znikają poza pewnym  $m$ , więc pole nie może być całkowicie koherentne. Pole całkowicie koherentne zawierać musi dowolnie dużą (nieskończoną) ilość modów (fotonów).

2. Niech

$$\rho = \left( \text{Tr } e^{-\beta \tilde{N}} \right)^{-1} e^{-\beta \tilde{N}}. \quad (9.100)$$

Jest to rozkład reprezentatywny dla makrostanu generowanego przez  $\langle \tilde{N} \rangle$ . Oznaczmy

$\lambda = \exp(-\beta)$ . Wówczas

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left\{ \frac{\tilde{N}! e^{-\beta \tilde{N}}}{(\tilde{N}-n)!} \right\} &= \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \frac{m!}{(m-n)!} \\ &= \lambda^n \frac{d^n}{d\lambda^n} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m = \lambda^n \frac{d^n}{d\lambda^n} \frac{1}{1-\lambda} = \frac{n! \lambda^n}{(1-\lambda)^{n+1}}. \end{aligned} \quad (9.101)$$

Korzystając z tego wyniku mamy

$$\begin{aligned} \text{Tr } e^{-\beta \tilde{N}} &= (1-\lambda)^{-1}, \\ \text{Tr } e^{-\beta \tilde{N}} \tilde{N} &= \lambda \frac{d}{d\lambda} (1-\lambda)^{-1} = \lambda(1-\lambda)^{-2}. \end{aligned} \quad (9.102)$$

Ostatecznie więc, porównując (9.98), (9.101) i (9.102), otrzymujemy w przypadku 2:

$$g_n = (1-\lambda) \frac{n! \lambda^n (1-\lambda)^{-n-1}}{\lambda^n (1-\lambda)^{-n}} = n!. \quad (9.103)$$

Dyskutowany wyżej problem estymowania korelacji wyższego rzędu, jeśli znane są korelacje niższego rzędu, może być w ogólności rozwiązany przy użyciu metod teorii informacji.

Założmy teraz, że spełniony jest warunek

$$g_n = 1$$

dla każdego  $n$ , a więc warunek pełnej koherencji modułowej pola:

$$\langle b^{*n} b^n \rangle = \langle b^* b \rangle n.$$

Korzystamy z następujących związków:

$$\langle : e^{\lambda b^* b} : \rangle = \langle e^{\ln(1+\lambda) b^* b} \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} (1+\lambda)^m \rho_{mm}. \quad (9.104)$$

Stąd

$$\sum_{m=0}^{\infty} (1+\lambda)^m \rho_{mm} = e^{\lambda \langle b^* b \rangle}. \quad (9.105)$$

Otrzymaliśmy pewien szereg Taylora: współczynniki rozwinięcia  $\rho_{mm}$  obliczymy ze wzoru

$$\rho_{mm} = \frac{1}{m!} \frac{d^m}{d\lambda^m} e^{\lambda \langle b^* b \rangle} \Big|_{\lambda=1} = \frac{\langle b^* b \rangle^m}{m!} e^{-\langle b^* b \rangle}. \quad (9.106)$$

Oznaczając  $\langle b^* b \rangle = \mu$ , rozkład (9.106) zapiszemy w postaci

$$\rho_{mm} = \frac{\mu^m}{m!} e^{-\mu}. \quad (9.107)$$

Jest to rozkład Poissona. Na podstawie otrzymanego wyniku sformułować można następujący wniosek: Warunkiem koniecznym dla pełnej koherencji pola jest, by elementy diagonalne macierzy gęstości posiadały rozkład Poissona.

Otrzymane wyniki słuszne są w dużym stopniu na gruncie koherencji pola klasycznego. Zastępując funkcje  $G^{(n,m)}$  funkcjami  $\Gamma^{(n,m)}$ , warunek (9.105) zapiszemy jako

$$|\Gamma^{(1,1)}(x, y)|^2 = \Gamma^{(1,1)}(x, x) \Gamma^{(1,1)}(y, y), \quad (9.108)$$

natomiast faktoryzację (9.90) zapiszemy jako

$$\Gamma^{(n,m)}(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = \gamma_{n,m} \prod_{k=1}^n \bar{V}(x_k) \prod_{\ell=n+1}^{n+m} V(x_\ell) \quad (9.109)$$

dla pewnej funkcji  $V(x)$ . Współczynniki  $\gamma_{n,m}$ , będące odpowiednikami współczynników  $g_{m,n}$ , wyrażają się tu jako

$$\gamma_{n,m} = \frac{\langle \bar{v}^n v^m \rangle}{\langle \bar{v} v \rangle^{(n+m)/2}} \quad (9.110)$$

dla pewnej zmiennej losowej  $v$ . Dla  $n = m$  otrzymujemy

$$\gamma_{n,n} = \frac{\langle \bar{v}^n v^n \rangle}{\langle \bar{v} v \rangle^n} \geq 0. \quad (9.111)$$

W przypadku klasycznym współczynniki  $\gamma_n$  tworzą niemalejący ciąg

$$1 = \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \gamma_3 \leq \dots \gamma_n \leq \dots \quad (9.112)$$

Dla dowodu oznaczmy  $X = \bar{v}v$  i

$$\langle X^n \rangle := \int_0^\infty X^n \sigma(X) dX, \quad \text{gdzie} \quad \int_0^\infty \sigma(X) dX = 1.$$

Teraz  $\gamma_n = \langle X^n \rangle / \langle X \rangle^n$  i dalej

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} - \gamma_n &= \int_0^\infty \left( \frac{X}{\langle X \rangle} - 1 \right) \frac{X^n}{\langle X \rangle^n} \sigma(X) dX \\ &\geq \int_0^\infty \left( \frac{X}{\langle X \rangle} - 1 \right) \frac{X^n}{\langle X \rangle^n} \sigma(X) dX - \int_0^\infty \left( \frac{X}{\langle X \rangle} - 1 \right) \left( \frac{X^n}{\langle X \rangle^n} - 1 \right) \sigma(X) dX \\ &= \int_0^\infty \left( \frac{X}{\langle X \rangle} - 1 \right) \sigma(X) dX = 0. \end{aligned} \quad (9.113)$$

Stąd wynikają nierówności (9.112). Widać, że w przypadku klasycznym współczynniki  $\gamma_n$  mają zupełnie inne własności niż ich odpowiedniki kwantowe  $g_n$ . W polu kwantowym o skończonej liczbie cząstek  $g_n = 0$  dla  $n$  większego od pewnego  $m$ , co byłoby niemożliwe w wypadku klasycznym ze względu na nierówności (9.112).

Rozważmy jeszcze sprawę stopnia koherencji dla pola kwantowego. W wypadku klasycznym stopień koherencji określony jest wzorem (9.56) i spełnia nierówność  $0 \leq |\gamma| \leq 1$ . W teorii kwantowej podano różne propozycje określenia stopnia koherencji: Glauber<sup>4</sup> wprowadził funkcje

$$g_G^{(n)}(x_1, \dots, x_{2n}) = G^{(n,n)}(x_1, \dots, x_{2n}) \left\{ \prod_{k=1}^{2n} [G^{(1,1)}(x_k)]^{1/2} \right\}^{-1}. \quad (9.114)$$

Ze wzoru (9.61) wynika, że warunek  $|g_G^{(n)}(x_1, \dots, x_{2n})| = 1$  dla wszystkich argumentów i wwszystkich  $n$  zapewnia pełną koherentność pola. Wyrażenie (9.114) jest tak skonstruowane, że zerowanie się mianownika implikuje zerowanie się licznika. Mehta<sup>5</sup> wprowadził funkcje postaci

$$g_M^{(n)}(x_1, \dots, x_{2n}) = \frac{G^{(n,n)}(x_1, \dots, x_{2n})}{\left\{ \prod_{k=1}^{2n} G^{(n,n)}(x_k, x_k, \dots, x_k) \right\}^{n/2}}. \quad (9.115)$$

Aby ta wielkość była określona, pole powinno zawierać  $n$  lub więcej fotonów. Mehta pokazał, że jeżeli dla danego  $n (= n_0)$  i wszystkich argumentów zachodzi równość  $|g_M^{(n)}(x_1, \dots, x_{2n})| = 1$ , to równość ta zachodzi dla wszystkich  $n \geq n_0$  i dla wszystkich argumentów. Następnie Sudarshan<sup>6</sup> wprowadził współczynnik postaci

$$\begin{aligned} g_S^{(jn)}(x_1, \dots, x_{2n}) \\ = \frac{G^{(n,n)}(x_1, \dots, x_{2n})}{[G^{(n,n)}(x_1, \dots, x_n; x_n, \dots, x_1) G^{(n,n)}(x_{2n}, \dots, x_{n+1}; x_{n+1}, \dots, x_{2n})]^{1/2}}. \end{aligned} \quad (9.116)$$

<sup>4</sup>R.J. Glauber, "Quantum Optics and Electronics", ed. C. de Witt, A. Blandin, and C. Cohen Tannoudji, N.Y. 1964.

<sup>5</sup>C.L. Mehta, J. Math. Phys., 8 (1967), 1798.

<sup>6</sup>E.C.G. Sudarshan and N. Mukunda, J. Math. Phys. **20**, 1801 (1979).

Można pokazać, że zachodzi nierówność

$$0 \leq |g_S^{(n)}(x_1, \dots, x_{2n})| \leq 1$$

dla wszystkich  $n$  i wszystkich argumentów, dla których jest określone wyrażenie (9.116). Dla układów o nieokreślonej liczbie cząstek można rozważać również wyrażenie postaci

$$g^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{G^{(n,n)}(x_1, \dots, x_{2n})}{\prod_{k=1}^n G^{(1,0)}(x_k) \prod_{\ell=n+1}^{2n} G^{(0,1)}(x_\ell)}.$$

Dokładniejsza dyskusja stopnia koherencji znajduje się w wielokrotnie cytowanej przez nas monografii J. Klaudera i E.C.G. Sudarshana.

### 9.3 Rozkład prawdopodobieństwa rejestracji dla 1 modu

Do opisu modów używamy operatorów

$$\begin{aligned} a^*(t) &= a^* e^{i\omega t}, \\ a(t) &= a e^{-i\omega t}. \end{aligned} \tag{9.117}$$

Prędkości rejestracji fotonów, w I-szym rzędzie rachunku przybliżeń, są równe

$$\pi(p) = \alpha_0^p n \langle a^*(t_1) \dots a^*(t_p) a(t_p) \dots a(t_1) \rangle. \tag{9.118}$$

Współczynnik  $\alpha_0$  zdefiniowany jest jako

$$\alpha_0 = \frac{\alpha \hbar}{2\omega L^3}, \tag{9.119}$$

gdzie  $\alpha$  jest tzw. współczynnikiem efektywności kwantowej, związanym z momentem dipolowym atomu rejestrującego. Ze względu na (9.117) prędkość zliczeń nie zależy od argumentów czasowych:

$$\pi(p) = \alpha_0 \langle a^{*p} a^p \rangle. \tag{9.120}$$

Rozważamy proces, w którym zachodzi jednoczesna absorpcja  $p$  fotonów. By pole mogło "utracić"  $p$  fotonów, musi znajdować się w stanach  $p+1, p+2, \dots, p+n$  fotonowych. Prawdopodobieństwo tego, że pole znajduje się w stanie  $(p+n)$ -fotonowym, jest równe

$$P(p+n) = \text{Tr} \{ \rho |p+n\rangle \langle p+n| \}. \tag{9.121}$$

Spośród  $(p+n)$  fotonów wybrać można  $p$  fotonów na  $(p+n)!/n!$  sposobów, więc prędkość  $p$  zliczeń jest równa

$$\pi(p) = \alpha_0^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p+n)!}{n!} P(p+n). \tag{9.122}$$

Ze względu na (6.72) mamy

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} a^{*n} |0\rangle, \quad (9.123)$$

a stąd

$$\frac{\sqrt{(p+n)!}}{\sqrt{n!}} |p+n\rangle = \frac{(a^*)^{p+n}}{\sqrt{n!}} |0\rangle = a^{*p} |n\rangle \quad (9.124)$$

i dalej

$$\pi(p) = \alpha_0^p \sum_{n=0}^{\infty} \text{Tr} \{ \rho a^{*p} |n\rangle \langle n| a^p \} = \alpha_0^p \langle a^{*p} a^p \rangle, \quad (9.125)$$

tzn. otrzymaliśmy wynik (9.120).

Obliczymy teraz prawdopodobieństwo  $P(m, T)$  zarejestrowania  $m$  fotonów przez  $N$ -atomowy detektor w okresie  $(0, T)$ . Każdy z atomów detektora ma swą "czułość"  $s$  rzędu  $1/N$ . Prawdopodobieństwo tego, że  $p$  wybranych atomów zarejestruje w czasie  $T$   $p$  fotonów, jest równe

$$\begin{aligned} s^p \int_0^T \dots \int_0^T \langle a^{*p} a^p \rangle dt_1 \dots dt_p &= s^p T^p \langle a^{*p} a^p \rangle \\ &= \langle : (sT a^* a)^p : \rangle. \end{aligned} \quad (9.126)$$

Czas  $T$  spełniać musi warunek

$$\langle : (sT a^* a)^p : \rangle \ll 1. \quad (9.127)$$

Ze wzoru (9.126) wynika, że prawdopodobieństwo zdarzenia polegające na tym, żea  $(p-1)$  wybranych atomów absorbuje fotony, a jeden nie absorbuje, jest równe

$$\langle : (sT a^* a)^{p-1} : \rangle - \langle : (sT a^* a)^p : \rangle = \langle : (sT a^* a)^{p-1} (1 - sT a^* a) : \rangle. \quad (9.128)$$

Ogólnie, jeśli założymy, że  $(p-r)$  zadanych atomów pochłania fotony, a  $r$  nie pochłania, jest równe

$$\langle : (sT a^* a)^{p-r} (1 - sT a^* a)^r : \rangle. \quad (9.129)$$

Teraz można już obliczyć prawdopodobieństwo pochłonięcia  $m$  fotonów przez  $N$ -atomowy detektor.

Mianowicie

$$P(m, T) = \frac{N!}{(N-m)!m!} \langle : (sT a^* a)^m (1 - sT a^* a)^{N-m} : \rangle. \quad (9.130)$$

Przechodząc do granicy:  $N \rightarrow \infty$ ,  $s \rightarrow 0$ , tak, by  $Ns = \alpha_0 < \infty$ , otrzymujemy

$$P(m, T) = \left\langle : \frac{(\alpha_0 T a^* a)^m}{m!} e^{-\alpha_0 T a^* a} : \right\rangle. \quad (9.131)$$

Wynik ten przypomina rozkład Poissona, ale pod znakiem średniej występuje znak uporządkowania normalnego, w ogólności więc (9.131) nie musi być rozkładem Poissona. Obliczmy funkcję tworzącą

$$Q(\lambda, T) = \sum_{m=0}^{\infty} (1-\lambda)^m P(m, T)$$

$$\begin{aligned}
&= \left\langle : e^{-\alpha_0 T a^* a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[(1-\lambda)(\alpha_0 T a^* a)]^m}{m!} : \right\rangle \\
&= \left\langle : e^{-\alpha_0 T a^* a} e^{(1-\lambda)\alpha_0 T a^* a} : \right\rangle \\
&= \left\langle : e^{-\alpha_0 T a^* a} : \right\rangle = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^p}{p!} \alpha_0^p T^p \langle a^{*p} a^p \rangle \\
&= \left\langle e^{\ln(1-\lambda\alpha_0 T) a^* a} \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (1-\lambda\alpha_0 T)^n P(n).
\end{aligned} \tag{9.132}$$

Wykorzystano tu związek (8.81)

$$: e^{\tau a^* a} := e^{\ln(1+\tau) a^* a}.$$

$P(n)$  oznacza rozkład fotonów w określonym modzie. Funkcja  $P(m, T)$  ma określać prawdopodobieństwo, spełniać więc musi warunki

$$0 \leq P(m, T) \leq 1, \quad \sum_{m=0}^{\infty} P(m, T) = 1. \tag{9.133}$$

Jeśli  $0 \leq \lambda \leq 1$ , to również

$$0 \leq Q(\lambda, T) \leq 1 \tag{9.134}$$

dla każdego  $T$ . Rozważmy pole  $n_0$  fotonowe, takie że  $P(n_0) = 1, P(n) = 0$  dla  $n \neq n_0$ . Dla takiego pola, przy warunku  $0 \leq \lambda < 1$ , zachodzi nierówność

$$Q(\lambda, T) = (1 - \lambda\alpha_0 T)^{n_0} < 0,$$

jeśli czas  $T$  jest większy od  $(\lambda\alpha_0)^{-1}$ , tzn. dla

$$T > (\lambda\alpha_0)^{-1} \geq \alpha_0^{-1}. \tag{9.135}$$

Z nierówności (9.135) wynika ograniczenie na  $T$ : funkcja  $P(m, T)$  będzie miała własności prawdopodobieństwa, jeśli

$$T \leq \frac{1}{\alpha_0} = \frac{2\omega L^3}{\alpha \hbar} \tag{9.136}$$

(p. (9.119). Maksymalny możliwy czas  $T_{max}$  proporcjonalny jest do objętości wnęki kubicznej  $L^3$ . Przechodząc z  $L$  do nieskończoności również otrzymalibyśmy  $T_{max} \rightarrow \infty$ . Ograniczenie (9.136) wynika z istoty użytego tu w 1-szym przybliżeniu rachunku zaburzeń. Załóżmy np., że pole zawiera tylko 1 foton; wówczas

$$P(m, T) = P(m, T) = \left\langle 1 \left| : \frac{(\alpha_0 T a^* a)^m}{m!} e^{-\alpha_0 T a^* a} : \right| 1 \right\rangle, \tag{9.137}$$

a stąd

$$\begin{aligned}
P(0, T) &= 1 - \alpha_0 T, \\
P(1, T) &= \alpha_0 T, \\
P(2, T) &= 0, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{9.138}$$

Założyliśmy więc, że

$$\begin{aligned}\pi(1) &= \alpha_0 \langle a^* a \rangle = \alpha_0, \\ \pi(p) &= 0 \quad \text{dla } p \geq 2.\end{aligned}\tag{9.139}$$

Jest to wynik dobry przy założeniu, że do chwili pomiaru nie zarejestrowano żadnego fotonu.

Gdyby zarejestrowano wcześniej foton, wówczas zmieniłby się **stan pola**.

Chcąc stworzyć teorię dokładniejszą, należałoby przyjąć, że

$$P(0, T) = \text{''} \sum_t^{t+T} (1 - \alpha_0 dt) \text{''} = e^{-\alpha_0 T},\tag{9.140}$$

a stąd

$$P(1, T) = 1 - P(0, T) = 1 - e^{-\alpha_0 T},\tag{9.141}$$

co jest wynikiem niewątpliwie bardziej sensownym od (9.138), gdyż tutaj

$$0 \leq P(0, T) \leq 1,$$

$$0 \leq P(1, T) \leq 1$$

dla każdego T.

## Rozdział 10

# Teoria laserów gazowych

### 10.1 Wstęp

Dodatek niniejszy zawiera materiał wykładu monograficznego, prowadzonego przez autora dla studentów V r. fizyki i Studium Doktoranckiego w roku akadem. 1970/71. Wykład obejmuje teorię laserów w ujęciu W.E. Lamba.<sup>1</sup> Przedstawienie pracy Lamba, będącej jak dotąd najważniejszą próbą teoretycznego opisu zjawisk zachodzących w laserach, a następnie zreferowanie prac Riskena,<sup>2</sup> ma na celu stworzenie podstaw do rozwoju teorii laserów metodami termodynamiki informacyjnej.<sup>3</sup>

Przypominamy, że pierwsza praca teoretyczna na temat laserów ukazała się w r. 1958,<sup>4</sup> natomiast pierwszy laser (laser gazowy) skonstruowano w r. 1961.<sup>5</sup> Pierwsze prace Lamba dotyczące generatorów kwantowych ukazały się w r. 1960.<sup>6</sup> Prace te dotyczyły teorii maserów. Teoria ta została rozwinięta w pracy p.t. "Quantum Mechanical Amplifiers".<sup>7</sup> Prace <sup>6</sup> i <sup>7</sup> referowane są również w wykładach z Les Houches<sup>1</sup>.

Jako uzupełnienie wykładu polecamy następujący wybór pozycji dotyczących laserów.

#### Literatura

1. A. Yariv and V.P. Gordon, The Laser, Proc. IEEE, **51**(1963), 4-29.
2. H.A. Ellin, Laser System and Application, Pergamon Press, Oxford 1967.

---

<sup>1</sup>W.E. Lamb, jr., Phys. Rev., **134** (1964), 1429-1450, p. również monografia *Quantum Optics and Electronics*, Les Houches 1964, ed. C. de Witt, A. Blandin, and C. Cohen-Tannoudji, Gordon and Breach, Sc. Publ., N.Y.-London-Paris, 1965 (tłum. ros. Izd. Mir, Moskwa 1966).

<sup>2</sup>W. Risken, Fortschr.Phys., 16(1968), 261-308.

<sup>3</sup>p. R.S. Ingarden, Bull. Acad.Polon. Sci, Sér. Sci. Math. Astr.Phys., 19(1971), 77-82.

<sup>4</sup>A.L. Schavlov and C.H. Townes, Phys. Rev., **112**(1958), 1940.

<sup>5</sup>A. Javan, W.R. Bennet, and D.R. Harnot, Phys. Rev. Letters, **6** (1961), 106.

<sup>6</sup>W.E.Lamb and T.M. Sanders, Phys. Rev., 119 (1960), 1901 oraz L.R. Wilcox and W.E. Lamb, Phys.Rev., 119(1960), 1915.

<sup>7</sup>W.E. Lamb, Lect. in Theoret. Physics II, ed. Brittin and Downes, N.Y., 1960, s. 472.

3. Proceed. of the Symposium on Optical Optical Masers, New York 1963, ed. by J. Fox, Brooklyn N.Y., Polytechnic Press.
4. Physics of Quantum Electronics, ed. by P.L. Kelley, B. Lax, and P.E. Tannewald, Mc Graw Hill, New York 1963.
5. A.A. Vuylsteke, Elements of Maser Theory, Van Nostrand, New York 1963.
6. G. Troup, Masers and Lasers, Methuen, London 1959 (1 wyd.), 1968 (2 wyd.).
7. W.M. Fajn i Ja. U. Chanin, Kvantovaja radiofizika, Sov. Radio, Moskwa 1968.
8. E.F. Cilenko i Ju.M. Klimkov, Optičeskiye kvantovyje gieneratory, Sov. Radio, Moskwa 1968.
9. W.S. Maszkievich, Osnovy kinetiki izučenija mazerov, Nauk. Dumka, Kijew 1966.
10. B.A. Lengyel, Lasers, New York 1962, tłum polskie PWN, Warszawa 1954.
11. G. Birnbaum, Optical Masers, Academ. Press, N.Y. 1964.
12. A. Paul, Lasertheorie I, II, Akademie-Verlag, Berlin 1969.
13. L. Allen and D.G.C. Jones, Principles of Gas Lasers, Butterworths, London 1967 (tłum. ros. 1970).
14. A.E. Siegman, Mikrofalowe masery krystaliczne, WNT, Warszawa 1967.
15. H.G. Unger, Quantenelektronik, Einführung in die Grundlagen der Laser- and Masertechnik, Braunschweig 1968.
16. R.C. Smith, Lasers, Rozdz. XI w Solid State Biophysics, ed. by S.J. Wyard, Mc Graw Hill, N.Y. 1969, s. 362-408.
17. W.H. Louisell, Quantum Statistics of Attenuators and Laser Amplifiers, rozdz. VII w "Radiation and Noise in Quantum Electronics", Mc Graw Hill, N.Y., 1969, 2. 253-281.
18. J.R. Klauder and E.C.G. Sudarshan, Fundamentals of Quantum Optics, W.A. Benjamin, N.Y. - Amsterdam 1968, § 9.2 : Pnenomenologiczal Laser Models (s. 226-239) i § 9.3: Coupled-System Laser Model (s. 234-244).
19. R.J. Glauber, Optical Coherence and Photon Statistics, Les Houches 1964, s. 162-171 (p. odnośnik do pracy W.E. Lamba).
20. Lazery, sbornik statí, Izd. Innostr. Lit., Moskwa 1963.

21. W.H. Czernyszew, A.T. Saremetiew, W.W. Kodzew, Lasery w systemach łączności, Sviaz' 1966.
22. G.P. Mistel i W.A. Parygin, Metody modulacji i skalirowanija swieta, Izd. Nauka, Moskwa 1970, Čast II. Wnutrennije upravljenje lazernym izlučenijem, s. 232-275.
23. A.M. Rainer, Spektralnoje, prostranstviennyje i vremiennyje charakteristiki lazera, Nuk. Dumka, Kijew 1968.

## 10.2 Wstępne uwagi o oscylatorach

Do opisu laserów używać będziemy 2 typów oscylatorów: elektromagnetycznego, który jest scharakteryzowany współrzędną  $x$ , ładunkiem  $e$ , masą  $m$  i współczynnikiem sprężystości  $k$ , oraz "prądowego" (czyli obwodu drgającego), opisanego pojemnością  $C$ , indukcyjnością  $L$  i oporem  $R$ .

Rozważmy drgania obwodu elektrycznego, opisane równaniem

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = 0, \quad (10.1)$$

i załóżmy, że opór  $R$  zależy od natężenia  $I$  zgodnie ze wzorem

$$R = \frac{1}{\nu} (-\alpha + 4\beta I^2), \quad (10.2)$$

$\nu$  oznacza tu częstość kołową (zwykle oznaczaną przez  $\omega$ ), bliską częstości drgań własnych,  $\alpha$  i  $\beta$  - to dodatnie parametry. Zależnie od znamu  $R$  możliwe są 3 przypadki:

1.  $R < 0$ , wzmocnienie drgań (pompowanie),
2.  $R = 0$ , drgania swobodne z częstością  $\omega = (LC)^{-1/2}$ ,
3.  $R > 0$  drgania tłumione.

W przypadku ogólnym przedyskutować należy rozwiązania nieliniowego równania różniczkowego (10.1), które, uwzględniając (10.2), przepiszemy w postaci

$$\ddot{I} + \frac{1}{L\nu} \frac{1}{\nu} (-\alpha + 4\beta I^2) \dot{I} + \omega^2 I = 0. \quad (10.3)$$

Stosowane są dwie metody rozwiązywania równania typu (10.3), zwanego równaniem Van der Pola.. Pierwsza metoda zaproponowana przez Kryłowa i Bogolubowa,<sup>8</sup> polega na poszukiwaniu rozwiązania w postaci

$$I(t) = A(t) \cos[\nu t + \varphi(t)], \quad (10.4)$$

---

<sup>8</sup>p. np. N.N. Bogolubov i N.M. Krylov, Vvedenije w nielinejnuju mehaniku, Izd. AN USSR, Kijew 1937.

gdzie  $A$  i  $\varphi$  są wolnozmiennymi funkcjami czasu. W metodzie drugiej, zaproponowanej przez Van der Pola,<sup>9</sup> poszukujemy rozwiązania w postaci

$$I(t) = A(t) \cos \nu t + B(t) \sin \nu t, \quad (10.5)$$

gdzie  $A$  i  $B$  są wolnozmiennymi funkcjami czasu. W dalszym ciągu posłużymy się metodą Bogolubowa-Kryłowa-Mitropolskiego. Różniczkując wyrażenie (10.4) względem czasu, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -(\nu + \dot{\varphi})A \sin(\nu t + \varphi) + \dot{A} \cos(\nu t + \varphi), \\ \ddot{I} &= -(\nu + \dot{\varphi})^2 A \cos(\nu t + \varphi) - 2\nu \dot{A} \sin(\nu t + \varphi), \end{aligned} \quad (10.6)$$

przy czym opuszczono człony zawierające  $\ddot{\varphi}$ ,  $\ddot{A}$  i  $\dot{\varphi}\dot{A}$ , dzięki założeniu wolnozmienności  $\varphi$  i  $A$ . Korzystając z (10.2), otrzymujemy dalej

$$\begin{aligned} R\dot{I} &= \frac{1}{\nu} \left[ -\alpha + 4\beta A^2 \cos^2(\nu t + \varphi) \right] \left[ -\nu A \sin(\nu t + \varphi) \right. \\ &\quad \left. - \dot{\varphi} A \sin(\nu t + \varphi) + \dot{A} \cos(\nu t + \varphi) \right]. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Korzystając z tożsamości

$$\sin x \cos^2 x = \frac{1}{4}(\sin x + \sin 3x), \quad (10.8)$$

i opuszczając wyrażenie  $\sin 3x$  (gdyż nie interesują nas rozwiązania wyższe harmoniczne) oraz wyrazy  $\alpha\dot{\varphi}$ ,  $\beta\dot{\varphi}$ ,  $\alpha\dot{A}$  i  $\beta\dot{A}$ , otrzymujemy

$$R\dot{I} = (\alpha A - \beta A^3) \sin(\nu t + \varphi). \quad (10.9)$$

Podstawiając (10.9) do (10.1), otrzymujemy równanie

$$\begin{aligned} &A [-(\nu + \dot{\varphi})^2 + \omega^2] \cos(\nu t + \varphi) \\ &+ \frac{1}{L} [\alpha A - 2L\nu\dot{A} - \beta A^3] \sin(\nu t + \varphi) = 0. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Równanie (10.10) powinno być słuszne dla dowolnego  $t$ , więc współczynniki przy funkcjach trygonometrycznych powinny zniknąć:

$$(\nu + \dot{\varphi})^2 - \omega^2 = 0, \quad (10.11)$$

$$\alpha A - 2L\nu\dot{A} - \beta A^3 = 0, \quad (10.12)$$

przy czym nie rozważa się trywialnego rozwiązania  $A = 0$ . Równanie (10.11) nazywać będziemy **równaniem fazowym**. Równanie to całkuje się w sposób elementarny: biorąc rozwiązanie dodatnie równania

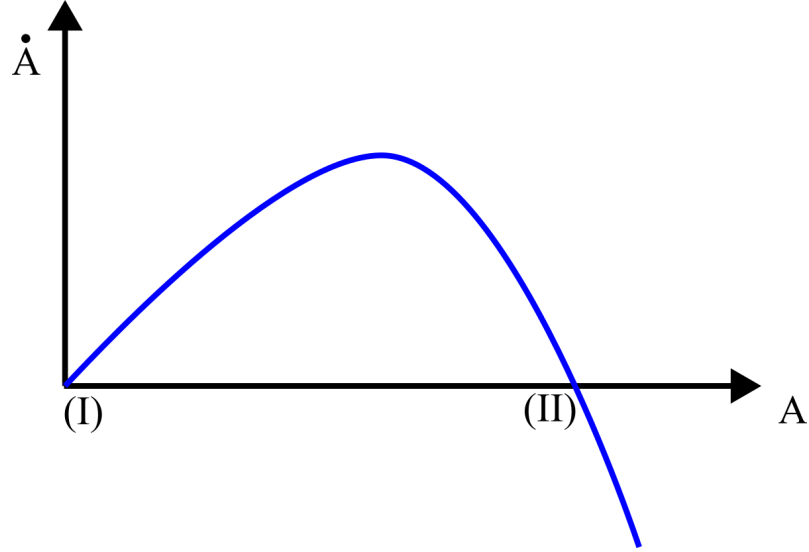
$$\nu + \dot{\varphi} = \omega, \quad (10.13)$$

otrzymujemy

$$\nu t + \varphi = \omega t + \varphi_0. \quad (10.14)$$

---

<sup>9</sup>B. Van der Pol, Proc. IRE, **22**(1934),1051.



Rysunek 10.1: Wykres funkcji  $\dot{A} = \dot{A}(A)$

Zachowanie się  $A(t)$  przedyskutujemy na podstawie zależności  $\dot{A}$  od  $A$ , wynikającej z (10.12):

$$\dot{A} = -\frac{\beta}{2L\nu}A^3 + \frac{\alpha}{2L\nu}A = \frac{1}{2L\nu}(-\beta A^2 + \alpha)A. \quad (10.15)$$

Wykres funkcji  $\dot{A} = \dot{A}(A)$  przedstawiony jest na rys. 10.1. Wykres  $\dot{A} = \dot{A}(A)$  posiada 2 miejsca zerowe, (I) :  $A = 0$ , oraz (II) :  $A = \sqrt{\alpha/\beta}$ . Punkt (I) nie jest punktem stacjonarności rozwiązań równania (10.12). Niech bowiem  $A$  niewiele różni się od zera, np.  $A = a \ll 1$ , tak że wielkość  $a^2$  można pominąć. Wtedy z (10.12) otrzymujemy

$$\dot{a} = \frac{\alpha}{2L\nu}a. \quad (10.16)$$

Stąd

$$a = C \exp\left(\frac{\alpha}{2L\nu}t\right), \quad (10.17)$$

gdzie  $C$  - pewna stała, więc  $A$  rośnie eksponencjalnie z czasem, dopóki słuszne jest przybliżenie  $a^2 \approx 0$ . Punktem stacjonarnym równania (10.12) jest punkt (II). Podstawmy bowiem

$$A = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + a, \quad (10.18)$$

gdzie  $a$  jest pewną liczbą małą, wówczas z (10.12) otrzymujemy

$$\dot{a} = -\frac{\alpha}{L\nu}a, \quad (10.19)$$

a stąd

$$A(t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (10.20)$$

Tak więc małe odchylenie od położenia (II) wywołuje powstanie tłumienia i układ będzie wykonywał drgania zgodnie z równaniem (10.20).

Dotychczas dyskutowaliśmy drgania układu zawierającego pojemność i samoindukcję, w którym opór elektryczny w pewien szczególny sposób zależał od natężenia prądu. Przechodzimy teraz do dyskusji klasycznego oscylatora elektromagnetycznego: elektronu w jakim potencjału. Równanie ruchu elektronu ma postać

$$m \ddot{x} = -m\omega^2 x, \quad (10.21)$$

gdzie  $x$  to współrzędna elektronu. Energia wypromieniowana przez elektron na jednostkę czasu (czyli moc promieniowania) wyraża się wzorem<sup>10</sup>

$$S = \frac{1}{3} \frac{e^2}{c^3} (\ddot{x})^2, \quad (10.22)$$

gdzie  $e$  oznacza ładunek elektronu, a  $c$  - prędkość światła. Tzw. siła reakcji pola, dążąca do zahamowania elektronu, jest równa

$$F_{reakcji} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{x}. \quad (10.23)$$

Założmy, że

$$\ddot{x} = -\omega^2 \dot{x}. \quad (10.24)$$

Równanie (10.21), zwane równaniem Lorentza, z uwzględnieniem siły (10.23), ma postać

$$m\dot{x} = -kx - \gamma m\dot{x}, \quad (10.25)$$

gdzie

$$\gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega^2}{mc^3} = \frac{2}{3} \frac{r_0 \omega}{c} = \frac{2}{3} \frac{r_0}{\tilde{\lambda}} \omega, \quad (10.26)$$

gdzie  $\tilde{\lambda} = c/\omega$  oraz  $r_0 = e^2/mc^2$ . Wielkość  $r_0$  zwana jest **klasycznym promieniem elektronu**. Rozwiązanie równania (10.25) ma postać

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t/2} \cos(\omega t + \theta). \quad (10.27)$$

Jeśli  $\gamma$  jest wielkością dostatecznie małą, wówczas drganie elektronu jest nietłumione (słabo tłumione). Biorąc transformatę Fouriera wyrażenia (10.27)

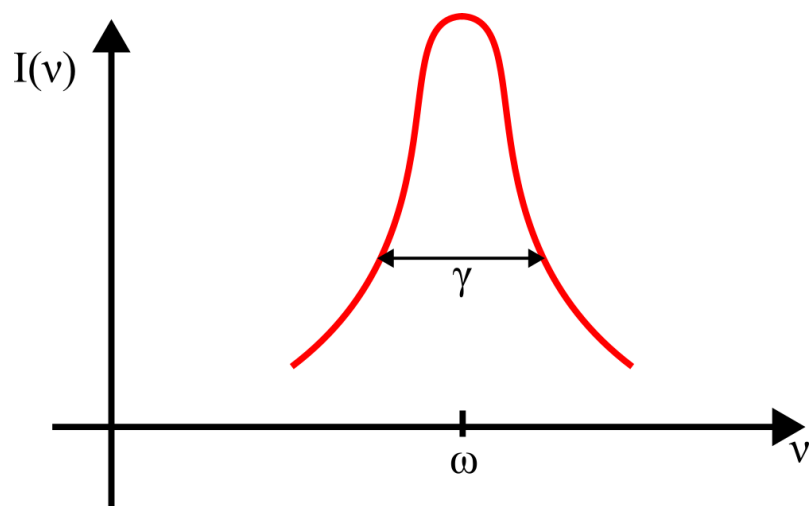
$$\begin{aligned} x(\nu) &= \frac{x_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dt e^{-\gamma t/2} \cos(\omega t + \theta) e^{-i\nu t} \\ &= \frac{1}{2} \frac{x_0}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{e^{-i\theta}}{\gamma/2 + i(\nu - \omega)} - \frac{e^{i\theta}}{\gamma/2 + i(\nu + \omega)} \right], \end{aligned} \quad (10.28)$$

i obliczając natężenie

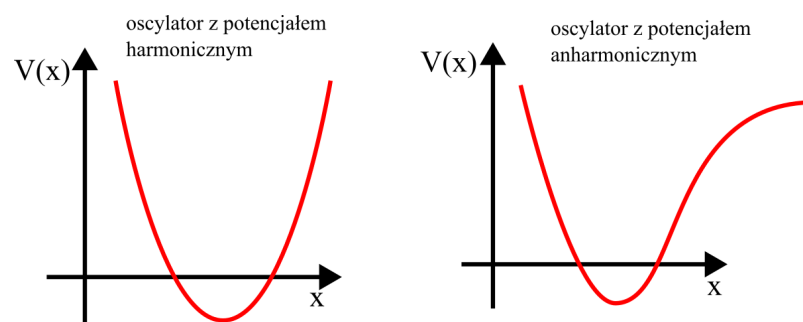
$$I(\nu) d\nu \propto |x(\nu)|^2 d\nu \propto \frac{\gamma}{2\pi} \frac{d\nu}{(\nu - \omega)^2 + (1/2)^2 \gamma^2}, \quad (10.29)$$

otrzymujemy wyrażenie na lorentzowski kształt linii widmowej (rys. 10.2) Pole, wypromieniowane przez atom opisywany przez oscylator z potencjałem anharmonicznym zawiera składowe harmoniczne  $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$  (p. rys.10.4

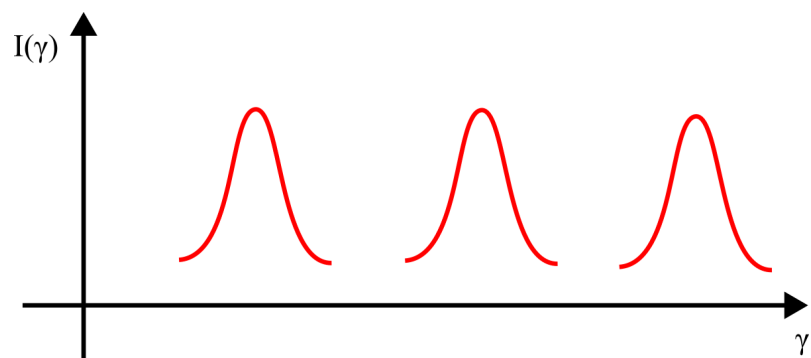
<sup>10</sup>p. np. W. Heitler, Kwantowa teoria promieniowania, PWN, Warszawa 1959, § 4 (s.40).



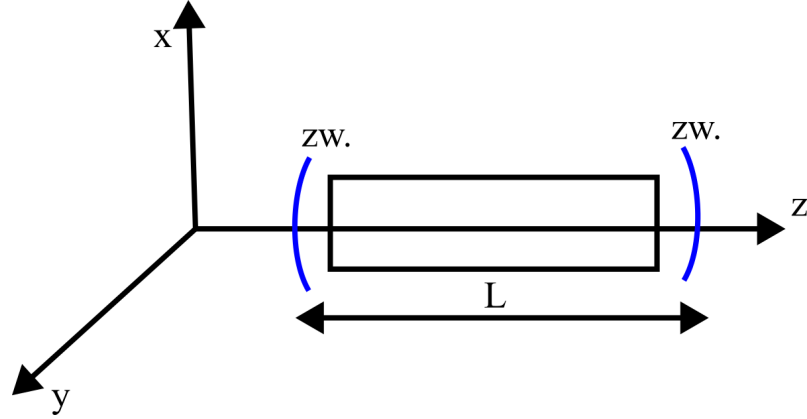
Rysunek 10.2: Lorentzowski kształt linii widmowej



Rysunek 10.3: Oscylator z potencjałem harmonicznym i anharmonicznym



Rysunek 10.4: Natężenie pola ze składowymi harmonicznymi  $\omega$ ,  $2\omega$ ,  $3\omega$



Rysunek 10.5: Schemat rezonatora

### 10.3 Teoria laserów. Pierwszy rząd rachunku zaburzeń

Modelem lasera będzie u nas rezonator, w którym znajduje się pewien ośrodek aktywny, oraz zadane jest pole elektromagnetyczne. W teorii Lamba pole elektromagnetyczne traktowane jest **klasycznie**, natomiast do atomów w rezonatorze stosuje się prawa mechaniki kwantowej. Działanie pola elektromagnetycznego na ośrodek powoduje powstanie polaryzacji, którą opisywać będzie wektor polaryzacji  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ . Z drugiej strony, zgodnie z równaniami Maxwella, polaryzacja jest źródłem pola elektromagnetycznego. W ten sposób powstaje "samouzgodnienie" - pole indukowane powinno być równe polu wyjściowemu. O atomach znajdujących się w rezonatorze zakładamy, że posiadają one jedynie dwa poziomy energetyczne  $a$  i  $b$ . Rozważany rezonator umieszczamy wzdłuż osi  $z$  układu. Rezonator ten jest wnęką otwartą o długości  $L$ . (p.rys. 10.5) rzędu 100 cm. Wnęka taka, jak wynika z rozważań Foka i Li,<sup>11</sup> posiada przeliczalną ilość quasimodów, czyli modów własnych o zespolonych wartościach własnych. Każdy quasi mod posiada pewien współczynnik straty (ucieczki), scharakteryzowany wskaźnikiem dobroci  $Q$ . Chodzi tu o straty energii przy odbiciach od zwierciadeł. Straty są małe, jeśli  $Q \rightarrow \infty$ . Spośród quasimodów wnęki największą dobroć posiadają mody o symetrii osiowej, rozłożone wzdłuż osi  $z$ , o częstościach kołowych

$$\Omega_n = \frac{\pi n c}{L}, \quad (10.30)$$

gdzie  $c$  - to prędkość światła, a  $n$  to tzw. wskaźnik modu. Dla modów optycznych bierze się  $n$  rzędu  $2 \times 10^6$ . Oprócz tych modów o maksymalnej dobroci istnieją mody nieparzyste, o mniejszej dobroci, o częstościach różniących się od częstości modów parzystych o ok. 1 MHz.

<sup>11</sup>A.G. Fox and T. Li, Bell. S.T. Journ., **40** (1961), 61.

### 10.3.1 Równania pola elektromagnetycznego

Równania Maxwella dla pola elektromagnetycznego we wnętrzu mają postać

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \end{aligned} \quad (10.31)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (10.32)$$

Jeśli chodzi o równanie  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ , to rzeczywistego prądu nie ma, natomiast  $\sigma$  związane jest ze współczynnikiem dobroci  $Q$  i wyraz  $\sigma \mathbf{E}$  opisuje straty energii, np. na zwierciadłach itd. Za pomocą prostych przekształceń z układu równań (10.31-10.32) otrzymujemy równanie falowe

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \quad (10.33)$$

Ze względu na symetrię urządzenia laserowego (p. rys. 10.5) interesować nas będzie jedynie  $z$ -owa składowa operatora  $\operatorname{rot} \operatorname{rot}$ :  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \rightarrow -\partial E^2 / \partial z^2$ , gdzie  $E$  oznacza poprzeczną składową wektora  $\mathbf{E}$ . Składowe  $\partial^2 / \partial y^2, \partial^2 / \partial x^2$  pomijamy. Pola  $E$  i  $P$  rozkładamy na funkcje modów własnych:

$$E(z, t) = \sum_n A_n(t) U_n(z), \quad (10.34)$$

$$P(z, t) = \sum_n P_n(t) U_n(z), \quad (10.35)$$

$$P_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L dz P(z, t) \sin K_n z. \quad (10.36)$$

$U_n(z)$  jest funkcją własną modu (nie znormalizowaną)

$$U_n(z) = \sin K_n z, \quad (10.37)$$

gdzie  $K_n$  jest liczbą falową modu

$$K_n = \frac{n \pi}{L} = \frac{\Omega_n}{c}, \quad (10.38)$$

$n$  - duża liczba dodatnia,  $\Omega_n$  - częstość  $n$ -tego modu. Wstawiając rozwinięcia (10.34)-(10.36) do równania (10.33), otrzymujemy równanie na amplitudy  $A_n$  i  $P_n$

$$\frac{d^2 A_n}{dt^2} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{dA_n}{dt} + \Omega_n^2 A_n = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{d^2 P_n(t)}{dt^2}. \quad (10.39)$$

Równanie (10.39) jest zwykłym równaniem oscylatora harmonicznego tłumionego. Dalsze przybliżenie polega na tym, że fazę  $P_n(t)$  traktujemy jako monochromatyczną o częstości kołowej  $\nu$ , przy czym  $\nu \sim \Omega_n \sim \omega$  ( $\nu$  - częstość fali wychodzącej,  $\Omega_n$  - częstość modów wnętrza,  $\omega$  - częstość rezonansowa atomu). Przy założeniu monochromatyczności  $P_n(t)$ :

$$\frac{\partial^2 P_n(t)}{\partial t^2} \sim \nu^2 P_n(t). \quad (10.40)$$

Przewodność  $\sigma$  określona jest wzorem

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 \nu}{Q_n}. \quad (10.41)$$

Po uwzględnieniu (10.40) i (10.41) równanie (10.39) przybiera postać

$$\frac{d^2 A_n}{dt^2} + \frac{\nu}{Q_n} \frac{d A_n}{dt} + \Omega_n^2 A_n = \frac{\nu^2}{\epsilon_0} P_n. \quad (10.42)$$

W zwykłym laserze odstęp między modami  $\Delta$  jest rzędu 150 MHz i jest znacznie większy od szerokości linii modu rezonatora  $\nu/Q_n$ , która jest rzędu 1 MHz.

Rozwiązania równania (10.42) poszukujemy w postaci

$$A_n(t) = E_n(t) \cos[\nu_n t + \varphi_n(t)], \quad (10.43)$$

$$P_n(t) = C_n(t) \cos[\nu_n t + \varphi_n(t)] + S_n(t) \sin[\nu_n t + \varphi_n(t)] \quad (10.44)$$

gdzie  $E_n(t)$ ,  $\varphi_n(t)$ ,  $C_n(t)$  i  $S_n(t)$  - to wolnozmiennne funkcje czasu.  $C_n$  nazywamy **współczynnikiem kwadratury**, a  $S_n$  **współczynnikiem fazowym**. Niewiadomymi są  $E_n(t)$ ,  $\varphi_n(t)$ ,  $C_n(t)$ ,  $S_n(t)$  i częstości  $\nu_n$ . Obliczając pochodne czasowe wyrażenia (10.43) i odrzucając człony zawierające drugie pochodne, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \dot{A}_n &= \dot{E}_n \cos(\nu_n t + \varphi_n) - E_n(\nu_n + \dot{\varphi}_n) \sin(\nu_n t + \varphi_n), \\ \ddot{A}_n &= -2\dot{E}_n(\nu_n + \dot{\varphi}_n) \sin(\nu_n t + \varphi_n) - E_n(\nu_n + \dot{\varphi}_n)^2 \cos(\nu_n t + \varphi_n) \\ &= -2\dot{E}_n(\nu_n + \dot{\varphi}_n) \sin(\nu_n t + \varphi_n) - E_n(\nu_n^2 + 2\dot{\varphi}_n \nu_n) \cos(\nu_n t + \varphi_n). \end{aligned} \quad (10.45)$$

Podstawiając (10.45) i (10.44) do równania (10.42) i porównując czynniki przy funkcjach sinus i cosinus (zgodnie z naszymi założeniami  $(\nu_n + \dot{\varphi}_n)$ ), otrzymujemy następujący układ równań:

$$(\nu_n + \dot{\varphi}_n - \Omega_n) E_n = -\frac{1}{2} \frac{\nu}{\epsilon_0} C_n, \quad (10.46)$$

$$\dot{E}_n + \frac{1}{2} \frac{\nu}{Q_n} E_n = -\frac{1}{2} \frac{\nu}{\epsilon_0} S_n. \quad (10.47)$$

### 10.3.2 Polaryzacja ośrodka

Układ atomowy znajdujący się w rezonatorze, to po prostu gaz o pewnej temperaturze (dyskutujemy teorię laserów gazowych).

Atomy gazu poruszają się z pewną prędkością  $\mathbf{v}$ , więc jeśli w chwili  $t_0$  atom był w punkcie  $\mathbf{r}_0$ , to w chwili  $t > t_0$  będzie w punkcie  $\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}(t - t_0)$  (jeśli pomijamy zderzenia). Rozważane atomy we wnęce posiadają 2 stany energetyczne  $a$  i  $b$ , więc funkcję falową atomu przedstawić można jako kombinację liniową:

$$|\psi\rangle = a(t)|a\rangle + b(t)|b\rangle, \quad (10.48)$$

przy czym

$$|a|^2 + |b|^2 = 1, \quad \langle a|a\rangle = 1, \quad \langle b|b\rangle = 1.$$

Jeśli moment dipolowy atomu oznaczmy przez  $\mathcal{D}$ , przy czym

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & \wp \\ \wp & 0 \end{pmatrix},$$

wówczas element macierzowy przejścia między stanami  $a$  i  $b$  jest równy

$$\wp = \langle a | \mathcal{D} | b \rangle. \quad (10.49)$$

Jeśli na atomy we wnęce działa pole  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ , to w chwili  $t > t_0$  działać będzie pole  $\mathbf{E}[\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}(t - t_0), t]$ .

Oddziaływanie pola z atomem określa związek

$$\hbar V(t) = -\wp \mathbf{E}[\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}(t - t_0), t], \quad (10.50)$$

natomiast średnia wartość operatora momentu dipolowego jest w tym wypadku równa

$$\langle \psi | \mathcal{D} | \psi \rangle = (\bar{a}b + a\bar{b})\wp, \quad (10.51)$$

$\wp$  jest rzeczywiste. Składowe  $a(t)$  i  $b(t)$  spełniają równania

$$\begin{aligned} i\ddot{a} &= W_a a + V(t)b - \frac{1}{2}i\gamma_a a \\ i\ddot{b} &= W_b b + V(t)a - \frac{1}{2}i\gamma_b b, \end{aligned} \quad (10.52)$$

gdzie  $\gamma_a$  i  $\gamma_b$  są pewnymi stałymi współczynnikami fenomenologicznymi:  $1/\gamma_a$  i  $1/\gamma_b$  - to czasy życia atomu na poziomach  $a$  i  $b$ ,  $\hbar W_a$  i  $\hbar W_b$  - to niezaburzone energie stanów  $a$  i  $b$ , a element macierzowy  $V(t)$  dany jest przez (10.50).

Atom opisany jest funkcją falową (10.48), można również opisywać macierzą gęstości  $\rho$ :

$$\rho(a, \mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{v}, t) = \begin{pmatrix} |a|^2 & a\bar{b} \\ \bar{a}b & |b|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{aa} & \rho_{ab} \\ \rho_{ba} & \rho_{bb} \end{pmatrix}, \quad (10.53)$$

która spełnia następujące równanie ruchu<sup>12</sup>

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho] - (1/2)(\Gamma\rho + \rho\Gamma), \quad (10.54)$$

gdzie  $\Gamma$  jest macierzą tłumienia

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_a & 0 \\ 0 & \gamma_b \end{pmatrix}, \quad (10.55)$$

natomiast  $H$  oznacza hamiltonian układu,

$$H = \begin{pmatrix} W_a & V(t) \\ V(t) & W_b \end{pmatrix}. \quad (10.56)$$

---

<sup>12</sup>Formalne rozwiązanie r. (10.54) ma postać  $\rho(t) = S(t)\rho(0)S^\dagger(t)$  przy czym  $S(t) = T \exp[-i \int_{-\infty}^t (H(t') - \Gamma/2) dt']$ , gdzie  $T$  oznacza operator uporządkowania chronologicznego. Ponieważ  $S$  nie jest operatorem unitarnym, zatem również r. (10.54) nie zachowuje śladu.

Czynnik  $-(1/2)(\Gamma\rho + \rho\Gamma)$ , występujący w równaniu (10.54) i zwany **operatorem dyssypacyjnym** (lub dyssypatywnym), jest czynnikiem odpowiedzialnym za nieodwracalność i powodującym stochastyczne przejścia do stanu podstawowego. Założenie, że macierz gęstości zmienia się w sposób określony przez równanie (10.54) (równanie von Neumanna + czynnik nieodwracalny), jest istotnym punktem teorii Lamba.

Jako stan początkowy dla ewolucji określonej przez (10.54) wybieramy stan

$$\rho(a, \mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{v}, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.57)$$

Średnia wartość momentu dipolowego  $\mathcal{D}$  jest równa

$$\langle \mathcal{D} \rangle = \wp(\rho_a + \rho_b). \quad (10.58)$$

Dla obliczenia polaryzacji  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  (wielkości makroskopowej) podsumować należy przyczynki pochodzące od wszystkich atomów znajdujących się w stanie  $a$  i w chwili  $t$  będących w punkcie  $\mathbf{r}$  i analogiczne przyczynki pochodzące od atomów w stanie  $b$ . Oznaczając przez  $\lambda_\alpha(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{v})$  liczbę atomów wzbudzonych do stanów  $\alpha = a, b$  w jednostce czasu przypadających na jednostkową objętość oraz jednostkowy interwał prędkości, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) &= \wp \sum_{\alpha=a, b} \int_{-\infty}^t dt_0 \int d\mathbf{r}_0 \int d\mathbf{v} \lambda_\alpha(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{v}) \\ &\times [\rho_{ab}(\alpha, \mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{v}, t) + \rho_{ba}(\alpha, \mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{v}, t)] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \mathbf{v}(t - t_0)). \end{aligned} \quad (10.59)$$

Po przecalkowaniu po  $d\mathbf{r}_0$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) &= \wp \sum_{\alpha=a, b} \int_{-\infty}^t dt_0 \int d\mathbf{v} \lambda_\alpha(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{v}) \\ &\times [\rho_{ab}(\alpha, \mathbf{r} - \mathbf{v}(t - t_0), t_0, \mathbf{v}, t) + \text{c.c.}], \end{aligned} \quad (10.60)$$

skrót c.c. oznacza człony zespolone sprzężone (od ang. *complex conjugated*). Używać również będziemy macierzy gęstości, opisującej atomy, które w chwili  $t$  znajdują się w punkcie  $\mathbf{r}$  i posiadają prędkość  $\mathbf{v}$ , niezależnie od  $\mathbf{r}_0, t_0$  i ich stanów wzbudzenia  $\alpha = a, b$ . Oznaczając tę macierz przez  $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  mamy

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= \sum_{\alpha=a, b} \int_{-\infty}^t dt_0 \int d\mathbf{r}_0 \int d\mathbf{v} \lambda_\alpha(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{v}) \\ &\times \rho(\alpha, \mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{v}, t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \mathbf{v}t + \mathbf{v}t_0). \end{aligned} \quad (10.61)$$

### 10.3.3 Całkowanie równań ruchu

Rozpisując równanie ruchu (10.54) na odpowiednie składowe, otrzymujemy

$$\dot{\rho}_{ab} = -i\omega\rho_{ab} - \gamma_{ab}\rho_{ab} + iV(t)(\rho_{aa} - \rho_{bb}),$$

$$\dot{\rho}_{aa} = -\gamma_a \rho_{aa} + iV(t)(\rho_{ab} - \rho_{ba}), \quad (10.62)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{bb} &= -\gamma_b \rho_{bb} - iV(t)(\rho_{ab} - \rho_{ba}), \\ \rho_{ba} &= \bar{\rho}_{ab}, \end{aligned} \quad (10.63)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \gamma_{ab} &= \frac{1}{2}(\gamma_a + \gamma_b), \\ \omega &= W_a - W_b > 0. \end{aligned} \quad (10.64)$$

Rozpatrzmy na początek przypadek, kiedy  $t = t_0, \rho_{aa} = 1, \rho_{bb} = \rho_b = \rho_{ba} = 0$ . Rozwiązanie w dowolnym rzędzie rachunku zaburzeń otrzymujemy metodą iteracji. W zerowym przybliżeniu mamy

$$\rho_{aa}^{(0)}(a, \mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{v}, t) = \exp[-\gamma_a(t - t_0)], \quad (10.65)$$

w pierwszym rzędzie

$$\begin{aligned} \rho_{aa}^{(1)}(a, \mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{v}, t) \\ = i \int_{t_0}^t dt' V(t') \exp[(\gamma_{ab} + i\omega)(t' - t) + \gamma_a(t_0 - t')], \end{aligned} \quad (10.66)$$

w trzecim rzędzie

$$\begin{aligned} \rho_{aa}^{(3)}(a, \mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{v}, t) &= i \int_{t_0}^t dt' V(t') [\rho_{aa}^{(2)}(a, \mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{v}, t') \\ &- \rho_{bb}^{(2)}(a, \mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{v}, t)] \exp[(\gamma_{ab} + i\omega)(t' - t)], \end{aligned} \quad (10.67)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \rho_{aa}^{(2)}(a, \mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{v}, t') &= - \int_{t_0}^{t'} dt'' \int_{t_0}^{t''} dt''' V(t'') V(t''') \\ &\times \{ \exp[\gamma_a(t'' - t') + (\gamma_{ab} + i\omega)(t''' - t'') + \gamma_a(t_0 - t''')] + \text{c.c} \} \end{aligned} \quad (10.68)$$

i

$$\begin{aligned} \rho_{bb}^{(2)}(a, \mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{v}, t') &= \int_{t_0}^{t'} dt'' \int_{t_0}^{t''} dt''' V(t'') V(t''') \\ &\times \{ \exp[\gamma_b(t'' - t') + (\gamma_{ab} + i\omega)(t''' - t'') + \gamma_a(t_0 - t'')] + \text{c.c} \}. \end{aligned} \quad (10.69)$$

## 10.4 Pierwszy rząd rachunku zaburzeń

Dla wyznaczenia polaryzacji  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  obliczyć trzeba całkę

$$\rho_{aa}^{(1)}(a, \mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \int_{-\infty}^t dt_0 \rho_{ab}^{(1)}(a, \mathbf{r}_0 = \mathbf{r} - \mathbf{v}t + \mathbf{v}t_0, t_0, \mathbf{v}, t). \quad (10.70)$$

W powyższym równaniu zaburzenie  $V(t')$  oddziałuje na atom, scharakteryzowany wielkościami  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} - \mathbf{v}t + \mathbf{v}t_0, t_0, \mathbf{v}, t_0$ . Dla tych argumentów zaburzenie

$$V(t') = -\frac{\mathcal{Q}}{\hbar} \mathbf{E}(\mathbf{r} - \mathbf{v}(t - t'), t') \quad (10.71)$$

nie zależy od  $t_0$ , więc można w (10.70) wyciągnąć po  $t_0$  i podstawić  $\lambda_a = \lambda_a(t = t_0)$  (przy założeniu że  $\lambda_a$  jest wolnozmienną funkcją  $t_0$ ). Rozpatrujemy teraz wyrażenie typu

$$\int_{-\infty}^t dt_0 \int_{t_0}^t dt' F(t, t') \exp[\gamma_a(t_0 - t')], \quad (10.72)$$

charakterystyczne dla I-go rzędu rachunku zaburzeń. Zamieniając w (10.72) porządek całkowania, otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt_0 F(t, t') \exp[\gamma_a(t_0 - t')] \\ &= \frac{1}{\gamma_a} \int_{-\infty}^t dt' F(t, t'). \end{aligned} \quad (10.73)$$

Zakładamy obecnie, że generacja promieniowania laserowego zachodzi na  $M$  modach rezonatora, tak że

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mu=1}^M \mathbf{E}_{\mu}(t) U_{\mu}(\mathbf{r}) \cos\left(\nu_{\mu}t + \varphi_{\mu}(t)\right), \quad (10.74)$$

gdzie  $\mathbf{E}_{\mu}(t)$  i  $\varphi_{\mu}(t)$  są wolnozmiennymi funkcjami czasu. Wstawiając (10.74) do (10.71) i (10.66) i pomijając wyrażenia zawierające exponenty typu  $\exp[i(\omega + \nu_u)t']$ , otrzymujemy

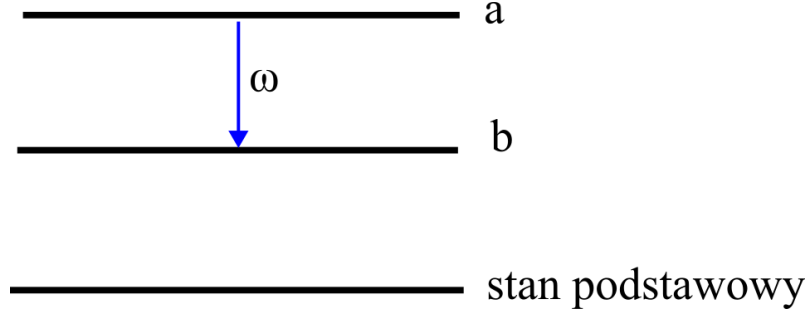
$$\begin{aligned} \rho_{ab}^{(1)}(a, \mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= -\frac{1}{2} i \frac{\mathcal{Q}}{\hbar} \frac{\lambda_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\gamma_a} \sum_{\mu=1}^M \int_{-\infty}^t dt' \mathbf{E}_{\mu}(t') U_{\mu}(\mathbf{r} - \mathbf{v}(t - t')) \\ &\times \exp[-i(\nu_{\mu}t + \varphi_{\mu}(t'))] \exp[-\gamma_{ab} + i(\nu_{\mu} - \omega)](t - t'). \end{aligned} \quad (10.75)$$

Zakładając dalej, że  $\mathbf{E}_{\mu}(t')$  i  $\varphi_{\mu}(t')$  nie zmieniają się zbytnio w czasie  $1/\gamma_a$ , można uznać je za stałe i równe swym wartościom w chwili  $t$ . Podstawiając  $\tau' = t - t'$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} \rho_{ab}^{(1)}(a, \mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= -\frac{1}{2} i \frac{\mathcal{Q}}{\hbar} \frac{\lambda_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\gamma_a} \sum_{\mu=1}^M \mathbf{E}_{\mu}(t) \exp\{-i[\nu_{\mu}t + \varphi_{\mu}(t)]\} \\ &\times \int_0^{\infty} d\tau' U_{\mu}(\mathbf{r} - \mathbf{v}\tau') \exp\{-[\gamma_{ab} + i(\omega - \nu_{\mu})]\tau'\}. \end{aligned} \quad (10.76)$$

Odpowiednio polaryzacja ośrodka w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń jest równa

$$\begin{aligned} P^{(1)}(a, \mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= -\frac{i}{2} \frac{\mathcal{Q}^2}{\hbar} \frac{\lambda_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\gamma_a} \sum_{\mu=1}^M \mathbf{E}_{\mu}(t) \left\{ \exp[-i(\nu_{\mu}t + \varphi_{\mu})] \right. \\ &\times \left. \int_0^{\infty} d\tau' U_{\mu}(\mathbf{r} - \mathbf{v}\tau') \exp\{-[\gamma_{ab} + i(\omega - \nu_{\mu})]\tau'\} \right\} + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (10.77)$$



Rysunek 10.6: Przejścia ze stanu  $a$  do  $b$

Funkcje  $\lambda_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  ( $\alpha = a, b$ ) przedstawić można w postaci

$$\lambda_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = W(\mathbf{v})\Lambda_a(\mathbf{r}, t), \quad \alpha = z, b, \quad (10.78)$$

gdzie  $W(\mathbf{v})$  jest pewną funkcją rozkładu prędkości atomów (np. rozkład typu Maxwella), a  $\Lambda_\alpha(\mathbf{r}, t)$  jest liczbą atomów wzbudzonych do stanu  $\alpha$  w jednostce czasu i jednostce objętości. Ponieważ założyliśmy, że pole  $\mathbf{E}$  zależy tylko od jednej współrzędnej  $z$ , więc zamiast  $W(\mathbf{v})$  rozważać będziemy  $W(v)$ , gdzie  $v$  jest zetową składową prędkości  $\mathbf{v}$ . Odpowiednio, zamiast  $\mathbf{r}$  będziemy mieli  $z$ . W wypadku atomów, znajdujących się w stanie  $b$ , sytuacja nieco się komplikuje, bowiem jednym ze sposobów wzbudzenia do stanu  $b$  są spontaniczne przejścia ze stanu  $a$  (p. rys. 10.6). Zjawisko to uwzględnić można, zastępując  $\lambda_b(z, v, t)$  przez  $\lambda_b(z, v, t) + f[\gamma_{ab}\rho_a(z, v, t)]$ , przy czym  $f$  jest tzw. **czynnikiem rozwidlenia**:

$$f = \frac{p(a \rightarrow b)}{p(a \rightarrow b) + p(a \rightarrow 0)},$$

$p(a \rightarrow b)$  oznacza prawdopodobieństwo przejść ze stanu  $a$  do stanu  $b$ . Dla prostoty przyjmuje się, że  $f = 0$ . W tej sytuacji polaryzacja  $\mathbf{P}(b, z, v, t)$  atomów znajdujących się w stanie  $b$  wyrazi się w sposób analogiczny do (D2.44), z tym, że trzeba zamienić miejscami indeksy  $a$  i  $b$ . Całkowita polaryzacja

$$\mathbf{P}(z, v, t) = \mathbf{P}(a, z, v, t) + \mathbf{P}(b, z, v, t)$$

proporcjonalna będzie do wielkości

$$N(z, t) = \frac{\Lambda_a(z, t)}{\gamma_a} - \frac{\Lambda_b(z, t)}{\gamma_b}, \quad (10.79)$$

którą nazywa się gęstością wzbudzenia (względnie inwersją populacji). Polaryzacja  $\mathbf{P}^{(1)}(z, t)$  wyrazi się teraz jako

$$\mathbf{P}^{(1)}(z, t) = \oint_{-\infty}^{\infty} dv W(v) \left[ \rho_{ab}^{(1)}(a, z, v, t) + \rho_{ab}^{(1)}(b, z, v, t) + \text{c.c.} \right]. \quad (10.80)$$

Znaleźć teraz musimy składową polaryzacji odpowiadającą  $n$ -temu modowi rezonatora (wnęki):

$$\mathbf{P}(t) = \frac{2}{L} \int_0^L dz \mathbf{P}^{(1)}(z, t) U_n(z). \quad (10.81)$$

W (10.81) pojawi się wyrażenie typu  $U_n(z)U_\mu(z - vt')$ , które może być zapisane jako

$$\begin{aligned} \sin K_n z \sin K_\mu(z - vt') &= \frac{1}{2} \cos \{(L_n - K_\mu)z + K_\mu v\tau'\} \\ &- \frac{1}{2} \cos \{(K_n + K_\mu)z - K_\mu v\tau'\}, \end{aligned} \quad (10.82)$$

p równieŹ (10.36) i (10.37). Drugi człón w wyrażeniu (10.82) jest wyrażeniem szybko zmiennym, ponadto rozkład  $W(v)$  jest na ogół parzystą funkcją prędkości, tak więc z (10.82) istotny wkład do całkowania da wyraz

$$\frac{1}{2} \cos [(L_n - K_\mu)z] \cos K v \tau'.$$

Opuszczając indeks  $\mu$  (wszystkie rozpatrywane mody mają zbliŹone liczby falowe  $K = v/c$ ), otrzymujemy następujące wyrażenie na polaryzację

$$\begin{aligned} P_n^{(1)}(t) &= -\frac{1}{2} \frac{\wp^2}{\hbar} \sum_{\mu=1}^N E_\mu(t) \exp[-i(\nu_\mu t + \varphi_\mu)] N_{n-\mu} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dv W(v) [D(\omega - \nu_\mu + Kv)] + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (10.83)$$

gdzie wprowadziliŹmy oznaczenie

$$D(\omega) = \frac{1}{\gamma_{ab} + i\omega}, \quad (10.84)$$

natomiast

$$N_{n-\mu} = \frac{1}{L} \int_0^L dz N(z, t) \cos \left[ (n - \mu) \frac{\pi z}{L} \right] \quad (10.85)$$

jest przestrzenną składową fourierowską gęstości wzbudzenia  $N(z, t)$ . Zakładamy, że rozkład  $W(v)$  jest rozkładem prędkości Maxwella:

$$W(v) = (u\pi)^{1/2} \exp(-v^2/u^2), \quad (10.86)$$

gdzie  $u^2$  jest średnim rozkładem prędkości, związanym z temperaturą bezwzględną gazu  $T$  znanym związkim

$$\frac{1}{2} m u^2 = k_B T, \quad (10.87)$$

przy czym  $m$  to masa atomu, a  $k_B$  - stała Boltzmanna. Przecalkowujac (10.83) z rozkładem (10.86), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n^{(1)}(t) &= -\frac{1}{2} \frac{\wp^2}{\hbar K u} \left\{ \sum_{\mu=1}^M \mathbf{E}_\mu(t) \exp[-i(\nu t + \varphi_\mu(t))] \right. \\ &\times \left. N_{n \rightarrow \mu}(t) Z(\nu_\mu - \omega) + \text{c.c} \right\}, \end{aligned} \quad (10.88)$$

gdzie funkcja  $Z(\nu - \omega)$  zdefiniowana jest jako

$$Z(\nu - \omega, \gamma_{ab} K u) = i K u \int_0^\infty d\tau \exp[i(\nu - \omega)\tau - \gamma_{ab}\tau - \frac{1}{4} K^2 u^2 \tau^2]. \quad (10.89)$$

Wprowadzając nowe zmienne

$$\zeta = \xi + i\eta, \quad (10.90)$$

gdzie

$$\xi = \frac{\nu - \omega}{K u}, \quad (10.91)$$

$$\eta = \frac{\gamma_{ab}}{K u}, \quad (10.92)$$

zapiszemy funkcję (10.89) w postaci

$$Z(\zeta) = 2i \int_{-\infty+i\zeta}^{i\zeta} dt \exp [-(t^2 + \zeta^2)]. \quad (10.93)$$

Funkcja  $Z(\zeta)$  jest funkcją zmiennej zespolonej  $\zeta$  i jest znana z teorii dopplerowskiego rozszerzenia linii widmowej (tzw. całka dopplerowska). Istnieją tablice funkcji  $Z(\xi + i\eta)^{13}$  (tzn. odpowiednio części rzeczywistej  $\text{Re } Z$  i urojonej  $\text{Im } Z$ ).

Uwzględniając równanie (10.44), otrzymujemy

$$S_n^{(1)} = -\frac{1}{2} \frac{\wp^2}{\hbar K u} \bar{N} \text{Im } Z(\nu_n - \omega) E_n, \quad (10.94)$$

$$C_n^{(1)} = -\frac{1}{2} \frac{\wp^2}{\hbar K u} \bar{N} \text{Re } Z(\nu_n - \omega) E_n, \quad (10.95)$$

gdzie

$$\bar{N} = N_0(t) = \frac{1}{L} \int_0^L dz N(z, t) \quad (10.96)$$

jest gęstością wzbudzenia, uśrednioną po objętości wnęki. Z równania (10.47) otrzymujemy

$$\dot{E}_n = -\frac{1}{2} \frac{\nu}{Q_n} E_n - \frac{1}{2} \frac{\nu}{\epsilon_0} S_n^{(1)}. \quad (10.97)$$

Jeżeli  $\dot{E}_n = 0$ , wówczas otrzymujemy proste równanie

$$\frac{\wp^2}{\hbar K u} \bar{N} \text{Im } Z(\nu_n - \omega) = \frac{1}{Q_n}. \quad (10.98)$$

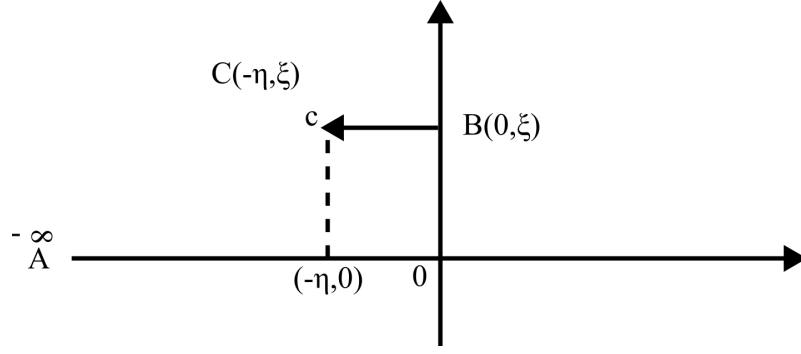
Z równania tego wyznaczyć można  $\nu_n$  (tzw. przesunięcie częstości - ang. *frequency pooling*, wzgl. *frequency pushing*), gdy pozostałe wielkości są znane.

Dla dalszej dyskusji potrzebne nam będą pewne własności całki dopplerowskiej (10.93). Całkowanie w (10.93) przebiega po płaszczyźnie zespolonej, (rys. 10.7) po konturze  $A0, B, C$  ( $\xi$  oraz  $\eta$  zdefiniowane są wzorami (10.90) i (10.91)). Całkę po drodze  $A0, B, C$  można rozbić na sumę całek:

$$\int_{A0BC} = \int_{A0} + \int_{0B} + \int_{BC},$$

---

<sup>13</sup>p. np. B.D. Fried and S.D. Coute, The Plasmon Dispersion Function (Hilbert Transform of the Gaussian), New York 1961.



Rysunek 10.7: Płaszczyzna całkowania całki dopplerowskiej

czyli

$$\begin{aligned}
 Z &= 2ie^{-\zeta^2} \left[ \frac{1}{2}\pi^{1/2} + \int_0^{i\xi} e^{-t^2} dt + \int_{i\xi}^{i\xi-\eta} e^{-t'^2} dt' \right] \\
 &= 2ie^{-\zeta^2} \left[ \frac{1}{2}\pi^{1/2} + i \int_0^\xi e^{x^2} dx \right] + 2ie^{-2i\xi\eta+\eta^2} \int_0^{-\eta} e^{-x'^2-2ix\xi} dx'. \quad (10.99)
 \end{aligned}$$

Zakładając, że

$$\eta = \frac{\gamma_{ab}}{Ku} \ll 1,$$

można z dobrym przybliżeniem stosować następujące rozwinięcie

$$\begin{aligned}
 e^{-\zeta^2} &= e^{-(\xi+i\eta)^2} \simeq e^{-\xi^2-2i\xi\eta} \\
 &= e^{-\xi^2}(1-2i\xi\eta), \quad (\eta^2 \rightarrow 0).
 \end{aligned}$$

Z kolei

$$\int_0^{-\eta} e^{-x'^2-2i\xi x'} dx' \simeq -\eta.$$

Uwzględniając powyższe aproksymacje, otrzymujemy

$$Z(\xi, \eta) \approx ((1-2i\xi\eta)e^{-\xi^2} \left[ i\pi^{1/2} - 2 \int_0^\xi e^{x^2} dx \right] - 2i\eta). \quad (10.100)$$

Część rzeczywista i urojona wyrażenia (10.100) są odpowiednio równa

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} Z(\xi, \eta) &=: Z_r = e^{-x^2} \left( -2 \int_0^\xi e^{x^2} dx + 2\xi\eta\pi^{1/2} \right), \\
 \operatorname{Im} Z(\xi, \eta) &=: Z_i = e^{-x^2} \left( 4\xi\eta \int_0^\xi e^{x^2} dx + \pi^{1/2} \right) - 2\eta. \quad (10.101)
 \end{aligned}$$

Dla małych  $\eta$  wyrażenie (10.101) zastąpić można przez

$$\begin{aligned} Z_r &\simeq -2e^{-\xi^2} \int_0^\xi e^{x^2} dx, \\ Z_i &\simeq \pi^{1/2} e^{-\xi^2}. \end{aligned} \quad (10.102)$$

Podstawiając wyrażenie na  $Z_i$  do równania (10.98), otrzymujemy

$$\frac{\wp^2}{\epsilon_0 \hbar K u} \bar{N} \pi^{1/2} \exp \left[ - \left( \frac{\nu_n - \omega}{K u} \right)^2 \right] = \frac{1}{Q_n}. \quad (10.103)$$

Przy użyciu  $\lambda = 2\pi/K$  - długości fali, przepiszemy (10.103) w postaci

$$2\sqrt{\pi} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \frac{c}{u} \lambda \frac{\wp^2}{e} \bar{N} \exp \left[ - \left( \frac{\nu_n - \omega}{K u} \right)^2 \right] = \frac{1}{Q_n}. \quad (10.104)$$

Czynnik  $e^2/(4\pi\epsilon_0 \hbar c)$  jest znaną w teorii linii widmowych stałą struktury subtelnej, oznaczaną przez  $\alpha$  i równą w przybliżeniu  $1/137$ . Wielkość  $\bar{N}\lambda(\wp/e)^2$  wyznacza liczbę atomów wzbudzonych, znajdujących się w cylindrze o długości  $\lambda$  i powierzchni przekroju poprzecznego  $(\wp/e)^2$ . Dla generacji promieniownia niezbędne jest, by gęstość wzbudzenia  $\bar{N}$  była proporcjonalna do  $\exp[(\nu_n - \omega)^2 (K u)^{-2}]$ . Częstość wypromieniowanej fali obliczamy z równania (10.95) i po położeniu  $\dot{\varphi}_n = 0$  otrzymujemy

$$\nu_n = \Omega_n + \frac{\nu}{2} \frac{\wp^2 \bar{N}}{\epsilon_0 \hbar K u} Z_r(\nu_n - \omega). \quad (10.105)$$

Z równania (10.98) wyliczamy  $\bar{N}$  i wstawiamy do (10.105):

$$\nu_n - \Omega_n = \frac{1}{2} \frac{\nu}{Q_n} \frac{Z_r(\nu_n - \omega)}{Z_i(\nu_n - \omega)}. \quad (10.106)$$

Wielkości  $\nu_n - \Omega_n$  oraz  $\nu_n - \omega$  nazywamy **rozstrojeniami** (ang. *detuning*).

Uwzględniając przybliżenie (10.102), otrzymamy

$$\nu_n - \Omega_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\nu}{Q_n} \int_0^{\xi_n} dx e^{x^2}, \quad (10.107)$$

jeśli  $\gamma_{ab}/K u \ll 1$ , oraz  $\xi_n = (\nu_n - \omega)/K u$ . Rozwijając całkę  $\int_0^{\xi_n} \exp(x^2) dx$  w szereg

$$\int_0^{\xi_n} dx e^{x^2} = \xi_n + \frac{1}{3} \xi_n^3 + \dots \quad (10.108)$$

i biorąc tylko pierwszy wyraz rozwinięcia, mamy

$$\frac{\nu_n - \Omega_n}{\nu_n - \omega} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\nu}{Q_n K u} = S. \quad (10.109)$$

Lamb nazywa  $S$  czynnikiem stabilizacyjnym (ang. *stabilization factor*). Dla laserów  $S \ll 1$ , np.  $S = 1/800$ , natomiast dla maserów (np. dla masera amoniakalnego)  $S \gg 1$ . Wzór (10.109) wyraża

liniowe przeciąganie częstości (ang. *linear pulling*) - rozstrojenie  $\nu_n$  od  $\Omega_n$  jest proporcjonalne do różnicy  $\omega - \nu_n$ . Uwzględniając drugi wyraz rozwinięcia (10.109), otrzymujemy "liniowe przeciąganie częstości",

$$\frac{\nu_n - \Omega_n}{\nu_n - \omega} \simeq \left[ 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{\Omega_n - \omega}{Ku} \right)^2 \right] S, \quad (10.110)$$

przy założeniu  $\gamma_{ab}/Ku \ll 1$ .

## 10.5 Trzeci rząd rachunku zaburzeń

### 10.5.1 Obliczenie polaryzacji w trzecim rzędzie rachunku zaburzeń

Obliczymy teraz składową polaryzacji  $P_n^{(3)}(t)$ , korzystając z równań (10.36), (10.60), (10.67)-(10.69). Zgodnie z tymi równaniami

$$\begin{aligned} P_n^{(3)}(t) &= \frac{2}{L} \int_0^L P^{(3)}(z, t) \sin(K_n z) \\ &= \frac{2\wp}{L} \sum_{\alpha=a,b} \int_0^L dz \int_{-\infty}^t dt_0 \int_{-\infty}^{\infty} dv \lambda_{\alpha}(z, t_0, v) \\ &\quad \times \left[ \rho_{ab}^{(3)}(\alpha, z - v(t - t_0), t_0, v, t) + \text{c.c.} \right]. \end{aligned} \quad (10.111)$$

Zgodnie z (10.67)-(10.69)

$$\begin{aligned} \rho_{ab}^{(3)}(\alpha, z - v(t - t_0), t_0, v, t) &= -i \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \int_{t_0}^{t''} dt''' V(t') V(t'') V(t''') \\ &\quad \times \left\{ \exp[\gamma_a(t'' - t') + (\gamma_{ab} + i\omega)(t''' - t'') + \gamma_a(t_0 - t''')] \right. \\ &\quad \left. - \exp[\gamma_b(t'' - t') + (\gamma_{ab} + i\omega)(t''' - t'') + \gamma_a(t_0 - t''')] + \text{c.c.} \right\} \\ &\quad \times \exp(\gamma_{ab} + i\omega)(t' - t). \end{aligned} \quad (10.112)$$

We wzorze (10.112) występuje całkowanie typu

$$\int_{-\infty}^t dt_0 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \int_{t_0}^{t''} dt''' F(t, t', t'', t''') \exp[-\gamma_a(t''' - t_0)],$$

które po zamianie granic całkowania sprowadza się do

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' dt' \int_{-\infty}^{t''} dt''' dt' \int_{-\infty}^{t'''} dt_0 \exp[-\gamma_a(t''' - t_0)] \\ &= \frac{1}{\gamma_a} \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \int_{-\infty}^{t''} dt''' F(t, t', t'', t'''). \end{aligned}$$

Po zamianie zmiennych

$$\tau' = t - t', \quad \tau'' = t' - t'', \quad \tau''' = t'' - t''' \quad (10.113)$$

i odtzuceniu składników, które mogą mieć charakter nie-rezonansowy, otrzymujemy następujące wyrażenie na  $\rho_{ab}^{(3)}(z.v, t)$

$$\begin{aligned} \rho_{ab}^{(3)}(z.v, t) &= \frac{1}{8} i \frac{\phi^3}{\hbar^3} N(z, t) \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} E_{\mu} E_{\rho} E_{\sigma} \\ &\times \left\{ \exp \left[ -i(\nu_{\mu} t + \varphi_{\mu}) + i(\nu_{\rho} t + \varphi_{\rho}) - i(\varphi_{\sigma} t + \varphi_{\sigma}) \right] \right. \\ &\times \int_0^{\infty} d\tau' \int_0^{\infty} d\tau'' \int_0^{\infty} d\tau''' U_{\mu}(z - v\tau') U_{\mu}(z - v\tau' - v\tau'') U_{\mu}(z - v\tau' - v\tau'' - v\tau''') \\ &+ \exp \left[ -[(\gamma_{ab} - i\nu_{\mu} + i\nu_{\rho} - i\nu_{\sigma} + i\omega)\tau' + (\gamma_a + i\nu_{\rho} - i\nu_{\sigma})\tau'' \right. \\ &+ (\gamma_{ab} + i\omega - i\nu_{\sigma})\tau'''] \left. \right] + \exp \left[ -i(\nu_{\mu} + \varphi_{\mu}) - i(\nu_{\rho} t + \varphi_{\rho}) i(\nu_{\sigma} t + \varphi_{\sigma}) \right] \\ &\times \int_0^{\infty} d\tau' \int_0^{\infty} d\tau'' \int_0^{\infty} d\tau''' U_{\mu}(z - v\tau') U_{\mu}(z - v\tau' - v\tau'') U_{\mu}(z - v\tau' - v\tau'' - v\tau''') \\ &\times \exp \left[ -[(\gamma_{ab} - i\nu_{\mu} + i\nu_{\rho} - i\nu_{\sigma} + i\omega)\tau' + (\gamma_a + i\nu_{\rho} - i\nu_{\sigma})\tau'' \right. \\ &+ (\gamma_{ab} + i\omega - i\nu_{\sigma})\tau'''] \left. \right] \Big\} \\ &+ \text{to samo z przestawionymi indeksami } a \text{ i } b. \end{aligned} \quad (10.114)$$

Przy liczeniu  $P_n^{(3)}$  pojawiają się całki typu

$$\frac{2}{L} \int_0^L dz N(z, t) U_n(z) U_{\mu}(z - v\tau') U_{\mu}(z - v\tau' - v\tau'') U_{\mu}(z - v\tau' - v\tau'' - v\tau''').$$

Uwzględniając (10.37) i odrzucając człony szybko zmienne oraz nieparzyste względem  $v$  (będziemy całkować z czynnikiem  $\exp(-v^2)$  w granicach  $-\infty, +\infty$ ) z kombinacji 4 funkcji  $U_n, U_{\mu}, U_{\rho}, U_{\sigma}$  pozostanie

$$\begin{aligned} &\frac{1}{8} \left[ \cos(K_{\rho} - K_{\sigma} + K_{\mu} - K_n) z \cos Kv(\tau''' - \tau') \right. \\ &+ \cos(K_{\rho} - K_{\sigma} - K_{\mu} + K_n) z \cos Kv(\tau''' - \tau') \\ &\left. + \cos(K_{\rho} + K_{\sigma} - K_{\mu} - K_n) z \cos Kv(\tau' + 2\tau'' + \tau''') \right]. \end{aligned} \quad (10.115)$$

Wstawiając (10.115), (10.114), (10.78) do (10.111), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
P_n^{(3)}(t) = & \frac{1}{32} i \frac{\wp^4}{\hbar^4} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} E_{\mu} E_{\rho} E_{\sigma} \\
& \times \left\{ \exp \left[ -i(\nu_{\mu} t + \varphi_{\mu}) + i(\nu_{\rho} t + \varphi_{\rho}) - i(\varphi_{\sigma} t + \varphi_{\sigma}) \right] \right. \\
& \times \int_0^{\infty} d\tau' \int_0^{\infty} d\tau'' \int_0^{\infty} d\tau''' \left( N_{\rho-\sigma+\mu-n} \exp \left[ -\frac{1}{4}(Ku)^2(\tau''' - \tau')^2 \right] \right. \\
& + N_{\rho-\sigma-\mu+n} \exp \left[ -\frac{1}{4}(Ku)^2(\tau''' + \tau')^2 \right] + N_{\rho+\sigma-\mu-n} \exp \left[ -\frac{1}{4}(Ku)^2(\tau' + 2\tau'' + \tau''')^2 \right] \Big) \\
& \times \exp \left[ -(\gamma_{ab} - i\nu_{\mu} + i\nu_{\rho} - i\nu_{\sigma} + i\omega)\tau' - (\gamma_a + i\nu_{\rho} - i\nu_{\sigma})\tau'' \right. \\
& \left. - (\gamma_{ab} + \omega - i\nu_{\sigma})\tau''' \right] + \exp \left[ -i(\nu_{\mu} t + \varphi_{\mu}) - i(\nu_{\rho} t + \varphi_{\rho}) \right. \\
& \left. + i(\nu_{\sigma} t + \varphi_{\sigma}) \right] \times \int_0^{\infty} d\tau' \int_0^{\infty} d\tau'' \int_0^{\infty} d\tau''' N_{\rho-\sigma+\mu-n} \exp \left[ -\frac{1}{4}(Ku)^2(\tau''' - \tau')^2 \right] \\
& + N_{\rho-\sigma-\mu+n} \exp \left[ -\frac{1}{4}(Ku)^2(\tau''' + \tau')^2 \right] + N_{\rho+\sigma-\mu-n} \exp \left[ -\frac{1}{4}(Ku)^2(\tau' + 2\tau'' + \tau''')^2 \right] \\
& \times \exp \left[ -(\gamma_{ab} - i\nu_{\mu} - \nu_{\rho} + i\nu_{\sigma} + i\omega)\tau' - (\gamma_a - i\nu_{\rho} + i\nu_{\sigma})\tau'' - (\gamma_{ab} + i\nu_{\sigma} - i\omega)\tau''' \right] \Big\} \\
& + \text{to samo z przestawionymi indeksami } a \text{ i } b.
\end{aligned} \tag{10.116}$$

Wzór (10.116) upraszcza się znacznie w 2 przypadkach:

1. dla  $u = 0$ , tzn.  $T = 0$  (zero bezwzględne,
2. dla  $Ku \gg \gamma_{ab} = (1/2)(\gamma_a + \gamma_b)$  (tzw. granica dopplerowska.

W przypadku 1) wzór (10.116) redukuje się do

$$\begin{aligned}
P_n^{(3)}(t) = & \frac{1}{32} i \frac{\wp^4}{\hbar^4} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} E_{\mu} E_{\rho} E_{\sigma} \\
& \times \exp \left[ -i(\nu_{\mu} t + \varphi_{\mu}) + i(\nu_{\rho} t + \varphi_{\rho}) - i(\varphi_{\sigma} t + \varphi_{\sigma}) \right] \\
& \times [N_{\rho-\sigma+\mu-n} + N_{\rho-\sigma-\mu+n} + N_{\rho+\sigma-\mu-n}] \\
& \times D(\nu_{\rho} - \nu_{\mu} - \nu_{\sigma} + \omega) \left[ D_a(\nu_{\rho} - \nu_{\sigma}) + D_b(\nu_{\rho} - \nu_{\sigma}) \right] \\
& \times \left[ D(\omega - \nu_{\sigma}) + D(\nu_{\rho} - \omega) \right] + \text{c.c.},
\end{aligned} \tag{10.117}$$

gdzie  $D(\omega)$  określone jest przez (10.84), natomiast

$$D_{\alpha}(\omega) = \frac{1}{\gamma_{\alpha} + i\omega}, \quad \alpha = a, b. \tag{10.118}$$

W przypadku 2) całkowanie z funkcją  $\exp[-(1/4)(Ku)^2(\tau''' - \tau')^2]$  zastąpić można przez całkowanie z funkcją delta Diraca

$$\frac{2\sqrt{\pi}}{Ku} \delta(\tau''' - \tau'). \tag{10.119}$$

Po wycalkowaniu z funkcją (10.119) i pominięciu innych wykładników typu  $\exp[-A(Ku)^2]$ , gdzie  $A > 0$  i nie zależy od  $u$ , (10.116) zredukuje się do

$$\begin{aligned}
P_n^{(3)}(t) = & \frac{i\sqrt{\pi}}{32} \left[ \frac{\wp^4}{(Ku\hbar^3)} \right] \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} E_{\mu} E_{\rho} E_{\sigma} \\
& \times N_{\rho-\sigma+\mu-n} \left\{ D \left( \omega - \frac{1}{2}\nu_{\mu} + \frac{1}{2}\nu_{\rho} - \nu_{\sigma} \right) \right. \\
& \times \left[ D_a(\nu_{\rho} - \nu_{\sigma}) + D_b(\nu_{\rho} - \nu_{\sigma}) \right] \\
& \times \exp \left[ -i(\nu_{\mu} - \nu_{\rho} + \nu_{\sigma})t - i(\varphi_{\mu} - \varphi_{\rho} + \varphi_{\sigma}) \right] \\
& + D \left( -\frac{1}{2}\nu_{\mu} - \frac{1}{2}\nu_{\rho} + \nu_{\sigma} \right) \left[ D_a(\nu_{\sigma} - \nu_{\rho}) + D_b(\nu_{\sigma} - \nu_{\rho}) \right] \\
& \left. \times \exp \left[ -i(\nu_{\mu} + \nu_{\rho} - \nu_{\sigma})t - i(\varphi_{\mu} + \varphi_{\rho} - \varphi_{\sigma}) \right] \right\} + \text{c.c.}
\end{aligned} \tag{10.120}$$

### 10.5.2 Przypadek 1-modowy

Wzór (10.120) opisywał sytuację, kiedy było  $N$  modów we wnęce (rezonatora) i sumowanie po  $\mu, \rho$  i  $\sigma$  przebiegało do 1 do  $N$ . W przypadku 1-modowym z potrójnej sumy  $\sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma}$  w (10.120) pozostaje 1 wyraz

$$\begin{aligned}
P_n^{(3)}(t) = & \frac{i\sqrt{\pi}\bar{N}\wp^4}{16\hbar^3\gamma_a\gamma_bKu} \gamma_{ab} [D(\omega - \nu_n) + D(0)] \\
& \times E_n^{(3)} \exp[-i(\nu_n t + \varphi_n)] + \text{c.c.}
\end{aligned} \tag{10.121}$$

W celu wstawienia do równań ruchu (10.46), (10.47) obliczamy część rzeczywistą i urojoną wyrażenia (10.121)

$$C_n^{(3)}(t) = \frac{\sqrt{\pi}\bar{N}}{8} \frac{\wp^4\gamma_{ab}}{8\hbar^3\gamma_a\gamma_bKu} (\omega - \nu_n) \mathcal{L}(\omega - \nu_n) E_n^3, \tag{10.122}$$

$$S_n^{(3)}(t) = \frac{\sqrt{\pi}\bar{N}}{8} \frac{\wp^4\gamma_{ab}}{8\hbar^3\gamma_a\gamma_bKu} [1 + \gamma_{ab}^2 \mathcal{L}(\omega - \nu_n)] E_n^3, \tag{10.123}$$

gdzie  $\mathcal{L}(\omega - \nu_n)$  jest funkcją Lorentza

$$\mathcal{L}(\omega - \nu_n) = \frac{1}{\gamma_{ab}^2 + (\omega - \nu)^2}. \tag{10.124}$$

Ponieważ w 3-cim rzędzie przybliżenia

$$\begin{aligned}
C_n &= C_n^{(1)} + C_n^{(3)}, \\
S_n &= S_n^{(1)} + S_n^{(3)},
\end{aligned} \tag{10.125}$$

gdzie  $C_n^{(1)}$  i  $S_n^{(1)}$  są dane wzorami (10.94) i (10.95), więc równanie (10.125) przepisać można w postaci

$$\dot{E}_n = -\alpha_n E_n - \beta_n E_n^3, \tag{10.126}$$

gdzie

$$\alpha_n = -\frac{\nu}{2Q_n} + \nu\bar{N}\frac{\wp^2}{2\epsilon_0\hbar Ku} Z_i(\nu_n - \omega), \quad (10.127)$$

$$\beta_n = \frac{\nu\sqrt{\pi}\bar{N}\wp^4}{16\epsilon_0\hbar^3\gamma_a\gamma_b Ku} [1 + \gamma_{ab}^2\mathcal{L}(\omega - \nu_n)]. \quad (10.128)$$

Współczynniki  $\alpha_n$  i  $\beta_n$  wyrazimy przez względne wzbudzenie  $\mathcal{N}$ , zdefiniowane jako

$$\mathcal{N} = \frac{\bar{N}}{\bar{N}_T}, \quad (10.129)$$

gdzie  $\bar{N}_T$  jest tzw. **wzbudzeniem progowym** ( $T$  od ang. *threshold* (próg)). W 1-szym rzędzie przybliżenia mieliśmy

$$\frac{1}{Q_n} = \frac{\wp^2}{\epsilon_0\hbar Ku} \bar{N}_T, \quad (10.130)$$

co odpowiada równania (10.98) dla  $\omega = \nu_n$  (rezonans). Obliczając  $\bar{N}_T$  z warunku (10.130) i wstawiając do poprzednich równań, otrzymujemy

$$\alpha_n = \frac{\nu}{2Q_n} \left[ \frac{Z_i(\nu_n - \omega)}{Z_i(0)} \mathcal{N} - 1 \right] \quad (10.131)$$

oraz

$$\beta_n = \frac{\sqrt{\pi}}{16} \frac{\nu}{Q_n} \left[ \mathcal{N} \frac{\wp^2}{\hbar^3\gamma_a\gamma_b Z_i(0)} \right] [1 + \gamma_{ab}^2\mathcal{L}(\omega - \nu_n)]. \quad (10.132)$$

Zakładając, że  $E_n \neq 0$ , otrzymujemy z równania (10.126) następujący warunek stacjonarności (tzn. stant  $\dot{E}_n = 0$ )

$$E_n^2 = \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{8[Z_i(\nu_n - \omega)\mathcal{N} - Z_i(0)]\gamma_a\gamma_b\hbar^2}{\sqrt{\pi}[1 + \gamma_{ab}^2\mathcal{L}(\nu_n - \omega)]\mathcal{N}\wp^2}. \quad (10.133)$$

Z równania (10.46), kładąc  $\dot{\varphi}_n = 0$ , otrzymamy następujące wyrażenie na częstość drgań  $\nu_n$ :

$$\nu_n = \Omega_n - \frac{1}{2} \frac{\nu_n}{\epsilon_0 E_n} \left( C_n^{(1)} + C_n^{(3)} \right). \quad (10.134)$$

Zakładamy, że  $\nu_n \approx \Omega_n$ , podstawiając więc we wzorze (10.122)  $\Omega_n$  zamiast  $\nu_n$ , otrzymamy

$$\nu_n = \Omega_n + \sigma_n + \rho_n E_n^2, \quad (10.135)$$

gdzie

$$\sigma_n = \frac{\nu\wp^2\bar{N}}{2\epsilon_0\hbar Ku} Z_r(\Omega_n - \omega), \quad (10.136)$$

$$\rho_n = \frac{\sqrt{\pi}\nu\wp^4\bar{N}}{16\epsilon_0\hbar^3\gamma_a q\gamma_b Ku} \gamma_{ab}(\Omega_n - \omega) \mathcal{L}(\Omega_n - \omega). \quad (10.137)$$

Wprowadzając do powyższych wzorów wzbudzenie  $\mathcal{N}$  (10.129), otrzymujemy

$$\sigma_n = \frac{\nu}{2Q_n} \frac{\mathcal{N}(\Omega_n - \omega)}{Z_i(0)} \quad (10.138)$$

oraz

$$\rho_n = \frac{\sqrt{\pi}\nu\wp^2\mathcal{N}}{16Q_n\hbar^2\gamma_a q\gamma_b Z_i(0)} \gamma_{ab}(\Omega_n - \omega) \mathcal{L}(\Omega_n - \omega), \quad (10.139)$$

tak, że po podstawieniu do (10.133) mamy

$$\begin{aligned}\rho_n E_n^2 &= \frac{\rho_n \alpha_n}{\beta_n} = \frac{\nu}{2 Q_n} \left[ \frac{Z_i(\Omega_n - \omega)}{Z_i(0)} \mathcal{N} - 1 \right] \frac{\gamma_{ab}(\Omega_n - \omega)}{2\gamma_{ab}^2 + (\Omega_n - \omega)^2} \\ &= \nu_n - \Omega_n - \sigma_n.\end{aligned}\quad (10.140)$$

Uwzględniając tylko pierwszy rząd rachunku zaburzeń, otrzymaliśmy wynik (10.106):

$$\nu_n - \Omega_n = \frac{1}{2} \frac{\nu}{Q_n} \frac{Z_r(\nu_n - \omega)}{Z_i(\nu_n - \omega)},$$

w którym częstość lasera była funkcją jedynie rozstrojenia (detuning). Natomiast w (10.140) zależy również od poziomu mocy promieniowania ( $E_n^2$ ).

Prawa strona w (10.133) jest również funkcją 2 wielkości  $\xi_n$  i  $\mathcal{N}$ , gdzie

$$\xi_n = \frac{\Omega_n - \omega}{K u}.$$

Analogicznie

$$\nu_n - \Omega_n = f(\xi_n, \mathcal{N}) = A_n \mathcal{N} + B_n, \quad (10.141)$$

gdzie  $A_n, B_n$  - pewne stałe. Interesuje nas znak zmiany częstości, tzn. czy  $\Omega_n < \nu_n$ , czy też odwrotnie. Traktując  $\nu/Q_n$  jako stałą (u Lamba jest ona rzędu  $10^6 \text{ s}^{-1}$ ), otrzymujemy

$$\begin{aligned}A_n &= \frac{\nu}{2Q_n} \left\{ \frac{Z_r(\Omega_n - \omega)[2\gamma_{ab}^2 + (\Omega_n - \omega)^2]}{2\gamma_{ab}^2 + (\Omega_n - \omega)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{Z_i(\Omega_n - \omega)\gamma_{ab}(\Omega_n - \omega)}{[2\gamma_{ab}^2 + (\Omega_n - \omega)^2] \cdot Z_i(0)} \right\}.\end{aligned}\quad (10.142)$$

Warunek  $A_n < 0$  daje

$$2\gamma_{ab}^2 + (\Omega_n - \omega)^2 < -\gamma_{ab}(\Omega_n - \omega) \frac{Z_i(\Omega_n - \omega)}{Z_r(\Omega_n - \omega)}. \quad (10.143)$$

W przybliżeniu  $\xi_n \ll 1$

$$\frac{Z_i(\Omega_n - \omega)}{Z_r(\Omega_n - \omega)} = \frac{\pi^{1/4} \exp(-\xi_n^2)}{-2 \exp(-\xi_n^2) \int_0^\xi \exp(x^2) dx} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{K u}{\Omega_n - \omega} \quad (10.144)$$

i warunek na zmniejszenie częstości (10.143) przyjmuje postać

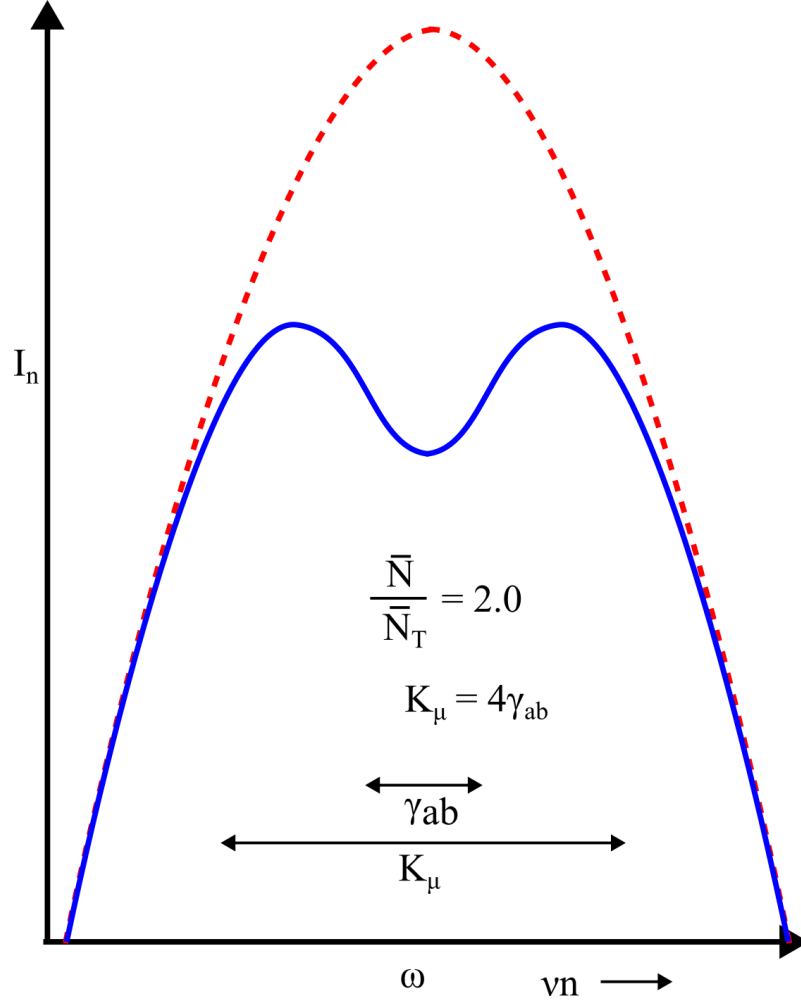
$$2\gamma_{ab}^2 + (\Omega_n - \omega)^2 < \sqrt{\pi} 2 \gamma_{ab} K u. \quad (10.145)$$

Wprowadzimy teraz bezwymiarowe natężenie  $I_n$  (nazywane również parametrem nasycenia)

$$\begin{aligned}I_n &= \frac{1}{2} \frac{(\wp E_n)^2}{\hbar^2 \gamma_a \gamma_b} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{Z_i(\Omega_n - \omega) - \mathcal{N}^{-1}}{1 + \gamma_{ab}^2 \mathcal{L}(\Omega_n - \omega)} \\ &= 4 \left\{ \exp \left[ - \left( \frac{\Omega_n - \omega}{K u} \right)^2 \right] - \mathcal{N}^{-1} \right\} \left[ 1 + \gamma_{ab}^2 \mathcal{L}(\Omega_n - \omega) \right]^{-1}.\end{aligned}\quad (10.146)$$

Wartość progowa względnego wzbudzenia  $\mathcal{N}$ , otrzymana z (10.146), jest równa

$$\mathcal{N} = \frac{\bar{N}}{\bar{N}_T} = \exp \left[ \left( \frac{\omega_n - \omega}{K u} \right)^2 \right]. \quad (10.147)$$



Rysunek 10.8: Zależność parametru nasycenia  $I_n(\nu_n)$

Odpowiada ona zerowaniu się  $I_n$ . Wyrażenie w mianowniku (10.146) spełnia nierówność

$$1 \leq 1 + \gamma_{ab}^2 \mathcal{L}(\Omega_n - \omega) \leq 2 \quad (10.148)$$

i ma ostre maksimum dla  $\omega_n = \omega$ . Zależność  $I_n(\nu_n)$  (p. rys. 10.8) ma 2 maksima, jeśli

$$\left(\frac{\gamma_{ab}}{Ku}\right)^2 < \frac{1}{2} \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\Omega_n^* - \omega}{Ku} \right)^2 \right] \right\}, \quad (10.149)$$

gdzie  $\Omega_n^* - \omega$  to rozstrojenie, przy którym następuje przerwanie generacji promieniowania laserowego dla danego poziomu wzbudzenia. Stąd podwójne maksimum pojawia się dla względnego wzbudzenia  $\mathcal{N}$  spełniającego nierówność

$$\mathcal{N} > \left[ 1 - 2 \left( \frac{\gamma_{ab}}{Ku} \right)^2 \right]^{-1} = \bar{N}_T. \quad (10.150)$$

Istnienie dwóch maksimów w promieniowaniu laserowym stwierdzone zostało eksperymentalnie.<sup>14</sup>

<sup>14</sup>p. R.A. McFarlane, R. Bennet, and W.E. Lamb, Appl. Phys. Lett., **2**(1963), 189; p. także A. Szöke and A. Javan, Phys. Rev. Lett., **10** (1963), 521.

Wysokość linii na rys. 10.8 wyznaczona jest przez

$$I_n^0 = \frac{1}{2} \frac{(\wp E_n)^2}{\hbar^2 \gamma_a \gamma_b} \approx 4 \frac{\gamma_{ab}}{(Ku)^2} \ll 1.$$

### 10.5.3 Przypadek wielomodowy

Jak zaobserwowano, przy względnym wzbudzeniu o wartości większej od progowej dla drgań jednomodowych, w widmie lasera pojawiają się fale o różnych częstościach. Pierwsza teoria generatora, mogącego pracować na kilku częstościach, została jeszcze w r. 1921 podana przez Van der Pola.<sup>15</sup> Van der Pol rozpatrywał obwód drgający, składający się z dwóch obwodów RLC o częstościach rezonansowych  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$ . Okazało się, że obwód drga albo z częstością bliską  $\Omega_1$ , albo z częstością bliską  $\Omega_2$ , natomiast niemożliwa jest równoczesna generacja dwóch częstości.

W naszym przypadku gazowego lasera rozpatrywać będziemy wyrażenie na polaryzację  $P_n^{(3)}$  (10.120) dla  $M = 3$ , tzn. indeksy  $\mu, \rho, \sigma$  i  $\nu$  mogą przyjmować wartości 1, 2 i 3. Wszystkie możliwe kombinacje (jest ich 27) indeksów zebrane są w Tablicy 10.1. W Tablicy 10.1 przyjęto, że  $\nu_1 = 0$ ,  $\nu_2 = 150$  MHz,  $\nu_3 = 301$  MHz. Ze wszystkich wartości  $\delta_\nu$ , które pojawiają się w Tab. 10.1, interesują nas tylko te, które należą do przedziału (0, 300 MHz) i bliskie są trzem głównym częstościom  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ . Z 27 kombinacji (Tab. 10.1) pozostaje zatem 19 kombinacji zebranych w Tab. 10.2. Położono tam

$$\Delta \simeq 150 \text{ MHz.} \quad (10.151)$$

Przepiszemy wyrażenie (10.120) w postaci

$$\begin{aligned} P_n^{(3)}(t) = & \frac{i\sqrt{\pi}}{32} \left[ \frac{\wp^4}{(Ku\hbar^3)} \right] \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} E_{\mu} E_{\rho} E_{\sigma} \\ & \times \exp \left[ -i(\nu_{\mu} - \nu_{\rho} + \nu_{\sigma})t - i(\varphi_{\mu} - \varphi_{\rho} + \varphi_{\sigma}) \right] \\ & \times \left[ N_{\rho-\sigma+\mu-n} D \left( \omega - \frac{1}{2}\nu_{\mu} - \frac{1}{2}\nu_{\sigma} + \nu_{\rho} \right) \right. \\ & \left. + N_{\sigma-\rho+\mu-n} D_b(\nu_{\rho} - \nu_{\sigma}) \right] \\ & + N_{\sigma-\rho+\mu-n} D \left( -\frac{1}{2}\nu_{\mu} - \frac{1}{2}\nu_{\sigma} + \nu_{\rho} \right) \\ & \times [D_a(\nu_{\rho} - \nu_{\sigma}) + D_b(\nu_{\rho} - \sigma)] + \text{c.c} \end{aligned}$$

W kolumnach 5, 6 i 7 Tab. 10.2 podane są indeksy występujące w mianownikach wyrażeń wielkości (10.152), razem z wielkościami  $\gamma_a, \gamma_b$  i  $\gamma_{ab}$ . Przez  $\nu_{12}$  oznaczyliśmy

$$\nu_{12} = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}. \quad (10.152)$$

Wstawiając do (10.152) współczynniki z tab. 10.2 i opuszczając wyrazy  $\Delta^{-3}, \Delta^{-4}, \dots$ , otrzymujemy

<sup>15</sup>B. Van der Pol, Proc. IRE, **22** (1934), 1051.

Tablica 10.1: 27 możliwych wartości indeksów  $\mu, \rho, \sigma$ , które odpowiadają składnikom w równaniu (10.120) w przypadku 3-modowym

| $\mu$ | $\rho$ | $\sigma$ | $\nu_\mu - \nu_\rho + \nu_\sigma$ | Typowa wartość<br>$\delta_\nu = (\nu_\mu - \nu_\rho + \nu_\sigma) - \nu_1$ MHz |
|-------|--------|----------|-----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| 1     | 1      | 1        | $\nu_1$                           | 0                                                                              |
| 1     | 1      | 2        | $\nu_2$                           | 150                                                                            |
| 1     | 1      | 3        | $\nu_3$                           | 301                                                                            |
| 1     | 2      | 1        | $2\nu_1 - \nu_2$                  | -150                                                                           |
| 1     | 2      | 2        | $\nu_1$                           | 0                                                                              |
| 1     | 2      | 3        | $\nu_1 + \nu_3 - \nu_2$           | 151                                                                            |
| 1     | 3      | 1        | $2\nu_1 - \nu_3$                  | -301                                                                           |
| 1     | 3      | 2        | $\nu_1 + \nu_2 - \nu_3$           | -151                                                                           |
| 1     | 3      | 3        | $\nu_1$                           | 0                                                                              |
| 2     | 1      | 1        | $\nu_2$                           | 150                                                                            |
| 2     | 1      | 2        | $2\nu_2 - \nu_1$                  | 300                                                                            |
| 2     | 1      | 3        | $\nu_2 + \nu_3 - \nu_1$           | 451                                                                            |
| 2     | 2      | 1        | $\nu_1$                           | 0                                                                              |
| 2     | 2      | 2        | $\nu_2$                           | 150                                                                            |
| 2     | 2      | 3        | $\nu_3$                           | 301                                                                            |
| 2     | 3      | 1        | $\nu_1 + \nu_2 - \nu_3$           | -151                                                                           |
| 2     | 3      | 2        | $2\nu_2 - \nu_3$                  | -1                                                                             |
| 2     | 3      | 3        | $\nu_2$                           | 150                                                                            |
| 3     | 1      | 1        | $\nu_3$                           | 301                                                                            |
| 3     | 1      | 2        | $\nu_2 + \nu_3 - \nu_1$           | 451                                                                            |
| 3     | 1      | 3        | $2\nu_3 - \nu_1$                  | 602                                                                            |
| 3     | 2      | 1        | $\nu_1 + \nu_3 - \nu_2$           | 151                                                                            |
| 3     | 2      | 2        | $\nu_3$                           | 301                                                                            |
| 3     | 2      | 3        | $2\nu_3 - \nu_2$                  | 452                                                                            |
| 3     | 3      | 1        | $\nu_1$                           | 0                                                                              |
| 3     | 3      | 2        | $\nu_2$                           | 150                                                                            |
| 3     | 3      | 3        | $\nu_3$                           | 301                                                                            |

Tablica 10.2: Różne kombinacje indelsów  $\mu, \rho, \sigma, n$ , niezbędne do obliczenia wyrażenia (10.120) dla  $M = 3$

| $\mu$ | $\rho$ | $\sigma$ | $n$ | $\nu_\rho - \nu_\sigma$ | $\omega - \frac{1}{2}\nu_\mu$<br>$+\frac{1}{2}\nu_\rho - \nu_\sigma$ | $\frac{1}{2}\nu_\mu - \frac{1}{2}\nu_\sigma$<br>$-\frac{1}{2}\nu_\sigma + \nu_\rho$ | $\nu_\mu - \nu_\rho + \nu_\sigma$ | $\rho - \sigma$<br>$+\mu - n$ | $\sigma - \rho$<br>$+\mu - n$ |
|-------|--------|----------|-----|-------------------------|----------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 1     | 1      | 1        | 1   | 0                       | $\omega - \nu_1$                                                     | 0                                                                                   | $\nu_1$                           | 0                             | 0                             |
| 1     | 2      | 2        | 1   | 0                       | $\omega - \nu_{12}$                                                  | $\frac{1}{2}\Delta$                                                                 | $\nu_1$                           | 0                             | 0                             |
| 1     | 3      | 3        | 1   | 0                       | $\omega - \nu_2$                                                     | $\Delta$                                                                            | $\nu_1$                           | 0                             | 0                             |
| 2     | 2      | 1        | 1   | $\Delta$                | $\omega - \nu_1$                                                     | $\frac{1}{2}\Delta$                                                                 | $\nu_1$                           | 2                             | 0                             |
| 3     | 3      | 1        | 1   | $2\Delta$               | $\omega - \nu_1$                                                     | $\Delta$                                                                            | $\nu_1$                           | 4                             | 0                             |
| 2     | 3      | 2        | 1   | $\Delta$                | $\omega - \nu_2$                                                     | $\Delta$                                                                            | $2\nu_2 - \nu_3$                  | 2                             | 0                             |
| 2     | 2      | 2        | 2   | 0                       | $\omega - \nu_2$                                                     | 0                                                                                   | $\nu_2$                           | 0                             | 0                             |
| 1     | 1      | 2        | 2   | $-\Delta$               | $\omega - \nu_2$                                                     | $-\frac{1}{2}\Delta$                                                                | $\nu_2$                           | -2                            | 0                             |
| 2     | 1      | 1        | 2   | 0                       | $\omega - \nu_{12}$                                                  | $-\frac{1}{2}\Delta$                                                                | $\nu_2$                           | 0                             | 0                             |
| 2     | 3      | 3        | 2   | 0                       | $\omega - \nu_{23}$                                                  | $\frac{1}{2}\Delta$                                                                 | $\nu_2$                           | 0                             | 0                             |
| 3     | 3      | 2        | 2   | $\Delta$                | $\omega - \nu_2$                                                     | $\frac{1}{2}\Delta$                                                                 | $\nu_2$                           | 2                             | 0                             |
| 1     | 2      | 3        | 2   | $-\Delta$               | $\omega - \nu_{23}$                                                  | "0"                                                                                 | $\nu_1 + \nu_3 - \nu_2$           | -2                            | 0                             |
| 3     | 2      | 1        | 2   | $\Delta$                | $\omega - \nu_{12}$                                                  | "0"                                                                                 | $\nu_1 + \nu_3 - \nu_2$           | 2                             | 0                             |
| 3     | 3      | 3        | 3   | 0                       | $\omega - \nu_3$                                                     | 0                                                                                   | $\nu_3$                           | 0                             | 0                             |
| 1     | 1      | 3        | 3   | $-2\Delta$              | $\omega - \nu_3$                                                     | $-\Delta$                                                                           | $\nu_3$                           | -4                            | 0                             |
| 2     | 2      | 3        | 3   | $-\Delta$               | $\omega - \nu_3$                                                     | $-\frac{1}{2}\Delta$                                                                | $\nu_2 3$                         | -2                            | 0                             |
| 3     | 1      | 1        | 3   | 0                       | $\omega - \nu_2$                                                     | $-\Delta$                                                                           | $\nu_3$                           | 0                             | 0                             |
| 3     | 2      | 2        | 3   | 0                       | $\omega - \nu_{23}$                                                  | $-\frac{1}{2}\Delta$                                                                | $\nu_3$                           | 0                             | 0                             |
| 2     | 1      | 2        | 3   | $-\Delta$               | $\omega - \nu_{23}$                                                  | $-\Delta$                                                                           | $2\nu_2 - \nu_1$                  | -2                            | 0                             |

$$\begin{aligned}
P_n^{(3)}(t) = & \frac{i\sqrt{\pi}}{32} \left[ \frac{\wp^4}{(Ku\hbar^3)} \right] \left[ \left\{ E_1^3 \bar{N} \frac{\gamma_{ab}}{\gamma_a \gamma_b} \left( D(\omega - \nu_1) + D(0) \right) \right. \right. \\
& + E_1 E_2^2 \bar{N} \frac{\gamma_{ab}}{\gamma_a \gamma_b} \left( D(\omega - \nu_{12}) + D\left(\frac{\Delta}{2}\right) \right) \\
& + E_1 E_3^2 \bar{N} \frac{\gamma_{ab}}{\gamma_a \gamma_b} \left( D(\omega - \nu_2) + D(\Delta) \right) + E_1 E_2^2 \left( \frac{1}{2} N_2 D(\omega - \nu_1) + D(\Delta) + \frac{1}{2} \bar{N} D(\Delta) \right) \\
& \times \left( D_a(\Delta) + D_b(\Delta) \right) + E_1 E_3^2 \left( \frac{1}{2} N_4 D(\omega - \nu_1) + \frac{1}{2} \bar{N} D(\Delta) \right) \\
& \times \left. \left( D_a(2\Delta) + D_b(2\Delta) \right) \right\} \exp[-i(\nu_1 t + \varphi_1)] \\
& + E_3 E_2^2 \left( N_2 D(\omega - \nu_{12}) + \bar{N} D(\Delta) \right) \left( D_a(\Delta) + D_b(\Delta) \right) \\
& \times \exp\left(-i(2\nu_2 - \nu_3)t + i(2\varphi_2 - \varphi_3)\right) \Big] + \text{c.c.}
\end{aligned} \tag{10.153}$$

$C_1^{(3)}$  i  $S_1^{(3)}$  są odpowiednio dane wzorami:

$$\begin{aligned}
C_1^{(3)} = & \frac{\sqrt{\pi}}{8} \frac{\wp^4}{Ku} \left\{ E_1^3 \bar{N} \frac{\gamma_{ab}}{\gamma_a \gamma_b} (\omega - \nu_1) \mathcal{L}(\omega - \nu_1) \right. \\
& + E_1 E_2^2 \bar{N} \frac{\gamma_{ab}}{\gamma_a \gamma_b} \left[ (\omega - \nu_{12}) \mathcal{L}(\omega - \nu_{12}) + \frac{2}{\Delta} \right] \\
& + E_1 E_3^2 \bar{N} \frac{\gamma_{ab}}{\gamma_a \gamma_b} \left[ (\omega - \nu_{12}) \mathcal{L}(\omega - \nu_2) + \frac{1}{\Delta} \right] \\
& + E_2^2 E_1 N_2 \gamma_{ab} (\omega - \nu_1 + \Delta) \frac{\mathcal{L}(\omega - \nu_1)}{\Delta^2} \\
& + \frac{1}{4} E_3^2 E_1 N_4 \gamma_{ab} (\omega - \nu_1 + 2\Delta) \frac{\mathcal{L}(\omega - \nu_1)}{\Delta^2} \\
& + E_2^2 E_3 \Delta^{-2} \left\{ N_2 \gamma_{ab} (\omega - \nu_{12} + \Delta) \mathcal{L}(\omega - \nu_{12}) \cos \psi \right. \\
& + \left. \left. \left[ N_2 (\gamma_{ab}^2 - \Delta(\omega - \nu_{12})) \mathcal{L}(\omega - \nu_{12}) - \bar{N} \right] \sin \psi \right\} \right\},
\end{aligned} \tag{10.154}$$

gdzie

$$\psi = (2\nu_2 - \nu_1 - \nu_3)t + (2\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_3) \tag{10.155}$$

nazywamy względnym kątem fazowym,

$$\begin{aligned}
S_1^{(3)} = & \frac{\sqrt{\pi}}{8h^3} \frac{\wp^4}{Ku} \left\{ \frac{E_1^3 \bar{N} [\gamma_{ab}^2 \mathcal{L}(\omega - \nu_1) + 1]}{\gamma_a \gamma_b} \right. \\
& + E_1 E_2^2 \bar{N} \frac{\gamma_{ab}^2}{\gamma_a \gamma_b} \left[ \mathcal{L}(\omega - \nu_{12} + \frac{4}{\Delta^2}) \right] \\
& + E_1 E_3^2 \bar{N} \frac{\gamma_{ab}^2}{\gamma_a \gamma_b} \left[ \mathcal{L}(\omega - \nu_2 + \frac{1}{\Delta^2}) \right] \\
& + E_1 E_2^2 \Delta^{-2} [N_2 (\gamma_{ab}^2 - \Delta(\omega - \nu_1)) \mathcal{L}(\omega - \nu_1 - 2\bar{N})] \\
& + \frac{1}{4} E_1 E_3^2 \Delta^{-2} [N_4 (\gamma_{ab}^2 - 2(\omega - \nu_1) \Delta) \mathcal{L}(\omega - \nu_1 - 2\bar{N})] \\
& + E_2^2 E_3 \Delta^{-2} \left[ [N_2 (\gamma_{ab}^2 - 2(\omega - \nu_{12}) \Delta) \mathcal{L}(\omega - \nu_{12}) - \bar{N}] \cos \psi \right. \\
& \left. \left. - N_2 \gamma_{ab} (\omega - \nu_{12} + \Delta) \mathcal{L}(\omega - \nu_{12}) \sin \psi \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{10.156}$$

Na składowe pola otrzymamy równania będące uogólnieniem równania (10.126)

$$\begin{aligned}
\dot{E}_1 &= \alpha_1 E_1 - \beta_1 E_1^3 - \Theta_{12} E_1 E_2^2 - \Theta_{13} E_1 E_3^2 \\
&\quad - (\eta_{23} \cos \psi + \xi_{23} \sin \psi) E_2^2 E_3, \\
\dot{E}_2 &= \alpha_2 E_2 - \beta_2 E_2^3 - \Theta_{21} E_2 E_1^2 - \Theta_{23} E_2 E_3^2 \\
&\quad - (\eta_{13} \cos \psi + \xi_{23} \sin \psi) E_1 E_2 E_3, \\
\dot{E}_3 &= \alpha_3 E_3 - \beta_3 E_3^3 - \Theta_{12} E_1 E_2^2 - \Theta_{31} E_3 E_1^2 \\
&\quad - (\eta_{21} \cos \psi + \xi_{21} \sin \psi) E_2^2 E_1.
\end{aligned} \tag{10.157}$$

Współczynniki  $\alpha_n$  i  $\beta_n$  są określone przez (10.127) i (10.128), natomiast pozostałe wyrażają się wzorami:

$$\begin{aligned}
\Theta_{12} &= C_1 \cdot \left\{ \bar{N} \frac{\gamma_{ab}^2}{\gamma_a \gamma_b} [\mathcal{L}(\omega - \nu_{12}) + 4\Delta^{-2}] \right. \\
&\quad \left. - 2\bar{N} \Delta^{-2} + N_2 \Delta^{-2} [\gamma_{ab}^2 - (\omega - \nu_1) \Delta] \mathcal{L}(\omega - \nu_1) \right\},
\end{aligned} \tag{10.158}$$

$$\begin{aligned}
\Theta_{13} &= C_1 \cdot \left\{ \bar{N} \frac{\gamma_{ab}^2}{\gamma_a \gamma_b} [\mathcal{L}(\omega - \nu_2) + \Delta^{-2}] \right. \\
&\quad \left. - \frac{\bar{N}}{2\Delta^2} + \frac{N_4}{4\Delta^2} [\gamma_{ab}^2 - 2(\omega - \nu_1)] \mathcal{L}(\omega - \nu_1) \right\},
\end{aligned} \tag{10.159}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{23} &= C_1 \frac{1}{\Delta^2} \{ N_2 [\gamma_{ab}^2 - 2(\omega - \nu_{12}) \Delta] \mathcal{L}(\omega - \nu_{12}) - \bar{N} \}, \\
\xi_{23} &= -C_1 \cdot \frac{1}{\Delta^2} N_2 \gamma_{ab} (\omega - \nu_{12} + \Delta) \mathcal{L}(\omega - \nu_{12}),
\end{aligned} \tag{10.160}$$

$$\begin{aligned}\Theta_{21} &= C_1 \cdot \left\{ \overline{N} \frac{\gamma_{ab}^2}{\gamma_a \gamma_b} [\mathcal{L}(\omega - \nu_{12}) + 4\Delta^{-2}] \right. \\ &\quad \left. + \frac{N_2}{\Delta^2} [\gamma_{ab}^2 - (\omega - \nu_2)\Delta] \mathcal{L}(\omega - \nu_2) - \frac{2\overline{N}}{\Delta^2} \right\},\end{aligned}\quad (10.161)$$

$$\begin{aligned}\Theta_{23} &= C_1 \cdot \left\{ \overline{N} \frac{\gamma_{ab}^2}{\gamma_a \gamma_b} \left[ \mathcal{L}(\omega - \nu_{23}) + \frac{4}{\Delta^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{N_2}{\Delta^2} [\gamma_{ab}^2 - (\omega - \nu_2)\Delta] \mathcal{L}(\omega - \nu_2) - \frac{2\overline{N}}{\Delta^2} \right\},\end{aligned}\quad (10.162)$$

$$\begin{aligned}\xi_{13} &= -C_1 \cdot \frac{1}{\Delta^2} N_2 \gamma_{ab} \left[ (\omega - \nu_{23} - \Delta) \mathcal{L}(\omega - \nu_{23}) \right. \\ &\quad \left. + (\omega - \nu_{12} + \Delta) \mathcal{L}(\omega - \nu_{12}) \right],\end{aligned}\quad (10.163)$$

$$\begin{aligned}\eta_{13} &= C_1 \frac{1}{\Delta^2} \left\{ N_2 [\gamma_{ab}^2 + (\omega - \nu_{23})\Delta] \mathcal{L}(\omega - \nu_{23}) \right. \\ &\quad \left. + N_2 [\gamma_{ab}^2 - (\omega - \nu_{12})\Delta] \mathcal{L}(\omega - \nu_{12}) + 2\overline{N} \right\},\end{aligned}\quad (10.164)$$

$$\begin{aligned}\Theta_{31} &= C_1 \cdot \left\{ \overline{N} \frac{\gamma_{ab}^2}{\gamma_a \gamma_b} \left[ \mathcal{L}(\omega - \nu_2) + \frac{1}{\Delta^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{N_4}{4\Delta^2} [\gamma_{ab}^2 + 2(\omega - \nu_3)\Delta] \mathcal{L}(\omega - \nu_3) - \frac{2\overline{N}}{2\Delta^2} \right\},\end{aligned}\quad (10.165)$$

$$\begin{aligned}\Theta_{32} &= C_1 \cdot \left\{ \overline{N} \frac{\gamma_{ab}^2}{\gamma_a \gamma_b} \left[ \mathcal{L}(\omega - \nu_{23}) + \frac{4}{\Delta^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{N_2}{\Delta^2} [\gamma_{ab}^2 + (\omega - \nu_3)\Delta] \mathcal{L}(\omega - \nu_3) - \frac{2\overline{N}}{2\Delta^2} \right\},\end{aligned}\quad (10.166)$$

$$\eta_{21} = C_1 \frac{1}{\Delta^2} \left\{ N_2 [\gamma_{ab}^2 + (\omega - \nu_{23})\Delta] \mathcal{L}(\omega - \nu_{23}) - \overline{N} \right\}, \quad (10.167)$$

$$\xi_{21} = -C_1 \cdot \frac{1}{\Delta^2} N_2 \gamma_{ab} \left[ (\omega - \nu_{23} - \Delta) \mathcal{L}(\omega - \nu_{23}) \right]. \quad (10.168)$$

Stała  $C_1$  określona jest wzorem

$$C_1 = \frac{\sqrt{\pi} \wp^4 \nu}{16\epsilon_0 \hbar^3 K u}. \quad (10.169)$$

Częstości i fazy obliczamy z równań

$$\begin{aligned}\nu_1 + \dot{\varphi}_1 &= \Omega_1 + \sigma_1 + \rho_1 E_1^2 + \tau_{12} E_2^2 + \tau_{13} E_3^2 \\ &\quad + E_2^2 E_3 E_1^{-1} (\eta_{23} \sin \psi - \xi_{23} \cos \psi),\end{aligned}\quad (10.170)$$

$$\begin{aligned}\nu_2 + \dot{\varphi}_2 &= \Omega_2 + \sigma_2 + \rho_2 E_2^2 + \tau_{21} E_1^2 + \tau_{23} E_3^2 \\ &+ E_3 E_1 (\eta_{13} \sin \psi - \xi_{13} \cos \psi),\end{aligned}\quad (10.171)$$

$$\begin{aligned}\nu_3 + \dot{\varphi}_3 &= \Omega_3 + \sigma_3 + \rho_3 E_3^2 + \tau_{31} E_1^2 + \tau_{32} E_2^2 \\ &+ E_2^2 E_1 E_3^{-1} (\eta_{21} \sin \psi - \xi_{21} \cos \psi),\end{aligned}\quad (10.172)$$

gdzie współczynniki  $\sigma_n$  i  $\rho_n$  dane są przez (10.136) i (10.137),  $\eta_{ik}$  i  $\xi_{ik}$  przez (10.160), (10.163), (10.164) i (10.168). Współczynniki  $\tau_{jk}$  ( $j, k = 1, 2, 3$ ) określone są wzorami:

$$\begin{aligned}\tau_{12} &= -C_1 \left\{ \frac{\bar{N} \gamma_{ab}}{\gamma_a \gamma_b} \left[ (\omega - \nu_{12}) \mathcal{L}(\omega - \nu_{12}) + \frac{2}{\Delta} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{N_2 \gamma_{ab}}{\Delta^2} (\omega - \nu_1 + \Delta) \mathcal{L}(\omega - \nu_1) \right\},\end{aligned}\quad (10.173)$$

$$\begin{aligned}\tau_{13} &= -C_1 \left\{ \frac{\bar{N} \gamma_{ab}}{\gamma_a \gamma_b} \left[ (\omega - \nu_2) \mathcal{L}(\omega - \nu_2) + \frac{1}{\Delta} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{N_4 \gamma_{ab}}{4\Delta^2} (\omega - \nu_1 + 2\Delta) \mathcal{L}(\omega - \nu_1) \right\},\end{aligned}\quad (10.174)$$

$$\begin{aligned}\tau_{21} &= -C_1 \left\{ \frac{\bar{N} \gamma_{ab}}{\gamma_a \gamma_b} \left[ (\omega - \nu_{12}) \mathcal{L}(\omega - \nu_{12}) - \frac{2}{\Delta} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{N_2 \gamma_{ab}}{\Delta^2} (\omega - \nu_2 - \Delta) \mathcal{L}(\omega - \nu_2) \right\},\end{aligned}\quad (10.175)$$

$$\begin{aligned}\tau_{23} &= -C_1 \left\{ \frac{\bar{N} \gamma_{ab}}{\gamma_a \gamma_b} \left[ (\omega - \nu_{23}) \mathcal{L}(\omega - \nu_{23}) + \frac{2}{\Delta} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{N_2 \gamma_{ab}}{\Delta^2} (\omega - \nu_2 + \Delta) \mathcal{L}(\omega - \nu_2) \right\},\end{aligned}\quad (10.176)$$

$$\begin{aligned}\tau_{31} &= -C_1 \left\{ \frac{\bar{N} \gamma_{ab}}{\gamma_a \gamma_b} \left[ (\omega - \nu_2) \mathcal{L}(\omega - \nu_2) - \frac{1}{\Delta} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{N_4 \gamma_{ab}}{4\Delta^2} (\omega - \nu_3 - 2\Delta) \mathcal{L}(\omega - \nu_3) \right\},\end{aligned}\quad (10.177)$$

$$\begin{aligned}\tau_{32} &= -C_1 \left\{ \frac{\bar{N} \gamma_{ab}}{\gamma_a \gamma_b} \left[ (\omega - \nu_{23}) \mathcal{L}(\omega - \nu_{23}) - \frac{2}{\Delta} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{N_2 \gamma_{ab}}{\Delta^2} (\omega - \nu_3 - \Delta) \mathcal{L}(\omega - \nu_3) \right\}.\end{aligned}\quad (10.178)$$

### 10.5.4 Przypadek 2-modowy

Przypadek ten opisany jest równaniami

$$\dot{E}_1 = \alpha_1 E_1 - \beta_1 E_1^3 - \Theta_{12} E_1 E_2^2, \quad (10.179)$$

$$\dot{E}_2 = \alpha_2 E_2 - \Theta_{21} E_2 E_1^2 - \beta_2 E_2^3, \quad (10.180)$$

które otrzymuje się z równań (10.157), kładąc  $E_3 = 0$ . Współczynniki  $\alpha_n, \beta_n, \Theta_{12}$  i  $\Theta_{21}$  dane są wzorami (10.127), (10.128), (10.158) i (10.161). Mnożąc równanie (10.179) przez  $2E_1$ , a równanie (10.180) przez  $2E_2$ , otrzymujemy układ równań

$$2E_1 \dot{E}_1 = 2\alpha_1 E_1^2 - 2\beta_1 E_1^4 - 2\Theta_{12} E_1^2 E_2^2, \quad (10.181)$$

$$2E_2 \dot{E}_2 = 2\alpha_2 E_2^2 - \Theta_{21} E_2^2 E_1^2 - \beta_2 E_2^4, \quad (10.182)$$

które po podstawieniu kwadratowych amplitud

$$X = E_1^2, \quad Y = E_2^2 \quad (10.183)$$

przybiera postać

$$\begin{aligned} \dot{X} &= 2X(\alpha_1 - \beta_1 X - \Theta_{12} Y), \\ \dot{Y} &= 2Y(\alpha_2 - \beta_2 Y - \Theta_{21} X). \end{aligned} \quad (10.184)$$

Przypadek stacjonatny  $\dot{X} = 0, \dot{Y} = 0$  przedyskutujemy graficznie na płaszczyźnie  $X, Y$ . Dla dyskusji ważne są 4 proste

$$\begin{aligned} L_1 : \quad & \alpha_1 - \beta_1 X - \Theta_{12} Y = 0, \\ L_2 : \quad & \alpha_2 - \beta_2 Y - \Theta_{21} X = 0, \\ L_3 : \quad & X = 0, \\ L_4 : \quad & Y = 0. \end{aligned} \quad (10.185)$$

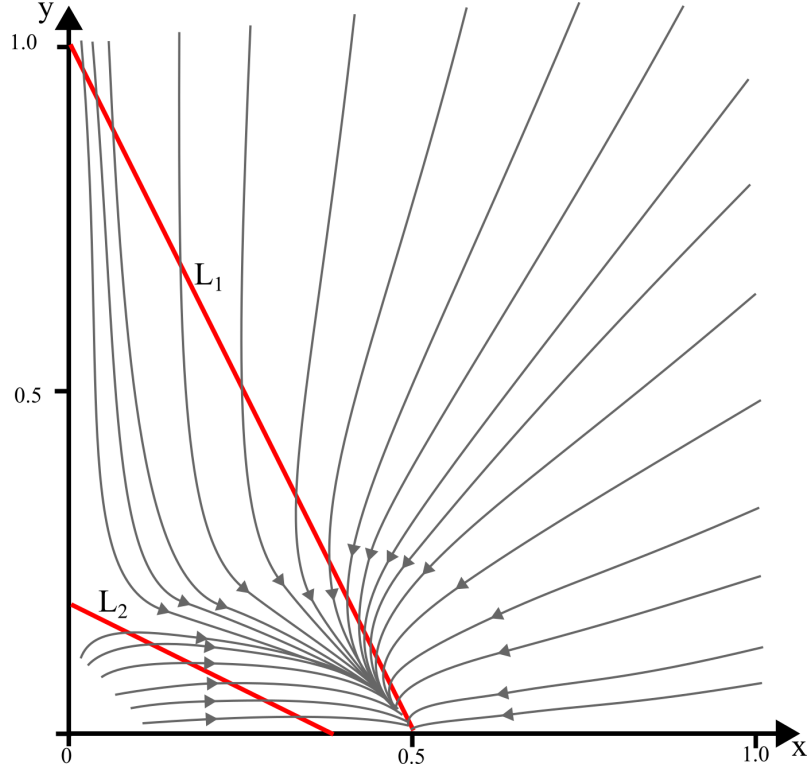
Rysunki... przedstawiają zależności  $Y = Y(X)$  dla następujących wartości współczynników  $\alpha_n, \beta_n$  oraz  $\Theta_{21}$  i  $\Theta_{12}$ :

1.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1, \quad \alpha_2 = 0, 4, \\ \beta_1 &= \beta_2 = 2, \\ \Theta_{12} &= \Theta_{21} = 1, \end{aligned} \quad (10.186)$$

2.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_2 = 1, \\ \beta_1 &= \beta_2 = 2, \\ \Theta_{12} &= \Theta_{21} = 1, \end{aligned} \quad (10.187)$$

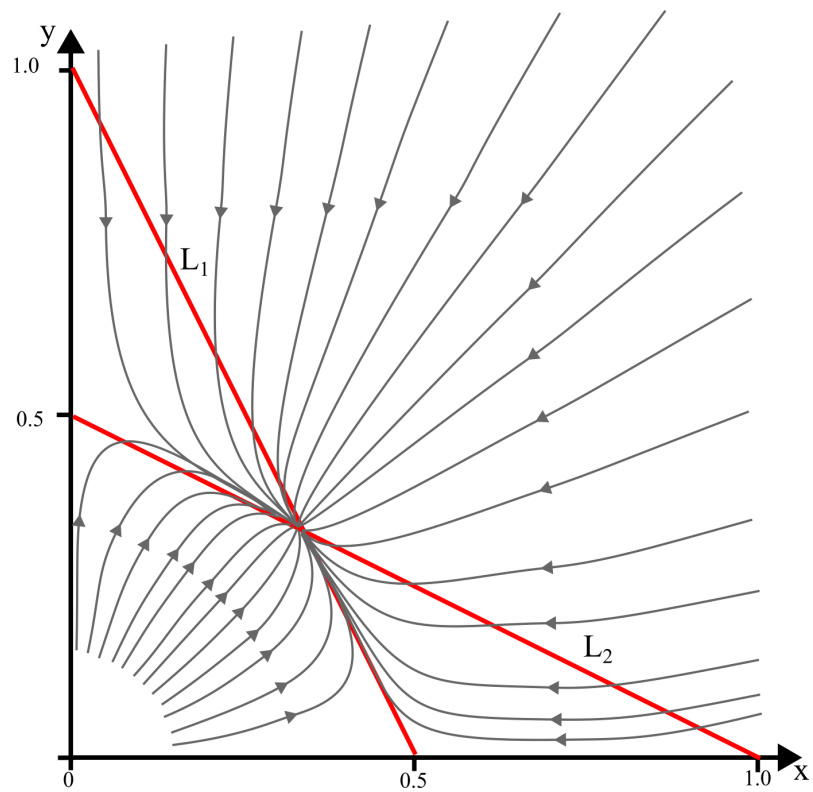


Rysunek 10.9: Rysunek do danych przypadku 1, (10.186)

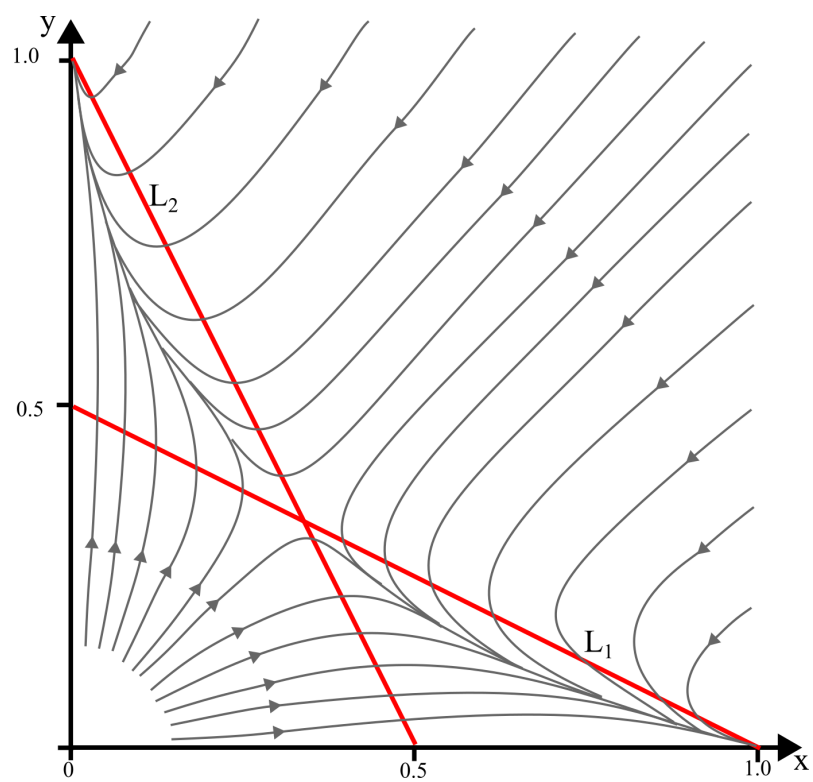
3.

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \alpha_2 = 1, \\
 \beta_1 &= \beta_2 = 1, \\
 \Theta_{12} &= \Theta_{21} = 2.
 \end{aligned}
 \tag{10.188}$$

Ponieważ w tym przypadku  $\beta_1\beta_2 = 4 > \Theta_{12}\Theta_{21} = 1$ , mówimy o **słabym sprzężeniu modów**. Słabe występuje również w przypadku 2) ( $\beta_1\beta_2 = 4 > \Theta_{12}\Theta_{21} = 1$ ), natomiast w przypadku 3 występuje silne sprzężenie modów ( $\beta_1\beta_2 < \Theta_{12}\Theta_{21} = 4$ ). Fizycznie oznacza to tyle, że przy słabym sprzężeniu możliwa jest generacja 2 częstości z równym natężeniem, natomiast przy silnym sprzężeniu występuje "przeciąganie" częstości, jeden mod "niszczy" drugi. W związku z tym na rysunkach przypadków 1 i 2, odpowiadającym przypadkom słabego sprzężenia, wszystkie krzywe zbiegają się w jednym punkcie, będącym punktem równowagi trwałej (punkt (0.5,0)) na rys. 10.9 punkt przecięcia  $L_1$  i  $L_2$  na rys. 10.10, natomiast na rys. 10.11 krzywe "uciekają" do 2 punktów. Wybór punktu (a więc czy mod 1 "niszczy" 2, czy odwrotnie) zależy od warunków początkowych, mamy tu więc swego rodzaju zjawisko histerezy.



Rysunek 10.10: Rysunek do danych przypadku 2, (10.187)



Rysunek 10.11: Rysunek do danych przypadku 3, (10.188)

### 10.5.5 Wyliczenie faz i amplitud dla sera 2-modowego

Stacjonarne (tzn.  $\dot{E}_n = 0, n = 1, 2$ ) rozwiązania równań (10.179, 10.180) mają postać

$$\begin{aligned} E_1^2 &= \frac{\alpha_1 \beta_2 - \Theta_{12} \alpha_2}{\beta_1 \beta_2 - \Theta_{12} \Theta_{21}}, \\ E_2^2 &= \frac{\beta_1 \alpha_2 - \Theta_{21} \alpha_1}{\beta_1 \beta_2 - \Theta_{12} \Theta_{21}}. \end{aligned} \quad (10.189)$$

Równania (10.170), (10.171) i (10.172) na częstości i fazy sprowadzają się dla przypadku 2-modowego do równań

$$\begin{aligned} \nu_1 + \dot{\varphi}_1 &= \Omega_1 + \sigma_1 + \rho_1 E_1^2 + \tau_{12} E_2^2, \\ \nu_2 + \dot{\varphi}_2 &= \Omega_2 + \sigma_2 + \rho_2 E_2^2 + \tau_{21} E_1^2. \end{aligned} \quad (10.190)$$

Dla uproszczenia kładzie się  $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2$ . Podstawiając do równań (10.190)  $E_1^2$  i  $E_2^2$  wyliczone z układu (10.189), można również posłużyć się wielkościami  $E_n$  wziętymi z eksperymentu. Rozważmy przypadek, kiedy  $\omega = \nu_{12} = (1/2)(\nu_1 + \nu_2)$  ("strojenie środkowe"),  $\omega - \nu_1 = (1/2)\Delta = \nu_2 - \omega$ . Wówczas dla współczynników występujących w układzie równań (10.189) słuszne jest następujące oszacowanie

$$\beta_1 \approx \beta_2 \approx \Theta_{12} \approx \Theta_{21} \simeq \frac{C_1 \bar{N}}{\nu \gamma_a \gamma_b} =: \beta, \quad (10.191)$$

$$\rho_2 \simeq -\rho_1 = \frac{2\gamma_{ab}\beta}{\Delta} := \rho, \quad (10.192)$$

$$\tau_{12} \simeq -\tau_{21} \simeq -\rho. \quad (10.193)$$

Zakładając, że  $Q_1 = Q_2 = Q$ , otrzymamy następującą postać współczynnika  $\alpha$ :

$$\alpha_1 \simeq \alpha_2 = \frac{\nu}{2Q} \left[ \frac{\mathcal{N} Z_1(\Delta/2)}{Z_i(0)} - 1 \right] =: \alpha. \quad (10.194)$$

Przy powyższych założeniach otrzymujemy  $E_1^2 - E_2^2 = (1/2)(\alpha/\beta)$  oraz

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \Omega_1 + \sigma_1 - \rho \frac{\alpha}{\beta}, \\ \nu_2 &= \Omega_2 + \sigma_2 + \rho \frac{\alpha}{\beta}. \end{aligned} \quad (10.195)$$

Częstość  $\nu_2 - \nu_1$ , zwana **częstością dudnień**, jest w tym wypadku równa

$$\nu_2 - \nu_1 \simeq \Delta + (\sigma_2 - \sigma_1) + \frac{4\gamma_{ab}\alpha}{\Delta}. \quad (10.196)$$

Zauważmy, że przy założeniach (10.191)-(10.194)  $\beta_1 \beta_2 = \Theta_{12} \Theta_{21}$ , więc otrzymujemy 0 w mianownikach wyrażeń (10.189). Należy więc dokładniej wyznaczyć parametry  $\beta$  i  $\Theta$ . W tym celu trzeba zauważyć, że wyrażenie  $(\beta^2 - \Theta^2)/(\bar{N} + N_2)$  ma stały znak. Wielkość  $\bar{N} + N_2$  musi być dodatnia, gdyż jest to warunek generacji promieniowania. Przy konstrukcji lasera trzeba stworzyć takie warunki, by  $\bar{N} > 0$  i  $N_2 < \bar{N}$ , co uzyskuje się przez odpowiednie charakterystyki wyładowania gazowego wewnątrz wnęki.

### 10.5.6 Laser 3-modowy

Rozpatrzmy pewne szczególne przypadki równań (10.157) i (10.170)-(10.172). Przy stabilnej pracy modów kąt fazowy  $\psi$  jest liniową funkcją czasu, a efekty z występowaniem  $\psi$  w równaniach (10.157), (10.170)-(10.172) uśredniają się i można pominąć człony trygonometryczne w tych równaniach. W wypadku stabilnej pracy modów  $\dot{E}_n = 0$  i kładąc  $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_3 = 0$  otrzymujemy następujące związki

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \beta_1 E_1^2 + \Theta_{12} E_2^2 + \Theta_{13} E_3^2, \\ \alpha_2 &= \beta_2 E_2^2 + \Theta_{21} E_1^2 + \Theta_{23} E_3^2, \\ \alpha_3 &= \beta_3 E_3^2 + \Theta_{31} E_1^2 + \Theta_{32} E_2^2,\end{aligned}\tag{10.197}$$

oraz

$$\begin{aligned}\nu_1 &= \Omega_1 + \sigma_1 + \rho_1 E_1^2 + \tau_{12} E_2^2 + \tau_{13} E_3^2, \\ \nu_2 &= \Omega_2 + \sigma_2 + \rho_2 E_2^2 + \tau_{21} E_1^2 + \tau_{23} E_3^2, \\ \nu_3 &= \Omega_3 + \sigma_3 + \rho_3 E_3^2 + \tau_{31} E_1^2 + \tau_{32} E_2^2,\end{aligned}\tag{10.198}$$

. W wypadku, kiedy nie można pominąć efektów związanych z kątem fazowym  $\psi$ , dyskutuje się istnienie tzw. tonów kombinacyjnych, ntzn. tonów o częstościach  $\nu'_3 = 2\nu_2 - \nu_1$  i  $\nu'_0 = 2\nu_1 - \nu_2$ . Rozważmy sytuację, w której natężenie  $E_3$  jest wiele mniejsze od natężeń  $E_1$  i  $E_2$ , tzn. wielkość wzbudzenia jest mała w stosunku do progu wzbudzenia generacji 3-modowej. Zakładając, że  $\gamma_{ab} \ll \Delta \ll Ku$  i  $\nu_2 \cong \omega$ , mamy

$$\begin{aligned}\eta_{21} &= -\frac{C_1}{\Delta^2}(\bar{N} + 2N_2), \\ \xi_{21} &\cong 0.\end{aligned}\tag{10.199}$$

Jeśli  $\nu'_3 \cong \nu$ , wówczas kąt fazowy  $\psi$  bliski jest zeru, tak że  $\sin \psi \cong 0$ ,  $|\cos \psi| \cong 1$ , a na natężenie  $E_3$  otrzymujemy z (10.157) wyrażenie

$$E_3 \cong \frac{\eta_{21} E_2^2 E_1 \cos \psi}{\alpha_3 - \Theta_{31} E_1^2 - \Theta_{32} E_2^2}.\tag{10.200}$$

Wyrażenie

$$\alpha'_3 = \alpha_3 - \Theta_{31} E_1^2 - \Theta_{32} E_2^2\tag{10.201}$$

opisuje wzmocnienie modu trzeciego w obecności modów 1 i 2, tzn. generacja modu 3 jest możliwa dla  $\alpha_3 > 0$ . Ze wzorów (10.199) i (10.200), przy założeniach  $\sin \psi \cong 0$ ,  $|\cos \psi| = 1$ , otrzymujemy, że

$$E_3 \cong -C_1 \frac{|\bar{N} + 2N_2| E_2^2 E_1}{\Delta^2 (\alpha_3 - \Theta_{31} E_1^2 - \Theta_{32} E_2^2)}.\tag{10.202}$$

Jest to wyrażenie na natężenie tonu kombinacyjnego. Jeśli chce się eksperymentalnie obserwować ton kombinacyjny ( $2\nu_2 - \nu_1$ ), stroi się rezonator w ten sposób, że  $\Omega_1$  jest bliżej częstości przejścia

$a \rightarrow b$ .  $\omega$  niż  $\Omega_3$ , natomiast  $\Omega_2$  jest nieco powyżej  $\omega$ . Wówczas pomijając człony zawierające  $\Delta^{-2}$ , mamy

$$\alpha_3 \cong -\frac{1}{2} \frac{\nu}{Q_3 G_3}, \quad (10.203)$$

gdzie

$$G_3 \cong \left[ 1 - \frac{\bar{N} Z_i(\Delta)}{N_T Z_i(0)} \right]^{-1}. \quad (10.204)$$

Z powyższych wyrażeń otrzymujemy, że stosunek natężeń  $E_3/E_1$ , który jest wielkością mierzalną eksperymentalnie, wyraża się jako

$$\frac{E_3}{E_1} \cong \frac{2C_1}{\nu \Delta^2} Q_3 G_3 |\bar{N} + 2N_2|. \quad (10.205)$$

Korzystając ze związków (10.179,10.180) dla  $n = 3$ , zapiszemy (10.205) w postaci

$$\frac{E_3}{E_1} \cong \frac{1}{8} \frac{(\wp E_2)^2}{\hbar^2 \gamma_a \gamma_b} \frac{\gamma_a \gamma_b}{\Delta^2} G_3 \left| 1 + \frac{2N_2}{\bar{N}} \right| \exp \left[ \left( \frac{\Delta}{Ku} \right) \right]. \quad (10.206)$$

### 10.5.7 Zjawisko synchronizacji modów

Zjawisko to zwane również **zamykaniem częstości**,<sup>16</sup> zaobserwowane po raz pierwszy przez Javana i Forka, polega na tym, że jeśli laser pracuje w reżimie 3-modowym ( $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ ) i częstości dudnienia ( $\nu_2 - \nu_1$ ), ( $\nu_3 - \nu_2$ ) różnią się niewiele od siebie (np.  $(\nu_2 - \nu_1) - (\nu_3 - \nu_2) = 2\nu_2 - \nu_1 - \nu_3$  jest rzędu 1 kHz), wówczas następuje silny skok dudnienia. Efekt ten tłumaczymy w następujący sposób. Z równań (10.170)-(10.172), przy założeniach  $2\nu_2 - \nu_1 - \nu_3 \rightarrow 0$  oraz  $2\Omega_2 - \Omega_1 - \Omega_3 \rightarrow 0$ , wyliczamy  $\psi$

$$\dot{\psi} = \sigma + A \sin \psi + B \cos \psi, \quad (10.207)$$

gdzie

$$\sigma = 2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3, \quad (10.208)$$

a  $\psi$  jest dane przez (10.155).  $A$  i  $B$  są wolnozmiennymi funkcjami  $E_n, \xi_{nm}$  i  $\eta_{nm}$ . Dla wyliczenia  $A$  i  $B$  założymy, że  $\gamma_{ab} \ll \Delta \ll Ku$ . Wówczas

$$\begin{aligned} \eta_{23} &\cong \eta_{21} \cong -\frac{2C_1}{\Delta^2} [\bar{N} - 2N_2], \\ \eta_{13} &\cong -\frac{C_1}{\Delta^2} [\bar{N} + 2N_2], \\ \xi_{23} &\cong \xi_{21} \cong \xi_{13} \cong 0. \end{aligned} \quad (10.209)$$

Zakładając, że  $E_1 \cong E_3$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} A &\cong \frac{2C_1}{\Delta^2} \{ (\bar{N} + 2N_2) E_2^2 + 2(\bar{N} - 2N_2) E_1^2 \}, \\ B &\cong 0. \end{aligned} \quad (10.210)$$

---

<sup>16</sup>ang. *frequency locking*

Rozwiązanie równania różniczkowego (10.207) ma postać

$$t(\psi) = \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{dx}{\sigma + A \sin x + B \cos x} = \int_{\psi_0 + \vartheta}^{\psi + \vartheta} \frac{dy}{\sigma + r \sin y}, \quad (10.211)$$

gdzie

$$r = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \sin \vartheta = \frac{A}{r}, \quad \cos \vartheta = \frac{B}{r}. \quad (10.212)$$

Całka nieoznaczona występująca w (10.211) jest równa

$$\frac{dy}{\sigma + r \sin y} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\sigma^2 - r^2}} \arctan \frac{\sigma \tan(y/2) + r}{\sqrt{\sigma^2 - r^2}}, & \text{gd}y \sigma^2 > r^2, \\ \frac{1}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}} \ln \left| \frac{\sigma \tan(y/2) + r - \sqrt{r^2 - \sigma^2}}{\sigma \tan(y/2) + r + \sqrt{r^2 - \sigma^2}} \right|, & \text{gd}y \sigma^2 < r^2 \end{cases}. \quad (10.213)$$

W związku z powyższym charakter funkcji (10.211) zależy od tego, czy

$$\sqrt{A^2 + B^2} < |\sigma|, \quad \text{czy} \quad \sqrt{A^2 + B^2} > |\sigma|. \quad (10.214)$$

1. Niech  $\sqrt{A^2 + B^2} < |\sigma|$ . Wówczas asymptotycznie (tzn. dla  $t \rightarrow \infty$ )  $\psi = \sigma t + \text{const.}$  Podstawiając tę wielkość do równań (10.170)-(10.172), otrzymujemy

$$\sigma_n = \Omega_n + \sigma_n. \quad (10.215)$$

2. Niech  $\sqrt{A^2 + B^2} > |\sigma|$ . Zapiszmy zdrugie z rozwiązań (10.213) w postaci

$$-\frac{2}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}} \text{artanh} \frac{\sigma \tan(y/2) + r}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}}, \quad (\sigma^2 < r^2). \quad (10.216)$$

Dowodzi się, że wielkość ta zmierza do nieskończoności dla

$$\psi \rightarrow -\arcsin \frac{\sigma}{\sqrt{A^2 + B^2}} - \arctan \frac{B}{A}, \quad (10.217)$$

( $\psi$  bierze się stąd, że wyrażenie (10.216) trzeba wziąć w granicach całkowania  $(\psi_0 + \vartheta, \psi + \vartheta)$ ).

Innymi słowy

$$\psi \rightarrow -\arcsin \frac{\sigma}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (10.218)$$

dla  $t \rightarrow \infty$  ( $B/A \rightarrow 0$  zgodnie z (10.210)). Względny kąt fazowy przyjmuje więc stałą wartość

$$\psi = 2\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_3 = -\arcsin \frac{\sigma}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad (10.219)$$

co daje w efekcie ustalenie ("zwarcie") się częstości  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  (ang. *self locking*, względnie *mod locking*). Krytyczna wartość  $|\sigma|$ , przy której następuje ten efekt, przy założeniu  $E_2 \gg E_1 \approx E_3$ , jest równa

$$|\sigma| = \frac{1}{8} \frac{\bar{N} + 2N_2}{\bar{N}_T} \left( \frac{\wp E_2}{\hbar \Delta} \right)^2 \frac{\nu}{Q}. \quad (10.220)$$

Efekt "zamykania" częstości obserwuje się również w pewnych układach elektrycznych (generatory na triodach, układy Cutlera).

### 10.5.8 Zagadnienie zmian i pulsacji populacji

Za gęstości obsadzeń poziomów energetycznych  $a$  i  $b$  odpowiedzialne są elementy macierzowe  $\rho_{aa}, \rho_{bb}$ , które zostały określone przez (10.61). Przepiszemy ten wzór w postaci

$$\begin{aligned} \rho_{aa}(z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^t dt_0 \int dz \delta(z - z_0 + vt - vt_0) \\ &\times \sum_{\alpha=a,b} \lambda_{\alpha}(z_0, t_0, \nu) \rho_{aa}(\alpha, z_0, t_0, v, t). \end{aligned} \quad (10.221)$$

Biorąc drugi rząd przybliżenia (p. (10.68)) i podstawiając tam odpowiednie wyrażenia na  $V(t'')$  i  $V(t''')$ , otrzymamy po przecalkowaniu

$$\begin{aligned} \rho_{aa}(z, t) &= \frac{\Lambda_a(z, t)}{\gamma_a} + \left( \frac{\Lambda_a(z, t)}{\gamma_a} - \frac{\Lambda_b(z, t)}{\gamma_b} \right) \\ &\times \frac{1}{8} \frac{\wp^2}{Ku} \sum_{\mu} \sum_{\rho} \left\{ E_{\mu} E_{\rho} D_a(\nu_{\mu} - \nu_{\rho}) i Z(\omega - \nu_{\rho}) \right. \\ &\times \exp(i[(\nu_{\mu} - \nu_{\rho})t + (\varphi_{\mu} - \varphi_{\rho})]) + \text{c.c} \left. \right\} \cos \left[ (n_{\mu} - n_{\rho}) \frac{\pi z}{L} \right]. \end{aligned} \quad (10.222)$$

Pominięto tu szybkozmienne oscylacje przestrzenne, tak że pozostały tylko częstotliwości wolnozmiennne - dudnieniowe. W przybliżeniu 1- modowym

$$\rho_{aa}(z, t) = \frac{\Lambda_a(z, t)}{\gamma_a} - \left[ N(z, t) \frac{1}{4} \frac{(\wp E_1)^2}{\gamma_a Ku} Z_i(\omega - \nu_1) \right], \quad (10.223)$$

gdzie, jak poprzednio

$$N(z, t) = \frac{\Lambda_a(z, t)}{\gamma_a} - \frac{\Lambda_b(z, t)}{\gamma_b}.$$

Przy założeniach upraszczających  $\gamma_{ab} \sim \gamma_a \gg \Delta$  oraz  $\Delta \ll Ku$  otrzymujemy wyrażenie

$$\begin{aligned} \rho_{aa}(z, t) &= N(z, t) \frac{\sqrt{\pi} \wp^2}{4Ku\gamma_a} \left\{ E_1^2 \exp \left[ -\frac{(\omega - \nu_1)^2}{(Ku)^2} \right] \right. \\ &+ E_2^2 \exp \left[ -\frac{(\omega - \nu_2)^2}{(Ku)^2} \right] \left. \right\} \\ &+ N(z, t) \frac{\sqrt{\pi} \wp^2}{4Ku\Delta} E_1 E_2 \left\{ \exp \left[ -\frac{(\omega - \nu_1)^2}{(Ku)^2} \right] \right. \\ &+ \exp \left[ -\frac{(\omega - \nu_2)^2}{(Ku)^2} \right] \left. \right\} \cos \left( \frac{\pi z}{L} \right) \sin(\nu_2 - \nu_1) t. \end{aligned} \quad (10.224)$$

Wielkości występujące w tym wzorze trudno jest na ogół mierzyć doświadczalnie. Wyznaczyć natomiast można z eksperymentu stosunek amplitudy pulsacji o częstotliwości  $\Delta \cong \nu_2 - \nu_1$  do zmiany populacji, który wyraża się w przybliżeniu wzorem

$$\frac{2E_1 E_2}{E_1^2 + E_2^2} \frac{\gamma_a}{\Delta} \cos \frac{\pi z}{L}.$$

### 10.5.9 Prostsza wersja teorii Lamba

W jednej ze swych prac podał Lamb uproszczoną wersję teorii działania lasera.<sup>17</sup> Uproszczenie to polegało na zaniedbaniu ruchu atomów znajdujących się we wnętrzu rezonansowej lasera. Układ atomów opisany jest macierzą gęstości  $\rho(\mathbf{r}, t)$  (atom wzbudzony w czasie  $t_0 \leq t$ , w chwili  $t$  znajduje się w punkcie  $\mathbf{r}$ ). Rozpatrując jak poprzednio równanie ewolucji w czasie

$$i\dot{\rho} = [H, \rho] - \frac{1}{2}(\Gamma\rho + \rho\Gamma) + i\Lambda, \quad (10.225)$$

gdzie operator Hamiltona jest dany jako macierz

$$H = \begin{pmatrix} W_a & V(t) \\ V(t) & W_b \end{pmatrix},$$

$\Gamma$  jest wyrazem dyssypacyjnym

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_a & 0 \\ 0 & \gamma_b \end{pmatrix},$$

natomiast  $\Lambda$  odpowiada za pompowanie optyczne

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_a & 0 \\ 0 & \Lambda_b \end{pmatrix}.$$

Lamb nie przeprowadza dyskusji własności operatora  $\Lambda$ , który w ogólności powinien być taki, by zachowywał własności macierzy  $\rho$  (dodatnią określoność). Oznaczając  $\omega = W_a - W_b$  oraz  $\gamma_{ab} = (\gamma_a + \gamma_b)/2$ , otrzymujemy z (10.225) równanie

$$\dot{\rho}_{ab} = -i\omega\rho_{ab} - \gamma_{ab}\rho_{ab} + iV(t)(\rho_{aa} - \rho_{bb}). \quad (10.226)$$

Założmy, że  $\rho_{aa} - \rho_{bb} = \text{const}$ . Podstawiając

$$V(t) = -\frac{1}{2} \frac{\wp}{\hbar} \sum_{\mu} E_{\mu}(t) U_{\mu}(z) \exp[-i(\nu_{\mu}t + \varphi_{\mu})] + \text{c.c.} \quad (10.227)$$

otrzymujemy, że

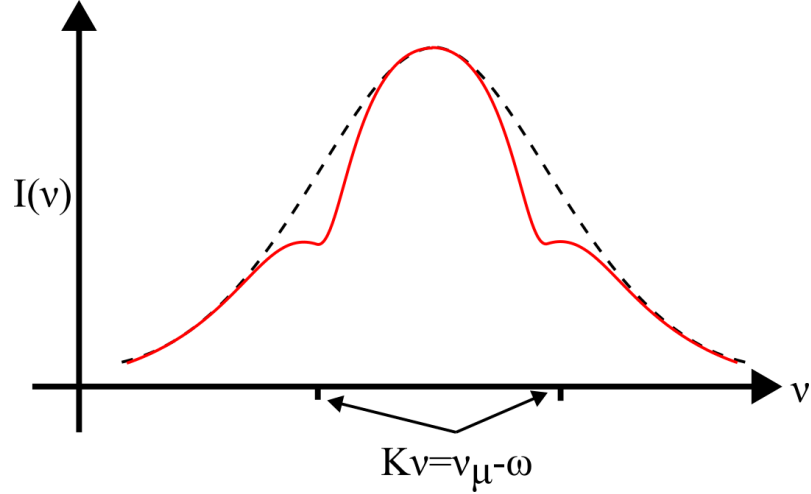
$$\begin{aligned} \rho_{ab} &= -\frac{1}{2} \frac{\wp}{\hbar} \sum_{\mu} E_{\mu}(t) U_{\mu}(z) D(\omega - \nu_{\mu})(\rho_{aa} - \rho_{bb}) \\ &\times \exp[-i(\nu_{\mu}t + \varphi_{\mu})] + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (10.228)$$

Mając  $\rho_{ab}$ , otrzymujemy z równań (10.62)

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{aa} &= -\gamma_a\rho_{aa} + R(\rho_{bb} - \rho_{aa}) + \Lambda_a, \\ \dot{\rho}_{bb} &= -\gamma_b\rho_{bb} + R(\rho_{aa} - \rho_{bb}) + \Lambda_b, \end{aligned} \quad (10.229)$$

---

<sup>17</sup>W.E. Lamb, jr, Lectures in Theoretical Physics, Vol. II, eds. W.E. Brittin, B.W. Downs, New York 1960, s. 472.



Rysunek 10.12: Efekt "wypalonych dziur"

gdzie

$$R = \frac{1}{4} \left( \frac{\wp}{\hbar} \right)^2 \sum_{\lambda} \sum_{\mu} E_{\mu} E_{\lambda} U_{\mu}(z) U_{\lambda}(z) \times D(\omega - \nu_{\mu}) \exp[i(\nu_{\lambda} - \nu_{\mu})t + i(\varphi_{\lambda} - \varphi_{\mu})] + \text{c.c} \quad (10.230)$$

$R$  nazywane jest "stałą prędkości" (ang. *rate constant*). Jeżeli pominąć pulsację  $R$  i człony zależne od oddziaływania modów ( $\lambda \neq \mu$ ), wówczas otrzymamy

$$R = \frac{\wp^2}{2\hbar^2} \gamma_{ab} \sum_{\mu} E_{\mu}^2 U_{\mu}^2(z) \mathcal{L}(\omega - \nu_{\mu}). \quad (10.231)$$

Dla rozwiązań stacjonarnych

$$\rho_{aa} - \rho_{bb} = \left( \frac{\Lambda_a}{\gamma_a} - \frac{\Lambda_b}{\gamma_b} \right) \left[ 1 + \frac{2\gamma_{ab}R}{\gamma_a\gamma_b} \right]^{-1}. \quad (10.232)$$

Wyrażenie to opisuje stan nasycenia, występując po pewnym czasie pracy lasera.

Ponieważ "stała prędkości"  $R$  jest również funkcją współrzędnej  $z$ , w efekcie kształt krzywej, opisującej natężenie linii wysyłanej przez laser, będzie różnił się od lorentzowskiego tzw. "wypalonymi dziurami" <sup>18</sup> p.rys.10.12.

Jednak właściwy efekt "wypalania dziur" otrzymamy wprowadzając zależność  $z = z(t)$ , a więc na powrót uwzględniając ruch atomów. Z równań (10.60), (10.79), (10.81) i (10.232) otrzymujemy

$$P(z, t) = \wp(\rho_{ab} + \bar{\rho}_{ab}) \quad (10.233)$$

oraz

$$S_n = -\frac{2\wp^2}{L\hbar} \gamma_{ab} \mathcal{L}(\omega - \nu_n) E_n \int_0^L dz U_n^2(z) N(z, t)$$

<sup>18</sup>ang. hole burning. Termin wprowadzony przez W.R. Benneta, Jr., Journ. Appl. Opt., Suppl., 1(1962),24.

$$\begin{aligned}
& \times \left[ 1 + \frac{2\gamma_{ab}R(z)}{\gamma_a\gamma_b} \right]^{-1}, \\
C_n &= \frac{\omega - \nu_n}{\gamma_{ab}} S_n,
\end{aligned} \tag{10.234}$$

przy czym  $S_n$  i  $C_n$  są wyrażeniami występującymi w równaniach (10.44), (10.46) i (10.47). Dla wypadku 1-modowego wyrażenie na  $S_n$  przybiera postać

$$\begin{aligned}
S_n &= -\frac{2}{L} \frac{\wp^2}{\hbar} \gamma_{ab} E_n \int_0^L dz U_n^2(z) N(z, t) \\
&\times \left[ \gamma_{ab}^2 + (\omega - \nu_n)^2 + \gamma_{ab}^2 \wp^2 E_n^2 \frac{U_n^2(z)}{\hbar^2 \gamma_a \gamma_b} \right]^{-1}.
\end{aligned} \tag{10.235}$$

Jeżeli  $N(z)$  jest wolnozmienną funkcją  $z$ , wówczas (10.235) zapisuje się jako

$$S_n = -\frac{\wp^2}{\hbar} \bar{N} \mathcal{L}(\omega - \nu_n) f(W) E_n, \tag{10.236}$$

gdzie

$$W = \frac{\wp^2 E_n^2}{\hbar^2 \gamma_a \gamma_b} \gamma_{ab}^2 \mathcal{L}(\omega - \nu_n) \tag{10.237}$$

i

$$f(W) = \frac{2}{W} \left[ 1 - (1 + W)^{-1/2} \right]. \tag{10.238}$$

### 10.5.10 Rozszerzenie dopplerowskie

W uproszczonej wersji teorii Lamba, przedstawionej w podrozdziale 10.5.9, można uwzględnić ruch atomów, wprowadzając nieliniową przenikalność ośrodka, w którym poruszają się:

$$\chi(\omega - \nu_n, E_n) = \frac{P_n}{\epsilon_0 E_n}. \tag{10.239}$$

Dla atomu, poruszającego się z prędkością  $v$ , częstość rezonansowa zwiększa się, zgodnie z efektem Dopplera, o  $\Delta\omega = \omega v/c$ . Dlatego wprowadzamy przenikalność efektywną

$$\chi_{ef} = \int_{-\infty}^{\infty} dv W(v) \chi\left(\omega - \frac{\omega v}{c} - \nu_n, E_n\right), \tag{10.240}$$

gdzie  $W(v)$  jest pewnym rozkładem prędkości. Przy takim uwzględnieniu ruchu atomów wielkość  $\gamma_{ab}$  należy zastąpić przez odpowiednią wielkość efektywną

$$\gamma_{ab} \left[ 1 + \frac{(\wp E_n)^2}{\hbar^2 \gamma_a \gamma_b} \right]^{1/2}. \tag{10.241}$$

Jeśli wielkość (10.241) jest wiele mniejsza od  $Ku$ , wówczas wysyłana przez laser linia ma kształt lorentzowski z normalną szerokością dopplerowską. Dalszą dyskusję efektów znaleźć można w cytowanych wyżej wykładach Lamba w Les Houches.

### 10.5.11 “Wypalanie dziur ”

Efekt ten, o którym wspominaliśmy uprzednio, można wytłumaczyć, używając prostszej wersji teorii Lamba, referowanej w podrozdziale 10.5.10, uwzględniając tym razem fakt, że atomy posiadają pewien rozkład prędkości  $W(v)$ . Weźmy pod uwagę atom o prędkości  $v$ , wzbudzony w punkcie  $z_0$  i w chwili  $t_0$ . Zaburzenie, wprowadzone przez taki atom, wyraża się wzorem

$$V(t) = -\frac{\wp}{\hbar} \sum_{\mu} E_{\mu} U_{\mu}(z_0 + vt - vt_0) \cos(\nu_{\mu}t + \varphi_{\mu}). \quad (10.242)$$

Ze względu na swój ruch atom “widzi” pole o częstości  $\nu_{\mu} \pm Kv$ , zamiast pola o częstości  $\nu_{\mu}$ . Ocenimy teraz różnicę obsadzeń  $\rho_{aa}(v, t) - \rho_{bb}(v, t)$ , korzystając z wyrażenia (10.232), w którym  $R$  nie zależało od prędkości atomów. Przy uwzględnieniu ruchu atomów współczynnik  $R$  będzie funkcją  $v$ :

$$R(v) = \frac{1}{8} \gamma_{ab} \frac{\wp^2}{\hbar^2} \sum_{\mu} E_{\mu}^2 [\mathcal{L}(\nu_{\mu} - \omega + Kv) + \mathcal{L}(\nu_{\mu} - \omega - Kv)]. \quad (10.243)$$

Odpowiednio różnica obsadzeń wyrazi się jako

$$\begin{aligned} \rho_{aa}(t) - \rho_{bb}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} [\rho_{aa}(v, t) - \rho_{bb}(v, t)] W(v) dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dv W(v) \left( \frac{\Lambda_a}{\gamma_a} - \frac{\Lambda_b}{\gamma_b} \right) \left[ 1 + \frac{2\gamma_{ab}R(v)}{\gamma_a\gamma_b} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (10.244)$$

Z powyższego związku wynika, że wskutek efektów nasycenia, na rozkładzie  $W(v)$  pojawiają się “dziury”. “Dziury” te będą powstawać wtedy, gdy  $R(v)$  będzie porównywalne z  $\gamma_a\gamma_b/2\gamma_{ab}$ , tzn, gdy  $Kv = \pm(\nu_{\mu} - \omega)$ , tak że dla każdego modu rezonansowego powstają 2 dziury (p. rys. 10.12). Sytuację przedstawioną na rys. 10.8 interpretować można jako zlanie się dwóch dziur w przypadku  $Kv = \pm(\nu_{\mu} - \omega) \rightarrow 0$ .

## 10.6 Teoria Lamba w wersji zmodyfikowanej

Materiał przedstawiony w tym podrozdziale opiera się w dużym stopniu na pracy P. Staszewskiego.<sup>19</sup>

Jednym z podstawowych założeń prac Lamba dotyczących laserów było przyjęcie równania ruchu dla macierzy gęstości w postaci

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H, \rho] - \frac{1}{2}(\Gamma\rho + \rho\Gamma), \quad (10.245)$$

gdzie  $\Gamma$  oznacza pewien operator dyssypatywny postaci (10.55, a  $H$  jest hamiltonianem układu postaci (10.56). Równanie (10.245) zapiszmy w postaci

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H, \rho] + D\rho, \quad (10.246)$$

<sup>19</sup>P. Staszewski, Dyssypacja atomowa w laserze gazowym. Praca magisterska, UMK Roruń 1970.

gdzie  $D$  oznaczać będzie **superoperator** (operator działający na operator) dyssypacji. Jak wykazano,<sup>20</sup> najogólniejsza postać superoperatora dyssypacji dla układu  $N$  niezależnych spinów  $1/2$  jest następująca (bez pompowania)

$$D\rho = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left[ \gamma_\alpha \left( e_\alpha^\beta \sigma_\beta^j \right) \rho \left( e_\alpha^\gamma \sigma_\gamma^j \right) + \gamma_0 (\rho - \sigma_0^j) \right], \quad (10.247)$$

gdzie zastosowano konwencję sumacyjną dla indeksów  $\alpha, \beta, \gamma$  przebiegających wartości  $1, 2, 3$ ,  $e_\alpha^\gamma$  - to składowe wektorów bazowych, więc

$$e_\alpha^\gamma e_\beta^\gamma = \delta_{\alpha\beta} \quad (\text{delta Kroneckera}), \quad (10.248)$$

natomiast  $\sigma_0, \sigma_\gamma$  - to macierze Pauli'ego

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (10.249)$$

oraz

$$\gamma_0 = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3, \quad \gamma_\alpha \geq 0. \quad (10.250)$$

Poprzez odpowiedni dobór jednostek bazy superoperator (10.247) sprowadzić można do postaci

$$\begin{aligned} D\rho &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left[ \gamma_\perp \left( \sigma_1^j \rho \sigma_1^j + \sigma_2^j \rho \sigma_2^j \right) \right. \\ &\quad \left. + \gamma_\parallel \sigma_3^j \rho \sigma_3^j + (2\gamma_\perp + \gamma_\parallel) (\rho - \sigma_0^j) \right], \end{aligned} \quad (10.251)$$

przy czym  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_\perp$ ,  $\gamma_3 = \gamma_\parallel$ . Superoperator w postaci (10.247) zachowuje własności macierzy gęstości, tzn.

$$\begin{aligned} D\rho &= (D\rho)^*, \\ \text{Tr } D\rho &= 0. \end{aligned} \quad (10.252)$$

Okazuje się, że użycie superoperatora  $D$  w postaci proponowane przez Lamba, tzn. (10.245) i  $D\rho = -(1/2)(\Gamma\rho + \rho\Gamma)$ , prowadzi do niezachowania śladu macierzy gęstości. Mamy bowiem

$$\text{Tr } \dot{\rho} = \text{Tr} \left[ -\frac{1}{2}(\Gamma\rho + \rho\Gamma) \right] = -(\gamma_a \rho_{aa} + \gamma_b \rho_{bb}), \quad (10.253)$$

zatem  $\text{Tr } \rho$  jest funkcją malejącą. Proponowana niżej modyfikacja teorii Lamba polegać będzie na tym, że zamiast wyjściowego równania (10.245) użyć równania (10.251). Podamy teraz kilka

<sup>20</sup>p. A. Kossakowski, Preprint 192, IF UMK Toruń, 1972.

ważniejszych wyników. Zgodnie z równaniami (10.251) i (10.246), wziętymi dla jednego atomu, otrzymujemy równania

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_{aa} &= iV(t)(\rho_{ab} - \rho_{ba}) \\
&- (\gamma_{\perp} + \gamma_{\parallel})\rho_{aa} - \gamma_{\perp}\rho_{bb} + \gamma_{\perp} + \frac{1}{2}\gamma_{\parallel}, \\
\dot{\rho}_{bb} &= -iV(t)(\rho_{ab} - \rho_{ba}) \\
&- (\gamma_{\perp} + \gamma_{\parallel})\rho_{bb} - \gamma_{\perp}\rho_{aa} + \gamma_{\perp} + \frac{1}{2}\gamma_{\parallel}, \\
\dot{\rho}_{ab} &= iV(t)(\rho_{aa} - \rho_{bb}) - (\gamma_{\perp} + i\omega)\rho_{ab}, \\
\dot{\rho}_{ba} &= -iV(t)(\rho_{aa} - \rho_{bb}) - (\gamma_{\perp} - i\omega)\rho_{ba},
\end{aligned} \tag{10.254}$$

odpowiadające równaniom (10.62) w teorii Lamba. Równania te, przy wykorzystaniu warunku  $\rho_{aa} + \rho_{bb} = 1 = \text{Tr } \rho$ , zapisać można w postaci

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_{aa} &= -\frac{1}{2}\gamma_{\parallel}(\rho_{aa} - \rho_{bb}) + iV(t)(\rho_{ab} - \rho_{ba}), \\
\dot{\rho}_{bb} &= \frac{1}{2}\gamma_{\parallel}(\rho_{aa} - \rho_{bb}) - iV(t)(\rho_{ab} - \rho_{ba}), \\
\dot{\rho}_{ab} &= -(\gamma_{\perp} + i\omega)\rho_{ab} + iV(t)(\rho_{aa} - \rho_{bb}).
\end{aligned} \tag{10.255}$$

Porównując z równaniami (10.62) widać, że stała  $\gamma_{\perp}$  odpowiada stałej  $\gamma_{ab} = (\gamma_a + \gamma_b)/2$ , występującej w pracy Lamba.

Z równań (10.255), przy warunkach początkowych

$$\rho_{aa}(t_0) = 1, \quad \rho_{bb}(t_0) = \rho_{ab}(t_0) = \rho_{ba}(t_0) = 0, \tag{10.256}$$

i oznaczeniach

$$\rho_{aa}(a, \mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{v}, t) - \rho_{bb}(a, \mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{v}, t) = M(a, \mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{v}, t) \tag{10.257}$$

otrzymujemy po scałkowaniu

$$\begin{aligned}
M(a, \mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{v}, t) &= \exp [\gamma_{\parallel}(t_0 - t)] \\
&+ 2i \int_{t_0}^{t'} dt' V(t') \exp [\gamma_{\parallel}(t' - t)] [\rho_{aa}(a, \mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{v}, t') + \text{c.c.}],
\end{aligned} \tag{10.258}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{ab}(a, \mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{v}, t) \\
= i \int_{t_0}^t dt' V(t') \exp [(\gamma_{\perp} + i\omega)(t' - t)] M(a, \mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{v}, t').
\end{aligned} \tag{10.259}$$

Interpretacja fizyczna stałych  $\gamma_{\perp}$  i  $\gamma_{\parallel}$ , zwanych również stałymi dyssypacji, jest następująca: stała  $\gamma_{\perp}$  jest stałą zaniku elektrycznego momentu dipolowego między stanami  $a$  i  $b$ , natomiast stała  $\gamma_{\parallel}$  jest stałą zaniku inwersji populacji. Interpretację taką otrzymujemy, obliczając moment dipolowy przejścia  $a \rightarrow b$ :

$$D_{ab} = \rho_{ba} \wp. \tag{10.260}$$

Dla braku oddziaływania atomu z polem ( $V(t) = 0$ ), z równań (10.255) mamy

$$\rho_{ba}(t) = \rho_{ba}(t_0) \exp[-\gamma_{\perp}(t - t_0) + i\omega(t - t_0)], \quad (10.261)$$

a stąd

$$D_{ba}(t) = D_{ba}(t_0) \exp[-\gamma_{\perp}(t - t_0) + i\omega(t - t_0)]. \quad (10.262)$$

Interpretacja stałej  $\gamma_{\parallel}$  wynika z zależności

$$\rho_{aa}(t) - \rho_{bb}(t) = \exp[-\gamma_{\parallel}(t - t_0)], \quad (10.263)$$

wynikającej z (10.257) w pierwszym rzędzie przybliżenia  $M(a, \mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{v}, t)$ .

Uwzględnienie wprowadzonych wyżej zmian w teorii lasera w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń (10.3) prowadzi do następujących wyników

$$\begin{aligned} \rho_{ab}^{(1)}(a, \mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= -\frac{1}{2} \frac{i\wp}{\hbar} \frac{1}{\gamma_{\parallel}} \sum_{\mu=1}^M E_{\mu}(t) \exp[-i(\nu_{\mu}t + \varphi_{\mu}(t))] \\ &\times \int_{-\infty}^t dt' U_{\mu}(\mathbf{r} - \mathbf{v}t + \mathbf{v}t') \exp[(-\gamma_{\perp} + i(\nu_{\mu} - \omega) + \varphi_{\mu}(t))] \end{aligned} \quad (10.264)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} \frac{i\wp}{\hbar \gamma_{\parallel}} \sum_{\mu=1}^M E_{\mu}(t) \exp[-i(\nu_{\mu}t + \varphi_{\mu}(t))] \\ &\times \int_0^{\infty} d\tau' U_{\mu}(\mathbf{r} - \mathbf{v}\tau') \exp[-(\gamma_{\perp} + i(\omega - \nu_{\mu}))\tau']. \end{aligned} \quad (10.265)$$

Odpowiednio dla polaryzacji  $P^{(1)}(a, \mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  otrzymamy

$$\begin{aligned} P^{(1)}(a, \mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= -\frac{i\wp^2 \lambda_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\hbar \gamma_{\parallel}} \sum_{\mu=1}^M E_{\mu}(t) \left\{ \exp[-i(\nu_{\mu}t + \varphi_{\mu}(t))] \right. \\ &\times \left. \int_0^{\infty} d\tau' U_{\mu}(\mathbf{r} - \mathbf{v}\tau') \exp[-(\gamma_{\perp} + i(\omega - \nu_{\mu}))\tau'] \right\} + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (10.266)$$

Porównując z (10.77) widać, że w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń nie ma różnic w stosunku do teorii Lamba. Po przecalkowaniu po  $v$  z rozkładem  $W(v)$  otrzymujemy dla składowej  $P_n^{(1)}$  wyniki analogiczne do podrozdziału (10.3) (w szczególności p. (10.88), (10.89)). Poważne różnice wystąpią natomiast przy braniu trzeciego rzędu rachunku zaburzeń. Zamiast (10.116) otrzymamy wynik o połowę krótszy: nie będzie drugiej części wzoru z przestawionymi indeksami  $a$  i  $b$ , gdyż w tym ujęciu jedna stała  $\gamma_{\parallel}$  odpowiada stałym  $\gamma_a$  i  $\gamma_b$  u Lamba. Poza tym w dalszych wyrażeniach typu  $[D_a(\nu_{\rho} - \nu_{\sigma}) + D_b(\nu_{\rho} - \nu_{\sigma})]$  występować będzie człon  $D_{\parallel}(\nu_{\rho} - \nu_{\sigma})$ , zdefiniowany jako

$$D_{\parallel}(\nu_{\rho} - \nu_{\sigma}) = \frac{1}{\gamma_{\parallel} + i(\nu_{\rho} - \nu_{\sigma})}. \quad (10.267)$$

Analogicznie, zamiast funkcji typu

$$D(\omega) = \frac{1}{\gamma_{ab} + i\omega}$$

wystąpią tu funkcje

$$D_{\perp}(\omega) = \frac{1}{\gamma_{\perp} + i\omega}. \quad (10.268)$$

Ostatecznie poprawiona wersja teorii Lamba, powstała w wyniku zastosowania poprawnej postaci superoperatora dyssypacji, daje w zasadzie te same wyniki, co pierwotna teoria. Pewne wzory upraszczają się i skracają. Zgodność obu wersji teorii pochodzi stąd, że czynnik  $\gamma_{\perp}\gamma_{\parallel}$ , jakkolwiek ma inną interpretację fizyczną jak czynnik  $\gamma_a\gamma_b$ , jest wielkością tego samego rzędu co  $\gamma_a\gamma_b$ . Stąd teoria Lamba, oparta na niewłaściwym równaniu ewolucji, dała wyniki dobrze zgadzające się z danymi eksperymentalnymi.

W trzecim rzędzie rachunku zaburzeń zamiast (10.114) i (10.120) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \rho_{ab}^{(3)}(z, t, t) &= \frac{1}{4} i \frac{\wp^3}{\hbar^3} N(z, t) \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} E_{\mu} E_{\rho} E_{\sigma} \\ &\times \left\{ \exp[-i(\nu_{\mu}t + \varphi_{\mu}) + i(\nu_{\rho}t + \varphi_{\rho}) - i(\nu_{\sigma}t + \varphi_{\sigma})] \right. \\ &\times \int_0^{\infty} d\tau' \int_0^{\infty} d\tau'' \int_0^{\infty} d\tau''' U_{\mu}(z - v\tau') U_{\rho}(z - v\tau' - v\tau'') U_{\sigma}(z - v\tau' - v\tau'' - v\tau''') \\ &\times \exp\left[-((\gamma_{\perp} - i\nu_{\mu} + i\nu_{\rho} - i\nu_{\sigma} + i\omega)\tau' + (\gamma_{\parallel} + i\nu_{\rho} - i\nu_{\sigma})\tau'' + (\gamma_{\perp} + i\omega - i\nu_{\sigma})\tau''')\right] \\ &\times \exp[-i(\nu_{\mu}t + \varphi_{\mu}) - i(\nu_{\rho}t + \varphi_{\rho}) + i(\nu_{\sigma}t + \varphi_{\sigma})] \\ &\times \int_0^{\infty} d\tau' \int_0^{\infty} d\tau'' \int_0^{\infty} d\tau''' U_{\mu}(z - v\tau') U_{\rho}(z - v\tau' - v\tau'') U_{\sigma}(z - v\tau' - v\tau'' - v\tau''') \\ &\times \exp\left[-((\gamma_{\perp} - i\nu_{\mu} - i\nu_{\rho} + i\nu_{\sigma} + i\omega)\tau' + (\gamma_{\parallel} - i\nu_{\rho} + i\nu_{\sigma})\tau'' \right. \\ &\left. \left. + (\gamma_{\perp} - i\omega + i\nu_{\sigma})\tau''')\right]\right\}, \end{aligned}$$

gdzie

$$N(z, t) = \frac{1}{\gamma_{\parallel}} [\Lambda_a(z, t) - \Lambda_b(z, t)].$$

$$\begin{aligned} P_n^{(3)} &= \frac{i\sqrt{\pi}}{16} \left[ \frac{\wp^4}{(Ku\hbar^3)} \right] \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} E_{\mu} E_{\rho} E_{\sigma} N_{\rho-\sigma+\mu-n} \\ &\times \left\{ D_{\perp} \left( \omega - \frac{1}{2}\nu_{\mu} + \frac{1}{2}\nu_{\rho} - \nu_{\sigma} \right) D_{\parallel}(\nu_{\rho} - \nu_{\sigma}) \exp[-i(\nu_{\mu} - \nu_{\rho} + \nu_{\sigma})t \right. \\ &- i(\varphi_{\mu} - \varphi_{\rho} + \varphi_{\sigma})] + D_{\perp} \left( -\frac{1}{2}\nu_{\mu} - \frac{1}{2}\nu_{\rho} + \nu_{\sigma} \right) D_{\parallel}(\nu_{\sigma} - \nu_{\rho}) \\ &\left. \times \exp[-i(\nu_{\mu} + \nu_{\rho} - \nu_{\sigma})t - i(\varphi_{\mu} + \varphi_{\rho} - \varphi_{\sigma})] \right\} + \text{c.c.} \end{aligned}$$

Współczynniki  $C_1^{(3)}$  i  $S_1^{(3)}$  przybierają postać

$$\begin{aligned}
C_1^{(3)} = & \frac{\sqrt{\pi}}{8} \frac{\wp^4}{\hbar^3 K u} \left\{ E_1^3 \frac{\bar{N}}{\gamma_{\parallel}} (\omega - \nu_1) \mathcal{L}(\omega - \nu_1) \right. \\
& + E_1 E_2^2 \frac{\bar{N}}{\gamma_{\parallel}} [(\omega - \nu_{12}) \mathcal{L}(\omega - \nu_{12} + 2\Delta^{-2})] + E_1 E_3^2 \frac{\bar{N}}{\gamma_{\parallel}} [(\omega - \nu_2) \mathcal{L}(\omega - \nu_2 + 2\Delta^{-1})] \\
& + E_2^2 E_1 N_2 \Delta^{-2} [\gamma_{\parallel} (\omega - \nu_1) + \gamma_{\perp} \Delta] \mathcal{L}(\omega - \nu_1) \\
& + \frac{1}{4} E_3^2 E_1 N_4 \Delta^{-2} [\gamma_{\parallel} (\omega - \nu_1) + 2\gamma_{\perp} \Delta] \mathcal{L}(\omega - \nu_1) \\
& + E_2^2 E_3 \Delta^{-2} \left[ N_2 (\gamma_{\parallel} (\omega - \nu_{12}) + \gamma_{\perp} \Delta) \mathcal{L}(\omega - \nu_{12}) \cos \psi \right. \\
& \left. \left. + N_2 (\gamma_{\perp} \gamma_{\parallel} - (\omega - \nu_{12}) \Delta) \mathcal{L}(\omega - \nu_{12}) \sin \psi \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_1^{(3)} = & \frac{\sqrt{\pi}}{8} \frac{\wp^4}{\hbar^3 K u} \left\{ E_1^3 \frac{\bar{N}}{\gamma_{\perp} \gamma_{\parallel}} [\gamma_{\perp}^2 \mathcal{L}(\omega - \nu_1) + 1] \right. \\
& + E_1 E_2^2 \frac{\bar{N}}{\gamma_{\perp} \gamma_{\parallel}} [\gamma_{\perp}^2 \mathcal{L}(\omega - \nu_{12}) + \gamma_{\perp}^2 \Delta^{-2}] \\
& + E_1 E_3^2 \frac{\bar{N}}{\gamma_{\perp} \gamma_{\parallel}} [\gamma_{\perp}^2 \mathcal{L}(\omega - \nu_2) + \gamma_{\perp}^2 \Delta^{-2}] \\
& + E_1 E_2^2 [N_2 (\gamma_{\perp} \gamma_{\parallel} - (\omega - \nu_1) \Delta) \mathcal{L}(\omega - \nu_1) - 2\bar{N}] \\
& + E_1 E_3^2 \Delta^{-2} [N_4 (-2(\omega - \nu_1) \Delta) \mathcal{L}(\omega - \nu_1) - 2\bar{N}] \\
& + E_2^2 E_3 \Delta^{-2} \left[ \left( N_2 (\gamma_{\perp} \gamma_{\parallel} - (\omega - \nu_{12}) \Delta) \mathcal{L}(\omega - \nu_{12}) - \bar{N} \right) \cos \psi \right. \\
& \left. \left. - N_2 (\gamma_{\parallel} (\omega - \nu_{12}) + \gamma_{\perp} \Delta) \mathcal{L}(\omega - \nu_{12}) \sin \psi \right] \right\},
\end{aligned}$$

gdzie

$$\mathcal{L}(\omega - \nu) = \frac{1}{\gamma_{\perp}^2 + (\omega - \nu)^2}.$$

Natomiast zamiast współczynników (10.158)-(10.168) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\Theta_{12} &= C_1 \left\{ \bar{N} \frac{\gamma_{\perp}}{\gamma_{\parallel}} [\mathcal{L}(\omega - \nu_{12}) + 4\Delta^{-2}] - 2\bar{N} \Delta^{-2} \right. \\
&\quad \left. + N_2 \Delta^{-2} [\gamma_{\perp} \gamma_{\parallel} + (\omega - \nu_1) \Delta] \mathcal{L}(\omega - \nu_1) \right\}, \\
\Theta_{13} &= C_1 \left\{ \bar{N} \frac{\gamma_{\perp}}{\gamma_{\parallel}} [\mathcal{L}(\omega - \nu_2) + \Delta^{-2}] - \frac{1}{2} \bar{N} \Delta^{-2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} N_4 \Delta^{-2} [\gamma_{\perp} \gamma_{\parallel} - 2(\omega - \nu_1) \Delta] \mathcal{L}(\omega - \nu_1) \right\}, \\
\eta_{23} &= C_1 \Delta^{-2} \left\{ N_2 [\gamma_{\perp} \gamma_{\parallel} - (\omega - \nu_{12}) \Delta] \mathcal{L}(\omega - \nu_1) - \bar{N} \right\}, \\
\xi_{23} &= -C_1 \Delta^{-2} \left\{ N_2 [\gamma_{\parallel} (\omega - \nu_{12}) + \gamma_{\perp} \Delta] \mathcal{L}(\omega - \nu_{12}) \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta_{21} &= C_1 \left\{ \bar{N} \frac{\gamma_{\perp}}{\gamma_{\parallel}} [\mathcal{L}(\omega - \nu_{12}) + 4\Delta^{-2}] \right. \\
&\quad \left. + N_2 \Delta^{-2} [\gamma_{\perp} \gamma_{\parallel} - (\omega - \nu_2) \Delta] \mathcal{L}(\omega - \nu_2) - 2\bar{N} \Delta^{-2} \right\}, \\
\Theta_{23} &= C_1 \left\{ \bar{N} \frac{\gamma_{\perp}}{\gamma_{\parallel}} [\mathcal{L}(\omega - \nu_{23}) + 4\Delta^{-2}] \right. \\
&\quad \left. + N_2 \Delta^{-2} [\gamma_{\perp} \gamma_{\parallel} - (\omega - \nu_2) \Delta] \mathcal{L}(\omega - \nu_2) - 2\bar{N} \Delta^{-2} \right\}, \\
\xi_{13} &= -C_1 \Delta^{-2} N_2 \left\{ [\gamma_{\parallel}(\omega - \nu_{23}) - \gamma_{\perp} \Delta] \mathcal{L}(\omega - \nu_{23}) \right. \\
&\quad \left. + [\gamma_{\parallel}(\omega - \nu_{12}) + \gamma_{\perp} \Delta] \mathcal{L}(\omega - \nu_{12}) \right\}, \\
\eta_{13} &= C_1 \Delta^{-2} \left\{ N_2 [\gamma_{\perp} \gamma_{\parallel} + (\omega - \nu_{23}) \Delta] \mathcal{L}(\omega - \nu_{23}) \right. \\
&\quad \left. + N_2 [\gamma_{\perp} \gamma_{\parallel} - (\omega - \nu_{12}) \Delta] \mathcal{L}(\omega - \nu_{12}) + 2\bar{N} \right\}, \\
\Theta_{31} &= C_1 \left\{ \bar{N} \frac{\gamma_{\perp}}{\gamma_{\parallel}} [\mathcal{L}(\omega - \nu_2) + \Delta^{-2}] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} N_4 \Delta^{-2} [\gamma_{\perp} \gamma_{\parallel} + 2(\omega - \nu_3) \Delta] \mathcal{L}(\omega - \nu_3) - \frac{1}{2} \bar{N} \Delta^{-2} \right\}, \\
\Theta_{32} &= C_1 \left\{ \bar{N} \frac{\gamma_{\perp}}{\gamma_{\parallel}} [\mathcal{L}(\omega - \nu_{23}) + 4\Delta^{-2}] \right. \\
&\quad \left. + N_2 \Delta^{-2} [\gamma_{\perp} \gamma_{\parallel} + 2(\omega - \nu_3) \Delta] \mathcal{L}(\omega - \nu_3) - 2\bar{N} \Delta^{-2} \right\}, \\
\eta_{21} &= C_1 \Delta^{-2} \left\{ N_2 [\gamma_{\perp} \gamma_{\parallel} + (\omega - \nu_{23}) \Delta] \mathcal{L}(\omega - \nu_{23}) - \bar{N} \right\}, \\
\xi_{21} &= -C_1 \Delta^{-2} \left\{ N_2 [\gamma_{\parallel}(\omega - \nu_{23}) - \gamma_{\perp} \Delta] \mathcal{L}(\omega - \nu_{23}) \right\}.
\end{aligned}$$

Współczynniki  $\tau_{jk}$  występujące w równaniach (10.170)-(10.172) mają tu postać

$$\begin{aligned}
\tau_{12} &= -C_1 \left\{ \frac{\bar{N}}{\gamma_{\parallel}} [(\omega - \nu_{12}) \mathcal{L}(\omega - \nu_{12}) + 2\Delta^{-1}] \right. \\
&\quad \left. + N_2 \Delta^{-2} [\gamma_{\parallel}(\omega - \nu_1) + \gamma_{\perp} \Delta] \mathcal{L}(\omega - \nu_1) \right\}, \\
\tau_{13} &= -C_1 \left\{ \frac{\bar{N}}{\gamma_{\parallel}} [(\omega - \nu_2) \mathcal{L}(\omega - \nu_2) + \Delta^{-1}] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} N_4 \Delta^{-2} [\gamma_{\parallel}(\omega - \nu_1) + 2\gamma_{\perp} \Delta] \mathcal{L}(\omega - \nu_1) \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{21} &= -C_1 \left\{ \frac{\overline{N}}{\gamma_{\parallel}} [(\omega - \nu_{12}) \mathcal{L}(\omega - \nu_{12}) - 2\Delta^{-1}] \right. \\
&\quad \left. + N_2 \Delta^{-2} [\gamma_{\parallel}(\omega - \nu_2) - \gamma_{\perp} \Delta] \mathcal{L}(\omega - \nu_2) \right\}, \\
\tau_{23} &= -C_1 \left\{ \frac{\overline{N}}{\gamma_{\parallel}} [(\omega - \nu_{12}) \mathcal{L}(\omega - \nu_{23}) + 2\Delta^{-1}] \right. \\
&\quad \left. + N_2 \Delta^{-2} [\gamma_{\parallel}(\omega - \nu_2) + \gamma_{\perp} \Delta] \mathcal{L}(\omega - \nu_2) \right\}, \\
\tau_{31} &= -C_1 \left\{ \frac{\overline{N}}{\gamma_{\parallel}} [(\omega - \nu_2) \mathcal{L}(\omega - \nu_2) - \Delta^{-1}] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} N_4 \Delta^{-2} [\gamma_{\parallel}(\omega - \nu_3) - 2\gamma_{\perp} \Delta] \mathcal{L}(\omega - \nu_3) \right\}, \\
\tau_{32} &= -C_1 \left\{ \frac{\overline{N}}{\gamma_{\parallel}} [(\omega - \nu_{23}) \mathcal{L}(\omega - \nu_{23}) - 2\Delta^{-1}] \right. \\
&\quad \left. + N_2 \Delta^{-2} [\gamma_{\parallel}(\omega - \nu_3) - \gamma_{\perp} \Delta] \mathcal{L}(\omega - \nu_3) \right\}.
\end{aligned}$$

## Rozdział 11

# Teoria laserów gazowych

### 11.1 Wstęp

Przedstawiona w poprzednim rozdziale teoria Lamba dotycząca lasera gazowego jest przykładem toaawania metod heurystycznych. Jak wiadomo, teoria ta dała na ogół dobrą zgodność z doświadczeniem i przewidywała nawet pewne nowe efekty, potwierdzone potem przez eksperyment. Mankamentem tej teorii jest jednak wprowadzenie podczas obliczeń wielu pozornie oczywistych i zwykle stosowanych założeń, które, nie zawsze uzasadnione, łatwo uchodzą uwadze czytelnika. Obecnie przedstawimy próbę skonstruowania teorii lasera na ciele stałym, opartej na jasno sformułowanych założeniach i konsekwentnej pod względem matematycznym. Podstawą do sformułowania tej teorii będą nowe wyniki w zakresie mikroskopowej teorii procesów nieodwracalnych (tzw. niehamiltonowska mechanika kwantowa [1]-[3] oraz termodynamiki informacyjnej [4]-[12], uzyskane ostatnio w Toruniu. Cytowane powyżej prace podane są w Bibliografii na końcu bieżącej monografii.

### 11.2 Kwantowa mechanika statystyczna układów niehamiltonowskich

Niech  $\mathcal{H}$  oznacza ośrodkową przestrzeń Hilberta związaną z danym układem fizycznym. Zbiór wszystkich operatorów gęstości opisujących stany układu będziemy oznaczali przez  $W$ , tzn.

$$W = W(\mathcal{H}) := \left\{ \rho \in L(\mathcal{H}) : \rho \geq 0, \text{Tr } \rho = 1 \right\}, \quad (11.1)$$

gdzie  $L(\mathcal{H})$  jest zbiorem wszystkich operatorów liniowych działających w przestrzeni  $\mathcal{H}$ , a nierówność  $\rho \geq 0$  oznacza dodatnią określoność operatora  $\rho$ . Rozważany przez nas układ kwantowy może być zamknięty (izolowany, hamiltonowski) lub otwarty (nie izolowany, niehamiltonowski). Przez ruch

układu będziemy rozumieli dowolne odwzorowanie

$$\Lambda : W(\mathcal{H}) \rightarrow W(\mathcal{H}). \quad (11.2)$$

Najmniejszą przestrzenią liniową zawierającą zbiór stanów  $W$  jest rzeczywista przestrzeń Banacha  $B_1(\mathcal{H})$  operatorów samosprzężonych o skończonej normie

$$\|\rho\|_1 = \sup \sum_{n=1}^{\infty} |(x_n, \rho y_n)|, \quad (11.3)$$

gdzie supremum jest brane po wszystkich zupełnych bazach  $\{x_n\}, \{y_n\}$  w przestrzeni  $\mathcal{H}$ , a  $(\cdot, \cdot)$  oznacza iloczyn skalarny w  $\mathcal{H}$ . Mamy zatem

$$B_1(\mathcal{H}) = \left\{ \rho \in L(\mathcal{H}) : \rho = \rho^*, \|\rho\|_1 < \infty \right\}. \quad (11.4)$$

Przestrzeń dualną do  $B_1(\mathcal{H})$ , tzn. zawierającą wszystkie rzeczywiste, liniowe i ciągłe funkcjonały na  $B_1(\mathcal{H})$  będziemy oznaczali przez  $B_\infty(\mathcal{H})$ . Można pokazać (p. np. Dunford & Schwartz, [13]), że każdy liniowy i ciągły rzeczywisty funkcjonal na  $B_1(\mathcal{H})$  ma postać

$$\langle A, \rho \rangle := \text{Tr}(A\rho), \quad \rho \in B_1(\mathcal{H}), \quad (11.5)$$

gdzie  $A$  jest ograniczonym samosprzężonym liniowym operatorem na  $\mathcal{H}$ . Wprowadzenie w  $B_\infty(\mathcal{H})$  normy

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &:= \sup_{\|\rho\|_1=1} |\langle A, \rho \rangle| = \sup_{\|x\|<1} \|Ax\|, \\ A &\in B_\infty(\mathcal{H}), \|x\|^2 = (x, x), \end{aligned} \quad (11.6)$$

czyni z  $B_\infty(\mathcal{H})$  także przestrzeń Banacha. Operatory dodatnio określone, należące do przestrzeni  $B_1(\mathcal{H})$  tworzą w tej przestrzeni stożek, tzn. zbiór

$$B_1^+(\mathcal{H}) := \left\{ \rho \in B_1(\mathcal{H}) : \rho \geq 0 \right\}, \quad (11.7)$$

o następujących własnościach:

- 1     jeżeli  $\rho_1, \rho_2 \in B_1^+(\mathcal{H})$ , to  $\rho_1 + \rho_2 \in B_1^+(\mathcal{H})$ ,
  - 2     jeżeli  $\rho \in B_1^+(\mathcal{H})$ , i  $\lambda > 0$ , to  $\lambda\rho \in B_1^+(\mathcal{H})$ ,
  - 3     jeżeli  $\rho \in B_1^+(\mathcal{H})$ , to  $-\rho \notin B_1^+(\mathcal{H})$ .
- (11.8)

Warunki typu (11.8) służą zwykle jako definicja stożka w dowolnej przestrzeni liniowej.

Dla elementów zbioru  $B_1^+(\mathcal{H})$  zachodzi równość

$$\|\rho\|_1 = \text{Tr} \rho, \quad (11.9)$$

która oczywiście ogólnie w przestrzeni Banacha  $B_1(\mathcal{H})$  nie jest prawdziwa: istnieją bowiem w  $B_1(\mathcal{H})$  operatory o ujemnym śladzie. Powyższe uwagi pozwalają napisać definicję zbioru  $W$  w nieco innej formie, mianowicie

$$W = W(\mathcal{H}) = \left\{ \rho \in B_1^+(\mathcal{H}) : \|\rho\|_1 = 1 \right\}. \quad (11.10)$$

Widać stąd, że zbiór wszystkich operatorów gęstości stanowi przecięcie stożka  $B_1^+(\mathcal{H})$  ze sferą jednostkową w przestrzeni  $B_1(\mathcal{H})$ .

Symbolem  $B_\infty^+(\mathcal{H})$  oznaczać będziemy stożek dualny do  $B_1^+(\mathcal{H})$ , tzn. zbiór wszystkich  $A \in B_\infty(\mathcal{H})$  takich, że  $\langle A, \rho \rangle \geq 0$  dla wszystkich  $\rho \in B_1^+(\mathcal{H})$ .

Zbiór  $\mathcal{B}_1(\mathcal{H})$  wszystkich liniowych, ograniczonych operatorów na  $B_1(\mathcal{H})$  (superoperatorów względem przestrzeni  $\mathcal{H}$ ) jest przestrzenią Banacha względem normy

$$|||\Lambda|||_1 := \sup_{\|\rho\|_1} \|\Lambda\rho\|_1, \quad \rho \in B_1(\mathcal{H}), \quad \Lambda \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H}). \quad (11.11)$$

Każdemu superoperatorowi  $\Lambda \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$  można przyporządkować superoperator dualny  $\Lambda^*$  działający w przestrzeni  $B_\infty(\mathcal{H})$  zdefiniowany jako

$$\langle A, \Lambda\rho \rangle = \langle \Lambda^* A, \rho \rangle, \quad A \in B_\infty(\mathcal{H}), \quad \rho \in B_1(\mathcal{H}). \quad (11.12)$$

Zbiór wszystkich superoperatorów dualnych  $\Lambda^*$  tworzy przestrzeń Banacha  $\mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})$  z normą

$$|||\Lambda^*|||_1 := \sup_{\|A\|_\infty} \|\Lambda^* A\|_\infty. \quad (11.13)$$

Liniowy operator  $\Lambda \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$  nazywać będziemy **dodatnim endomorfizmem** w przestrzeni  $B_1(\mathcal{H})$ , gdy spełnia on 2 warunki

$$\begin{aligned} 1 \quad & \Lambda : B_1^+(\mathcal{H}) \rightarrow B_1^+(\mathcal{H}), \\ 2 \quad & \|\Lambda\rho\|_1 = \|\rho\|_1, \quad \rho \in B_1^+(\mathcal{H}). \end{aligned} \quad (11.14)$$

Dodatni endomorfizm w  $B_1(\mathcal{H})$  odwzorowuje zbiór  $W(\mathcal{H})$  w siebie, a zatem opisuje ruch układu kwantowego. Ruch taki nazywać będziemy **ruchem liniowym**. Można pokazać [1], że każdy dodatni endomorfizm jest **operatorem zwężającym**, tzn.

$$\|\Lambda\rho_1\|_1 \leq \|\rho\|_1, \quad (11.15)$$

dla każdego  $\rho \in B_1(\mathcal{H})$ .

Zbiór  $W(\mathcal{H})$  wszystkich stanów jest wypukły, a jego punkty ekstremalne (i tylko one) są stanami czystymi, tzn. mają postać

$$\rho = P_x, \quad x \in \mathcal{H}, \quad (11.16)$$

gdzie  $P_x$  oznacza operator rzutu na kierunek wyznaczony przez wektor  $x$ .

Klasyfikację ruchów, tzn. odwzorowań (11.2), przeprowadzić można przede wszystkim ze względu na charakter stanu początkowego i końcowego. Dla stanu początkowego możliwe są jedynie 2 przypadki: stan jest czysty, co oznaczmy przez  $P$ , względnie stan mieszany - ozn.  $M$ . Dla stanu końcowego przy danym charakterze stanu początkowego istnieją 3 możliwości:  $P$ ,  $M$ , oraz  $C$  - stan kombinowany (czysty lub mieszany, zależnie od innych właściwości stanu początkowego). W ten sposób otrzymujemy następującą klasyfikację Dalej podane będą przykłady ruchów 2

Tablica 11.1: Klasyfikacja stanów

| stan<br>początkowy |     |     |     |     | stan<br>końcowy |     |     |     |     |
|--------------------|-----|-----|-----|-----|-----------------|-----|-----|-----|-----|
|                    | 1   | 2   | 3   | 4   | 5               | 6   | 7   | 8   | 9   |
| $P$                | $P$ | $P$ | $M$ | $M$ | $C$             | $C$ | $C$ | $P$ | $M$ |
| $M$                | $M$ | $P$ | $M$ | $P$ | $C$             | $P$ | $M$ | $C$ | $C$ |

i 3, natomiast typ 1 realizowany jest przez ruchy hamiltonowskie (ruchy układów izolowanych). Problem istnienie ruchów typu 4, 5, ..., 9 jest dotychczas otwarty.

Jeżeli założymy, że dany ruch  $\Lambda$  jest ciągły na  $B_1(\mathcal{H})$  (zbieżność  $\rho_n \rightarrow \rho$  rozumiany w sensie zbieżności względem normy) i spełnia warunek  $\Lambda(0) = 0$ , wówczas można udowodnić, że warunek

$$\Lambda(p_1\rho_1 + p_2\rho_2) = p_1\Lambda\rho_1 + p_2\rho_1\Lambda\rho_2 \quad (11.17)$$

dla wszystkich  $\rho_1, \rho_2 \in B_1(\mathcal{H})$ ,  $p_1, p_2 \geq 0$ ,  $p_1 + p_2 = 1$ , implikuje liniowość ruchu, tzn. własność

$$\Lambda(\alpha\rho_1 + \beta\rho_2) = \alpha\Lambda\rho_1 + \beta\Lambda\rho_2 \quad (11.18)$$

dla wszystkich  $\rho_1, \rho_2 \in B_1(\mathcal{H})$  i  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Dla danego odwzorowania jednorodnego  $\Lambda$  odwzorowanie niejednorodne postaci  $\Lambda\rho + \rho_0$  wprowadzone może być od jednorodnego następująco:

$$\Lambda\rho + \rho_0 = (\Lambda + \rho\text{Tr}) = \Lambda'\rho, \quad (11.19)$$

gdzie  $\Lambda'$  jest już operatorem jednorodnym w  $W(\mathcal{H})$  (bo  $\text{Tr}\rho = 1$ ).

Biorąc czas jako parametr, rozważać będziemy procesy opisywane przez liniowe równania różniczkowe rzędu pierwszego. Ruch układu hamiltonowskiego opisywany jest przez równanie von Neumanna

$$i\frac{\partial\rho}{\partial t} = [H, \rho], \quad (11.20)$$

gdzie  $H$  oznacza hamiltonian układu, a  $[,]$  komutator (p. rozdz. 7).. Dla opisu ruchu układów nie izolowanych równanie von Neumanna wymaga uogólnienia. Uogólnienie takie zostało dokonane przez Kossakowskiego poprzez podanie aksjomatyki wzw. dynamicznych półgrup, których generatory pozwalają na podanie równań ogólniejszych od (11.20). Podamy teraz definicję półgrupy dynamicznej.

Jednoparametrowa rodzina  $\mathcal{S}(\mathcal{H}) = \{\Lambda(t), t \geq 0\}$  endomorfizmów w przestrzeni  $B_1(\mathcal{H})$  jest półgrupą dynamiczną, jeśli spełnione są następujące warunki:

$$1. \quad \Lambda(t) : B_1^+(\mathcal{H}) \rightarrow B_1^+(\mathcal{H}), \text{ dla każdego } t \geq 0,$$

2.  $\|\Lambda(t)\rho\|_1 = \|\rho\|_1$ ,  $\rho \in B_1^+(\mathcal{H})$  dla każdego  $t \geq 0$ ,
3.  $\Lambda(t)$  jest ciągłą funkcją parametru  $t$  dla każdego  $t \geq 0$ ,
4.  $\lim_{t \rightarrow z+0} \Lambda(t)\rho = \rho$ , dla wszystkich  $\rho \in B_1(\mathcal{H})$ , (zbieżność względem normy),
5.  $\Lambda(t)\Lambda(s) = \Lambda(t+s)$  dla wszystkich  $t, s \geq 0$ .

(11.21)

Warunki 1 i 2 implikują, że  $\Lambda(t)$  ( $t \geq 0$ ) jest dodatnim endomorfizmem w przestrzeni  $B_1(\mathcal{H})$ . Warunek 5 wyraża fakt, że rodzina  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  jest jednoparametrową półgrupą. W oparciu o powyższe definicje udowadnia się, że rodzina  $\mathcal{S}^*(\mathcal{H})$

$$\mathcal{S}^*(\mathcal{H}) := \{\Lambda^*(t), t \geq 0\}, \quad (11.22)$$

endomorfizmów  $\Lambda^*(t)$  w przestrzeni  $B_\infty(\mathcal{H})$  dualnych do  $\Lambda(t) \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$  spełnia następujące warunki

1.  $\Lambda^*(t) : B_\infty(\mathcal{H}) \rightarrow B_\infty(\mathcal{H})$ , dla wszystkich  $t \geq 0$ ,
2.  $\Lambda^*(t)I = I$ ,  $t \geq 0$ , ( $I$  jest operatorem jednostkowym w  $\mathcal{H}$ ),
3.  $\|\Lambda^*(t)A\|_\infty \leq \|A\|_\infty$ ; dla wszystkich  $A \in B_\infty(\mathcal{H})$ ,
4.  $\Lambda^*(t)$  jest ciągłą funkcją parametru  $t$  dla wszystkich  $t \geq 0$ ,
5.  $\lim_{t \rightarrow +0} \Lambda^*(t)A = A$  dla wszystkich  $A \in B_\infty(\mathcal{H})$ , (zbieżność w sensie normy),
6.  $\Lambda^*(t)\Lambda^*(s) = \Lambda^*(t+s)$  dla wszystkich  $t, s \geq 0$ .

Rodzinę  $\mathcal{S}^*(\mathcal{H})$  dualną do  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  będziemy nazywali **dualną półgrupą dynamiczną** układu kwantowego. Z definicji odwzorowania dualnego wynika, że zachodzi równość

$$\langle A, \Lambda(t)\rho \rangle = \langle \Lambda^*(t)A, \rho \rangle \quad (11.23)$$

dla wszystkich  $\rho \in B_1(\mathcal{H})$  i  $A \in B_\infty(\mathcal{H})$  oraz  $t \geq 0$ .

Półgrupy  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  i  $\mathcal{S}^*(\mathcal{H})$  są izomorficzne i opisują ewolucję układu fizycznego odpowiednio w obrazie Schrödingera i obrazie Heisenberga.

Z równości (11.23) wynika, że wartość średnia ograniczonej obserwabli dla czasów  $t \geq 0$  jest niezależna od obrazu.

Teoria jednoparametrowych półgrup zwięzających w przestrzeni Banacha rozwinięta została przez E. Hille'a i K. Ypsidę np. [14]). Wprowadzili oni pojęcie infinitesimalnego operatora  $L$  półgrupy i przedyskutowali warunki jego istnienia. Stąd wiadomo, że istnieją infinitesimalne generatory  $L$  i  $L^*$  odpowiednio dla półgrup  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  i  $\mathcal{S}^*(\mathcal{H})$ , określone na gęstych podzbiorach  $D(L)(; B_1(\mathcal{H}))$  i  $D^*(L) \subset B_\infty(\mathcal{H})$ , takie że spełnione są równania:

$$\frac{d}{dt}(\Lambda(t)\rho) = L(\Lambda(t)\rho) = \Lambda(t)(L\rho), \quad (11.24)$$

dla  $\rho \in D(L)$ , oraz

$$\frac{d}{dt}(\Lambda^*(t)A) = L^*(\Lambda^*(t)A) = \Lambda^*(t)(L^*A), \quad (11.25)$$

dla  $A \in D(L^*)$ . Oba równania przepisać można w postaci całkowej

$$\rho(t) := \Lambda(t)\rho, \quad A(t) := \Lambda^*(t)A. \quad (11.26)$$

Występujące powyżej operatory  $L$  i  $L^*$  nazywać będziemy **uogólnionymi operatorami Liouville'a**.

Gdy w warunkach (11.21) określających półgrupę dynamiczną zastąpimy warunek 2 przez

$$\|\Lambda(t)\rho\|_1 = \|\rho\|_1$$

dla wszystkich  $\rho \in B_1(\mathcal{H})$  i  $t \geq 0$ , wówczas udowadnia się, że istnieje jednoparametrowa grupa

$$G(\mathcal{H}) := \{U(t), t \in \mathbb{R}\} \quad (11.27)$$

operatorów unitarnych działających w  $\mathcal{H}$ , taka, że

$$\Lambda(t)\rho = U(t)\rho U^{-1}(t) \quad (11.28)$$

dla  $t \geq 0$  i  $\rho \in B_1(\mathcal{H})$ . ruch tego typu (opisany przez superoperator  $\Lambda(t)$ ) jest ruchem hamiltonowskim, odwracalnym. Ruch odwracalny wiąże się ze spełnieniem warunku 2 (11.21) dla wszystkich  $\rho \in B_1(\mathcal{H})$ , natomiast dla ruchów nieodwracalnych warunek ten jest spełniony przez  $\rho \in B_1^+(\mathcal{H})$ . W dalszym ciągu dyskutowane będą przykłady ruchów niehamiltonowskich i ich powiązanie z teorią laserów. Przeprowadzone wyżej rozważania zaliczymy do mechaniki statystycznej (hamiltonowskiej lub nie) - czyli mechaniki operatorów gęstości z zadanymi warunkami początkowymi. Równania (11.24)-(11.26) nazwiemy uogólnionymi równaniami Fockera-Plancka. Znajomość stanów początkowych pozwala (choćby teoretycznie) całkować te równania. Znajomość stanów początkowych związana jest jednak w zasadzie z wykonaniem nieskończonej ilości pomiarów, co w praktyce jest niewykonalne. Najczęściej, poprzez pomiary makroskopowe, znamy skończoną ilość średnich, które wyznaczają całe klasy stanów, czyli makrostan (p.podrozdział 5.4). By wykorzystać więc równania (11.24)-(11.25), należy wskazać metodę użycia tych równań przy zadanej skończonej ilości średnich. Metodą tą jest wielokrotnie dyskutowana w tej monografii metoda termodynamiki informacyjnej.

### 11.3 Nieodwracalna termodynamika statystyczna

W podrozdz. 5.4 dyskutowane były elementy klasycznej termodynamiki statystycznej stanów równowagi. W bieżącym podrozdziale przejdziemy do kwantowej termodynamiki statystycznej, przy czym, wykorzystując wyniki podrozdz. 11.2, dyskutować będziemy ewolucję w czasie układów kwantowych. Wprowadzone przez nas pojęcia makrostanów, rozkładów reprezentatywnych, temperatur uogólnionych itp. dla przypadku klasycznego w podobny sposób zdefiniowane są dla przypadku kwantowego, z tym że zamiast gęstości rozkładu prawdopodobieństwa  $\rho(p, q)$  w przestrzeni

fazowej  $\Gamma$  mamy operator gęstości  $\rho$ , natomiast całkowanie z  $\rho(p, q)$  po przestrzeni fazowej zastąpimy przez operację brania śladu.

Rozważmy układ  $n$  obserwabi  $A_1, \dots, A_n$  (niekoniecznie ograniczonych) układu fizycznego tworzących **zespół regularny termodynamicznie**, , czyli zespół obserwabi

$$\begin{aligned} a) & \quad \text{liniowo niezależnych,} \\ b) & \quad \text{takich, że istnieją liczby rzeczywiste } a_1, \dots, a_n, \text{ że} \\ & \quad \text{Tr} \exp \left( - \sum_{j=1}^n a_j A_j \right) < \infty. \end{aligned} \quad (11.29)$$

Dokonując w chwili  $t = 0$  pomiaru wartości średnich obserwabi  $A_1, \dots, A_n$ , otrzymujemy  $n$  wartości

$$U_j(0) = U_j := \langle A_j, \rho \rangle = \text{Tr} (A_j \rho), \quad j = 1, \dots, n, \quad (11.30)$$

gdzie  $\rho \in W(\mathcal{H})$ , p. (11.1). Przez makrostan  $M$  w chwili  $t = 0$  rozumiemy zbiór

$$M := \left\{ \rho \in W(\mathcal{H}) : \text{Tr} (A_j \rho) = U_j, \quad 1, \dots, n \right\}. \quad (11.31)$$

**Entropię makrostanu** definiujemy wzorem

$$S = S(M) := \sup_{\rho \in M} (-\text{Tr} (\rho \ln \rho)). \quad (11.32)$$

Gdy przestrzeń  $\mathcal{H}$  jest skończenie wymiarowa, istnieje stan  $\rho_M \in M$  taki, że

$$S(M) = -\text{Tr} (\rho_M \ln \rho_M). \quad (11.33)$$

Stan  $\rho_M$  nazywamy **stanem reprezentatywnym** dla makrostanu  $M$ . Dla skonstruowania makrostanu w chwili  $t > 0$  zakładamy, że wszystkie operatory  $\rho \in W(\mathcal{H})$  zmieniają się w czasie zgodnie z równaniami (11.24)-(11.25):

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = L\rho(t), \quad \rho(t) = \Lambda(t)\rho(0). \quad (11.34)$$

Równania te spełnia również stan  $\rho_M$ :

$$\rho_M(t) := \Lambda(t) \rho_M(0), \quad t > 0. \quad (11.35)$$

Przy pomocy  $\rho_M(t)$  definiujemy wartości średnie estymowane obserwabi  $A_j$  dla chwili  $t > 0$ :

$$U_j(t) := \text{Tr} (A_j \rho_M(t)), \quad j = 1, \dots, n; \quad t > 0, \quad (11.36)$$

problem polega na znalezieniu równań dla estymowanych ( a więc nie mierzonych) wartości  $U_j(t)$ , jeśli znane są warunki początkowe  $U_j(0)$  oraz równania (11.34) dla operatora gęstości. Wielkości  $U_j(t)$  generują nakrostan  $M(t)$ :

$$M(t) := \left\{ \rho \in W(\mathcal{H}) : \text{Tr} (A_j \rho) = U_j(t), \quad 1, \dots, n; \quad t > 0 \right\}. \quad (11.37)$$

Zbiór  $M(t)$  nie jest pusty - należy do niego w szczególności stan  $\rho_M(t)$ . Stan  $\rho_M(t)$  nie jest jednak stanem reprezentatywnym dla  $M(t)$  - ten ostatni oznaczать będziemy przez  $\sigma_M(t)$  lub  $\rho_{M(t)}$ . Stan reprezentatywny  $\sigma_M(t)$ , znaleziony, jak zwykle, przy użyciu mnożników nieoznaczonych Lagrange'a, ma postać

$$\sigma_M(t) = Z^{-1} \exp \left( - \sum_{j=1}^n \beta_j(t) A_j \right), \quad (11.38)$$

gdzie

$$Z = Z(\beta_1(t), \dots, \beta_n(t)) = \text{Tr} \exp \left( - \sum_{j=1}^n \beta_j(t) A_j \right), \quad (11.39)$$

przy czym mnożniki  $\beta_j(t)$  związane są z wielkościami  $U_j(t)$  poprzez równania

$$U_j(t) = - \frac{\partial}{\partial \beta_j(t)} \ln Z(\beta_1(t), \dots, \beta_n(t)), \quad (11.40)$$

( $j = 1, \dots, n$ ;  $t \geq 0$ ). Mimo swojej ogólności wyliczenie  $U_j(t)$  na podstawie powyższych równań jest wykonalne jedynie w bardzo szczególnych przypadkach, nawet gdy ruch jest hamiltonowski. Trudności tkwią w całkowaniu równań ruchu (11.34) i znalezieniu  $\rho_M(t)$ . Dlatego skorzystamy z pewnego przybliżenia. Z równań (11.36) otrzymujemy

$$\frac{dU_j(t)}{dt} = \text{Tr} \left( A_j \frac{d\rho_M(t)}{dt} \right) = \text{Tr} (A_j L \rho_M(t)), \quad j = 1, \dots, n. \quad (11.41)$$

Kładąc

$$\rho_M(t) = \sigma_M(t) + (\rho_M(t) - \sigma_M(t)) \quad (11.42)$$

i zaniedbując  $\rho_M(t) - \sigma_M(t)$  (przybliżenie ruchu izoentropowego) otrzymujemy układ równań

$$\begin{aligned} \frac{dU_j(t)}{dt} &= \text{Tr} (A_j L \sigma_M(t)) = F_j(U_1(t), \dots, U_n(t)), \\ (j &= 1, \dots, n; \quad t \geq 0), \end{aligned} \quad (11.43)$$

gdyż  $\sigma_M(t) = \sigma[U_1(t), \dots, U_n(t)]$ , przy warunkach początkowych  $U_j(0) = U_j$ . Układ równań (11.43) jest układem zamkniętym i całkuje się go przy warunkach początkowych  $U_j(0) = U_j$ : po scałkowaniu możemy obliczyć wielkości  $\beta_j = \beta_j(t)$ , czyli tzw. temperatury odwrotne oraz entropię

$$S = S(t) = \sup_{\rho \in M(t)} (\text{Tr} (-\rho \ln \rho)) = \text{Tr} (-\sigma_M(t) \ln \sigma_M(t)), \quad (11.44)$$

dla  $t \geq 0$ . Dla ruchu niehamiltonowskiego otrzymujemy w ogólności wzrost entropii w czasie, o ile nie dostarczamy informacji do układu.

## 11.4 Operatory dyssypacji i pompowania

Równanie (11.34)

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = L \rho(t), \quad t \geq 0,$$

będące uogólnieniem równania von Neumanna dla operatorów  $\rho(t)$  opisujących układy nieizolowane, zawiera superoperator  $L$  nazwany przez nas uogólnionym operatorem Liouville'a, będącym liniowym operatorem działającym w zbiorze  $D(L)$  gęstym w  $B_1(\mathcal{H})$ . Przez dłuższy czas otwarty był problem warunków, jakie spełniać musi superoperator  $L$ , by operator  $\rho(t)$  zachowywał podstawowe własności operatora gęstości, tzn. by  $\rho(t) \geq 0$  oraz  $\text{Tr } \rho(t) = 1$  dla dowolnej chwili  $t \geq 0$ . Problem ten został ostatnio rozwiązany przez A. Kossakowskiego. Zdefiniujmy wielkości  $a_{k\ell}$

$$a_{k\ell} = \text{Tr}(P_k L P_\ell), \quad (11.45)$$

gdzie operatory  $P_k$  są dowolną rodziną operatorów rzutowych tworzących rozkład jedności. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by superoperator  $L$  zachowywał dodatnią określoność i ślad  $\rho$  w czasie, jest by liczby  $a_{k\ell}$  spełniały relacje

$$\begin{aligned} 1) \quad & a_{kk} \leq 0, \quad k = 1, 2, \dots, \\ 2) \quad & a_{k\ell} \geq 0, \quad k \neq \ell, \quad k, \ell = 1, 2, \dots, \\ 3) \quad & \sum_k a_{k\ell} = 0, \quad \ell = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (11.46)$$

W ogólności rozłożyć można superoperator  $L$  na dwie części  $L_0$  oraz  $L_1$ :

$$L = L_0 + L_1, \quad (11.47)$$

gdzie część  $L_0$

$$L_0 = \frac{1}{i} [H, \cdot], \quad (11.48)$$

tzn.

$$L_0 \rho = \frac{1}{i} [H, \rho] \quad (11.49)$$

( $i$  oznacza tu jednostkę urojoną, poza tym położyliśmy  $\hbar = 1$ ), opisuje zwykły ruch hamiltonowski (p. podrozdz. 7.1, w szczególności (7.2)) określony przez operator Hamiltona (samosprężony, niekoniecznie ograniczony operator liniowy działający w zbiorze  $D(H)$ , gęstym w  $B_1(\mathcal{H})$ ), natomiast  $L_1$ , nazywany przez nas dalej **operatorem dyssypacji** opisuje wpływ otoczenia na nasz układ i jest źródłem jego nieodwracalnego zachowania.

Operator  $L$  występujący w równaniu (11.34) nie jest zupełnie dowolny: istnieje półgrupa dynamiczna superoperatorów  $\Lambda(t)$  działających w  $B_1(\mathcal{H})$ , dla której

$$L \rho = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\Lambda(t) \rho - \rho}{t}, \quad \rho \in D(L). \quad (11.50)$$

Podamy teraz kilka przykładów operatorów dyssypacji.

Rozważmy liniowy oscylator harmoniczny (kwantowy) o częstości  $\omega$  i hamiltonianie  $H = \omega a^* a$ , gdzie  $a$  jest operatorem anihilacji, natomiast  $a^*$  operatorem kreacji. Dla takiego oscylatora można podać 2 przykłady operatora dyssypacji (patrz [11]).

1. Kładąc  $\rho(0) := \rho$  definiujemy

$$\rho(t) = \Lambda(t)\rho := \int_{z \in C} U(t, z) \rho U^*(t, z) p(t, z) d^2 z, \quad t \geq 0, \quad (11.51)$$

gdzie  $C$  jest płaszczyzną zespoloną,  $d^2 z = dx dy$ ,  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$ ,  $x, y \in R$ ,  $i$  oznacza jednostkę urojoną, oraz

$$U(t, z) := \exp(-i\omega a^* a) \exp(z a^* - \bar{z} a), \quad (11.52)$$

$$p(t, z) := \frac{1}{8\pi t \eta^2} \exp\left(-\frac{|z|^2}{4t\eta}\right), \quad \eta > 0. \quad (11.53)$$

Operator dyssypacji dla półgrupy  $\Lambda(t)$  zdefiniowanej przez (11.51) ma postać

$$L\rho(t) = \frac{1}{i} \left[ \omega a^* a, \rho(t) \right] + \eta \left[ [a, \rho(t)], a^* \right], \quad t \geq 0, \quad (11.54)$$

a zatem

$$L_0 \rho(t) = \frac{1}{i} \left[ \omega a^* a, \rho(t) \right], \quad (11.55)$$

i

$$L_1 \rho(t) = \eta \left[ [a, \rho(t)], a^* \right], \quad t \geq 0. \quad (11.56)$$

2. Oznaczając, jak poprzednio,  $\rho(0) := \rho$ , definiujemy

$$\rho(t) = \Lambda(t)\rho := \int_{z \in C} V(t, z) \rho V^*(t, z) p(t, z) d^2 z, \quad t \geq 0, \quad (11.57)$$

gdzie

$$V(t, z) = \exp \left\{ -t(\kappa + i\omega) \left( a^* a - \frac{\bar{z} a}{1 - \exp[-t(\kappa + i\omega)]} \right) \right\}, \quad \kappa > 0, \quad (11.58)$$

oraz

$$p(t, z) = \frac{1}{1 - \exp(-2\kappa t)} \exp \left[ -\frac{|z|^2}{1 - \exp(-2\kappa t)} \right]. \quad (11.59)$$

Tym razem otrzymujemy

$$L\rho(t) = \frac{1}{i} \left[ \omega a^* a, \rho(t) \right] + \kappa \left\{ [a, \rho(t) a^*] + [a \rho(t), a^*] \right\}, \quad (11.60)$$

a stąd

$$L_0 \rho(t) = \frac{1}{i} \left[ \omega a^* a, \rho(t) \right], \quad (11.61)$$

$$L_1 \rho(t) = \kappa \left\{ [a, \rho(t) a^*] + [a \rho(t), a^*] \right\}.$$

Określamy średnią energię w chwili  $t$  jako średnią wartość hamiltonianu  $H = \omega a^* a$ :

$$E(\rho(t)) = \langle H, \rho(t) \rangle = \text{Tr} (H \rho(t)). \quad (11.62)$$

Działanie operatora  $L_1$  z przykładu 1 powoduje wzrost średniej energii w czasie

$$\frac{dE(\rho(t))}{dt} = \langle H, (L_0 + L_1)\rho(t) \rangle = \eta, \quad \eta > 0. \quad (11.63)$$

Natomiast działanie operatora  $L_1$  z przykładu 2 prowadzi do tego, że w granicy  $t \rightarrow \infty$  operator gęstości przechodzi w operator  $P_0$  rzutowania w stan próżni (stan podstawowy):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = P_0, \quad (11.64)$$

niezależnie od stanu początkowego  $\rho(0)$  (ruch tego typu nazywamy **ergodycznym**). Obecnie w pracach dotyczących laserów używa się kombinacji operatorów  $L_1$  z przykładów 1 i 2 i pisze równanie ruchu dla operatora  $\rho(t)$  w postaci

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(t)}{dt} = & \frac{1}{i} \left[ \omega a^* a, \rho(t) \right] + \kappa \left\{ [a, \rho(t) a^*] + [a \rho(t), a^*] \right\} \\ & + \eta [a, \rho(t), a^*]. \end{aligned} \quad (11.65)$$

Prawa strona ostatniego równania jest najogólniejszym wyrażeniem zawierającym jedynie pojedyncze operatory  $a$  i  $a^*$  i zachowującym ślad operatora gęstości. Równanie to również opisuje ruch ergodyczny, ponieważ niezależnie od stanu początkowego otrzymujemy asymptotycznie operator gęstości w postaci

$$\rho(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = Z^{-1}(\beta) \exp(-\beta a^* a). \quad (11.66)$$

gdzie

$$Z(\beta) = \text{Tr} (\exp(-\beta a^* a)) = (1 - e^{-\beta})^{-1}. \quad (11.67)$$

Współczynnik  $\beta$  wiąże się z temperaturą energetyczną  $T$ :  $\beta = 1/T$ , i w naszym wypadku jest funkcją stałych  $\kappa$  i  $\eta$ :

$$\beta = \frac{1}{T} = -\ln \frac{\eta}{2\kappa + \eta}. \quad (11.68)$$

Dla wysokich temperatur słuszne jest przybliżenie

$$\beta \cong \frac{2\kappa}{\eta}, \quad \eta \gg \kappa. \quad (11.69)$$

Dla stanu  $\rho(\infty)$  średnia energia jest równa

$$E(\rho(\infty)) = \frac{\omega \exp(-\beta)}{1 - \exp(-\beta)} = \frac{\omega \eta}{2\kappa}, \quad (11.70)$$

a entropia

$$\begin{aligned} S(\rho(\infty)) &= -\ln (1 - e^{-\beta}) + \frac{\beta \exp(-\beta)}{1 - \exp(-\beta)} \\ &= -\ln \left( 1 - \frac{\eta}{2\kappa + \eta} \right) + \frac{\eta}{2\kappa} \ln \frac{2\kappa - \eta}{\eta}. \end{aligned} \quad (11.71)$$

Zarówno entropia, jak i średnia energia mogą być mniejsze, większe lub równe ich wartościom w chwili początkowej, niezależnie od wpływu otoczenia na rozważany układ.

Obecnie przejdziemy do omówienia drugiego układu ważnego dla badań nad laserami, mianowicie układu o spinie  $1/2$ , będącego najprostszym układem kwantowym. Przestrzeń Hilberta jest 2-wymiarowa. Dowolny liniowy operator  $X$  w 2-wymiarowej przestrzeni Hilberta może być przedstawiony w postaci kombinacji

$$X = \frac{1}{2} \left( x_0 \sigma_0 + \sum_{j=1}^3 x_j \sigma_j \right) = \frac{1}{2} x_0 \sigma_0 + \frac{1}{2} \mathbf{x} \boldsymbol{\sigma}, \quad (11.72)$$

gdzie  $x_0, \dots, x_3 \in \mathbb{C}$  (liczby zespolone), natomiast  $\sigma_0, \dots, \sigma_3$ , to macierze Pauli'ego (patrz (10.249))

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Macierze te spełniają relacje

$$\begin{aligned} \sigma_s^2 &= \sigma_0 \quad (s = 0, 1, 2, 3) \\ \sigma_j \sigma_k &= \delta_{jk} \sigma_0 + i \sum_{\ell=1}^3 \epsilon_{j k \ell} \sigma_\ell, \end{aligned} \quad (11.73)$$

gdzie  $\epsilon_{j k \ell}$  jest symbolem Levi-Civity. Operator

$$X = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - i x_2 \\ x_1 + i x_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \quad (11.74)$$

jest hermitowski (samosprężony) wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki  $x_s$  ( $s = 0, 1, 2, 3$ ) są liczbami rzeczywistymi. Macierz (11.74) posiada wartości własne postaci

$$\xi_{1,2} = x_0 \pm \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = x_0 \pm |\mathbf{x}|. \quad (11.75)$$

Zatem warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by macierz (operator)  $X$  była dodatnio określona, są nierówności

$$x_0 \geq 0, \quad |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \leq x_0. \quad (11.76)$$

W związku z tym dowolny operator gęstości działający w 2-wymiarowej przestrzeni Hilberta, będący operatorem dodatnio określonym i o śladzie równym 1, może być przedstawiony w postaci

$$\rho = \frac{1}{2} (x_0 \sigma_0 + \mathbf{x} \boldsymbol{\sigma}), \quad |\mathbf{x}| \leq 1. \quad (11.77)$$

Wprowadzając oznaczenie

$$\rho(x_0, \mathbf{x}) := \frac{1}{2} (x_0 \sigma_0 + \hat{x}), \quad (11.78)$$

zapiszemy operator (11.77) jako  $\rho(1, \mathbf{x})$ . Można pokazać, że operator  $L$  w postaci

$$L\rho = \frac{1}{i}[b, \rho] + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^3 \left\{ \gamma_j - \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}{2} \right\} [\hat{e}_j, [\hat{e}_j, \rho]], \quad (11.79)$$

gdzie  $\mathbf{b}$  jest 3-wymiarowym wektorem rzeczywistym,  $\mathbf{e}_j (j = 1, 2, 3)$  tworzą bazę ortonormalną w  $R^3$ , a stałe  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  są tzw. stałymi dyssypacyjnymi problemu, jest najogólniejszym operatorem transformującym  $\rho(1, \mathbf{x})$  w  $\rho(1, \mathbf{y})$ . Dla konkretnych zastosowań położymy

$$\mathbf{e}_j = \delta_{jk}, \quad j = 1, 2, 3, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_{\perp} > 0, \quad \gamma_3 =: \gamma_{\parallel} > 0. \quad (11.80)$$

Wówczas, wyłączając operator  $L_0$ , otrzymujemy z (11.79)

$$\begin{aligned} L_1 = & -\frac{1}{8} \left\{ \gamma_{\parallel} \left( [\sigma_1, [\sigma_1, \rho]] + [\sigma_2, [\sigma_2, \rho]] \right) \right. \\ & \left. + (2\gamma_{\perp} - \gamma_{\parallel}) [\sigma_3, [\sigma_3, \rho]] \right\}. \end{aligned} \quad (11.81)$$

Działanie lasera jest zwykle opisywane jako równowaga pomiędzy dyssypacją a pompowaniem. W przytoczonych wyżej przykładach 1 i 2 operatory dyssypacji (11.56) i (11.61) mogą być traktowane jednocześnie jako operatory pompowania, ponieważ “pompują” one pewien stan początkowy do określonego stanu końcowego. W tych procesach entropia może maleć i układ jest “pompowany”. Jeżeli jednak stanem początkowym nie jest dowolny stan  $\rho \in W$ , lecz określony stan  $\rho \in M$  (na ogół makrostan  $M$  wyznaczony jest poprzez średnią energię), wówczas pompowanie nie jest możliwe i mamy do czynienia jedynie z dyssypacją. Zatem przejście od dyssypacji do pompowania zależy od typu zbioru stanów początkowych.

Rozważmy 2-wymiarową przestrzeń Hilberta związaną z układem o spinie 1/2. Operator  $\rho$  ma postać  $\rho(1, \mathbf{x})$ . Transformację  $\rho(1, \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y})$  zapisać można w postaci

$$\Lambda(t)\rho(1, \mathbf{x}) = \rho(1, A(t)\mathbf{x}), \quad (11.82)$$

gdzie  $A(t) : R^3 \rightarrow R^3$  i  $|A(t)\mathbf{x}| \leq |\mathbf{x}|$  dla każdego  $\mathbf{x} \in R^3$ , oraz  $A(t)A(s) = A(t+s)$  dla  $t, s \geq 0$ . Jeżeli założymy, że  $\mathbf{y} \in F(L)$ , gdzie

$$F(L) = \left\{ \mathbf{y} \in R^3 : |\mathbf{y}| \leq 1, \quad Z(\mathbf{y}) \leq 1 \right\}, \quad (11.83)$$

oraz

$$Z(\mathbf{y}) := \sup_{t \geq 0} \sup_{|\mathbf{x}| \leq 1} |A(t)\mathbf{x} + \mathbf{y} - A(t)\mathbf{y}|, \quad (11.84)$$

wówczas transformacja

$$\rho(t) = \rho(1, \mathbf{x}(t)) := \Lambda(t)\rho(1, \mathbf{x}) = \rho(1, A(t)\mathbf{x} + \mathbf{y} - A(t)\mathbf{y}) \quad (11.85)$$

zapewnia dodatnią określoność  $\rho(t)$  dla  $t \geq 0$  oraz zachowanie śladu. Zbiór  $F(L)$  nazywamy **obszarem pompowania operatora dyssypacji**  $L$ . Równanie ruchu przybiera postać

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = L(\rho(t) - \rho_0), \quad (11.86)$$

gdzie  $\rho_0 \in F(L)$  i  $t \geq 0$ . Dla zastosowań dotyczących laserów kładziemy

$$\rho_0 = \rho_0(1, 0, 0, \xi); |\xi| \leq f(\gamma_\perp, \gamma_\parallel) \leq 1, \quad (11.87)$$

$\xi$  jest **parametrem pompowania**, a  $f(\gamma_\perp, \gamma_\parallel)$  jest pewną funkcją stałych dyssypacji.

## 11.5 Model lasera na ciele stałym

Wprowadzona w poprzednich podrozdziałach teoria może być stosowana do lasera na ciele stałym. Zakładamy, że układ laserowy składa się z 2 podukładów, oddziałujących między sobą wraz z otoczeniem, a w szczególności z

1. układu  $N$  dwupoziomowych atomów o ustalonych położeniach, na tyle odległych między sobą, że można zaniedbać oddziaływanie wzajemne. Rozpatrywane poziomy są poziomami ze-emanowskimi i odległość między nimi (w skali energetycznej) jest mała w porównaniu z odległością tych poziomów od stanu podstawowego. Zakładamy, że atomy są identyczne, ale rozróżnialne poprzez położenia w przestrzeni i numerujemy je indeksem  $j = 1, 2, \dots, N$ . Jest to więc układ  $N$  “energetycznych” spinów  $1/2$  z indeksem  $j$ , których 3-cia składowa  $(1/2)\sigma_3^j$  jest proporcjonalna do operatora energii  $j$ -tego atomu. Oddziaływanie atomów z polem elektromagnetycznym określone jest przez operator momentu dipolowego, o którym zakładamy, że jest proporcjonalny do 1-szej składowej  $j$ -tego spinu  $(1/2)\sigma_1^j$ . Pozostałe poziomy atomu są rozważane jako część otoczenia, którego działanie na poszczególne atomy opisują operatory dyssypacji;
2. jednego modu promieniowania elektromagnetycznego we wnętrzu (oscylator harmoniczny o częstotliwości  $\omega$  w rezonansie z atomami), podczas gdy inne mody uważamy za odległe (w sensie energetycznym) i zakładamy, że tworzą one część otoczenia. Wpływ otoczenia jest opisywany poprzez operator dyssypacji postaci (11.65).

Zgodnie z tymi założeniami zapiszemy równanie ruchu dla  $\rho(t)$  w postaci

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \frac{1}{i}[H, \rho(t)] + L_1^a(\rho(t) - \rho_0(\xi)) + L_1^e \rho(t), \quad (11.88)$$

gdzie indeks  $a$  odnosi się do atomów,  $e$  - do pola elektromagnetycznego, oraz

$$H := \frac{1}{2}\omega \sum_{j=1}^N \sigma_3^j + \omega a^* a - g(a + a^*) \sum_{j=1}^N \sigma_1^j, \quad (11.89)$$

$$L_1^a := \left( L_1^{(1)} \otimes L_1^{(2)} \otimes \dots \otimes L_1^{(N)} \right), \quad (11.90)$$

$$L_1^e := \kappa([a, \rho a^*] + [a \rho, a^*]) = \eta[[a, \rho], a^*], \quad (11.91)$$

$$\rho(\xi) = \frac{1}{2^N} \otimes_{j=1}^N (\sigma_0^j + \xi \sigma_3^j), \quad \Xi = N\xi, \quad (11.92)$$

a  $L_1^{(j)}$  jest postaci (11.81). Stała  $g$  jest stałą sprzężenia między układem atomowym a polem elektromagnetycznym,  $\xi$  oznacza parametr pompowania atomu, przy czym obszar pompowania wyznaczony jest przez  $|\xi| \leq 1$ ,  $|\Xi| \leq N$ . Operator  $\rho(t)$  działa w przestrzeni Hilberta, określonej jako iloczyn tensorowy 2-wymiarowych przestrzeni związanych z poszczególnymi stanami oraz nieskończenie wymiarowej ośrodkowej przestrzeni Hilberta związanej z oscylatorem harmonicznym (modem promieniowania).

Następnie wybieramy następujący układ obserwabli podstawowych, do którego zastosujemy metodę termodynamiki informacyjnej:

$$A_1 = \sum_{j=1}^N \sigma_1^j, \quad A_2 = \sum_{j=1}^N \sigma_2^j, \quad A_3 = \sum_{j=1}^N \sigma_3^j, \quad (11.93)$$

$$A_4 = a^* + a, \quad A_5 = i(a^* - a), \quad A_6 = a^* a, \quad (11.94)$$

$$A_7 = a^* a^* + a a, \quad A_8 = i(a^* a^* - a a), \quad (11.95)$$

$$A_9 = a^* a a^* + a^* a^* a + a a^* a + a^* a a, \quad (11.96)$$

$$A_{10} i (= a^* a a^* + a^* a^* a - a a^* a - a^* a a), \quad (11.97)$$

$$A_{11} = a^* a a a^* = A_6^2. \quad (11.98)$$

Obserwable te tworzą układ liniowo niezależny i termodynamicznie regularny. Dla prostoty wybieramy wszystkie obserwable jako bezwymiarowe, jednak im więcej bierzemy obserwabli  $A_i$  ( $i = 1, \dots$ ), tym dokładniej możemy opisać działanie lasera. Np. wybierając obserwable  $A_3$  i  $A_6$ , nie otrzymalibyśmy w ogóle akcji laserowej (brak zjawiska tzw. progu), dla układu obserwabli  $A_1, \dots, A_6$  otrzymujemy zjawisko progu akcji laserowej, ale nie występuje tam tzw. druga temperatura energetyczna istotna dla statystyki fotonów (patrz [9]). Druga temperatura energetyczna pojawia się dopiero przy uwzględnieniu pełnego układu  $A_1, \dots, A_{11}$ . Opis działania lasera, oparty na układzie operatorów (11.93)-(11.98) jest już dostatecznie dokładny, by oddać istotne cechy pracy lasera. Nie uwzględniamy w nim korelacji między podukładami (obserwable mieszana z operatorów podukładów), gdyż to ostatnie jest istotne dopiero dla promieniowania spontanicznego (tzw. nadpromienistość Dicky'ego), a nie dla wymuszonego (p. praca [15]). Promieniowanie spontaniczne daje słabe, ale mierzalne przyczynki do szumu kwantowego i w dokładniejszej teorii można je uwzględnić jako poprawkę. Ponieważ, jak się okaże, obserwable wyższych rzędów nie wnoszą na ogół poprawek do wartości średnich obserwabli niższych rzędów, więc teoria z rozsądnie dobranym rzędem daje makroskopowo wystarczający opis lasera.

Z równań (11.43) otrzymujemy następujące rozwiązania dla stanu asymptotycznego ( $t \rightarrow \infty$ ), w przybliżeniu "fali wirującej" tzn. wydzielając częstość  $\omega$ .

1. Poniżej progu akcji laserowej, tj. gdy

$$\Xi < \Xi_0 = \frac{\kappa \gamma_{\perp}}{2\kappa^2} \leq N,$$

$$U_1 = U_2 = U_4 = U_5 = U_7 = U_8 = U_9 = U_{10} = 0, \quad (11.99)$$

gdzie

$$U_j \langle A_j, \rho \rangle = \text{Tr} (A_j \rho),$$

oraz

$$U_3 = \Xi, \quad U_6 = \frac{\eta}{\kappa}, \quad U_{11} = \frac{\eta(2\eta + \kappa)}{\kappa^2} = U_6(2U_6 + 1), \quad (11.100)$$

(Warunek  $\kappa\gamma_{\perp}/2\kappa^2 \leq N$  jest warunkiem działania lasera, gdy nie jest spełniony, dany laser nie może działać).

2. Powyżej progu, tj. gdy  $\Xi_0 \leq \Xi \leq N$ :

$$U_4 = \frac{2g}{\kappa + \sigma} U_1, \quad U_5 = \frac{2g}{\kappa + \sigma} U_2, \quad U_3 = \Xi, \quad (11.101)$$

$$U_6 = \frac{\eta}{\kappa} + \frac{\gamma_{\parallel}}{2\kappa} (\Xi - \Xi_0), \quad (11.102)$$

natomiast dla  $j = 7, \dots, 11$  otrzymujemy

$$U_j = F_j(U_1, U_2), \quad j = 7, \dots, 11, \quad (11.103)$$

gdzie  $F_j$  są pewnymi znanymi funkcjami. Dla  $U_1 = U_2 = 0$  również

$$U_7 = U_8 = U_9 = U_{10} = 0, \quad (11.104)$$

natomiast

$$U_{11} = \frac{1}{2\kappa} \left\{ \eta + \frac{4\eta + \kappa}{\kappa} \left[ \eta + \frac{\gamma_{\parallel}}{2} (\Xi - \Xi_0) \right] \right\}. \quad (11.105)$$

Z powyższego rozwiązania widać, że poniżej progu istnieje rozwiązanie ergodyczne, wyznaczone całkowiec przez stałe występujące w równaniach i rozwiązanie to jest niezależne od warunków początkowych. Dla obu podukładów lasera operator  $\rho$  przybiera w tym przypadku operatora rozkładu kanonicznego, odpowiednio o różnych i niezależnych temperaturach związanych ze stałymi  $\Xi$  i  $\eta$  (pierwszej odpowiada temperatura ciała stałego, drugiej temperatura promieniowania we wnętrzu). Laser nie działa.

Z kolei powyżej progu akcji laserowej pojawia się zależność wszystkich średnich od dwu z nich (a więc ergodyczność znika), tzw. średnich sygnałowych  $U_1$  i  $U_2$  (lub  $U_4$  i  $U_5$ ). Laser zaczyna reagować na ten sygnał, pojawia się sprzężenie między średnimi podukładów, którego wyrazem jest proporcjonalność sygnałów elektromagnetycznych do atomów polaryzacji. Sytuację taką nazwać można półergodyczną, gdyż od innych parametrów średnie nie zależą. Szczególne znaczenie ma pojawienie się istotnie nowej temperatury związanej ze średnią  $U_{11}$  (temperatura energetyczna 2-go rzędu dla pola fotonowego), niezależnej od  $U_6$  jak poniżej progu. Powyżej progu termodynamika lasera staje się więc **termodynamiką wielotemperaturową**. Wszystkie podane wyniki zgadzają się ze znanymi rezultatami badań doświadczalnych i teoretycznych nad laserami na ciele stałym.

Termodynamika informacyjna, w połączeniu z nowymi wynikami dotyczącymi teorii ewolucji układów kwantowych w czasie, pozwala więc na otrzymanie znanych wyników w sposób znacznie prostszy i bardziej systematyczny od metod heurystycznych.

Przedstawiliśmy powyżej stan zaawansowania termodynamiki informacyjnej laserów z końca 1971 roku. Badania trwają dalej, a nowe wyniki podane zostaną w części drugiej skryptu, która poświęcona będzie zaawansowanej teorii laserów.



# Bibliografia

- [1] A. Kossakowski, Preprint No. 172 IF UMK, Toruń 1972.
- [2] A. Kossakowski, Preprint No. 190 IF UMK, Toruń 1972.
- [3] A. Kossakowski, Preprint No. 191 IF UMK, Toruń 1972.
- [4] A. Kossakowski, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. Astr.Phys. **17** (1969), 263.
- [5] Preprint No. 122 IF UMK, Toruń 1970 (praca habilitacyjna).
- [6] R.S. Ingarden, Postępy Fizyki, **19**(1968), 43.
- [7] R.S. Ingarden, ibid., **20**(1968), 309.
- [8] R.S. Ingarden, Acta Phys. Polon., **36** (1969), 855.
- [9] R.S. Ingarden, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. Astr.Phys. **19** (1971), 77.
- [10] R.S. Ingarden, Preprint No. 170 IF UMK, Toruń 1972.
- [11] R.S. Ingarden, Preprint No. 171 IF UMK, Toruń 1972.
- [12] R.S. Ingarden, Preprint No. 189 IF UMK, Toruń 1972.
- [13] N. Dunford and J. T. Schwartz, Linear Operators. Spectral Theory of Self Adjoint Operators in Hilbert Space, Intersc. Publ., New York 1963.
- [14] E. Hille, On the generation of semi-groups and the theory of conjugate functions. Proc. R. Physiogr. Soc. Lund. **21**(14).
- [15] A. Fleck, Phys. Rev. **149** (1966), 301.



# Spis rysunków

|       |                                                                                              |     |
|-------|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1.1   | Funkcjonały liniowe i funkcje równe prawie wszędzie . . . . .                                | 16  |
| 1.2   | Dystrybucje . . . . .                                                                        | 18  |
| 3.1   | Eksperyment Younga . . . . .                                                                 | 56  |
| 3.2   | Konstrukcja amplitudy . . . . .                                                              | 64  |
| 3.3   | Koherencja na podstawie wzoru (3.56) . . . . .                                               | 64  |
| 4.1   | Dane doświadczalne F.T. Arecchi'ego dotyczące ilości zliczeń . . . . .                       | 72  |
| 6.1   | Związki między operatorami . . . . .                                                         | 124 |
| 6.2   | Wykresy stopnia polaryzacji $\mathcal{P}^2$ jako funkcji wartości własnej $\rho_1$ . . . . . | 131 |
| 7.1   | Obszary w rozwiązaniu równania (7.82) . . . . .                                              | 155 |
| 10.1  | Wykres funkcji $\dot{A} = \dot{A}(A)$ . . . . .                                              | 207 |
| 10.2  | Lorentzowski kształt linii widmowej . . . . .                                                | 209 |
| 10.3  | Oscylator z potencjałem harmonicznym i anharmonicznym . . . . .                              | 209 |
| 10.4  | Natężenie pola ze składowymi harmonicznymi $\omega, 2\omega, 3\omega$ . . . . .              | 209 |
| 10.5  | Schemat rezonatora . . . . .                                                                 | 210 |
| 10.6  | Przejścia ze stanu $a$ do $b$ . . . . .                                                      | 217 |
| 10.7  | Płaszczyzna całkowania całki dopplerowskiej . . . . .                                        | 220 |
| 10.8  | Zależność parametru nasycenia $I_n(\nu_n)$ . . . . .                                         | 228 |
| 10.9  | Rysunek do danych przypadku 1, (10.186) . . . . .                                            | 237 |
| 10.10 | Rysunek do danych przypadku 2, (10.187) . . . . .                                            | 238 |
| 10.11 | Rysunek do danych przypadku 3, (10.188) . . . . .                                            | 238 |
| 10.12 | Efekt "wypalonych dziur" . . . . .                                                           | 245 |



# Spis tablic

|      |                                                                                                                                       |     |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.1  | Funkcje walcowe . . . . .                                                                                                             | 66  |
| 10.1 | 27 możliwych wartości indeksów $\mu, \rho, \sigma$ , które odpowiadają składnikom w równaniu (10.120) w przypadku 3-modowym . . . . . | 230 |
| 10.2 | Różne kombinacje indeksów $\mu, \rho, \sigma, n$ , niezbędne do obliczenia wyrażenia (10.120) dla $M = 3$ . . . . .                   | 231 |
| 11.1 | Klasyfikacja stanów . . . . .                                                                                                         | 258 |



# Skorowidz

- Allen L., 204  
Arecchi F.T., 72  
autokorelacja, 59
- Bargmann V., 164, 166  
Bennet R., 229  
Bennet W.R., 203, 245  
Beran H.J., 11  
Białynicka-Birula Z., 160  
Białynicki-Birula I., 160  
Billingsley P., 11  
Birnbaum G., 204  
Blandin A., 181, 198, 203  
Bloch C., 195  
Bogolubov N.N., 205  
Bremermann H., 10  
Brittin W.E., 244  
Butera P., 164
- całka  
    dopplerowska, 219  
    funkcjonalna, 85
- Caylay A., 124  
Chanin Ja.U., 204
- ciąg  
    zbieżny do zera, 40
- Cilenko E.F., 204  
Cittert P.H. van, 63  
Cohen-Tannoudji C., 181, 198, 203  
Coute S.D., 219
- czas  
    koherencji, 94
- Czebyszew P.A., 74  
Czernyszew W.H., 205
- częstość  
    drgań własnych, 205  
    dudnień, 239  
    kołowa, 205
- czynnik  
    rozwidlenia, 217  
    stabilizacyjny, 221
- delta  
    Kroneckera, 248
- detektor, 181
- Dirac P., 13  
Dirac P.A.M., 120  
Dominicis C. de, 195  
Downs B.W., 244
- dyspersja, 46
- dystribucja, 17  
     $\delta$  Diraca, 21  
    analityczne przedstawienie, 28  
    finitna, 27  
    Heaviside'a, 20, 23  
    nieparzystą, 22  
    nośnik, 27  
    o nośniku zwartym, 27  
    parzystą, 22  
    pochodna, 23  
    przedstawienie Cauchy'ego, 28  
    skupiona w obszarze, 27

- translacja, 22
- transpozycja, 22
- dystribucje
  - czynnik splatający, 32
  - iloczyn, 21
  - iloczyn prosty, 29
  - osobliwe, 17
  - osobliwe (singularne), 21
  - regularne, 17, 20
  - splot, 29
  - suma, 21
  - typu miary, 17, 21
  - wolno rosnące, 39
- efekt
  - Dopplera, 246
- Ehrenpres L., 43
- Einstein A., 67
- eksperyment Younga, 55
- elektron
  - klasyczny promień, 208
- Ellin H.A., 203
- endomorfizm
  - dodatni, 257
- energia
  - drgań zerowych, 150
- entropia
  - makrostanu, 261
  - stanu, 114
  - von Neumanna, 130
  - względem miary, 114
  - związana z obserwabłą, 126
- estymator
  - rozkładu prawdopodobieństwa, 112
- Fajn W.M., 204
- fala
  - monochromatyczna, 59
- Feller W., 88
- Fork R, 241
- forma
  - kwadratowa, 192
- formuła
  - Bakera-Hausdorffa, 185
  - Wicka-Blocha - de Dominicisa, 189
- fotony, 67
- Fox A.G., 210
- Fox J., 204
- Fried B.D., 219
- Friedrichs K.O., 11
- funkcja
  - analityczna, 163
  - autokorelacji, 93
  - Bessela, 65, 98
  - całkowita, 163
  - charakterystyczna, 33, 46
  - ciągła, 163
  - Diraca, 99, 224
  - górna, 29
  - Greena dla równania falowego, 62
  - koherencji wzajemnej, 59, 189
  - konfluentna hipergeometryczna, 74
  - korelacyjna, 85
  - Lorentza, 225
  - Neumanna, 65
  - ograniczona, 163
  - rozmywająca detektora, 99
  - tworząca, 69, 184
    - dla wielomianów Laguerre'a, 74
  - tworząca estymowana, 186
  - tworząca momentów iloczynowych, 47
  - tworząca momenty, 46
  - uogólniona, 17

walcowa, 65  
 funkcje  
   Bargmanna, 164  
   Bessela  
     przedstawienie całkowite, 66  
   finitne, 19  
   Hankela, 65  
   Hermite'a, 167  
   szybko malejące, 39  
   tworzące prawdopodobieństwa, 46  
 funkcjonal  
   charakterystyczny, 184  
   liniowy, 13  
   rzeczywisty, 13  
   zespolony, 13  
  
 Gabor D., 57  
 Gelfand I.M., 10, 43  
 gęstość  
   ładunków, 145  
   prawdopodobieństwa, 168  
   wzbudzenia, 217  
 Gichman I.I., 88  
 Girardello L., 164  
 Giunter C.L., 13  
 Glauber R.J., 11, 132, 157, 181, 196, 198, 204  
 Gleason A.M., 128  
 Gordon V.P., 203  
 granica  
   dopplerowska, 224  
 grupa  
   ruchów mechanicznych, 112  
  
 Haken H., 10, 11  
 Halperin I., 10  
 Hanbury Brown R., 97  
 Heaviside O., 13  
  
 Heitler W., 208  
 Hernot D.R., 203  
 hierarchia  
   równań, 104  
 Hille E., 259  
 Hunbury-Twissa doświadczenie, 182  
  
 idempotencja, 166  
 idempotentność  
   macierzy gęstości, 126  
 iloczyn  
   skalarny, 119  
 Ingarden R.S., 9, 11, 57, 105, 112, 115, 145, 164,  
   203  
 interferometria  
   natężeniowa, 97  
 inwersja  
   populacji, 217  
  
 Javan A., 229, 241  
 Javan A., 203  
 Jaynes E.T., 9, 115  
 Jones D.G.C., 204  
  
 kąt  
   względny fazowy, 232  
 Kelley P.L., 204  
 Kirchhoff G., 155  
 Klauder J.R., 204  
 Klauder J.R., 7, 11, 55, 119, 164  
 Klein O., 127  
 Klimkov Ju.M., 204  
 Kodzew W.W., 205  
 koherencja  
   światła częściowa, 55  
   całkowita, 196  
   całkowita modułowa, 190  
   M-tego rzędu, 196

konwencja sumacyjna, 248  
korelacja, 82  
    krzyżowa, 59  
korelacje  
    wyższych rzędów, 186  
Kossakowski A., 263  
Kossakowski A., 112, 258  
Krejn S.G., 10  
Krylov N.M., 205  
kryterium  
    d'Alemberta, 163  
kumulanty, 47, 110  
  
Laguerre E., 74  
Lamb W.E., 203, 221, 229, 244  
Langevine P., 102  
laser, 9  
Lasery  
    teoria, 210  
Lax B., 204  
Lax M., 10  
Lengyel B.A., 204  
Li T., 210  
liczba  
    kardynalna, 140  
liczby  
    Bernoulli'ego rzędu  $n$ , 48  
    Bernoullie'go, 48  
    Stirlinga pierwszego rodzaju, 48  
Lighthill M.J., 10  
Louisell W.H., 10, 11, 204  
Łopuszański J., 104, 112, 195  
  
macierz  
    dyssypatywna, 213  
    gęstości, 143  
    korelacyjna, 82  
    odwrotna, 83  
    tłumienia, 213  
macierze  
    Pauli'ego, 248  
    Pauliego, 129  
makrostan, 49, 114, 185  
    korelacyjny, 82  
    w chwili  $t = 0$ , 261  
Mandel L., 55, 69  
Maszkievich W.S., 204  
Maurin K., 10  
McFarlane R.A., 228  
Mehta C.L., 198  
metoda  
    Bogolubowa-Kryłowa-Mitropolskiego, 206  
miara  
    Lebesgue'a, 112  
    Liouville'a, 112  
Michelson A., 55  
Mikusiński J., 11, 13  
Mistel G.P., 205  
mnożniki Lagrange'a, 50  
mody  
    sprężenie słabe, 237  
    sprężenie silne, 237  
moment  
    dipolowy, 249  
momenty  
    centralne, 45  
    iloczynowe, 47, 69  
    zwykłe, 45  
Mukunda N., 198  
  
nadzupelność  
    zbioru stanów koherentnych, 166  
Neumann J. von, 167  
nierówność

Schwartza, 159  
 nośnik  
     zwarty, 19  
 norma  
     operatora, 122  
     wektora, 120, 173  
 obraz  
     Heisenberga, 144  
     oddziaływania Tomonagi-Schwingera, 144  
     Schrödingera, 144  
 odchylenie  
     kwadratowe średnie, 46  
     standardowe, 46  
 odległość  
     dwóch wektorów, 120  
 operator  
     anihilacji, 181, 263  
     antyhermitowski, 124  
     chronologicznego uporządkowania, 145  
     częściowy, 122  
     dodatnio określony, 124  
     dyssypacji, 263  
     dyssypacyjny, 214  
     dyssypatywny, 247  
     ewolucji, 144  
     Hamiltona, 263  
         dla oscylatora, 167  
     hermitowski, 123  
     ilości cząstek, 132  
     izometryczny, 125  
     jądrowy, 125  
     jednorodny, 258  
     jednostkowy, 123  
     klasy śladowej, 124  
     kreacji, 263  
     liniowy, 122  
     niszczenia (anihilacji), 131  
     normalny, 123  
     ograniczony, 122  
     pełnociągły, 124  
     pompowania, 267  
     reprezentatywny, 186  
     rozkładu kanonicznego, 270  
     rzutowy, 263  
     rzutu, 123, 257  
     samosprężony, 123  
     sprężony, 122  
     symetrii, 123  
     tworzenia (kreacji), 131  
     unitarny, 123, 158, 213, 260  
     uporządkowania chronologicznego, 213  
     związujący, 257  
 operatory  
     normalnie uporządkowane, 168  
     uogólnione Liouville'a, 260  
 operator  
     śląd, 124  
 oscylator  
     elektromagnetyczny, 205  
     prądowy, 205  
 osobliwość  
     potęgowa funkcji, 35  
 parametr  
     degeneracji, 95  
     nasycenia, 227  
     pompowania, 268  
 parametry  
     Stokesa, 128  
 Parrent G.B., 11  
 Parygin W.A., 205  
 Paul A., 204  
 Pawlikowski A., 104, 112, 195

pochodna  
     funkcjonalna, 105  
     Radona-Nikodyma, 113  
 pokrycie  
     otwarte zbioru, 33  
     przeliczalne, 33  
 polaryzacja, 210  
     kołowa, 129, 149  
     liniowa, 129, 149  
     pełna, 129  
 pole  
     całkowicie koherentne, 190  
     całkowicie niekoherentne, 190  
     częściowo koherentne, 190  
 pompowanie, 205  
 potencjał  
     anharmoniczny, 208  
 półgrupa  
     dynamiczna, 258  
     dynamiczna dualna, 259  
 prędkości  
     rejestracji fotonów, 199  
 proces  
     Gaussa, 88  
     nieodwracalny, 102  
     stacjonarny, 89  
 procesy  
     Markowa, 107  
 przeciąganie częstości  
     liniowe, 222  
     nieliniowe, 222  
 przekształcenie  
     Caylaya operatora, 124  
 przekształcenie Fouriera  
     całkowalnej funkcji, 40  
 przenikalność  
     efektywna, 246  
     nieliniowa, 246  
 przestrzeń  
     Banacha rzeczywista, 256  
     dualna, 19  
     dystrybucji temperowanych, 40  
     fazowa, 112, 172  
     Focka, 140  
     funkcji próbnych, 19  
     Hilberta, 119  
     liniowa, 119  
     ośrodkowa, 120  
     probabilistyczna, 127  
     sprzężona, 19  
     unitarna, 119  
 przestrzenie  
     funkcji prawie okresowych, 140  
     von Neumanna, 140  
 przesunięcie  
     częstości, 219  
 przybliżenie  
     ruchu izoentropowego, 262  
 punkt  
     ekstremalny, 127  
     lokalnej całkowalności, 34  
     osobliwy, 34  
 rachunek  
     zaburzeń, 210  
 Rainer A.M., 205  
 regularyzacja  
     całki rozbieżnej, 34  
     funkcji, 32, 34  
     kanoniczna, 35  
 relacja  
     nieokreśloności (nieoznaczoności) Heisenberga, 159

- residuum, 39
- rezerwuar
  - cieplny, 102
- rezonator, 210
- Rice S.O., 92
- Risken H., 10, 11
- Risken W., 203
- Rosenblatt M., 11, 88
- rozkład
  - geometryczny, 49, 50, 72
  - jedności, 33
  - Maxwella, 217, 218
  - niezależny, 91
  - Poissona, 53, 68, 71, 92, 137, 197, 200
    - $K$ -wymiarowy, 139
  - prędkości atomów, 217
  - prostokątny, 51
  - reprezentatywny, 49, 114
  - termiczny, 71
  - wielki kanoniczny, 195
  - wykładniczy, 52, 71
- rozkłady
  - łączone, 76
  - gaussowskie, 81
- rozstrojenia, 221
- równania
  - fluktuacyjne, 102
  - Fockera-Plancka uogólnione, 260
  - Hamiltona, 112
  - materiałowe, 145
  - Maxwella, 211
  - pola elektromagnetycznego, 145
- równanie
  - Chapmana-Kołmogorowa, 109
  - d'Alemberta, 62, 101
    - niejednorodne, 147
    - falowe, 211
    - fazowe, 206
  - Fokkera-Plancka, 110
  - Heisenberga, 144
  - Lorentza, 208
  - oscylatora harmonicznego tłumionego, 211
  - Schrödingera, 143
  - stochastyczne, 110
  - Van der Pola, 205
  - von Neumanna, 143, 214, 258, 263
- równość
  - Parsewala, 40
- ruch
  - Browna, 108
  - ergodyczny, 265
  - liniowy, 257
- Rzewuski J., 11
- Sanders T.M., 203
- Saremetiew A.T., 205
- Schavlov A.L., 203
- Schwartz L., 13, 40
- Sebastião e Silva J., 43
- Shapiro, H.N., 11
- Shilov G.E., 10
- siła
  - Langevina, 102
- Siegman A.E., 204
- Sikorski R., 11
- Skorochod A.W., 88
- Smith R.C., 204
- Sommerfeld A., 66
- średnie
  - sygnałowe, 270
- stała
  - Boltzmanna, 114, 218
  - dyssypacji, 249

- prędkości, 245
- struktury subtelnej, 221
- stan
  - całkowitej koherencji pola, 190
  - czysty, 257
  - kombinowany, 257
  - mieszany, 126, 257
  - podstawowy, 265
  - reprezentatywny, 114, 261
- stany
  - czyste, 112
  - koherentne, 157
  - sprężone, 157
- Staszewski P., 247
- Stokes G.G., 128
- stopień
  - polaryzacji, 129
- stopień koherencji, 61
  - dla pola kwantowego, 198
  - zespólony, 61, 189
- stopień polaryzacji, 77
- Sudarshan E.C.G., 7, 11, 55, 119, 204
- suma stanów, 115
- superoperator
  - dyssypacji, 248
- Swiesznikow A.A., 11
- sygnał
  - analityczny, 90
- symbol
  - Levi-Civita, 266
- Szöke A., 229
- Sziłow G.J., 43
- średnia
  - ważona, 53
- światło
  - koherentne, 55
  - niekoherentne, 55
- Tannewald P.E., 204
- temperatura
  - bezwzględna, 218
  - energetyczna, 265
- temperatury
  - odwrotne, 262
- Temple S., 13
- tensor
  - przenikalności elektrycznej, 145
  - przenikalności magnetycznej, 145
- teoria
  - Lamba, 210
- termodynamika
  - informacyjna, 115
  - wielotemperaturowa, 270
- Thiele T.N., 47
- tony
  - kombinacyjne, 240
- Townes C.H., 10, 203
- transformacja
  - podobieństwa, 22
- Troup G., 204
- twierdzenie
  - Cantora, 140
  - Gleasona, 128
  - Liouville'a, 112
  - Lioville'a odwrotne, 113
  - Stokesa, 155
  - van Citterta-Zernicke'go, 63
  - von Neumanna, 141
  - Wicka-Blocha-de Dominicisa, 195
- Twiss R.Q., 97
- układ
  - wektorów ortonormalny, 120

- wektorów zupełny, 120
- Unger H.G., 204
- Urbanik K., 115
- Van der Pol B., 206, 229
- von Neumann J., 164
- Vuylsteke A.A., 204
- wariancja, 46, 70, 79
- wartość
  - własna, 122
- wartość główna
  - całki w sensie Cauchy'ego, 38
- wektor
  - gęstości prądu, 145
  - indukcji elektrycznej, 145
  - indukcji magnetycznej, 145
  - natężenia pola elektrycznego, 145
  - natężenia pola magnetycznego, 145
  - polaryzacji, 210
  - potencjału, 146
- wektory
  - bra, 120
  - ket, 120
- Wick G.C., 195
- widzialność, 55, 60
- wielomiany
  - Laguerre'a, 74
- Wilcox L.R., 203
- Wilenkin N.J., 10
- Witt C. de, 181, 198, 203
- Wolf E., 55, 61
- wskaźnik
  - dobroci, 210
- współczynnik
  - efektywności kwantowej, 199
  - fazowy, 212
  - kwadratury, 212
  - straty, 210
  - ucieczki, 210
- Wyard S.J., 204
- wzór
  - Poissona, 26
- wzbudzenie
  - progowe, 226
  - względne, 226
- Yariv A., 203
- Yosida K., 259
- zamykanie
  - częstości, 241
- zasada
  - maksimum informacji, 49
- zbiór
  - przeliczalny, 140
  - wypukły, 114, 257
  - w przestrzeni Hilberta, 164
- zbieżność
  - według normy, 163
- Zemanian A.H., 10
- Zernicke F., 63
- zero bezwzględne, 224
- zespół
  - termodynamicznie regularny, 114, 261
- zregularyzowana
  - wartość całki, 34