



*Anna Michałek**

SZACOWANIE NATURALNEJ STOPY PROCENTOWEJ DLA POLSKI

Z a r y s t r e ś c i. Naturalna stopa procentowa (NSP) jest jednym ze składników reguły stopy procentowej zaproponowanej przez Johna B. Taylora (1993) (reguły Taylora). Pierwotnym celem reguły jest dostarczenie rekomendacji dla władz banku centralnego w zakresie optymalnego poziomu stopy procentowej. Z punktu widzenia banku centralnego, stosującego strategię bezpośredniego celu inflacyjnego, głównym zadaniem jest stabilizacja inflacji na niskim poziomie, co wymaga precyzyjnego dostrojenia stóp realnych do tzw. poziomu naturalnego. NSP jest kategorią bezpośrednio nieobserwowalną, dlatego podejmowane są liczne próby jej estymacji. W pracy zaprezentowano wyniki pomiaru NSP w Polsce w latach 1998-2011 z wykorzystaniem metody graficznej oraz filtru Kalmana. Otrzymane szacunki NSP uwzględniono w rozważanej regule Taylora, a następnie dokonano porównania uzyskanych zaleceń.

S ł o w a k l u c z o w e: naturalna stopa procentowa, filtr Kalmana, reguła Taylora.

K l a s y f i k a c j a J E L: C32, E43, E52, E58.

WSTĘP

W teorii i praktyce bankowości centralnej występuje powszechna zgoda, co do tego, że wysoka inflacja jest zjawiskiem niekorzystnym. Tym samym cel władz monetarnych, jakim jest stabilizacja poziomu cen¹, wydaje się bezsporny. Dominującym sposobem prowadzenia tak zorientowanej polityki pieniężnej jest strategia bezpośredniego celu inflacyjnego (BCI), która najogólniej mówiąc stanowi długookresową perspektywę myślenia o inflacji. W ramach strategii BCI powszechnie obowiązującym instrumentem polityki pieniężnej jest krótkookresowa nominalna stopa procentowa. Podejście takie wymusza na banku cen-

* Adres do korespondencji: Anna Michałek, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, WNEiZ, ul. Gagarina 13 A, 81–100 Toruń, e-mail: michalek.ania@wp.pl.

¹ Współcześnie pojęcie stabilność cen oznacza na tyle niską inflację, która nie wywiera negatywnego wpływu na decyzje podejmowane przez podmioty gospodarcze (zob. np. *Założenia polityki pieniężnej na rok 2011*, 2010). Stabilizacja inflacji na niskim poziomie ma stworzyć podstawy do trwałego wzrostu gospodarczego.

tralnym rozróżnienie dwóch kategorii stóp procentowych nominalnych i realnych oraz dokładne przemyślenie spodziewanych przyszłych działań w celu racjonalnego podjęcia bieżącej decyzji (Blinder, 2001, s. 31, 52).

Dodatkowym atutem strategii BCI jest stworzenie odpowiednich ram działania, które mogą stworzyć podstawy wprowadzenia pewnych reguł postępowania. Największym zainteresowaniem badaczy cieszy się reguła polityki pieniężnej zaproponowana przez Johna B. Taylora (1993), która stanowi mechanizm ustalania krótkookresowej nominalnej stopy procentowej. W myśl jej twórcy reguła polityki pieniężnej to plan działania, określający w sposób możliwie najbardziej klarowny okoliczności, w których bank centralny powinien dokonać zmiany w instrumencie polityki pieniężnej (Taylor, 1993, s. 198; 2007, s. 9). Tym samym, w przypadku reguły Taylora, odchylenia inflacji od celu inflacyjnego oraz produktu realnego od produktu potencjalnego wymuszają określone reakcje ze strony władz monetarnych.

Wybór instrumentu polityki pieniężnej w postaci stopy procentowej oraz zorientowanie polityki pieniężnej na stabilizowanie inflacji w długim horyzoncie czasowym sugeruje możliwość odwołań do koncepcji naturalnej stopy procentowej (NSP). Stopa ta stanowi podstawę do porównań dla krótkookresowej realnej stopy procentowej, a relacja tych stóp wyznacza stopień restrykcyjności prowadzonej polityki pieniężnej. Przekonanie, że w krótkim okresie bank centralny może kontrolować również realną stopę procentową sprowadza się zatem do próby ustalenia, jaki jest poziom realnej stopy procentowej, która stabilizuje stopę inflacji.

Naturalna stopa procentowa włączona do mechanizmu ustalania krótkookresowej nominalnej stopy procentowej w postaci reguły Taylora stwarza szczególne możliwości sterowania polityką pieniężną, tak by w dłuższym terminie inflacja była utrzymywana na niskim poziomie. Założeniem niniejszego artykułu jest wyznaczenie poziomu naturalnej stopy procentowej w Polsce w latach 1998–2011, a następnie wykorzystanie jej w regule Taylora, w celu uzyskania rekomendacji odnośnie do wysokości krótkookresowej nominalnej stopy procentowej. Przyjęte założenia odnoszące się do NSP (NSP stała w czasie bądź zmieniająca się z okresu na okres) determinują wybór metod szacowania NSP tj. graficzną, ekonometryczną w postaci filtru Kalmana i umożliwiają dokonanie analizy porównawczej otrzymanych rekomendacji.

1. REGUŁA TAYLORA

Zaproponowana przez Taylora (1993) reguła stopy procentowej uzależnia wysokość stopy procentowej od stopy inflacji, odchylenia inflacji od celu inflacyjnego, luki popytowej oraz poziomu naturalnej realnej stopy procentowej².

² Taylor (zob. np. 1999, 2000, 2010) używa sformułowania realna stopa procentowa równowagi szacowana przez bank centralny (ang. *equilibrium interest rate*). Stopa ta odpowiada zrównaniu PKB rzeczywistego z PKB potencjalnym, rozumianym jako maksymalny produkt wytwo-

Klasyczna reguła Taylora ma następującą postać:

$$i_t = \pi_t + 0,5(\pi_t - \pi^*) + 0,5y_t + i^*, \quad (1)$$

gdzie:

i_t – nominalna stopa Funduszy Federalnych,

π_t – stopa inflacji,

π^* – docelowa stopa inflacji (cel inflacyjny),

i^* – naturalna realna stopa procentowa (NSP),

y_t – procentowe odchylenie rzeczywistego PKB od potencjalnego PKB (luka popytowa),

Kiedy inflacja wynosi tyle samo, co ustalony cel inflacyjny, a rzeczywisty PKB jest równy potencjalnemu, wtedy krótkookresowa nominalna stopa procentowa skorygowana o bieżącą inflację powinna być równa NSP. W przypadku reguły Taylora zakłada się, że naturalna stopa procentowa jest stała w czasie, co umożliwia przekształcenie zapisu reguły do postaci:

$$i_t = \alpha + 1,5\pi_t + 0,5y_t \quad (2)$$

gdzie:

$\alpha = i^* - 0,5\pi^*$ i stanowi punkt wyjścia dla większości prac empirycznych.

Nie sposób ocenić przydatności koncepcji reguły Taylora bez dokładnej identyfikacji jej możliwych zastosowań.

Wyróżnia się regułę stopy procentowej mającą na celu³:

1. Dostarczenie władzom monetarnym rekomendacji, pewnych wytycznych pomocnych w procesie podejmowania decyzji odnośnie do kierunku i wielkości zmian oficjalnych stóp procentowych.
2. Odzwierciedlenie prowadzonej polityki pieniężnej poprzez szukanie statystycznie istotnej funkcji reakcji władz banku centralnego bazującej na koncepcji Taylora, spełniającej tzw. zasadę Taylora⁴.
3. Uzupełnienie modelu gospodarki narodowej.

Pierwsze, pierwotne zastosowanie ma na celu dostarczenie rekomendacji dla władz banku centralnego odnośnie do kształtowania krótkoterminowej nomi-

rzony przez gospodarke, który nie wywołuje presji inflacyjnej. Umiejscowienie tej stopy w kontekście reguły Taylora gwarantuje utrzymanie inflacji na stabilnym poziomie w średnim okresie.

³ Prezentowane w niniejszej pracy rodzaje zastosowań zbliżone są do tych omawianych w artykule Baranowskiego (2008). W przeciwieństwie do Baranowskiego, autorka łączy podejście polegające na opisie i ocenie polityki pieniężnej z możliwością prognozowania w ramach pozytywnego charakteru badań. Natomiast wyróżnia typowo normatywne zastosowanie, które nie musi pasować statystycznie do rzeczywiście prowadzonej polityki pieniężnej.

⁴ Pojęcie „zasada Taylora” wprowadził Woodford (2001) i oznacza ono, że zmiana stopy inflacji o 1 punkt proc. wywołuje zmianę stopy procentowej o co najmniej 1 p.p. (patrz równanie 2). Oznacza to, że liniowe modele oparte na hipotezie racjonalnych oczekiwań są stabilne i tylko wtedy reguła może odegrać rolę nominalnej kotwicy dla inflacji i oczekiwań inflacyjnych. Sam Taylor (2007, s. 12) używa określenia zasada skutecznej (dobrej) polityki pieniężnej.

nalnej stopy procentowej. W tym przypadku podkreśla się normatywny charakter reguły i wtedy pozostaje się przy klasycznym kształcie reguły Taylora (patrz równanie 1), włączając w to sugerowane wartości parametrów.

Dobre dopasowanie zaleceń wynikających z zaproponowanej przez Taylora reguły do rzeczywistego przebiegu ścieżki stopy Funduszy Federalnych, począwszy od 1987 roku zwróciło uwagę badaczy na możliwość odzwierciedlenia funkcji reakcji banków centralnych za pomocą reguły, a co za tym idzie prognozowania zmian stóp procentowych. W tym drugim zastosowaniu dokonuje się częstych modyfikacji reguły Taylora, a reguła w tym wydaniu przyjmuje charakter pozytywny, opisowy.

Trzecie zastosowanie łączy dwa poprzednie i polega na umieszczeniu reguły w szerszym kontekście, jako jednego z równań makromodelu, co może być poprzedzone poszukiwaniem postaci funkcyjnej reguły, która odzwierciedla rzeczywiste decyzje władz monetarnych albo odbywa się na zasadzie przyjęcia ustalonej ogólnie reguły.

Taylor (2007, s. 9) podkreśla, że zaproponowana przez niego reguła została wyprowadzona z teorii ekonomii, a głównym przesłaniem reguły było i jest pełnienie funkcji doradczej, polegającej na wyznaczaniu pewnych pożądaných rozwiązań, a nie kopiowanie funkcji reakcji banku centralnego (Taylor, 2010, s. 5). Oczywiście jest, że im częściej banki centralne będą stosowały się do rekomendacji uzyskanych na podstawie reguły Taylora, tym bardziej przebieg funkcji reakcji będzie zbliżony do rozważanej reguły.

2. NATURALNA STOPA PROCENTOWA

Przyjęcie pewnych teoretycznych ram analizy reguły Taylora wymaga przybliżenia pojęcia naturalnej stopy procentowej⁵. Za twórcę tej koncepcji uważa się Knuta Wicksella (1898), który za naturalną stopę procentową uznał realną stopę procentową, przy której inwestycje równe są oszczędnościom, a system znajduje się w równowadze rozumianej jako stabilność pieniądza⁶. Wicksell określił naturalną stopę procentową jako pewien określony poziom oprocentowania pożyczek, który jest neutralny w stosunku do cen, tzn. poziom cen nie przejawia tendencji zwyżkowych ani zniżkowych. Wicksellowska stopa

⁵ W literaturze przedmiotu funkcjonuje kilka alternatywnych terminów odnoszących się do naturalnej stopy procentowej: neutralna, realna stopa równowagi. Brzoza-Brzezina (2003a) wskazuje na pewne różnice w stosowanej terminologii rezerwując pojęcie „realna stopa równowagi” dla stóp procentowych o charakterze średnio- i długo terminowym. Natomiast biorąc pod uwagę opinię Amata (2005) można odnieść wrażenie, że zarysowana granica podziału obecnie nie jest już tak jednoznaczna.

⁶ Zob. np. Winek i Robak (2003) oraz Brzoza-Brzezina (2003a) przybliżają koncepcję Wicksellowskiej stopy procentowej, prezentując model opisujący związek pomiędzy luką stóp procentowych (rozbieżność realnej i naturalnej stopy procentowej) i poziomem cen, który nazywany jest modelem procesu kumulacyjnego. Uzupełnienie modelu o równanie opisujące reakcję stóp procentowych na zmiany poziomu cen gwarantuje powrót do równowagi.

procentowa⁷ stabilizuje ogólny poziom cen i podkreśla długookresowy charakter NSP, natomiast współczesne definicje kojarzą NSP z krótkookresową realną stopą procentową i odnoszą się do stabilizacji inflacji (np. Brzoza-Brzezina, 2003a, s. 463)⁸. T. Laubach, J. C. Williams (2001, s. 9) posługują się pojęciem realnej stopy procentowej, która nie przyspiesza inflacji. Dodatkowo, o ile Wicksell realną stopę stabilizującą poziom cen nazywa stopą długookresowej równowagi i utożsamia z krańcową produktywnością kapitału, traktując je równorzędnie, o tyle zdaniem Brzozy-Brzeziny (zob. szerzej 2003a) istnieją przesłanki, aby kategorie te traktować osobno.

W literaturze przedmiotu można również spotkać się z definicją, która wskazuje na realną stopę procentową zrównującą rzeczywisty PKB wzdłuż stabilnej krzywej IS z potencjalnym PKB (Blinder, 2001, s. 54). Jeśli realna stopa procentowa jest wyższa od NSP, wówczas następuje ograniczenie zagregowanego popytu i w konsekwencji tworzy się luka pomiędzy realnym i nominalnym PKB, co znajdzie swoje odzwierciedlenie w spadku inflacji. Niższa realna krótkookresowa stopa procentowa w stosunku do NSP oznacza pobudzenie zagregowanego popytu, dodatnie otwarcie luki popytowej i wzrost presji inflacyjnej. Definicja Blindera dopuszcza zmienność w czasie naturalnej stopy procentowej. Stopa naturalna ulega zmianie, gdyż trwałe zmiany czynników określających wielkość zagregowanego popytu mogą przesunąć krzywą IS⁹. J. Williams (2003), wskazuje, że zrównanie realnego PKB z potencjalnym następuje przy braku przejściowych szoków popytowych, podkreślając jednocześnie długookresowy charakter realnej stopy procentowej. T. Laubach (2003) dowodzi, że zwiększenie długoterminowych prognoz deficytu budżetowego i długu publicznego skutkuje wzrostem oczekiwanej długoterminowej realnej stopy procentowej (przesunięcie krzywej IS w prawo), a tym samym wpływa na wzrost poziomu naturalnej stopy procentowej. Również rosnące tempo wzrostu produktywności oddziałuje dodatnio na naturalną stopę procentową.

Z punktu widzenia banku centralnego stosującego strategię bezpośredniego celu inflacyjnego bardziej przydatna wydaje się definicja naturalnej stopy procentowej nawiązująca do stabilizacji inflacji niż poszukiwania mikroekonomicznych podstaw istnienia NSP. Z kolei rozpatrywanie naturalnej stopy procentowej jako stopy równowagi modelu równowagi ogólnej niesie ze sobą korzyści w postaci wyznaczania determinantów naturalnej stopy procentowej, m.in. tempa wzrostu produktywności oraz stopy preferencji czasowych konsumentów. Wydaje się jednak, że modele konstruowane w duchu nowej syntezy

⁷ Jeżeli realna stopa procentowa przekracza krańcową produktywność następuje ograniczenie inwestycji (Wicksell, 1898, 1907).

⁸ Podana definicja jest to tzw. definicja inflacyjna, szczególnie ważna dla banku centralnego. Alternatywny sposób zdefiniowania naturalnej stopy procentowej nawiązuje do krańcowej produktywności kapitału.

⁹ Krzywa IS stanowi kombinację dochodu i stopy procentowej, przy których inwestycje równe są oszczędnościom.

neoklasycznej¹⁰, które akcentują racjonalność podmiotów i łączą podstawy mikroekonomiczne z pewnymi sztywnościami nominalnymi, pozwalają na analizę krótkookresowych fluktuacji aktywności gospodarczej jak i długookresowych tendencji wzrostowych, tym samym sprzyjają ujednoczeniu koncepcji naturalnej stopy procentowej (zob. szerzej Amato, 2005). NSP nie posiada już tylko charakteru średnio i długookresowego, ale może zmieniać się z okresu na okres, a co więcej wyznacza poziomy równowagi umożliwiające stabilizowanie cen.

Punktem wyjścia do dalszej analizy naturalnej stopy procentowej w kontekście polskiej polityki pieniężnej jest definicja NSP użyteczna z punktu widzenia banku centralnego, który stosuje strategię bezpośredniego celu inflacyjnego. Definicja ta podkreśla aspekt stabilizacji inflacji, obecnie rozumianej jako niska, stabilna stopa inflacji. Poziom realnej stopy procentowej, dla której dynamika stopy inflacji wynosi zero będzie utożsamiany z NSP. Definicję tę można zapisać jako:

$$\Delta\pi_t \equiv \alpha(i_{t-q}^R - NSP_{(t-q)}), \quad (3)$$

gdzie: $\Delta\pi$ – zmiana stopy inflacji, i^R – realna krótkookresowa stopa procentowa (nominalna stopa procentowa skorygowana o inflację), NSP – naturalna stopa procentowa, może być stała lub zmienna w czasie.

Ponieważ inflacja powinna spadać wraz ze wzrostem realnej stopy procentowej powyżej poziomu naturalnego, parametr α powinien być niedodatni. Indeks $t - q$ oznacza opóźnienie czasowe, z jakim ustalona krótkookresowa realna stopa procentowa oddziałuje na stopę inflacji¹¹.

3. METODY WYZNACZANIA NATURALNEJ STOPY PROCENTOWEJ

Wysokość naturalnej stopy procentowej nie wynika z działań banku centralnego, ale uzależniona jest od istniejących warunków w gospodarce, tj. zasobów siły roboczej, kapitału i efektywności ich wykorzystania oraz preferencji społeczeństwa w stosunku do konsumpcji i oszczędności. Szacunki naturalnej stopy procentowej obciążone są błędem, co więcej zmieniające się czynniki gospodarcze powodują, że naturalna stopa procentowa zmienia się w czasie. Problematiczne jest również wskazanie odpowiedniej miary, która najlepiej przybliżyłaby wartość naturalnej stopy procentowej. Przyjmując, że realna stopa procentowa jest to stopa nominalna pomniejszona o stopę inflacji, należy

¹⁰ Pojęcie nowa synteza neoklasyczna pojawiło się w połowie lat 90-tych XX wieku, jako nazwa kierunku łączącego w sobie poglądy nowego keynesizmu oraz realnego cyklu koniunkturalnego. Do najważniejszych elementów nowego kierunku można zaliczyć: krzywą Phillipsa (wersja uzupełniona o oczekiwania), wybór międzyokresowy oraz koncepcję racjonalnych oczekiwań (zob. np. Taylor, 2007).

¹¹ Prezentowany zapis definicji może dodatkowo uwzględniać cały szereg luk stóp procentowych, jak również lukę popytową.

dokonać wyboru rodzaju nominalnej stopy procentowej oraz miernika inflacji¹². Tak więc pojawia się wiele kombinacji możliwych rozwiązań, które mogą istotnie różnić się między sobą. Błędnie przyjęty poziom naturalnej stopy procentowej może prowadzić do przeszacowania lub niedoszacowania krótkookresowej nominalnej stopy procentowej w ramach reguły Taylora. Skala błędu wynikająca z pomyłki będzie tym mniejsza, im większą wagę bank centralny przyłoży do odchylenia inflacji od celu (Solow, Taylor, 2002, s. 53).

Naturalna stopa procentowa jest zmienną bezpośrednio nieobserwowalną (ang. *unobserved*). Dlatego podejmowane są próby szacowania NSP począwszy od metod statystycznych, poprzez wykorzystanie metod ekonometrycznych, kończąc na metodach strukturalnych i analizowaniu NSP w ramach dynamicznych stochastycznych modeli równowagi. Przy założeniu stałej w czasie naturalnej stopy procentowej, szacowanie jej poziomu jest dość łatwe, gdyż można uśrednić wartości realnej stopy procentowej w długim okresie. Jednak przewidywanie naturalnej stopy procentowej za pomocą długoterminowych średnich wymaga względnie stabilnych uwarunkowań determinujących poziom naturalnej stopy procentowej. Pewnym rozwiązaniem może być średnia ważona przykładająca coraz mniejszą wagę do bardziej odległych obserwacji (Williams, 2003). Jednak w przypadku okresów znacznego wzrostu lub spadku inflacji szacunki naturalnej stopy procentowej opierające się na metodach uśredniania, mogą cechować się dużą niedokładnością. Dlatego obok statystycznych metod wyznaczania naturalnej stopy procentowej istnieje cały szereg metod ekonometrycznych uwzględniających dynamikę zmian zachodzących w gospodarce.

Istnieją różne podejścia do estymacji zmiennej w czasie naturalnej stopy procentowej. Jednym z nich jest szeroko cytowane i naśladowane podejście zaproponowane przez Laubacha i Williama (2001) wykorzystujące filtr Kalmana do łącznego oszacowania trendu wzrostowego gospodarki, naturalnej realnej stopy procentowej oraz produktu potencjalnego. Takie podejście związane jest z przyjętą przez autorów definicją naturalnej stopy procentowej łączącej stabilność inflacji z odchyleniami rzeczywistego PKB od potencjalnego PKB. Alternatywnym sposobem estymacji może być zredukowanie formy relacji do zmian stopy inflacji i odchylenia realnej stopy procentowej od poziomu naturalnego (zob. np. Brzoza-Brzezina, 2003a). Jeszcze innym sposobem jest odwołanie się do terminowej struktury stóp procentowych i wykorzystanie stopy typu forward, co czyni np. O. Basdevant i in. (2004), R. Petru i in. (2007). W tym przypadku konieczne jest przyjęcie dodatkowego założenia dotyczącego zmian w czasie premii za ryzyko. Oprócz filtru Kalmana pojawiają się opracowania wykorzystujące do estymacji zmiennej w czasie naturalnej stopy procen-

¹² Nominalną stopę procentową można przedstawić w postaci oficjalnej stopy banku centralnego, bądź rynkowej stopy procentowej. Natomiast wykorzystywane mierniki inflacji to: CPI, inflacja bazowa albo oczekiwania inflacyjne. Urealnienie nominalnej stopy procentowej oczekiwaniami inflacyjnymi ukierunkowuje rozważania dotyczące oddziaływania realnej stopy procentowej na aktywność gospodarczą ku przyszłości.

towej narzędzia typu SVAR (Brzoza-Brzezina, 2003a), model DSGE (np. Neiss i Nelson, 2003)¹³.

4. ANALIZA EMPIRYCZNA DLA POLSKI

W polskiej literaturze ekonomicznej kwestia roli naturalnej stopy procentowej w stabilizowaniu inflacji poruszana jest sporadycznie, dlatego istnieje niewiele opracowań podejmujących próbę oszacowania wysokości NSP. Za prekursora w tej dziedzinie w Polsce uważa się M. Brzozę-Brzezińkę (2003a, 2003b, s. 604), który wartość NSP w latach 1997–2002 sugeruje na poziomie 4–6%, zwracając uwagę, że wartość ta jest inna w zależności od zastosowanej metody szacowania (filtr Kalmana, SVAR). W 2004 roku D. Filar, członek drugiej kadencji Rady Polityki Pieniężnej, sygnalizował wartość NSP na poziomie 4%. W 2007 roku pojawiło się opracowanie zespołu polskich ekonomistów Petru i in. (2007) odwołujące się do struktury terminowej stóp procentowych z wykorzystaniem filtra Kalmana, w którym NSP z końcem 2006 roku przyjęła wartość 3,2%.

Rozbieżne szacunki NSP w Polsce i brak jednoznacznych rozwiązań skłania do podjęcia próby wyznaczenia naturalnej stopy procentowej w Polsce w latach 1998–2011 z wykorzystaniem metod rozważanych przez polskich ekonomistów. Wiedza odnośnie do wysokości NSP w Polsce niezbędna jest z punktu widzenia rozważanego pierwotnego zastosowania reguły Taylora, jako pewnych wytycznych dla prowadzenia polityki pieniężnej w Polsce¹⁴. Przyjęcie 1998 roku za okres wyjściowy podyktowane jest faktem wprowadzenia strategii bezpośredniego celu inflacyjnego i zorientowania polityki pieniężnej na stabilizację inflacji w średnim okresie¹⁵. Od tego momentu głównym instrumentem realizacji tak określonego celu jest krótkookresowa nominalna stopa procentowa.

Zastosowanie reguły Taylora dla Polski, jako rekomendacji odnośnie do wysokości krótkookresowej nominalnej stopy procentowej wymaga doboru odpowiednich zmiennych. Dane o częstotliwości kwartalnej tworzą zbiór 54 obserwacji. Próba obejmuje okres od I kwartału 1998 roku do II kwartału 2011 roku. Za krótkookresową nominalną stopę procentową przyjęto oficjalną stopę Narodowego Banku Polskiego w postaci stopy referencyjnej (stan na koniec

¹³ Autorzy otrzymują NSP wykorzystując kalibrowany model DSGE. W takim przypadku modelowana NSP zależy od poprawności przyjętej specyfikacji modelu.

¹⁴ W pracy skupiono się na „normatywnym” zastosowaniu reguły, dlatego punktem wyjścia do dalszych rozważań jest klasyczna postać reguły Taylora dana wzorem (1), uwzględniająca sugerowane wartości parametrów.

¹⁵ Obecnie w Polsce od 2004 roku obowiązuje ciągły cel inflacyjny rzędu 2,5% +/-1 punkt procentowy. Krótkookresowy cel dla roku 1998 kształtował się poniżej 9,5%. W 1999 roku cel określono jako przedział 6,6 – 7,8%. Dla 2000 roku wyniósł on 5,4 – 6,8%. Pod koniec roku 2001 spodziewano się inflacji pomiędzy 6 a 8%. W pierwszej połowie 2002 roku krótkookresowy cel wyniósł 5%, natomiast od czerwca obowiązywał poziom 3% +/-1 p.p. Cel ten miał również zostać osiągnięty w 2003 roku.

kwartału)¹⁶. Biorąc pod uwagę fakt, iż cel inflacyjny w Polsce zdefiniowany jest w kategoriach wskaźnika wzrostu cen towarów i usług (CPI) za miernik inflacji uznano wskaźnik wzrostu CPI (analogiczny okres roku poprzedniego) (zob. np. *Strategia polityki pieniężnej po 2003 roku*, 2003)¹⁷. Preferowana forma celu inflacyjnego w postaci dopuszczalnego pasma wahań, decyduje o przyjęciu za cel inflacyjny środkowej wartości przedziału. Luka popytowa, rozumiana jako procentowe odchylenie PKB realnego od PKB potencjalnego, została oszacowana z wykorzystaniem filtra Hodricka-Prescotta¹⁸. Naturalna stopa procentowa, podobnie jak luka popytowa jest kategorią nieobserwowalną. Metody jej wyznaczania i użyte do tego celu zmienne, zostaną omówione w dalszej części artykułu.

4.1. NSP STAŁA W CZASIE

Przy założeniu stałego poziomu naturalnej stopy procentowej, jedną z najprostszych metod wyznaczania wartości NSP jest metoda graficzna, która polega na poszukiwaniu takiego poziomu realnej stopy procentowej, który przyczynił się do stabilizacji inflacji w ramach wyznaczonego celu inflacyjnego. Wykres 1 przedstawia przebieg stopy inflacji (CPI) na tle krótkookresowej realnej stopy procentowej (RWIM) w postaci jednomiesięcznej stawki WIBOR¹⁹ urealnionej oczekiwaniami inflacyjnymi osób prywatnych (średnia oczekiwana stopa inflacji w ciągu roku). Jeżeli zgodnie z podejściem prezentowanym przez NBP przyjmie się, że do końca 2003 roku realizowana była strategia BCI zmierzająca do obniżenia inflacji do wskazanego poziomu, natomiast od początku 2004 roku strategia ta ukierunkowana jest na stabilizację inflacji, to górnej granicy poszukiwań naturalnej stopy procentowej można dopatrywać się w okolicach 6%, gdyż z początkiem 2004 roku stopa inflacji znalazła się w paśmie celu

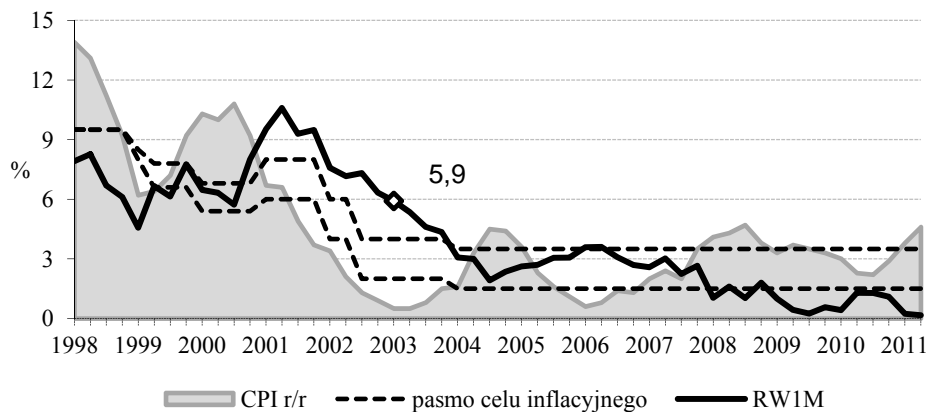
¹⁶ Ponieważ w pracy rozważane jest pierwsze wymienione zastosowanie reguły Taylora jako rekomendacji odnośnie do wysokości stopy dla RPP, zaleconą stopą procentową będzie oficjalna stopa banku. Należy mieć jednak świadomość, że stopa ta oddziałuje na stopy rynku międzybankowego, a dopiero te mają przełożenie na stopy rynkowe. Dlatego często w pracach empirycznych wykorzystywane są stawki WIBOR. Oprocentowanie krótkoterminowych operacji otwartego rynku wpływa głównie na WIBORSW zgodny z 7-dniowym terminem zapadalności bonów pieniężnych. Długookresowe instrumenty kształtują się pod wpływem oczekiwań uczestników samego rynku.

¹⁷ W *Założeniach polityki pieniężnej* ostatnich lat oraz w wypowiedziach członków RPP pojawiają się również odniesienia do miar inflacji bazowej. Dlatego zasadne byłoby również rozważenie ewentualnego wpływu tego miernika na poziom stopy procentowej wynikającej z reguły Taylora. Zadanie to jednak wykracza poza ramy tego opracowania.

¹⁸ PKB realny to PKB nominalny skorygowany o zmianę cen (delator PKB), wyrażony w cenach stałych średniorocznych poprzedniego roku. Eliminacji wahań sezonowych uzyskanego szeregu dokonano metodą TRAMO/SEATS dostępną w programie GRET. Bazowano na danych za lata 1998–2011. Szczegółowy opis wykorzystanej metody szacowania luki popytowej został zawarty w pracy Michałek (2009).

¹⁹ Wybór stawki WIBORIM podyktowany jest tym, że dopiero w 2005 roku skrócono termin zapadalności podstawowych operacji z 14 do 7 dni. Do 2003 roku była to minimalna rentowność 28-dniowych bonów pieniężnych NBP.

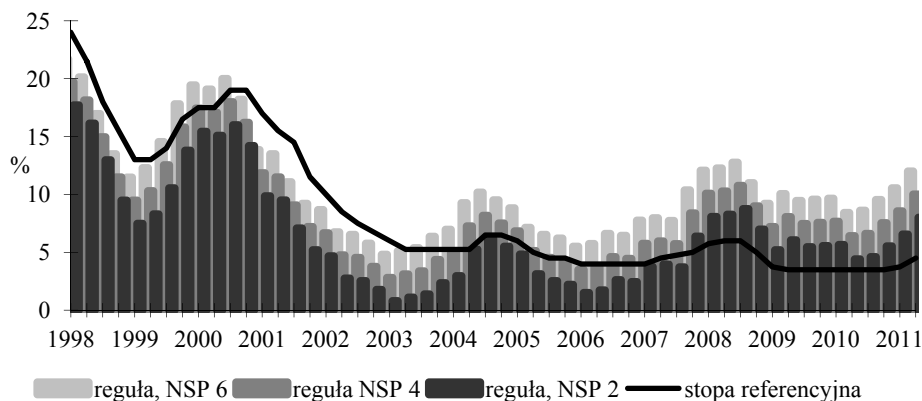
inflacyjnego. Poziom 6% ustalono przy przyjętym założeniu, że impuls w postaci zmiany stopy procentowej oddziałuje na inflację z opóźnieniem rzędu 4 kwartałów²⁰.



Wykres 1. Realny WIBOR1M i stopa inflacji w latach 1998–2011

Źródło: obliczenia własne.

Innym sposobem ustalenia poziomu stałej w czasie NSP jest policzenie średniej realnej stopy WIBOR1M w okresie odpowiadającym stabilnej inflacji z uwzględnieniem opóźnienia reakcji inflacji. Średnia stopa RWIM w latach 2003–2011 wyniosła 2,3%. Wartość tę można przyjąć za dolną granicę korytarza poszukiwań NSP. Dla uproszczenia, zakłada się, że w latach 1998–2011 NSP należy spodziewać się w przedziale między 2% a 6%.



Wykres 2. Reguła Taylora przy założeniu stałej w czasie NSP

Źródło: obliczenia własne.

²⁰ Zakres opóźnienia jest kwestią dyskusyjną ze względu na zachodzące zmiany w mechanizmie transmisji impulsów monetarnych. Zazwyczaj maksymalna reakcja inflacji ujawnia się od jednego roku do dwóch lat.

Kolejnym krokiem jest ocena wpływu przyjętych wartości NSP w postaci wartości krańcowych przedziału poszukiwań NSP, czyli 6% i 2% oraz wartości pośredniej 4% na rekomendacje (ex post) dla RPP odnośnie do wysokości stopy procentowej wynikającej z reguły Taylora, co zostało zaprezentowane na wykresie 2. Na podstawie wykresu można stwierdzić, że kierunek i wahania zmian oficjalnej stopy NBP i zalecanej przez regułę Taylora są zbliżone. O ile założenie wysokiego poziomu NSP w granicach 6% może mieć swoje uzasadnienie na początku badanego okresu, o tyle założenie to przypadające na ostatnie lata wydaje się nieadekwatne. Odwrotna sytuacja ma miejsce w przypadku ustalenia NSP na zbyt niskim poziomie.

Należy przypuszczać, że założenie stałości NSP w Polsce w latach 1998–2011 jest zbyt restrykcyjne, bardziej realne wydaje się założenie, że NSP zmieniała się w czasie, przy czym wykazywała się pewną tendencją spadkową.

4.2. NSP ZMIENIAJĄCA SIĘ W CZASIE

Przy założeniu zmiennej w czasie NSP rozważa się dwa warianty wyznaczenia szeregu tej nieobserwowalnej zmiennej. Prezentowane rozwiązania bazują na filtrze Kalmana i odnoszą się do definicji NSP podkreślanej w artykule. Filtr Kalmana stanowi zbiór matematycznych równań, które umożliwiają rekurencyjny sposób estymacji stanu nieobserwowalnego na podstawie procesu założonego w tzw. modelu przestrzeni stanów, przy minimalizacji błędu średniokwadratowego²¹. W pracy wykorzystano procedurę modelu przestrzeni stanów i filtru Kalmana zawartą w oprogramowaniu EViews 6. Badanie przeprowadzono na danych kwartalnych w latach 1997–2011²².

W pierwszym wariacie szacowania szeregu zmiennej nieobserwowalnej odwołano się do koncepcji zaprezentowanej przez Brzozę-Brzezinę (2003b) dokonując pewnej modyfikacji równania stanu. Mianowicie uwzględniono opóźnienie luki realnych stóp procentowych rzędu 4 kwartałów, co wydaje się pozostawać w zgodzie z założeniem poczynionym w ramach mechanizmu

²¹ Filtr Kalmana to skomplikowane narzędzie ekonometryczne, którego dokładny opis procedury ustalania i charakterystyki działania wymagałby poświęcenia osobnego rozdziału pracy. Dlatego zdecydowano się podać źródła, które poświęcają wiele miejsca temu zagadnieniu w kontekście szacowania NSP. Szczegółowy opis metody filtru Kalmana przedstawiono w pracy H. Mumtaz (2009) oraz O. Wallace'a Ibhagui (2010).

²² Brzoza-Brzezina (2003b) szacunki NSP przeprowadza na danych kwartalnych za okres 1995 II kw.-2002 III kw. tłumacząc przyjęcie okresu startowego zmianą reżimu kursowego w Polsce. Należy jednak mieć na uwadze fakt, że w latach 1995, 1996 realne stopy procentowe pozostawały na ujemnym poziomie. Dlatego w niniejszej pracy przyjęto za początek próby I kwartał 1997 roku, pozostawiając roczny margines na sugerowane przez Brzozę-Brzezinę (2003b, s. 597) zastrzeżenia co do jakości początkowych obserwacji zmiennej stanu. Dobór próby w drugim wariacie szacowania NSP przedstawionym w pracy opiera się na tych samych przesłankach.

transmisji monetarnej²³. Rozważany model przestrzeni stanów w wariancie I można zapisać w postaci:
równania obserwacji:

$$CPI_t = \alpha_1 CPI_{t-1} + \alpha_2 (RW1M_{t-4} - NSP_{t-4}) + \varepsilon_{1,t}, \quad \varepsilon_{1,t} : N(0, \sigma_{const}^2) \quad (4)$$

$$W1M_t = NSP_t + \pi_t^e + \varepsilon_{2,t}, \quad \varepsilon_{2,t} : N(0, \sigma_{const}^2) \quad (5)$$

równanie stanu:

$$NSP_t = NSP_{t-1} + \varepsilon_{3,t}, \quad \varepsilon_{3,t} : N(0, \sigma_{\varepsilon_3}^2) \quad (6)$$

gdzie: CPI – stopa inflacji; $W1M, RW1M$ – nominalny i realny WIBOR1M ($W1M - \pi^e$); π^e – średnia oczekiwana stopa inflacji w ciągu roku.

Równania 4 i 5 to równania obserwacji, natomiast równanie 6 to równanie stanu opisujące zachowanie zmiennej nieobserwowalnej NSP , jako proces błędzenia losowego. Zakłada się, że czynniki losowe w równaniach są nieskorelowane względem siebie, dodatkowo w przypadku równań obserwacji narzucono z góry wariancję składników losowych²⁴.

Nieznana wartość parametrów uzyskano poprzez maksymalizację funkcji wiarygodności. Parametr α_1 okazał się dodatni, mniejszy od jedności, co oznacza, że wystąpiła inercja inflacji i bieżąca stopa inflacji w badanym okresie zależała od swojej przeszłej realizacji. Ujemna wartość parametru α_2 oznacza, że restrykcyjna polityka monetarna ($RW1M > NSP$) prowadziła do obniżenia stopy inflacji.

Alternatywnie rozważanym wariantem szacowania zmiennej w czasie NSP jest podejście zaprezentowane przez Basdevanta i in. (2004), wykorzystane również w pracy Petru i in. (2007), które nawiązuje do teorii struktury terminowej stóp procentowych. Przy założeniu, że stopy terminowe odzwierciedlają oczekiwania rynku co do przyszłego poziomu krótkoterminowych stóp procentowych z uwzględnieniem premii za ryzyko, równania modelu w wariancie II są następujące:

równania obserwacji:

$$W1M_t = NSP_t + \pi_t^e + \varepsilon_{1,t}, \quad \varepsilon_{1,t} : N(0, \sigma_{const}^2) \quad (7)$$

$$r5ob_t = NSP_t + \pi_t^e + spread_t + \varepsilon_{2,t}, \quad \varepsilon_{2,t} : N(0, \sigma_{const}^2) \quad (8)$$

²³ Ponieważ w równaniu obserwacji nie może występować opóźniona zmienna stanu, tym samym należy wprowadzić szereg zmiennych zastępczych, co znacznie komplikuje zapis modelu w programie EViews (zob. szerzej Van den Bossche, 2011, s. 3).

²⁴ Zarówno w pierwszym, jak i drugim wariancie szacowania zmiennej w czasie NSP z wykorzystaniem filtru Kalmana dla równań obserwacji narzucono z góry stałą wariancję składników losowych. W obu wariantach przyjęto wartość wariancji sugerowaną w pracy Petru i in. (2007) wynoszącą odpowiednio 10.

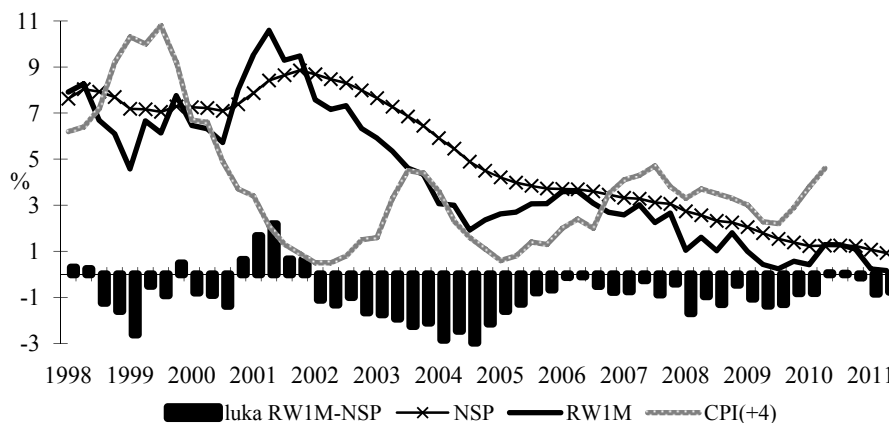
równania stanu:

$$NSP_t = NSP_{t-1} + \varepsilon_{3,t}, \quad \varepsilon_{3,t} : N(0, \sigma_{\varepsilon_3}^2) \quad (9)$$

$$spread_t = \delta_0 + \delta_1 spread_{t-1} + \varepsilon_{4,t}, \quad \varepsilon_{4,t} : N(0, \sigma_{\varepsilon_4}^2) \quad (10)$$

gdzie: *W1M* – krótkookresowa stopa procentowa w postaci stawki WIBOR1M, *r5ob* – stopa długoterminowa w postaci średniej rentowności na przetargu 5-letnich obligacji, π^e – średnia oczekiwana stopa inflacji w ciągu roku, *spread* – premia za ryzyko (różnica krótkookresowej i długookresowej stopy procentowej).

Naturalna stopa procentowa przybliżona została za pomocą procesu błędzenia przypadkowego, natomiast ryzyko czasowe opisano, jako proces autoregresyjny rzędu 1. Zakłada się, że czynniki losowe w równaniach są nieskorelowane względem siebie, dodatkowo w przypadku równań obserwacji z góry narzucono wariancję składników losowych.

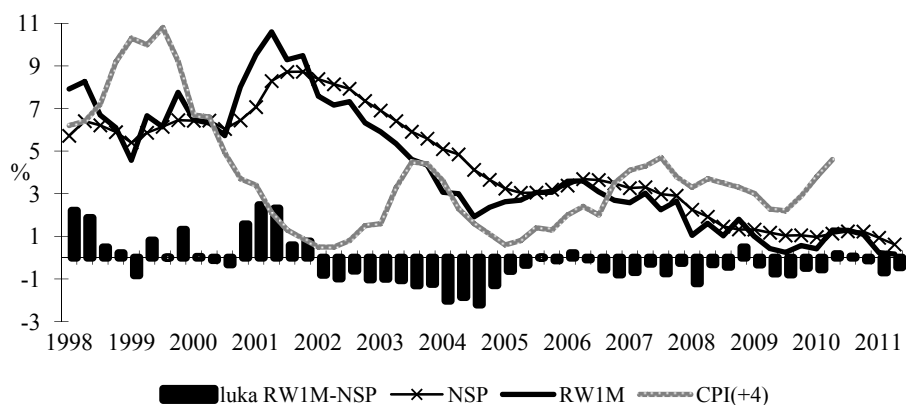


Wykres 3. Wariancie I. NSP w latach 1998–2011

Źródło: obliczenia własne.

Otrzymane w wariancie pierwszym i drugim szeregi NSP dla Polski w latach 1998–2011 na tle realnej stopy rynku międzybankowego przedstawione zostały na wykresach 3 i 4. W celu dokładniejszego zobrazowania wpływu luki realnych stóp procentowych na inflację z uwzględnieniem sugerowanego opóźnienia w reakcji inflacji rzędu 4 kwartałów, przesunięto wykres stopy inflacji. Dokonując porównania szeregów NSP otrzymanych na podstawie rozważanych wariantów można zauważyć dość duże ich podobieństwo. Zarówno w pierwszym jak i drugim przypadku NSP w latach 1998–2011 wykazuje się tendencją spadkową. Generalnie wartości, kierunek i zakres zmian NSP są zbliżone w obu rozważanych wariantach, przy czym NSP w wariancie drugim szacowana jest na nieco niższym poziomie i wydaje się być bardziej wolatylna. Największe

rozbieżności można zauważyć w początkowym okresie badania w latach 1998–2000, kiedy w wariantcie I szacowana NSP przewyższała poziom realnej stopy WIBOR1M, natomiast w wariantcie drugim raczej kształtowała się poniżej RW1M. Tym samym oceny stopnia restrykcyjności prowadzonej polityki pieniężnej będą różne dla obu wariantów. Restrykcyjna polityka pieniężna powinna przejawiać się ustalaniem realnej krótkookresowej stopy procentowej (w tym przypadku RW1M) na poziomie przekraczającym NSP. W sytuacji, kiedy RW1M kształtuje się powyżej NSP należy spodziewać się spadku stopy inflacji, w odwrotnej sytuacji powinien nastąpić jej wzrost. Ponieważ w 1999 roku nastąpił wyraźny wzrost stopy inflacji, można przypuszczać, że wzrost ten mógł nastąpić na skutek ujemnego rozwarcia luki realnych stóp procentowych. Obniżenie realnej stopy WIBOR1M poniżej poziomu naturalnego przyczyniło się do wzrostu inflacji. Podobna sytuacja miała miejsce z początkiem 2002 i w połowie 2009 roku.



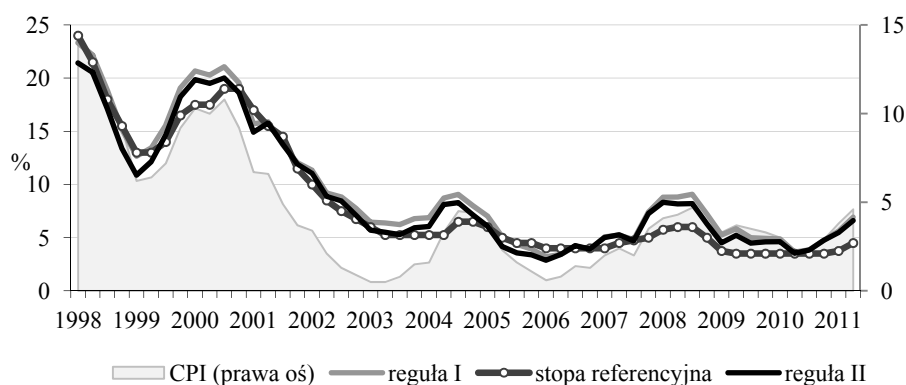
Wykres 4. Wariant II. NSP w latach 1998–2011

Źródło: obliczenia własne.

Analizując wykresy 3 i 4, można przyjąć, że generalnie reakcja inflacji na zmiany luki realnych stóp procentowych w badanym okresie dla obu wariantów jest zgodna z oczekiwaniami, choć obserwuje się również pewne anomalie. Przykładem może być rok 2004, w którym pomimo pozostawania realnej stopy WIBOR1M poniżej NSP, stopa inflacji w 2005 roku zaczęła się obniżać. Należy mieć jednak na uwadze, że w 2004 roku Polska wstąpiła do UE, spadek inflacji w 2005 roku mógł być konsekwencją częściowego ustania efektów cenowych akcesji, których znaczna absorpcja nastąpiła w 2004 roku.

Informacje dotyczące kształtowania się naturalnej stopy procentowej w Polsce w latach 1998–2011 można wykorzystać w szerszym kontekście, jakim jest reguła Taylora. W tym przypadku NSP będzie jedną z kilku zmiennych, które mogą być brane pod uwagę w procesie podejmowania decyzji przez RPP. Zalecenia odnośnie do wysokości krótkookresowej nominalnej stopy pro-

centowej wynikające z reguły Taylora po uwzględnieniu zmiennej w czasie NSP uzyskanej w wariancie I i II (reguła I, reguła II) i zarysowane na tle rzeczywistego przebiegu ścieżki stopy referencyjnej uwzględniono na wykresie 5. Generalnie zalecenia te są zbliżone, choć krótkookresowa stopa procentowa w wariancie I reguły kształtuje się na nieco wyższym poziomie. Ciekawe jest, że okresy, w których stopa referencyjna przewyższa stopę wynikającą z reguły, należą do rzadkości.



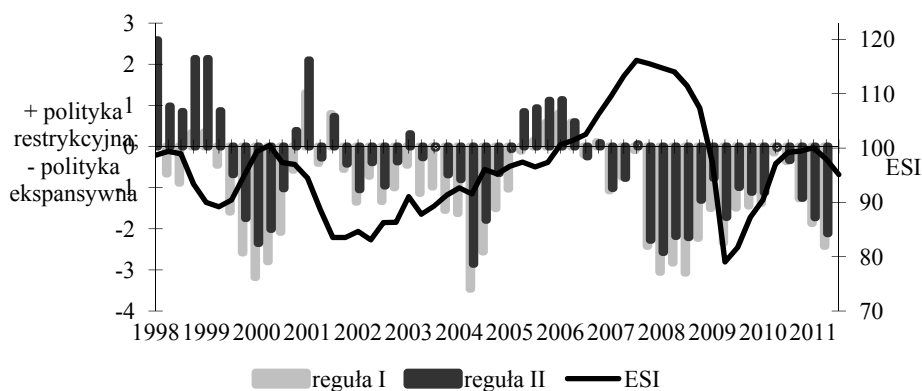
Wykres 5. Zalecenia wynikające z reguły Taylora przy założeniu zmiennej w czasie NSP w latach 1998–2011

Źródło: obliczenia własne.

Uogólniając analizę otrzymanych wyników, wyraźnie widać, że w latach 1998–2011 istnieją okresy, w których wysokość stopy referencyjnej jest zbliżona do poziomu ustalonego na podstawie reguły Taylora łącznie w dwóch wariantach, jak i okresy, w których rozbieżności stóp są znaczne. Największe różnice występują od początku 1999 roku do III kwartału 2000, od połowy 2003 roku do końca 2004 roku oraz od III kwartału 2007 roku z wyłączeniem połowy 2010 roku do II kwartału 2011. Cechą charakterystyczną rozważanej reguły stopy procentowej jest uzależnienie wysokości krótkookresowej stopy procentowej od bieżącej wartości stopy inflacji. Tym samym gwałtowny wzrost stopy inflacji znajdzie swoje natychmiastowe odbicie w wzroście rekomendowanej stopy procentowej. O ile przypadek lat 2003/2004 nakreślony został przy okazji omawiania wykresów 3 i 4, o tyle charakterystyka dwóch pozostałych okresów wymaga pewnego przybliżenia. Wzrost inflacji w latach 1999–2000 spowodowany był w głównej mierze nałożeniem się szoków podażowych. W walce z inflacją o charakterze kosztowym krótkookresowa stopa procentowa może okazać się narzędziem mało skutecznym, dlatego odejście od zbyt wysokiej, sugerowanej wartości stopy procentowej może być zrozumiałe. Ostatnie lata począwszy od końca 2007 roku, noszą znamiona kryzysu finansowego, który rozlał się na globalną sferę gospodarki. Wzrost stopy inflacji w Polsce, jest spowodowany uwidocznieniem się pewnych globalnych tendencji w postaci wzrostu popytu na surowce. Zatem wniosek wydaje się podobny do sformu-

wanego uprzednio. W tym miejscu zasadne byłoby rozważenie możliwości zastosowania inflacji bazowej, jako miernika inflacji. Sugerowanym wskaźnikiem byłaby inflacja bazowa po wyłączeniu cen żywności i energii.

Pomijając kwestię oceny pojedynczych wydarzeń, ciekawym spostrzeżeniem jest występowanie pewnej cykliczności w polityce pieniężnej, polegającej na utrzymywaniu się okresów polityki restrykcyjnej i ekspansywnej ze szczególnym nasileniem tej drugiej. W latach 1998–2011 w przeważającej mierze stopa referencyjna kształtuje się poniżej zalecanej krótkookresowej stopy procentowej wynikającej z reguły w wariancie I i II, co szczegółowo zostało przedstawione na wykresie 6.



Wykres 6. Stopień restrykcyjności polskiej polityki pieniężnej na tle wskaźnika koniunktury (ESI) w latach 1998–2011

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych Eurostat²⁵.

Poprzez szukanie analogii do wskaźników wyprzedzających koniunktury, można szukać wytłumaczenia utrzymującego się charakteru nastawienia polityki pieniężnej w Polsce. Od 2001 roku indeks ESI dla Polski znajdował się w trendzie wzrostowym, aż do połowy 2007 roku. Od tego momentu ESI stopniowo się obniżał, po czym uległ załamaniu wyprzedzając tym samym mający nastąpić krach finansowy spowodowany upadkiem Lehman Brothers. NBP poprzez kształtowanie stóp procentowych ma możliwość ograniczenia wahań koniunktury, czyli prowadzenie polityki restrykcyjnej w okresach nadmiernego przy-

²⁵ Wskaźnik ESI (ang. *European Economic Sentiment Indicator*) odzwierciedla panujące nastroje w strefie euro. Wskaźnik ESI, ogłaszany z miesięczną częstotliwością przez Komisję Europejską, dostępny jest na stronie eurostatu. Do budowy ESI wykorzystuje się wskaźniki proste odnoszące się do wybranych pytań, pochodzące z badań koniunktury przemysłu (40%), usług (30%), budownictwa(5%), handlu (5%) i ufności konsumenta (20%). Metodologia wyznaczania ESI z pewną modyfikacją wag oraz sposobu odsezonowania danych, zaadoptowana została do liczonego przez GUS od czerwca 2009 roku syntetycznego wskaźnika koniunktury gospodarczej dla Polski.

spieszenia wzrostu koniunktury i polityki ekspansywnej w okresie spowolnienia dynamiki jej wzrostu.

PODSUMOWANIE

Naturalna stopa procentowa jest kategorią nieobserwowalną i bez względu na przyjęte metody jej ustalania, należy liczyć się z ryzykiem popełnienia błędu. Dlatego często sugeruje się, żeby NSP wyznaczać jako pewien szacunek przedziałowy (Blinder, 2001, s. 55). Tym samym, obecnie w Polsce poziomu NSP należy doszukiwać się w granicach 1–2%. Stopa ta możliwa jest do zaakceptowania z punktu widzenia obecnie prowadzonej polityki pieniężnej, ale wydaje się mało realistyczna w odniesieniu do początku okresu realizacji strategii bezpośredniego celu inflacyjnego. Realia polskiej gospodarki, w postaci jej niedawnego urynkowienia i dokonania szeregu zmian instytucjonalnych, jak i akcesji Polski do UE oraz ulegania pewnym globalnym tendencjom, sprawiają, że do zagadnienia NSP można byłoby podejść od strony czynników wpływających na zmiany NSP w czasie. W pracy przyjęto pewne uproszczone ramy dokonywania szacunków NSP, gdyż głównym przesłaniem było ukazanie naturalnej stopy procentowej w szerszym kontekście, jakim jest reguła Taylora.

Reguła Taylora uwzględniająca specyfikę polskiej polityki pieniężnej może stanowić pewien wyznacznik prowadzenia polityki pieniężnej z zastrzeżeniem normatywnego charakteru reguły.

ANEKS²⁶

Model w przestrzeni stanów (ang. *state-space model*) umożliwia modelowanie relacji między zmienną obserwowalną $y_t = \{Y_T, Y_{T-1}, \dots, Y_0\}$ w postaci obserwacji w okresie $t=0, \dots, T$ i zmienną nieobserwowalną z_t (tzw. zmienną stanu). Równanie obserwacji (zwane również równaniem pomiaru) określa tę zależność, a równanie przejścia (zwane również równaniem stanu) utożsamia dynamiczny proces osiągnięcia tego stanu.

Równanie obserwacji (pomiaru):

$$\underset{(n \times 1)}{y_t} = \underset{(n \times k)(k \times 1)}{A'_{(t)}} \underset{(n \times 1)}{x_t} + \underset{(n \times r)(r \times 1)}{H'_{(t)}} \underset{(r \times 1)}{z_t} + \underset{(n \times 1)}{\xi_t}, \quad (\text{A.1})$$

Równanie stanu (przejścia):

- dynamika opisana równaniem autoregresyjnym (AR),

$$\underset{(r \times 1)}{z_t} = \underset{(r \times r)(r \times 1)}{F_{(t)}} \underset{(r \times 1)}{z_{t-1}} + \underset{(r \times 1)}{\eta_t}, \quad (\text{A.2})$$

- dynamika opisana jako błądzenie losowe,

$$\underset{(r \times 1)}{z_t} = \underset{(r \times 1)}{z_{t-1}} + \underset{(r \times 1)}{\eta_t}, \quad (\text{A.3})$$

gdzie: y_t – wektor zmiennych obserwowanych, x_t – wektor zmiennych egzogenicznych (w tym opóźnionych zmiennych obserwowanych), z_t – wektor nieobserwowalnych zmiennych

²⁶ Opracowano na podstawie Hamilton (1994), Welch, Bishop (1995), Basdevant (2003), Tussell (2011).

stanu, $\mathbf{A}_{(t)}, \mathbf{H}_{(t)}$ – macierze parametrów, $\mathbf{F}_{(t)}$ – macierz stanu (dla błędzenia losowego \mathbf{F} jest stałe i znane), $\xi_t \sim N(0, \mathbf{R}_{(t)})$, $\eta_t \sim N(0, \mathbf{Q}_{(t)})$, \mathbf{A}' - transpozycja macierzy \mathbf{A} .

Wymienione równania łącznie definiują przestrzeń, w obrębie której zmienna stanu może się poruszać. Podstawowy filtr Kalmana to rekurencyjny algorytm, który ze względu na ustalone zmienne obserwowalne i specyfikację modelu w przestrzeni stanów dla układu liniowego²⁷, pozwala na estymację stanów systemu:

- przyszłych (predykcja),
- terażniejszych (filtracja),
- przeszłych (wygładzanie).

Oszacowanie stanu w danym momencie czasu uwarunkowane jest znajomością stanu poprzedniego oraz wektora obserwacji. Rekurencyjny algorytm w ramach którego działa filtr Kalmana dzieli się na dwie fazy (etapy). Pierwszy etap nosi miano predykcji, natomiast drugi korekcji (filtracji). Dodatkowo przez estymowanie wartości stanu dla znanego Y_T istnieje możliwość uzyskania wygładzonego przebiegu zmiennej nieobserwowalnej, który znacznie poprawia wnioski o wartościach historycznych zmiennej z_t .

Filtr Kalmana minimalizuje średni kwadratowy błąd prognozy, a przy założeniu, że błędy pomiaru i procesu przetwarzania wewnątrz układu dynamicznego mają rozkład gaussowski można również przez maksymalizację funkcji wiarygodności oszacować dowolne parametry modelu w przestrzeni stanów (część parametrów może być ustalona a priori).

Dla uproszczenia rozważmy przypadek, w którym macierze $\mathbf{A}, \mathbf{H}, \mathbf{F}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}$ są stałe i znane. Stan filtru Kalmana określa oszacowanie wektora stanu dla okresu t (dalej $\hat{\mathbf{z}}_t$) oraz oszacowana macierz kowariancji błędu pomiaru rzeczywistego wektora stanu (dalej \mathbf{P}_t).

Niech $\hat{\mathbf{z}}_{t|t-1}$ będzie optymalnym estymatorem zmiennej stanu \mathbf{z}_t bazującym na informacjach dostępnych w okresie $t-1$ (predykcja), tym samym $\hat{\mathbf{z}}_{t|t-1} = E(\mathbf{z}_t | \Psi_{t-1})$, gdzie (Ψ_{t-1} – informacje dostępne w okresie $t-1$) oraz $\hat{\mathbf{z}}_{t|t}$ estymatorem bazującym na obserwacjach włącznie do Y_t (filtracja), gdzie $\hat{\mathbf{z}}_{t|t} = E(\mathbf{z}_t | \Psi_t)$, jak również $\hat{\mathbf{z}}_{t|T}$ estymatorem bazującym na całej dostępnej próbie (wygładzanie), gdzie $\hat{\mathbf{z}}_{t|T} = E(\mathbf{z}_t | \Psi_T)$.

Średni błąd kwadratowy oszacowania wektora stanu zdefiniowano jako:

$$\mathbf{P}_t = E((\mathbf{z}_t - \hat{\mathbf{z}}_t)(\mathbf{z}_t - \hat{\mathbf{z}}_t)').$$

W fazie predykcji (estymacja stanu przy założeniu dostępności informacji na okres $t-1$), aktualny wektor stanu wyznacza się na podstawie stanu poprzedniego:

- dla procesu AR,

$$\hat{\mathbf{z}}_{t|t-1} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{z}}_{t-1|t-1}, \quad (\text{A.4})$$

- dla błędzenia losowego,

$$\hat{\mathbf{z}}_{t|t-1} = \hat{\mathbf{z}}_{t-1|t-1}. \quad (\text{A.5})$$

Macierz kowariancji błędu przyjmuje postać:

²⁷ Podstawowy filtr Kalmana ograniczony jest do przypadku modelu liniowego lub sprowadzalnego do postaci liniowej. W sytuacji występowania nieliniowości zarówno w modelu obserwacji jak i modelu opisującym dynamikę systemu stosuje się rozszerzony filtr Kalmana, co znacznie komplikuje procedurę obliczeniową.

– dla procesu AR,

$$\mathbf{P}_{t|t-1} = E((\mathbf{z}_t - \hat{\mathbf{z}}_{t|t-1})(\mathbf{z}_t - \hat{\mathbf{z}}_{t|t-1})') = \mathbf{F}\mathbf{P}_{t-1|t-1}\mathbf{F}' + \mathbf{Q}, \quad (\text{A.6})$$

– dla błędzenia losowego,

$$\mathbf{P}_{t|t-1} = E((\mathbf{z}_t - \hat{\mathbf{z}}_{t|t-1})(\mathbf{z}_t - \hat{\mathbf{z}}_{t|t-1})') = \mathbf{P}_{t-1|t-1} + \mathbf{Q}. \quad (\text{A.7})$$

Filtracja (korekcja) polega na aktualizacji prognozy stanu ($\hat{\mathbf{z}}_{t|t-1}$ oraz $\mathbf{P}_{t|t-1}$ patrz równanie (A.4) i (A.5) oraz (A.6) i (A.7)) z wykorzystaniem obserwacji zmiennej Y dostępnej w okresie t :

$$\hat{\mathbf{z}}_{t|t} = \hat{\mathbf{z}}_{t|t-1} + \mathbf{P}_{t|t-1}\mathbf{H}'(\mathbf{H}\mathbf{P}_{t|t-1}\mathbf{H}' + \mathbf{R})^{-1}(\mathbf{y}_t - \mathbf{A}\mathbf{x}_t - \mathbf{H}'\hat{\mathbf{z}}_{t|t-1}). \quad (\text{A.8})$$

Z kolei poprawiona macierz kowariancji błędu przyjmuje następującą postać:

$$\mathbf{P}_{t|t} = \mathbf{P}_{t|t-1} - \mathbf{P}_{t|t-1}\mathbf{H}'(\mathbf{H}\mathbf{P}_{t|t-1}\mathbf{H}' + \mathbf{R})^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{P}_{t|t-1}. \quad (\text{A.9})$$

Wyglądanie z zastosowaniem filtru Kalmana, ma na celu estymację wartości zmiennej stanu w chwili, w której znane są późniejsze wartości zmiennej obserwowalnej. Wyglądaniu ulega ciąg wyliczonych z wykorzystaniem filtru Kalmana wartości $\{P_{t|t}\}_{t=1}^T$, $\{P_{t|t-1}\}_{t=1}^T$ oraz $\{\hat{\mathbf{z}}_{t|t}\}_{t=1}^T$, $\{\hat{\mathbf{z}}_{t|t-1}\}_{t=1}^T$, gdzie $\hat{\mathbf{z}}_{T|T}$ to wygladzona wartość dla ostatniej obserwacji w próbie, natomiast $P_{T|T}$ to średni błąd kwadratowy dany jako $P_{T|T} = E((z_T - \hat{z}_{T|T})(z_T - \hat{z}_{T|T})')$. Sekwencję wygladzonych szacunków $\{\hat{\mathbf{z}}_{t|T}\}_{t=1}^T$ oblicza się w odwrotnej kolejności dla $t = T-1, T-2, \dots, 1$ przez iterację:

$$\hat{\mathbf{z}}_{t|T} = \hat{\mathbf{z}}_{t|t} + \mathbf{P}_t^*(\hat{\mathbf{z}}_{t+1|T} - \hat{\mathbf{z}}_{t+1|t}), \quad (\text{A.10})$$

gdzie: $\mathbf{P}_t^* = \mathbf{P}_{t|t}\mathbf{F}'\mathbf{P}_{t+1|t}^{-1}$ - macierz wyglądzania Kalmana dla AR oraz $\mathbf{P}_t^* = \mathbf{P}_{t|t}\mathbf{P}_{t+1|t}^{-1}$ dla błędzenia przypadkowego.

Korespondujące macierze kowariancji błędu wyznaczane są w analogiczny sposób według zasady:

$$\mathbf{P}_{t|T} = \mathbf{P}_{t|t} + \mathbf{P}_t^*(\mathbf{P}_{t+1|T} - \mathbf{P}_{t+1|t})\mathbf{P}_t^{*'} \quad (\text{A.11})$$

W praktyce przynajmniej część macierzy $\mathbf{A}, \mathbf{H}, \mathbf{F}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}$ posiada elementy, które nie są znane w momencie specyfikacji modelu w przestrzeni stanów, tym samym część parametrów musi być szacowana. W tym przypadku na każdym etapie, przed korekcją, uwzględniane są błędy predykcji w celu maksymalizacji funkcji wiarygodności danej wzorem:

$$\ln L_t = -\frac{NT}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=k}^T \ln |\mathbf{H}_t \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{H}_t' + \mathbf{R}| - \frac{1}{2} \sum_{t=k}^T \mathbf{v}_t' (\mathbf{H}_t \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{H}_t' + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{v}_t,$$

gdzie: $\mathbf{v}_t = \mathbf{y}_t - \mathbf{H}_t \hat{\mathbf{z}}_{t|t-1}$ wektor błędów predykcji, średni błąd kwadratowy szacunku \mathbf{y}_t .

LITERATURA

Amato J. D. (2005), *The Role of the Natural Rate of Interest in Monetary Policy*, BIS Working Papers, 171, Bank for International Settlements.
 Baranowski P. (2008), *Reguła Taylora oraz jej rozszerzenia - przegląd badań*, „Gospodarka Narodowa”, nr 7-8, 1-23.

- Basdevant O. (2003), *On Application of State-Space Modelling in Macroeconomics*, Discussion Paper Series, 03/02, Reserve Bank of New Zealand.
- Basdevant O., Björkstén N., Karagedikli O. (2004), *Estimating a Time Varying Natural Interest Rate for New Zealand*, Discussion Paper Series, 04/01, Reserve Bank of New Zealand.
- Blinder A. S. (2001), *Bankowość centralna w teorii i praktyce*, CeDeWu, Warszawa.
- Brzoza-Brzezina M. (2003a) *Zagadnienie naturalnej stopy procentowej*, „*Ekonomista*” 4, 457–477.
- Brzoza-Brzezina M. (2003b), *Rola naturalnej stopy w polskiej polityce pieniężnej*, „*Ekonomista*”, 5, 593–612.
- Filar D. (2004), *Naturalna realna stopa procentowa w Polsce*, „*Rzeczpospolita*”, 16.08.2004.
- Hamilton J. D. (1994), *State-Space Models*, [w:] Engle R.F., McFadden D.L. (red.), *Handbook of Econometrics*, IV, North-Holland, Amsterdam, Rozdział 50, s. 3041–3077.
- Laubach T., Williams J. C. (2001), *Measuring the Natural Rate of Interest*, FEDS Working Paper, 2001–56.
- Michalek A. (2009) *Znaczenie szacowania PKB potencjalnego w kontekście weryfikacji reguły Taylora*, „*Acta Universitatis Nicolai Copernici – Oeconomia*”, XXXIX, 257–268.
- Mumtaz H. (2009), *State Space Models and the Kalman Filter*, SEACEN-CCBS/BOE-BSP Workshop on DSGE Modelling and Econometric Techniques.
- Neiss K., Nelson E. (2003), *The Real Interest Gap as an Inflation Indicator*, „*Macroeconomic Dynamics*”, 7, 239–262.
- Petru R., Mrowiec M. (2007), *Jaka jest naturalna stopa procentowa?*, „*Nawigator*”, Bank BPH, luty, 6–10.
- Solow R., Taylor J.B. (2002), *Inflacja, bezrobocie, a polityka monetarna*, CeDeWu, Warszawa. *Strategia polityki pieniężnej po 2003 roku*, NBP, Warszawa 2003.
- Taylor J.B. (1993), *Discretion versus policy rules in practice*, „*Carnegie-Rochester Series on Public Policy*”, 39, 195–214.
- Taylor J.B. (1999) *The Robustness and Efficiency of Monetary Policy Rules as Guidelines for Interest Rate Setting by the European Central Bank*, „*Journal of Monetary Economics*”, 43, 655–679.
- Taylor J.B. (2000) *Alternative Views of the Monetary Transmission Mechanism: What Difference Do They Make for Monetary Policy*, „*Oxford Review of Economic Policy*”, 60–73.
- Taylor J.B. (2007), *Explanatory Power of Monetary Policy Rules*, NBER Working Paper 13685.
- Taylor J.B., Williams J.C. (2010) *Simple and Robust Rules for Monetary Policy*, Working Papers Series, Federal Reserve Bank of San Francisco.
- Tusell F. (2011), *Kalman Filtering in R*, „*Journal of Statistical Software*”, 39, (2).
- Van den Bossche F.A.M. (2011), *Fitting State Space Models with EViews*, „*Journal of Statistical Software*”, 41, (8).
- Welch G., Bishop G. (1995), *An Introduction to the Kalman Filter*, University of North Carolina at Chapel Hill, Department of Computer Science, Chapel Hill, NC, USA. TR95-041.
- Wallace Ibhagui O. (2010), *Application of the Kalman Filter to Interest Rate Modelling*, AIMS, University of Cape Town, South Africa.
- Wicksell K. (1898), *Interest and Prices. A Study of the Causes Regulating the Value of Money*, tłumaczenie R.F. Kahn, New York, 1936.
- Wicksell K. (1907), *The Influence of the Rate of Interest on Prices*, „*The Economic Journal*”, June, 213–220.
- Williams J.C. (2003), *The Natural Rate of Interest*, FRBSF Economic Letter 2003-32, October.
- Winek D., Robak S. (2003), *Naturalna stopa procentowa, luka PKB i inercja inflacyjna, a wybór optymalnej stopy procentowej. Badania dla Polski 1992–2002*, Wyższa Szkoła Handlu i Finansów Międzynarodowych.
- Woodford M. (2001), *The Taylor Rule and Optimal Monetary Policy*, „*American Economic Review*” 91(2), 232–237.
- Założenia polityki pieniężnej na 2011 rok*, NBP, Warszawa, wrzesień 2010.

MEASURING THE NATURAL RATE OF INTEREST IN POLAND IN THE CONTEXT OF THE TAYLOR RULE

A b s t r a c t. The natural real interest rate (NRI) is one of the components of the interest rate rule presented by J.B. Taylor (1993) (Taylor rule). Original proposal of this rule is to provide recommendations for the monetary authorities for achieving good economic performance. Essential task of the central bank pursuing the strategy of direct inflation targeting is to stabilize inflation at low level. Its realization needs fine tuning of real interest rate to natural level rate of interest. Unfortunately, the NRI is not observable, so it must be estimated. In the paper we present results of estimation NRI in Poland in 1998-2011. We apply the graphical method to determine the level of NRI and Kalman filter to estimate time-varying natural rates of interest. The inclusion of estimates of the NRI in the Taylor rule allows to compare recommendations from different methods.

K e y w o r d s: natural rate of interest, Kalman filter, Taylor rule.