Rozwiązania kooperacyjne gier symetrycznych

K.L.

18 czerwca 2009

Spis treści

1 Notacja i pojęcia wstępne

Definicja 1.(Gra) Dowolną czwórkę $\Gamma = (S_1, S_2, W^1, W^2)$, gdzie $W^i : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$, nazywamy **grą dwuosobową**, przy czym W^i zwie się **funkcją wypłaty**, a S_i **zbiorem strategii** i-tego gracza.

Dalej będziemy zakładać skończoność zbiorów strategii S_i, $i = 1, 2$. Wówczas funkcje wypłaty W^i, $i = 1, 2$, można reprezentować macierzowo w następujący sposób: $Q^i = [W^i(x, y)]_{x \in S_1, y \in S_2}$. Gra zadana dwumacierzą $[W^1(x, y), W^2(x, y)]_{x \in S_1, y \in S_2}$ to tzw. **gra w postaci normalnej**.

Grę nazwiemy:

- **grą symetryczną** (ze względu na wypłaty), gdy $S_2 = S_1$, $\forall_{x,y \in S_1 = S_2}\ W^2(x, y) = W^1(y, x)$,
- **grą o sumie zerowej**, gdy $\forall_{x \in S_1, y \in S_2}\ W^1(x, y) + W^2(x, y) = 0$.

Przez $\Delta(T)$ oznaczamy sympleks miar probabilistycznych na zbiorze T. Standardowo zanurzamy $T \hookrightarrow \Delta(T)$ utożsamiając $T \ni t \simeq \delta_t \in \Delta(T)$, $\delta_t(z) = \left\{ \begin{smallmatrix} 1, & z=t \\ 0, & z \neq t \end{smallmatrix} \right.$

Elementy $x \in S_i$ będziemy dalej nazywać **strategiami czystymi** i-tego gracza, elementy $\mathbf{p} \in \Delta(S_i)$ **strategiami mieszanymi** i-tego gracza, a elementy $\pi \in \Delta(S_1 \times S_2)$ **strategiami skorelowanymi** obu graczy.

Rozkład łączny $\pi \in \Delta(S_1 \times S_2)$ wyznacza rozkłady brzegowe $\pi_{S_i} \in \Delta(S_i)$, $\forall_{x \in S_i}\ \pi_{S_i}(x) = \sum_{y \in S_{3-i}} \pi(x, y)$. Para rozkładów $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \Delta(S_1) \times \Delta(S_2)$ wyznacza rozkład $\rho(x, y) = \mathbf{p}(x) \cdot \mathbf{q}(y)$, dla którego $\rho_{S_1} = \mathbf{p}$, $\rho_{S_2} = \mathbf{q}$. Różne rozkłady łączne mogą dawać te same rozkłady brzegowe, więc $\Delta(S_1) \times \Delta(S_2) \subsetneqq \Delta(S_1 \times S_2)$. **Nośnikiem** rozkładu $\pi \in \Delta(S_1 \times S_2)$ nazywa się zbiór $\operatorname{supp} \pi = \{(x, y) \in S_1 \times S_2 : \pi(x, y) \neq 0\}$.

Wypłata i-tego gracza, gdy wybrano $x \in S_1$, $y \in S_2$, czyli łącznie $(x, y) \in S_1 \times S_2$, wynosi $W^i(x, y)$. Przez **wypłatę oczekiwaną** i-tego gracza, gdy wybrano $\pi \in \Delta(S_1 \times S_2)$ rozumiemy wartość

$$EW^i(\pi) = \sum_{(x,y) \in S_1 \times S_2} \pi(x, y) \cdot W^i(x, y).$$

W szczególności, gdy każdy z graczy obierze swoją strategię mieszaną $\mathbf{p} \in \Delta(S_1)$, $\mathbf{q} \in \Delta(S_2)$, to wypłata oczekiwana i-tego gracza wyniesie $EW^i(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = EW^i(\rho)$, gdzie rozkład łączny $\rho = (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \Delta(S_1) \times \Delta(S_2) \subset \Delta(S_1 \times S_2)$. Odnotujmy przy okazji, że funkcjonał $EW^i : \Delta(S_1 \times S_2) \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, jest liniowy w następującym sensie:

$$\forall_{\pi, \pi' \in \Delta(S_1 \times S_2)}\ \forall_{t, t' \geqslant 0}\ \Big(t + t' = 1 \Rightarrow EW^i(t \cdot \pi + t' \cdot \pi') = t \cdot EW^i(\pi) + t' \cdot EW^i(\pi')\Big).$$

Definicja 2.(Optima i ekwilibria)

- $(x^*, y^*) \in S_1 \times S_2$ – **równowaga Nasha**, gdy

$$\begin{cases} \forall_{x \in S_1} & W^1(x^*, y^*) \geqslant W^1(x, y^*) \\ \forall_{y \in S_2} & W^2(x^*, y^*) \geqslant W^2(x^*, y) \end{cases}$$

  („nie warto samodzielnie odstępować”);

- $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \in \Delta(S_1) \times \Delta(S_2)$ – **mieszana równowaga Nasha**, gdy

$$\begin{cases} \forall_{\mathbf{p} \in \Delta(S_1)} & EW^1(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \geqslant EW^1(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*) \\ \forall_{\mathbf{q} \in \Delta(S_2)} & EW^2(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \geqslant EW^2(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}) \end{cases}$$

  („statystycznie nie warto odstępować”);

- $(x^*, y^*) \in S_1 \times S_2$ – **optimum Pareto**, gdy

$$\neg\exists_{(x,y)\in S_1\times S_2} \Big(\forall_{i=1,2} \quad W^i(x,y) \geqslant W^i(x^*,y^*) \wedge \exists_{i=1,2} \quad W^i(x,y) > W^i(x^*,y^*)\Big)$$

(„brak obopólnie lepszej pary");

- $\pi^* \in \Delta(S_1 \times S_2)$ – **skorelowane optimum Pareto**, gdy

$$\neg\exists_{\pi\in\Delta(S_1\times S_2)} \Big(\forall_{i=1,2} \quad EW^i(\pi) \geqslant EW^i(\pi^*) \wedge \exists_{i=1,2} \quad EW^i(\pi) > EW^i(\pi^*)\Big)$$

(„brak obopólnie lepszego rozkładu").

Uwaga. Ściślej rzecz biorąc rozpatrujemy *słabą* równowagę i *mocne* optimum.

Mamy następującą zależność między optimami a skorelowanymi optimami.

Twierdzenie 1 $\pi \in \text{corr-Pareto}(\Gamma) \Rightarrow \operatorname{supp}\pi \subset \text{Pareto}(\Gamma)$.

Dowód. Weźmy $\pi \in \text{corr-Pareto}(\Gamma)$ oraz $(x_0, y_0) \in \operatorname{supp}\pi \setminus \text{Pareto}(\Gamma)$. Wtedy istnieje para $(x_1, y_1) \in S_1 \times S_2$ dająca choć jednemu z graczy wyższą wypłatę niż (x_0, y_0) tj. $W^i(x_0, y_0) \leqslant W^i(x_1, y_1)$ dla $i = 1, 2$, przy czym jedna z nierówności jest ostra. Określamy $\pi' \in \Delta(S_1 \times S_2)$ kładąc dla $(x, y) \in S_1 \times S_2$

$$\pi'(x,y) = \begin{cases} \pi(x,y), & \text{gdy } (x,y) \notin \{(x_0,y_0),(x_1,y_1)\}, \\ \pi(x_0,y_0) + \pi(x_1,y_1), & \text{gdy } (x,y) = (x_1,y_1), \\ 0, & \text{gdy } (x,y) = (x_0,y_0). \end{cases}$$

Następnie sprawdzamy, że $EW^i(\pi) \leqslant EW^i(\pi')$ dla $i = 1, 2$ i jedna z nierówności jest ostra:

$$\begin{aligned} EW^i(\pi) = &\sum_{(x,y)\in S_1\times S_2\setminus\{(x_0,y_0),(x_1,y_1)\}} \pi(x,y)\cdot W^i(x,y) + \\ &+\pi(x_0,y_0)\cdot W^i(x_0,y_0) + \pi(x_1,y_1)\cdot W^i(x_1,y_1) \leqslant \\ \leqslant &\sum_{(x,y)\in S_1\times S_2\setminus\{(x_0,y_0),(x_1,y_1)\}} \pi(x,y)\cdot W^i(x,y) + \\ &+(\, \pi(x_0,y_0) + \pi(x_1,y_1)\,)\cdot W^i(x_1,y_1) = \\ = &\sum_{(x,y)\in S_1\times S_2\setminus\{(x_0,y_0),(x_1,y_1)\}} \pi'(x,y)\cdot W^i(x,y) + \\ &+\pi'(x_1,y_1)\cdot W^i(x_1,y_1) + \pi'(x_0,y_0)\cdot W^i(x_0,y_0) = EW^i(\pi'). \end{aligned}$$

To przeczy, iż $\pi \in \text{corr-Pareto}(\Gamma)$, czyli $\operatorname{supp}\pi \setminus \text{Pareto}(\Gamma) = \emptyset$. ⊠

Jak się okazuje nie każde optimum $(x, y) \in \text{Pareto}(\Gamma)$ wyznacza optymalny rozkład skorelowany $\delta_{(x,y)} \in \text{corr-Pareto}(\Gamma)$. Nieprawda też, że $\text{Pareto}(\Gamma) = \operatorname{supp}\pi$ dla pewnego $\pi \in \text{corr-Pareto}(\Gamma)$.

Przykład 1 Niech $\Gamma = (S_1, S_2, W^1, W^2)$, $S_1 = S_2 = \{1, 2\}$ i wypłaty $[W^1(x, y), W^2(x, y)]$ będą dane tabelą. Mamy

$x \setminus y$	1	2
1	$[20, 20]$	$[40, 90]$
2	$[90, 40]$	$[50, 50]$

Pareto	$(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$
Nash	$(2, 2)$
skorelowany Pareto	$\pi(1, 1) = \pi(2, 2) = 0$, $\pi(1, 2) = t$, $\pi(2, 1) = 1 - t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

◊

Dla porównania w „lustrzanej” grze

Przykład 2 Niech $\Gamma = (S_1, S_2, W^1, W^2)$, $S_1 = S_2 = \{1, 2\}$ i wypłaty $[W^1(x, y), W^2(x, y)]$ będą dane tabelą. Mamy

$x \diagdown y$	1	2
1	$[20, 20]$	$[90, 40]$
2	$[40, 90]$	$[50, 50]$

Pareto	$(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$
Nash	$\mathbf{p} = \mathbf{q} = \frac{2}{3}\delta_1 + \frac{1}{3}\delta_2$
skorelowany Pareto	$\pi(1, 1) = \pi(2, 2) = 0$, $\pi(1, 2) = t$, $\pi(2, 1) = 1 - t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

$\Diamond$

Twierdzenie 2 (Weighted sum scalarization: [Engw] Th.6.4, [MCDA] Th.14, Th.32) *Zbiór skorelowanych optimów Pareto jest niepusty i ma postać*

$$\text{corr-Pareto}(\Gamma) = \bigcup_{\substack{t+t'=1 \\ t,t'>0}} Arg \max_{\pi \in \Delta(S_1 \times S_2)} \Big(t \cdot EW^1(\pi) + t' \cdot EW^2(\pi) \Big) \cup \Delta_{1,2} \cup \Delta_{2,1},$$

gdzie $\Delta_i = Arg \max_{\pi \in \Delta(S_1 \times S_2)} EW^i(\pi)$, $\Delta_{i,3-i} = Arg \max_{\pi \in \Delta_i} EW^{3-i}(\pi)$.

Uwaga. Por. równość (2) w dowodzie Twierdzenia 10.
Zbiór corr-Pareto(Γ) nie musi być wypukły.

Przykład 3 Niech $\Gamma = (S_1, S_2, W^1, W^2)$, $S_1 = S_2 = \{1, 2, 3\}$ i wypłaty $[W^1(x, y), W^2(x, y)]$ będą dane tabelą.

$x \diagdown y$	1	2	3
1	$[10, 10]$	$[90, 40]$	$[10, 10]$
2	$[40, 90]$	$[10, 10]$	$[80, 60]$
3	$[10, 10]$	$[60, 80]$	$[10, 10]$

Mamy $\delta_{(2,1)}, \delta_{(1,2)} \in$ corr-Pareto(Γ), ale $\frac{1}{2} \cdot \Big(\delta_{(1,2)} + \delta_{(2,1)}\Big) \notin$ corr-Pareto(Γ). $\Diamond$

Od tego momentu będziemy się zajmować wyłącznie grami symetrycznymi $\Gamma = (S_1, S_2, W^1, W^2)$. Gwoli uproszczenia notacji pomijamy dolny indeks we wspólnym zbiorze strategii tzn. $S = S_1 = S_2$. Wówczas też dla macierzy wypłat zachodzi $Q^2 = (Q^1)^T$. (Dla porównania, jeśli gra jest o sumie zerowej, to $Q^2 = -Q^1$). Ponadto stowarzyszając z $W : S \times S \to \mathbb{R}$ funkcję $\overline{W} : S \times S \to \mathbb{R}$, $\overline{W}(x, y) = W(y, x)$ przy $x, y \in S$, możemy również opuścić indeks w funkcjach wypłaty W^i pisząc $\Gamma = (S, S, W, \overline{W})$.

Rozkład $\overline{\pi} \in \Delta(S \times S)$ **sprzężony** (lub transponowany) do $\pi \in \Delta(S \times S)$ określamy jako $\forall_{(x,y) \in S \times S}\ \ \overline{\pi}(x, y) = \pi(y, x)$. Strategię skorelowaną π nazwiemy **strategią symetryczną**, gdy $\pi = \overline{\pi}$.

Lemat 1 *Operacja sprzężenia spełnia*

(i) $\overline{\overline{\pi}} = \pi$,

(ii) $\frac{\pi + \overline{\pi}}{2} = \overline{\left(\frac{\pi + \overline{\pi}}{2}\right)}$,

(iii) $EW^i(\pi) = EW^{3-i}(\overline{\pi})$,

(iv) $\pi = \overline{\pi} \Rightarrow EW^i(\pi) = EW^{3-i}(\pi)$,

gdzie $\pi, \pi' \in \Delta(S \times S)$, $i = 1, 2$.

Dowód. ad (i): $\overline{\overline{\pi}}(x,y) = \overline{\pi}(y,x) = \pi(x,y)$.
ad (ii): $\overline{\left(\frac{\pi+\overline{\pi}}{2}\right)}(x,y) = \left(\frac{\pi+\overline{\pi}}{2}\right)(y,x) = \frac{1}{2}\cdot\pi(y,x) + \frac{1}{2}\cdot\overline{\pi}(y,x) = \frac{1}{2}\cdot\overline{\pi}(x,y) + \frac{1}{2}\cdot\pi(x,y)$.
ad (iii):

$$\begin{aligned} EW^i(\pi) &= \sum_{(x,y)\in S\times S} \pi(x,y)\cdot W^i(x,y) = \\ &= \sum_{(x,y)\in S\times S} \pi(x,y)\cdot W^{3-i}(y,x) = \\ &= \sum_{(y,x)\in S\times S} \overline{\pi}(y,x)\cdot W^{3-i}(y,x) = EW^{3-i}(\overline{\pi}). \end{aligned}$$

ad (iv): $EW^i(\pi) \overset{(iii)}{=} EW^{3-i}(\overline{\pi}) = EW^{3-i}(\pi)$. ⊠

Lemat 2 (O wyrównywaniu) *Niech* $i = 1,2$ *oraz* $\pi,\pi' \in \Delta(S\times S)$. *Jeżeli* $EW^i(\pi) = EW^{3-i}(\pi)$, $EW^i(\pi') > EW^i(\pi)$, $EW^{3-i}(\pi') \geqslant EW^{3-i}(\pi)$, *to istnieje* $\pi'' \in \Delta(S\times S)$, $\overline{\pi''} = \pi''$ *o tej własności, że* $EW^i(\pi'') > EW^i(\pi)$ *oraz* $EW^{3-i}(\pi'') = EW^i(\pi'')$.

Dowód. Kładąc $\pi'' = \frac{\pi'+\overline{\pi'}}{2}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} EW^i(\pi'') &= \frac{1}{2}\cdot EW^i(\pi') + \frac{1}{2}\cdot EW^i(\overline{\pi'}) \overset{Lem.1(iii)}{=} \\ &= \frac{1}{2}\cdot EW^i(\pi') + \frac{1}{2}\cdot EW^{3-i}(\pi') > \frac{1}{2}\cdot EW^i(\pi) + \frac{1}{2}\cdot EW^{3-i}(\pi') \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{2}\cdot EW^i(\pi) + \frac{1}{2}\cdot EW^{3-i}(\pi) = \frac{1}{2}\cdot EW^i(\pi) + \frac{1}{2}\cdot EW^i(\pi) = EW^i(\pi). \end{aligned}$$

Ponadto $\overline{\pi''} = \pi''$ na mocy Lematu 1 (ii) i w konsekwencji $EW^{3-i}(\pi'') = EW^i(\pi'')$ na mocy (iv). ⊠

Twierdzenie 3 *W grze symetrycznej* $\Gamma = (S,S,W^1,W^2)$ *zbiór skorelowanych optimów Pareto* corr-Pareto$(\Gamma) \subset \Delta(S\times S)$ *jest symetryczny, tzn.*

$$\pi \in \text{corr-Pareto}(\Gamma) \Rightarrow \overline{\pi} \in \text{corr-Pareto}(\Gamma).$$

Dowód. Gdyby $\overline{\pi} \notin$ corr-Pareto(Γ), to $EW^1(\pi') > EW^1(\overline{\pi})$ i $EW^2(\pi') \geqslant EW^2(\overline{\pi})$ (lub nierówność ostra z nieostrą zamienione miejscami) dla pewnego $\pi' \in \Delta(S\times S)$. Wówczas na mocy Lematu 1 (iii) i (i):

$$\begin{aligned} EW^1(\overline{\pi'}) = EW^2(\pi') \geqslant EW^2(\overline{\pi}) = EW^1(\pi), \\ EW^2(\overline{\pi'}) = EW^1(\pi') > EW^1(\overline{\pi}) = EW^2(\pi). \end{aligned}$$

Tym samym $\pi \notin$ corr-Pareto(Γ). ⊠

2 Określenie rozwiązania kooperacyjnego

Definicja 3.(Rozwiązanie kooperacyjne) Strategia skorelowana $\pi^* \in \Delta(S\times S)$ stanowi **rozwiązanie kooperacyjne von Neumanna–Pareto** gry symetrycznej $\Gamma = (S,S,W^1,W^2)$, o ile

$$\pi^* \in \text{Arg}\max_{\pi\in\widehat{\Delta}(S\times S)} EW^1(\pi),$$

gdzie $\widehat{\Delta}(S \times S) = \{\pi \in \Delta(S \times S) \ : \ EW^1(\pi) = EW^2(\pi)\}$.

Innymi słowy funkcja $\pi^* : S \times S \to \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem kooperacyjnym gry o ile rozwiązuje następujące zagadnienie PL (w przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^{S\times S}$):

$$\begin{cases} \pi \geqslant 0, \ \sum_{(x,y)\in S\times S} \ \pi(x,y) = 1, \\ \sum_{(x,y)\in S\times S} \ \pi(x,y) \cdot W^1(x,y) = \sum_{(x,y)\in S\times S} \ \pi(x,y) \cdot W^2(x,y), \\ \pi^* \in \operatorname{Arg\,max}_{\pi\in\mathbb{R}^{S\times S}} \ \sum_{(x,y)\in S\times S} \ \pi(x,y) \cdot W^1(x,y). \end{cases}$$

Symbolem $\mathrm{Cooperat}(\Gamma) \subset \Delta(S \times S)$ będziemy oznaczać zbiór rozwiązań kooperacyjnych, $\mathrm{Pareto}(\Gamma) \subset S\times S$ — zbiór optimów Pareto, a $\text{corr-Pareto}(\Gamma) \subset \Delta(S\times S)$ — zbiór skorelowanych optimów Pareto.

Dla rozwiązania kooperacyjnego $\pi^* \in \mathrm{Cooperat}(\Gamma)$ oczywiście zachodzi $EW^1(\pi^*) = EW^2(\pi^*)$. Ową wspólną dla wszystkich rozwiązań wartość nazywamy **wartością gry** i oznaczamy $\nu(\Gamma)$.

Twierdzenie 4 *Zbiór rozwiązań kooperacyjnych* $\mathrm{Cooperat}(\Gamma) \subset \Delta(S \times S)$ *jest*

(a) niepusty,

(b) zwarty,

(c) wypukły,

(d) $\mathrm{Cooperat}(\Gamma) = \bigcap_{i=1}^{2} (EW^i)^{-1}(\ \{\nu(\Gamma)\}\ )$,

(e) symetryczny

$$\pi^* \in \mathrm{Cooperat}(\Gamma) \Rightarrow \overline{\pi^*} \in \mathrm{Cooperat}(\Gamma),$$

$$\exists_{\pi\in\mathrm{Cooperat}(\Gamma)} \ \pi = \overline{\pi}.$$

Dowód. ad (a)-(b): Zbiór $\widehat{\Delta}(S \times S)$ jest niepusty (z Lematu 1 (ii) i (iv)) oraz zwarty, a EW^i są ciągłe, więc stosuje się twierdzenie Weierstrassa o istnieniu maksimum.

ad (c): Wystarczy skorzystać z liniowości EW^i.

ad (d): Natychmiastowy wniosek z Twierdzenia 5 (a).

ad (e): Niech $\pi^* \in \mathrm{Cooperat}(\Gamma)$. Z Lematu 1 (iii) i definicji wartości $\nu(\Gamma) = EW^i(\pi^*) = EW^{3-i}(\overline{\pi^*})$ dla $i = 1, 2$. Stąd na mocy Twierdzenia 5 (a) dostajemy $\overline{\pi^*} \in \mathrm{Cooperat}(\Gamma)$.

Weźmy teraz jakiekolwiek $\pi^* \in \mathrm{Cooperat}(\Gamma)$. Jak już wiemy również $\overline{\pi^*} \in \mathrm{Cooperat}(\Gamma)$. Wówczas (z wypukłości zbioru rozwiązań) rozkład $\pi = \frac{1}{2}\,(\pi^* + \overline{\pi^*}) \in \mathrm{Cooperat}(\Gamma)$. Ponadto $\pi = \overline{\pi}$ dzięki Lematowi 1 (ii). ⊠

Uwaga. Własności (a)-(c) charakteryzują zbiór rozwiązań zagadnienia PL na zwartym obszarze decyzyjnym $\widehat{\Delta}(S\times S) \subset \mathbb{R}^{S\times S}$ z funkcją celu EW^i. Przy własności (e) można powiedzieć więcej, mianowicie istnieje rozwiązanie symetryczne π o małym nośniku $\sharp\,\mathrm{supp}\,\pi \leqslant 2$ (Twierdzenie 10).

Zbiór $\mathrm{Cooperat}(\Gamma)$ jest symetryczną bryłą wypukłą, a dokładniej stanowi przecięcie $(d-1)$-wymiarowego sympleksu strategii $\Delta(S \times S)$ przez $(d-1)$-wymiarową hiperpłaszczyznę w przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^{S\times S}$ wymiaru $d = \sharp\, S^2$.

Przykład 4 W każdej z gier $\Gamma = (S, S, W^1, W^2)$, $S = \{1, 2\}$, z Przykładów 1 i 2 mamy jedyne rozwiązanie kooperacyjne $\mathrm{Cooperat}(\Gamma) = \{\pi^*\}$, $\pi^*(1, 2) = \pi^*(2, 1) = \frac{1}{2}$, $\pi^*(1, 1) = \pi^*(2, 2) = 0$ dające wypłaty oczekiwane $\nu(\Gamma) = 65$. ♢

Dalsze własności rozwiązań kooperacyjnych zebrane zostały w serii twierdzeń poniżej.

Twierdzenie 5 *Dla dowolnego* $\pi \in \Delta(S \times S)$

(a) $(\forall_{i=1,2}\, EW^i(\pi) = \nu(\Gamma)) \;\Rightarrow\; \pi \in \mathrm{Cooperat}(\Gamma)$,

(b) $\forall_{i=1,2}\, (\, EW^i(\pi) \geqslant \nu(\Gamma) \Rightarrow EW^{3-i}(\pi) \leqslant \nu(\Gamma)\,)$,

(c) $\forall_{i=1,2}\, (\, EW^i(\pi) > \nu(\Gamma) \Rightarrow EW^{3-i}(\pi) < \nu(\Gamma)\,)$,

(d) $\forall_{i=1,2}\, \nu(\Gamma) = \max_{\pi=\overline{\pi}\in\Delta(S\times S)} EW^i(\pi)$,

(e) $EW^1(\pi) + EW^2(\pi) = 2 \cdot \nu(\Gamma) \;\Rightarrow\; \pi \in \text{corr-Pareto}(\Gamma)$.

Dowód. ad (a): Niech $EW^1(\pi) = EW^2(\pi) = \nu(\Gamma)$. Wtedy $\pi \in \widehat{\Delta}(S \times S)$ oraz $EW^1(\pi) = EW^1(\pi^*) = \max_{\pi\in\widehat{\Delta}(S\times S)} EW^1(\pi)$ dla pewnego $\pi^* \in \mathrm{Cooperat}(\Gamma)$. Tym samym $\pi \in \mathrm{Cooperat}(\Gamma)$.

ad (b)-(c): Przypuśćmy, że $EW^j(\pi) > \nu(\Gamma)$, $EW^{3-j}(\pi) \geqslant \nu(\Gamma)$ dla $\pi \in \Delta(S \times S)$, $j = 1, 2$. Skoro $\nu(\Gamma) = EW^j(\pi^*) = EW^{3-j}(\pi^*)$ dla pewnego $\pi^* \in \mathrm{Cooperat}(\Gamma)$, to $\pi^* \notin \text{corr-Pareto}(\Gamma)$. Zatem w myśl Twierdzenia 6 mamy $\pi^* \notin \mathrm{Cooperat}(\Gamma)$ – sprzeczność.

ad (d): Z Twierdzenia 4 (e) wiemy, że istnieje $\pi^* = \overline{\pi^*} \in \mathrm{Cooperat}(\Gamma)$, skąd $\nu(\Gamma) = EW^i(\pi^*) \leqslant \max_{\pi=\overline{\pi}\in\Delta(S\times S)} EW^i(\pi)$. Gdyby dla pewnego $\pi = \overline{\pi} \in \Delta(S \times S)$ zachodziło $EW^i(\pi) > \nu(\Gamma)$, to na mocy (c) mielibyśmy $EW^{3-i}(\pi) < \nu(\Gamma)$. Tymczasem $EW^{3-i}(\pi) = EW^i(\pi)$ dzięki Lematowi 1 (iv), co prowadzi do sprzeczności.

ad (e): Gdyby $\pi \notin \text{corr-Pareto}(\Gamma)$, to dla pewnego $\pi' \in \Delta(S \times S)$ zachodziłyby nierówności $EW^1(\pi') > EW^1(\pi)$, $EW^2(\pi') \geqslant EW^2(\pi)$ (lub nierówność ostra z nieostrą zamienione miejscami). Stąd

$$EW^1(\pi') + EW^2(\pi') > EW^1(\pi) + EW^2(\pi) = 2\nu(\Gamma),$$

co przeczy równaniu (2) ze str.11. ⊠

Uwaga. Implikacja odwrotna do (a) stanowi definicję wartości gry $\nu(\Gamma)$. W przypadku gry o sumie zerowej implikacje (b) i (c) można odwrócić (por. Twierdzenie 8). Warunek (e) jest szczególnym przypadkiem Twierdzenia 2.

Twierdzenie 6 (O efektywności) *(a)* $\mathrm{Cooperat}(\Gamma) \subset \text{corr-Pareto}(\Gamma)$,

(b) $\pi = \overline{\pi} \in \text{corr-Pareto}(\Gamma) \;\Rightarrow\; \pi \in \mathrm{Cooperat}(\Gamma)$.

Dowód. ad (a): Niech $\pi \notin \text{corr-Pareto}(\Gamma)$. Zatem istnieje $\pi' \in \Delta(S \times S)$ dające choć jednemu z graczy wyższą wypłatę niż π tzn. $EW^i(\pi') \geqslant EW^i(\pi)$ dla $i = 1, 2$, a jedna z nierówności jest ostra. Wówczas na mocy Lematu 2 istnieje $\pi'' \in \Delta(S \times S)$ takie, że $EW^i(\pi'') = EW^{3-i}(\pi'') > EW^i(\pi)$, $\pi'' \in \widehat{\Delta}(S \times S)$. Tym samym $\pi \notin \mathrm{Cooperat}(\Gamma)$.

ad(b): Przypuśćmy, że $\pi = \overline{\pi} \in \text{corr-Pareto}(\Gamma)\backslash\mathrm{Cooperat}(\Gamma)$. Wówczas z definicji rozwiązania dla $\pi^* \in \mathrm{Cooperat}(\Gamma)$

$$EW^2(\pi^*) = \nu(\Gamma) = EW^1(\pi^*) = \max_{\pi\in\widehat{\Delta}(S\times S)} EW^1(\pi) > EW^1(\pi).$$

Dalej z Lematu 1 (iv) $EW^1(\pi) = EW^2(\pi)$, co daje $EW^i(\pi^*) > EW^i(\pi)$, $i = 1, 2$, czyli $\pi \notin \text{corr-Pareto}(\Gamma)$. ⊠

Uwaga. W szczególności nośniki rozwiązań kooperacyjnych składają się z optimów Pareto (Twierdzenie 1). Warunku (b) nie można poprawić do postaci: $\pi \in \text{corr-Pareto}(\Gamma) \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} \cdot (\,\pi + \overline{\pi}\,) \in \mathrm{Cooperat}(\Gamma)$ (Przykład 3).

Przestrzeń gier symetrycznych $\mathcal{G}(S) \cong \mathcal{B}(S \times S, \mathbb{R})$ ze zbiorem strategii S definiujemy utożsamiając grę symetryczną $\Gamma = (S, S, W, \overline{W}\,) \in \mathcal{G}(S)$ z funkcją wypłaty $W \in \mathcal{B}(S \times$

$S, \mathbb{R})$ gracza 1, a za odległość obierając metrykę jednostajną Czebyszewa tzn. $d_{\sup}(\Gamma, \Gamma') = \sup_{(x,y)\in S\times S} |W(x,y) - W'(x,y)|$, $\Gamma' = (S, S, W', \overline{W'}) \in \mathcal{G}(S)$. (Ze względu na skończoność $S \times S$ zbiór $\mathcal{G}(S)$ jest podzbiorem przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^{S\times S}$ z normą max).

Twierdzenie 7 (Ciągła zależność rozwiązań) *Na przestrzeni gier symetrycznych z ustalonym zbiorem strategii S*

(a) odwzorowanie rozwiązujące Cooperat : $\mathcal{G}(S) \multimap \Delta(S \times S)$ *(tzw.* solution set map*) jest półciągłe z góry (u.s.c.),*

(b) funkcja wartości $\nu : \mathcal{G}(S) \to \mathbb{R}$ jest ciągła.

Skorzystamy z klasycznego wyniku analizy wielowartościowej

Lemat 3 ([Aub-Cell] Th.6) *Niech A, B będą przestrzeniami topologicznymi Hausdorffa, $\Psi : B \multimap A$, $\Phi : A \times B \to \mathbb{R}$, $\varphi : B \to \mathbb{R}$, $\forall_{b\in B}\ \varphi(b) = \sup_{a\in\Psi(b)} \Phi(a,b)$ (tzw.* marginal function*), $M : B \multimap A$, $\forall_{b\in B}\ M(b) = \{a \in \Psi(b) : \varphi(b) = \Phi(a,b)\}$ (tzw.* marginal map*). Jeżeli Φ jest ciągłe, a Ψ jest ciągłe o zwartych wartościach, to φ również jest ciągłe, zaś M jest u.s.c.*

Dowód. [Tw. 7] W przytoczonym wyżej lemacie kładziemy $A := \Delta(S \times S)$ – przestrzeń strategii skorelowanych (rozkładów), $B := \mathcal{B}(S \times S, \mathbb{R}) \cong \mathcal{G}(S)$ – przestrzeń gier (funkcji wypłat) oraz $\Phi(\pi, W) := EW(\pi) = \sum_{(x,y)\in S\times S} \pi(x,y) \cdot W(x,y)$ – wypłata oczekiwana, $\Psi(W) := \{\pi \in \Delta(S \times S) : \Phi(\pi, W) = \Phi(\overline{\pi}, W)\} = \{\pi \in \Delta(S \times S) : \Phi(\pi, W) = \Phi(\pi, \overline{W})\}$ – symetria wypłat, gdzie $\pi \in A$, $W \in B$.

Obserwujemy teraz, że gdy $\Gamma = (S, S, W, \overline{W}) \in \mathcal{G}(S)$, to $M(W) = \mathrm{Cooperat}(\Gamma)$, $\varphi(W) = \nu(\Gamma)$ i z Lematu 3 uzyskujemy pożądaną ciągłość. ⊠

3 Porównanie z innymi definicjami rozwiązania

3.1 Rozwiązanie von Neumanna gry o sumie zerowej

Twierdzenie 8 (O zgodności) *Dla gry symetrycznej $\Gamma = (S, S, W^1, W^2)$ o sumie zerowej zachodzą:*

(a) $\nu(\Gamma) = 0 = \max_{\mathbf{p}\in\Delta(S)} \min_{\mathbf{q}\in\Delta(S)} EW^1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \max_{\mathbf{q}\in\Delta(S)} \min_{\mathbf{p}\in\Delta(S)} EW^2(\mathbf{p}, \mathbf{q})$;

(b) jeśli $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ – równowaga Nasha (von Neumanna) dla Γ, to $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \in$ Cooperat(Γ).

Dowód. ad (a): zauważmy przede wszystkim, że skoro gra ma sumę zerową ($W^2 = -W^1$), to $EW^2 = -EW^1$. W szczególności $EW^1(\pi^*) = EW^2(\pi^*) = -EW^1(\pi^*)$ dla $\pi^* \in \mathrm{Cooperat}(\Gamma)$. Stąd $EW^1(\pi^*) = 0$, a ponieważ $\nu(\Gamma) = EW^1(\pi^*)$, więc ostatecznie $\nu(\Gamma) = 0$.

Dalej, w dowolnej grze symetrycznej wypłaty maximinowe są takie same dla obu graczy:

$$\max_{\mathbf{p}\in\Delta(S)} \min_{\mathbf{q}\in\Delta(S)} EW^1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \max_{\mathbf{p}\in\Delta(S)} \min_{\mathbf{q}\in\Delta(S)} EW^2(\ \overline{(\mathbf{p}, \mathbf{q})}\ ) =$$
$$= \max_{\mathbf{p}\in\Delta(S)} \min_{\mathbf{q}\in\Delta(S)} EW^2(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \max_{\mathbf{q}\in\Delta(S)} \min_{\mathbf{p}\in\Delta(S)} EW^2(\mathbf{p}, \mathbf{q}).$$

Wreszcie

$$\max_{\mathbf{p}\in\Delta(S)} \min_{\mathbf{q}\in\Delta(S)} EW^1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \max_{\mathbf{p}\in\Delta(S)} \min_{\mathbf{q}\in\Delta(S)} -EW^2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) =$$
$$= -\min_{\mathbf{p}\in\Delta(S)} \max_{\mathbf{q}\in\Delta(S)} EW^2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\max_{\mathbf{q}\in\Delta(S)} \min_{\mathbf{p}\in\Delta(S)} EW^2(\mathbf{p}, \mathbf{q}).$$

W ostatnim przejściu skorzystaliśmy z twierdzenia von Neumanna o minimaksie. To w połączeniu z wykazaną wcześniej równością wypłat maximinowych daje wartość 0 owych wypłat.

ad (b): jeśli $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ – równowaga Nasha, to w myśl (a) mamy $EW^i(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) = 0 = \nu(\Gamma)$ dla $i = 1, 2$. Stąd na mocy Twierdzenia 5 (a) dostajemy $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \in \mathrm{Cooperat}(\Gamma)$. ⊠

Uwaga. Jak pokazuje przykład gry $W^1(x, y) = -W^2(x, y) = 10 \cdot (x - y)$, $x, y \in S = \{1, 2\}$, implikacja w (b) nie może być odwrócona.

3.2 Rozwiązanie von Stackelberga

Ustalmy $\Gamma = (S_1, S_2, W^1, W^2)$. Gramy na przemian następująco:

1. Wybieram pewną strategię i obwieszczam ją partnerowi.
2. Współgracz wybiera swoją najlepszą odpowiedź, być może szkodząc mi bardziej niż to konieczne.

Potem następuje zmiana rozpoczynającego i tak w kółko. Obie rozgrywki można sformalizować jak poniżej.

$$\begin{cases} G^2(x) = \mathrm{Arg}_{y \in S_2} \ \max_{y \in S_2} \ W^2(x, y) \\ \quad \text{— maksymalizacja zysku gracza 2} \\ \quad\quad \text{przy wybranej strategii gracza 1,} \\ \Sigma^{1,2} = \mathrm{Arg}_{(x,y) \in S_1 \times S_2} \ \max_{x \in S_1} \ \min_{y \in G^2(x)} \ W^1(x, y) \\ \quad \text{— maksymalizacja zysku gracza 1 biorąc pod uwagę} \\ \quad\quad \text{maksymalizację zysku ze strony gracza 2.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} G^1(y) = \mathrm{Arg}_{x \in S_1} \ \max_{x \in S_1} \ W^1(x, y) \\ \quad \text{— maksymalizacja zysku gracza 1} \\ \quad\quad \text{przy wybranej strategii gracza 2,} \\ \Sigma^{2,1} = \mathrm{Arg}_{(x,y) \in S_1 \times S_2} \ \max_{y \in S_2} \ \min_{x \in G^1(y)} \ W^2(x, y) \\ \quad \text{— maksymalizacja zysku gracza 2 biorąc pod uwagę} \\ \quad\quad \text{maksymalizację zysku ze strony gracza 1.} \end{cases}$$

W ten sposób zdesymultanizowaliśmy wybór strategii. Elementy zbiorów $\Sigma^{1,2}$ i $\Sigma^{2,1}$ nazywamy **rozwiązaniami von Stackelberga** z graczem 1 (odpowiednio 2) jako liderem.

Twierdzenie 9 *Jeżeli* $(x_1, y_2) \in \Sigma^{1,2}$, $(x_2, y_1) \in \Sigma^{2,1}$ *w grze symetrycznej* $\Gamma = (S, S, W^1, W^2)$, *to dla* $i = 1, 2$

$$\frac{W^i(x_1, y_2) + W^i(x_2, y_1)}{2} \leqslant \nu(\Gamma).$$

Dowód. Ze względu na symetrię funkcji wypłaty $(x, y) \in \Sigma^{1,2} \Leftrightarrow (y, x) \in \Sigma^{2,1}$. Co więcej

$$\frac{W^1(x_1, y_2) + W^1(x_2, y_1)}{2} = \frac{W^2(x_1, y_2) + W^2(x_2, y_1)}{2}. \tag{1}$$

Gdyby dla i-tego gracza $\frac{1}{2} \cdot (\, W^i(x_1, y_2) + W^i(x_2, y_1)\,) > \nu(\Gamma)$, oznaczałoby to, że $EW^i(\pi) > \nu(\Gamma)$ przy $\pi \in \Delta(S \times S)$ danym wzorem $\pi(x_1, y_2) = \pi(x_2, y_1) = \frac{1}{2}$, a poza tym 0. Wtedy zaś z Twierdzenia 5 (c) byłoby $EW^{3-i}(\pi) < \nu(\Gamma)$ – sprzeczność z równością (1). ⊠

Rozwiązanie von Stackelberga może prowadzić do mniejszych wypłat niż rozwiązanie kooperacyjne.

Przykład 5 Niech $\Gamma = (S, S, W^1, W^2)$, $S = \{1, 2, 3\}$ i wypłaty $[W^1(x, y), W^2(x, y)]$ będą dane tabelą

$x \diagdown y$	1	2	3
1	$[10, 10]$	$[30, 70]$	$[10, 10]$
2	$[70, 30]$	$[10, 10]$	$[40, 50]$
3	$[10, 10]$	$[50, 40]$	$[10, 10]$

Mamy $\Sigma^{1,2} = \{(3, 2)\}$, $\Sigma^{2,1} = \{(2, 3)\}$; $\mathrm{Cooperat}(\Gamma) = \{\pi^*\}$, $\pi^*(1, 2) = \pi^*(2, 1) = \frac{1}{2}$;

$$\frac{1}{2} \cdot \Big(W^i(3, 2) + W^i(2, 3) \Big) = \frac{40 + 40}{2} < \frac{70 + 30}{2} = EW^i(\pi^*) = \nu(\Gamma).$$

$\Diamond$

3.3 Rozwiązanie z transferowalną użytecznością

Rozważmy grę $\Gamma = (S_1, S_2, W^1, W^2)$, której uczestnicy mogą się dzielić wspólną wygraną (sumą wypłat). Prowadzi to do pojęcia **TU-rozwiązania**:

$$\mathrm{TU}(\Gamma) = \mathrm{Arg} \max_{(x,y) \in S_1 \times S_2} \Big(W^1(x, y) + W^2(x, y) \Big).$$

Odnotujmy, że średnia wygrana $\frac{1}{2} \cdot (\, W^1(x, y) + W^2(x, y)\,)$ nie zależy od wyboru $(x, y) \in \mathrm{TU}(\Gamma)$.

Twierdzenie 10 *Dla dowolnego rozwiązania $(x_0, y_0) \in \mathrm{TU}(\Gamma)$ gry symetrycznej $\Gamma = (S, S, W^1, W^2)$ zachodzą*

(a) $\frac{W^1(x_0,y_0) + W^2(x_0,y_0)}{2} = \nu(\Gamma)$,

(b) $\pi_0 = \overline{\pi_0} \in \mathrm{Cooperat}(\Gamma)$, $\sharp\, \mathrm{supp}\, \pi_0 \leqslant 2$,

gdzie $\pi_0 = \frac{1}{2}\Big(\delta_{(x_0,y_0)} + \delta_{(y_0,x_0)}\Big)$.

Dowód. Oznaczmy $EU : \Delta(S \times S) \to \mathbb{R}$,

$$EU(\pi) = EW^1(\pi) + EW^2(\pi) = \sum_{(x,y) \in S \times S} \pi(x, y) \cdot \Big(W^1(x, y) + W^2(x, y)\Big).$$

Oczywiście

$$\max_{\pi \in \Delta(S \times S)} EU(\pi) \geqslant \max_{(x,y) \in S \times S} \Big(W^1(x, y) + W^2(x, y)\Big)$$

(co widać biorąc $\pi = \delta_{(x,y)}$, $x, y \in S$). Z drugiej strony dzięki liniowości EU wiadomo, że

$$\max_{\pi \in \Delta(S \times S)} EU(\pi) = EU(\delta_{(x',y')}) = W^1(x', y') + W^2(x', y'),$$

przy pewnych $x', y' \in S$, gdyż maksimum realizuje się w wierzchołku $\delta_{(x',y')}$ sympleksu $\Delta(S \times S)$. Łącznie

$$\max_{\pi \in \Delta(S \times S)} EU(\pi) = \max_{(x,y) \in S \times S} \Big(W^1(x, y) + W^2(x, y)\Big).$$

Z definicji wartości gry

$$2\, \nu(\Gamma) = EW^1(\pi^*) + EW^2(\pi^*) = EU(\pi^*) \leqslant \max_{\pi \in \Delta(S \times S)} EU(\pi)$$

dla $\pi^* \in \text{Cooperat}(\Gamma)$. Dalej na mocy symetrii wypłat

$$W^1(x', y') + W^2(x', y') = W^2(y', x') + W^1(y', x').$$

Kładąc $\pi' = \frac{1}{2}\left(\delta_{(x',y')} + \delta_{(y',x')}\right)$ dostajemy $\pi' = \overline{\pi'}$,

$$EU(\pi') = \frac{1}{2}\, EU(\delta_{(x',y')}) + \frac{1}{2}\, EU(\delta_{(y',x')}) = \max_{\pi \in \Delta(S\times S)} EU(\pi)$$

oraz z Lematu 1 (iv) $EW^1(\pi') = EW^2(\pi') = \frac{1}{2}\, EU(\pi')$.

Gdyby więc $2\,\nu(\Gamma) < \max_{\pi\in\Delta(S\times S)} EU(\pi)$, mielibyśmy sprzeczność z Twierdzeniem 6. W rezultacie

$$\nu(\Gamma) = \frac{1}{2} \max_{\pi \in \Delta(S\times S)} EU(\pi) = \frac{1}{2} \max_{(x,y)\in S\times S} \left(W^1(x,y) + W^2(x,y)\right). \tag{2}$$

To pokazuje (a).

Część (b) tezy wynika z (a) w myśl Twierdzenia 5 (a). ⊠

3.4 Równowagi Nasha

Twierdzenie 11 *Niech $\Gamma = (S, S, W^1, W^2)$ będzie grą symetryczną i niech $\rho \in \Delta(\,\Delta(S)\times\Delta(S)\,)$ będzie rozkładem na zbiorze równowag Nasha (tj. $\rho(\mathbf{p},\mathbf{q}) = 0$, gdy $(\mathbf{p},\mathbf{q}) \in \Delta(S)\times\Delta(S)$ nie znajduje się w położeniu równowagi Nasha). Jeżeli spełniony jest warunek symetrii $\rho(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \rho(\mathbf{q},\mathbf{p})$, to $EW^i(\pi) \leqslant \nu(\Gamma)$, gdzie rozkład $\pi \in \Delta(S\times S)$ jest wyznaczony przez ρ wg wzoru*

$$\pi(x,y) = \int_{\Delta(S)\times\Delta(S)} \rho(\mathbf{p},\mathbf{q})\cdot \mathbf{p}(x)\cdot\mathbf{q}(y)\;\; d\mathbf{p}\, d\mathbf{q}$$

dla $x, y \in S$.

Dowód. Zauważmy, że $\pi \in \widehat{\Delta}(S\times S)$ z racji na symetrię ρ, bo dla $x, y \in S$

$$\pi(x,y) = \int \rho(\mathbf{p},\mathbf{q})\cdot\mathbf{p}(x)\cdot\mathbf{q}(y)\;\; d\mathbf{p}\, d\mathbf{q} =$$
$$= \int \rho(\mathbf{q},\mathbf{p})\cdot\mathbf{q}(x)\cdot\mathbf{p}(y)\;\; d\mathbf{q}\, d\mathbf{p} = \int \rho(\mathbf{p},\mathbf{q})\cdot\mathbf{q}(x)\cdot\mathbf{p}(y)\;\; d\mathbf{q}\, d\mathbf{p} =$$
$$= \int \rho(\mathbf{p},\mathbf{q})\cdot\mathbf{p}(y)\cdot\mathbf{q}(x)\;\; d\mathbf{p}\, d\mathbf{q} = \pi(y,x) = \overline{\pi}(x,y).$$

Z Lematu 1 (iv) i definicji wartości gry otrzymujemy

$$EW^2(\pi) = EW^1(\pi) \leqslant \max_{\pi\in\widehat{\Delta}(S\times S)} EW^1(\pi) = \nu(\Gamma).$$

⊠

Uwaga. Niekiedy za substytut rozwiązania kooperacyjnego w grze niekooperacyjnej przyjmuje się optimum Pareto znajdujące się w równowadze Nasha ([Card-Plas]). Jak się okazuje, nawet jeżeli jest to jedyna równowaga, to nie musi ona stanowić rozwiązania kooperacyjnego w przyjętym tutaj sensie. Na ogół optymalna równowaga Nasha nie musi być skorelowanym optimum (Przykład 1).

Przykład 6 (Dylemat więźnia) Niech $\Gamma = (S, S, W^1, W^2)$, $S = \{1, 2\}$ i wypłaty $[W^1(x,y), W^2(x,y)]$ będą dane tabelą

$x \diagdown y$	1	2
1	$[a, a]$	$[c, b]$
2	$[b, c]$	$[d, d]$

gdzie $b > a > d > c$. Równowagą Nasha (jedyną) tej gry jest para strategii $(2, 2)$, a pozostałe pary są optimami Pareto. Niemniej jednak mamy

$$\mathrm{Cooperat}(\Gamma) = \begin{cases} \{\pi_1^*\}, & \text{gdy } a > \frac{b+c}{2}, \\ \{\ t_1\,\pi_1^* + t_2\,\pi_2^*\ :\ t_1, t_2 \geqslant 0, t_1 + t_2 = 1\ \}, & \text{gdy } a = \frac{b+c}{2}, \\ \{\pi_2^*\}, & \text{gdy } a < \frac{b+c}{2}, \end{cases}$$

gdzie $\pi_1^*(1,1) = 1$, $\pi_2^*(1,2) = \pi_2^*(2,1) = \frac{1}{2}$. $\Diamond$

Przykład 7 (Dylemat podróżnika, [Basu]) Niech $\Gamma = (S, S, W^1, W^2)$, $S = \{2, 3, 4, \ldots, 100\}$ i wypłaty będą dane wzorem $W^2(y, x) = W^1(x, y) = \min(x, y) + 2 \cdot \mathrm{sgn}(y - x)$. Jedyną równowagą Nasha tej gry jest para strategii $(2, 2)$, zaś optymalne w sensie Pareto są pary $(100, 100)$, $(99, 100)$ i $(100, 99)$. Niemniej jednak $\mathrm{Cooperat}(\Gamma) = \{\pi^*\}$, gdzie $\pi^*(100, 100) = 1$. $\Diamond$

Uwaga. Odnotujmy, że oba powyższe dylematy przedstawiane są zawsze jako gry bez komunikacji między graczami. Dlatego też zaproponowane tu rozwiązania kooperacyjne nie dają odpowiedzi na problemy formułowane zwykle przy okazji owych dylematów.

4 Implementacja rozwiązania kooperacyjnego

Strategię kooperacyjną można traktować jako wskaźnik częstości wyboru poszczególnych optimów Pareto podczas wielokrotnych rozgrywek. Pierwsza interpretacja, zgodna z zasadą sprawiedliwego podziału Szaniawskiego opartą na równości wobec losu ([Liss]), mówi, iż gracze przy każdej rozgrywce powinni losować optimum Pareto wg rozkładu danego w ustalonym przez siebie rozwiązaniu kooperacyjnym. Poniższe przykłady zwracają uwagę na inną możliwość.

Przykład 8 Niech $\Gamma = (S, S, W^1, W^2)$, $S = \{1, 2\}$ i wypłaty $[W^1(x, y), W^2(x, y)]$ będą dane tabelą

$x \diagdown y$	1	2
1	$[20, 20]$	$[50, 90]$
2	$[90, 50]$	$[70, 70]$

Mamy $\mathrm{Cooperat}(\Gamma) = \{\ t_1\,\pi_1^* + t_2\,\pi_2^*\ :\ t_1, t_2 \geqslant 0, t_1 + t_2 = 1\ \}$, gdzie $\pi_1^*(1, 2) = \pi_1^*(2, 1) = \frac{1}{2}$, $\pi_2^*(2, 2) = 1$. Rozwiązanie π_2^* jest najlepsze, bo prowadzi do jednakowych wypłat przy każdej rozgrywce. $\Diamond$

Przykład 9 Niech $\Gamma = (S, S, W^1, W^2)$, $S = \{1, 2, 3\}$ i wypłaty $[W^1(x, y), W^2(x, y)]$ będą dane tabelą

$x \diagdown y$	1	2	3
1	$[20, 20]$	$[80, 60]$	$[40, 100]$
2	$[60, 80]$	$[20, 20]$	$[90, 50]$
3	$[100, 40]$	$[50, 90]$	$[20, 20]$

Mamy $\mathrm{Cooperat}(\Gamma) = \{\ t_1\,\pi_1^* + t_2\,\pi_2^* + t_3\,\pi_3^*\ :\ t_1, t_2, t_3 \geqslant 0, t_1 + t_2 + t_3 = 1\ \}$, gdzie $\pi_1^*(2, 3) = \pi_1^*(3, 2) = \frac{1}{2}$, $\pi_2^*(1, 3) = \pi_2^*(3, 1) = \frac{1}{2}$, $\pi_3^*(1, 2) = \pi_3^*(2, 1) = \frac{1}{2}$. Rozwiązanie π_3^* jest najlepsze, bo przy każdej rozgrywce prowadzi do wypłat najmniej odchylonych od wartości gry $\nu(\Gamma) = 70$. $\Diamond$

Druga interpretacja każe szukać planu realizacji wypłat o najmniejszej wariancji. Zgodnie z Twierdzeniem 10 wystarczy rozpatrywać rozwiązania kooperacyjne o nośniku złożonym z co najwyżej dwóch czystych optimów Pareto. Tak właśnie uczyniliśmy w powyższych przykładach. Gracze dostają za każdym razem wypłaty zgodne z wartością gry lub też, gdy nie ma rozwiązań kooperacyjnych wśród czystych optimów Pareto, na przemian obierają jedno z dwóch optimów wchodzących w skład rozwiązania kooperacyjnego prowadzącego do wypłat jak najmniej odchylonych od wartości gry. Mechanizm losujący stosowany byłby wówczas tylko do ustalenia gracza rozpoczynającego od otrzymania wypłaty wyższej niż wartość gry. Ma to przede wszystkim znaczenie z punktu widzenia skończonej serii rozgrywek o nieparzystej długości.

5 Luźne obserwacje

Uwaga. Definicja w obecnym kształcie jest trudna do przeniesienia na gry asymetryczne, co np. widać z Przykładu 10.

Przykład 10 (Sztucznie wymuszona kooperacja)

$x \diagdown y$	1	2
1	$[120, 40]$	$[0, 0]$
2	$[100, 120]$	$[0, 0]$

Pareto	$(1, 1)$, $(2, 1)$
Nash	$(1, 1)$
Kooperacyjne	(?) $\frac{1}{5} \cdot (1, 1) + \frac{4}{5} \cdot (2, 1)$

$\diamondsuit$

Uwaga. Każdą grę można przedstawić jako sumę dwóch gier: gry o sumie zerowej i gry podwójnie symetrycznej o identycznych wypłatach

$$[W^1, W^2] = \left[\frac{W^1 - W^2}{2}, \frac{W^2 - W^1}{2}\right] + \left[\frac{W^1 + W^2}{2}, \frac{W^1 + W^2}{2}\right].$$

Literatura

[Aub-Cell] J.P.Aubin, A.Cellina, *Differential Inclusions*, Springer, Berlin 1984

[Basu] K.Basu, *The Traveler's Dilemma*, Scientific American, May 2007

[Card-Plas] P.Cardaliaguet, S.Plaskacz, *Existence and uniqueness of a Nash equilibrium feedback for a simple nonzero-sum differential game*, Internat. J. Game Theory 32 (2003), no. 1, 33-71

[MCDA] M.Ehrgott, M.M. Wiecek, *Multiobjective programming*, Chap.17, 667–722, in: J.Figueira, S.Greco, M.Ehrgott (Eds.), *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*, Springer, Boston 2005

[Engw] J.Engwerda, *LQ Dynamic Optimization and Differential Games*, Wiley and Sons, 2005

[Liss] G.Lissowski, *Zasady sprawiedliwego podziału dóbr*, Scholar, 2008

——- niecytowane w tekście ————

[Frank] J.N.Franklin, *Methods of Mathematical Economics: Linear and Nonlinear Programming, Fixed-Point Theorems*, SIAM, Philadelphia 2002 (republication of Springer-Verlag, New York 1980)

[Lange] O.Lange, *Optimal Decisions. Principles of Programming*, PWN Warszawa 1971 (translated from the Polish edition, PWN Warszawa 1967)

[Le-Ga-Roz] J.Lewin, J.Gastiew, J.Rozanow, *Język, matematyka, cybernetyka*, Wiedza Powszechna, Warszawa 1967

[Osb-Rub] M.J.Osborne, A.Rubinstein, *A Course in Game Theory*, MIT (sixth printing) 1999