Uniwersytet Mikołaja Kopernika
Wydział Matematyki i Informatyki

Rozprawa doktorska

Rozwiązania okresowe parabolicznych równań ewolucyjnych na $\mathbb{R}^N$ - metoda przesunięcia wzdłuż trajektorii

Renata Łukasiak

Promotor: dr hab. Aleksander Ćwiszewski

Toruń 2016

Spis treści

Wstęp **5**

Oznaczenia **15**

1 Zagadnienia początkowe i zasada uśredniania **19**

1.1 Istnienie i jednoznaczność rozwiązań 19

1.2 Ciągła zależność od warunków początkowych i parametru 22

1.3 Zasada uśredniania 26

1.4 Ciągłość i uśrednianie dla równań parabolicznych 28

2 Operator przesunięcia wzdłuż trajektorii **39**

2.1 Oszacowania reszt rozwiązań równań parabolicznych 40

2.2 Własność uzwarcania operatora przesunięcia 43

2.3 Indeks punktów stałych operatora przesunięcia dla równań liniowych 49

2.4 Indeks punktów stałych operatora przesunięcia dla równań nieliniowych 56

3 Rozwiązania okresowe - przypadek nierezonansowy **65**

3.1 Nierezonansowa zasada uśredniania dla indeksu 66

3.2 Weryfikacja warunków *a priori* 69

3.3 Rozwiązania okresowe 77

4 Rozwiązania okresowe równań parabolicznych w rezonansie **81**

4.1 Wprowadzenie 81

4.2 Rezonansowa zasada uśredniania 83

4.3 Rozwiązania okresowe w problemach z warunkami Landesmana-Lazera 92

5 Dodatek **101**

5.1 Nierówności 101

5.2 Przejścia graniczne pod znakiem całki 102

5.3 Przestrzenie Sobolewa 103

5.4 Zwartość i zbieżność w przestrzeniach Banacha 105
5.5 Operatory liniowe w przestrzeniach Banacha 106
5.6 Półgrupy operatorów liniowych 111
5.7 Operatory sektorialne 114
5.8 Rozkłady spektralne 118
5.9 Indeks punktów stałych 120
5.9.1 Indeks Leray-Schaudera dla odwzorowań zwartych 120
5.9.2 Indeks punktów stałych dla odwzorowań ostatecznie zwartych 121

Literatura **124**

Skorowidz **132**

Wstęp

Nieliniowe równania paraboliczne stanowią element modeli matematyczych wielu zjawisk i zagadnień wywodzących się z różnorodnych dziedzin takich jak biologia, fizyka, chemia czy technika i z punktu widzenia zastosowań, stanowią istotną klasę równań. Celem rozprawy jest przedstawienie uzyskanych rezultatów dotyczących istnienia okresowych rozwiązań parabolicznych równań różniczkowych cząstkowych rozważanych na $\mathbb{R}^N$. Mianowicie rozważać będziemy zagadnienie

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u(x,t) + f(t,x,u(x,t)) \qquad x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \tag{1}$$

gdzie $f : [0,+\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest odwzorowaniem ciągłym i T-okresowym ($T > 0$) względem pierwszej zmiennej. W naturalny sposób należy rozpatrzyć dwa przypadki. Pierwszy dotyczy sytuacji, gdy linearyzacja prawej strony uśrednionego równania

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u(x,t) + \widehat{f}(x,u(x,t)) \qquad x \in \mathbb{R}^N, t > 0,$$

w którym funkcja $\widehat{f} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana jest wzorem $\widehat{f}(x,u) := \frac{1}{T}\int_0^T f(t,x,u)\,\mathrm{d}t$, ma trywialne jądro. Jest to tzw. *przypadek nierezonansowy*. Drugi przypadek, kiedy w równaniu występuje *rezonans*, dotyczy sytuacji gdy jądro linearyzacji prawej strony jest nietrywialne - wówczas rozważać będziemy zagadnienie

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u(x,t) + V(x)u(x,t) + f(t,x,u(x,t)) \qquad x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \tag{2}$$

gdzie V jest potencjałem takim, że $V = V_0 - V_\infty$, $V_0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $V_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $V_\infty \geq \bar{v}_\infty > 0$, przy czym w całej rozprawie wykładnik p jest taki, że

$$2 < p < +\infty, \text{ gdy } N = 1,2 \text{ oraz } N \leq p < +\infty, \text{ gdy } N \geq 3, \tag{3}$$

zaś funkcja f jest jak w (1) oraz dodatkowo ograniczona przez funkcję z przestrzeni $L^2(\mathbb{R}^N)$.

W obu przypadkach użyjemy techniki operatora przesunięcia wzdłuż trajektorii, metod uśredniania oraz indeksu punktów stałych w celu uzyskania efektywnych kryteriów stwierdzających istnienie rozwiązań okresowych.

Zastosowane podejście i główne trudności

Równania (1) i (2) można zapisać jako abstrakcyjne równanie ewolucyjne

$$\dot{u}(t) = -\mathbf{A}u(t) + \mathbf{F}(t, u(t)), \qquad t > 0, \tag{4}$$

w którym liniowy operator $\mathbf{A} : H^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ określony jest następująco $\mathbf{A}u := -\Delta u$ - w przypadku (1), lub $\mathbf{A}u := -(\Delta + V)u$ - w przypadku (2) oraz $\mathbf{F} : [0, +\infty) \times H^1(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ dane jest wzorem $[\mathbf{F}(t,u)](\cdot) := f(t, \cdot, u(\cdot))$.

Warto dodać w tym miejscu, że gdyby równanie (1) było autonomiczne, to wówczas funkcjonał $L : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dany wzorem

$$L(u) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} P(x, u(x)) \, \mathrm{d}x,$$

gdzie $P(x,u) := \int_0^u f(x,s) \, \mathrm{d}s$, jest tzw. funkcjonałem Lapunowa dla równania (4) takim, że

$$\frac{d}{dt} L(u(t)) = -\|\dot{u}(t)\|_{L^2}^2.$$

Ponieważ L jest malejący wzdłuż dowolnego niestacjonarnego rozwiązania u równania (1), więc z powyższej równości wynika, że w przypadku autonomicznym nie istnieją rozwiązania okresowe, niebędące rozwiązaniami stacjonarnymi. Zatem interesować nas będzie zjawisko występujące tylko w równaniach nieautonomicznych.

Przy odpowiednich, standardowych założeniach dotyczących odwzorowania f, równanie (4), z warunkiem początkowym $u(0) = \bar{u}$, $\bar{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$, posiada własność globalnego istnienia i jednoznaczności rozwiązań. Można zatem poprawnie określić operator przesunięcia wzdłuż trajektorii $\mathbf{\Phi}_t : H^1(\mathbb{R}^N) \to H^1(\mathbb{R}^N)$, $t > 0$, formułą

$$\mathbf{\Phi}_t(\bar{u}) := u(t), \qquad \bar{u} \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

gdzie $u : [0, +\infty) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ jest rozwiązaniem (4) z warunkiem początkowym $u(0) := \bar{u}$. Punkt stały odwzorowania $\mathbf{\Phi}_T$ jest początkiem pewnego rozwiązania T-okresowego wyjściowego zagadnienia. Zatem problem istnienia okresowych rozwiązań równania (4) sprowadza się do poszukiwania punktów stałych operatora $\mathbf{\Phi}_T$.

Technika badania punktów stałych operatora przesunięcia stosowana była przez wielu matematyków, przy użyciu różnorodnych narzędzi, jakie stanowią - adekwatne do badanego zagadnienia metody topologiczne, w tym twierdzenia o punktach stałych i niezmienniki homotopijne takie jak stopień topologiczny czy indeks punktów stałych. Wymienić tu można prace Browdera [12], Beckera [7], Hessa [43], Hu i Papageorgiou [45], Shioji [64], Bothego [9], Badera i Kryszewskiego [6], Ortegi [55], Ćwiszewskiego [16, 17, 20, 21], Ćwiszewskiego i Kokockiego [18, 19] oraz Kokockiego [48, 50].

Zasadniczą kwestią w poszukiwaniu punktów stałych operatora przesunięcia jest własność zwartości tego odwzorowania. Umożliwia ona bowiem zastosowanie odpowiednich topologicznych twierdzeń o punktach stałych lub innych narzędzi topologicznych. Okazuje się, że w rozpatrywanym przypadku tj. równań parabolicznych rozważanych na $\mathbb{R}^N$, operator przesunięcia nie jest pełnociągły ani też kondensujący względem miary niezwartości Kuratowskiego czy Hausdorffa. Przyczyna tkwi w braku ograniczoności dziedziny, a w konsekwencji braku zwartości włożenia przestrzeni $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$. W rozprawie dowodzę, że przy odpowiednich założeniach dotyczących f, operator przesunięcia wzdłuż trajektorii należy do klasy odwzorowań *ostatecznie zwartych* (z ang. *ultimately compact*), dla której istnieje teoria indeksu punktów stałych. Do tego celu wykorzystuję metodę oszacowań reszt rozwiązań równań parabolicznych (z ang. *tail estimates*), którą jako pierwszy zastosował Wang w [69] do badania istnienia istnienia globalnego atraktora w równaniu reakcji-dyfuzji na $\mathbb{R}^N$, a następnie Prizzi w pracach [57, 58] w kontekście badania stanów stacjonarnych i orbit łączących w równaniach parabolicznych na dziedzinach nieograniczonych.

Kolejnym istotnym krokiem w rozważanym zagadnieniu jest wyznaczenie indeksu punktów stałych operatora przesunięcia wzdłuż trajektorii, którego nietrywialność względem otwartych i ograniczonych podzbiorów przestrzeni fazowej $H^1(\mathbb{R}^N)$ implikuje istnienie punku stałego tego operatora, a co za tym idzie - okresowego rozwiązania równania (4). Efektywnym narzędziem, kóre posłuży nam do tego celu jest nieskończenie wymiarowa wersja *zasady uśredniania*, pozwalająca sprowadzić obliczenia do równania autonomicznego.

Metoda uśredniania umożliwia badanie asymptotycznego zachowania równań nieautonomicznych. Orzeka, że dynamika rozwiązania w układzie oscylującym jest aproksymowana przez rozwiązanie problemu uśrednionego przy rosnącej częstotliwości. Klasyczne wyniki dotyczące asymptotycznego zachowania rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych, a więc sytuacji skończenie wymiarowej, należą do Bogolubova i Mitropolskiego (patrz [8]). Zasada uśredniania, w przypadku zagadnień określonych na skończenie wymiarowych rozmaitościach, została udowodniona przez Furiego i Perę w pracy [34]. Pierwszą nieskończenie wymiarową zasadę uśredniania dla operatora $\mathbf{A}$ generującego analityczną C_0-półgrupę w zagadnieniu typu (4) uzyskał Henry w [42]. Wynik ten został uogólniony w pracach Hale'a i Lunela [41], Antoci i Prizziego [4], Prizziego [58] czy Ćwiszewskiego [22], w których rezultat Henry'ego został przeniesiony na ogólny przypadek generatorów C_0-półgrup, niekoniecznie analitycznych. To pozwoliło na uzyskanie zasady uśredniania w sytuacji, gdy prawa strona jest zaburzeniem operatora $\mathbf{A}$ generującego zwartą C_0-półgrupę - w [16] oraz w przypadku, gdy prawa strona jest zaburzeniem operatora m-akretywnego - w [17], w których to pracach nie wymagano dodatkowych założeń o $\mathbf{F}$ dotyczących zwartości. Nieco inną sytuację rozpatrywali Couchouron i Kamenski w pracy [15], w której zakładano, że zaburzenie $\mathbf{F}$ spełnia warunek $\gamma(\mathbf{F}([0,T] \times Z)) \leq k\gamma(Z)$ dla dowolnego zbioru ograniczonego Z w przestrzeni Banacha X i pewnej stałej $k \geq 0$, zaś γ oznacza miarę niezwartości. Zasada uśredniania w sytuacji, gdy operator $-\mathbf{A}$ jest generatorem C_0- półgrupy kontrakcji oraz zaburzenie $\mathbf{F}$ jest kondensujące względem miary niezwartości Hausdorffa udowodniono w [18], zaś przypadku, w którym prawa strona jest kondensującym zaburzeniem zależnej od czasu rodziny operatorów liniowych $\{\mathbf{A}(t)\}_{t\geq 0}$ - w pracy [19].

Metoda przesunięcia wzdłuż trajektorii na tle innych metod

Metoda przesunięcia wzdłuż trajektorii nie jest jedyną techniką stosowaną do badania istnienia rozwiązań periodycznych. Obok niej wykorzystuje się również teorię koincydencji operatorów, która polega na zapisaniu równania (4) w postaci

$$\Upsilon u = F(u), \tag{5}$$

gdzie Υ i F są operatorami określonymi w odpowiedniej przestrzeni klas funkcji zależnych zarówno od zmiennej przestrzennej jak i czasowej. Zagadnienie (5) rozwiązuje się przy użyciu odpowiedniego stopnia topologicznego bądź też metod wariacyjnych - jak np. w pracach [3], [13] i [54]. Innym podejściem do zagadnień okresowych jest również użycie tzw. techniki uzmienniania współczynników jak np. w pracach [47] czy [68]. Niewątpliwie każda ze wspomnianych metod ma pewne zalety. W przypadku technik koincydencji i uzmienniania współczynników nie wymaga się jednoznaczności rozwiązań dla wyjściowego zagadnienia początkowego, natomiast atutem metody przesunięcia wzdłuż trajektori i motywacją do jej zastosowania jest jej naturalne powiązanie ze zjawiskiem opisywanym przez rozważane równanie oraz oczywisty związek z układami dynamicznymi. Dodatkowo indeks punktów stałych operatora przesunięcia wzdłuż trajektorii dla rozwiązania okresowego dostarcza, w pewnych przypadkach (patrz np. [55]), przynajmniej częściowej informacji na temat jego stabilności.

Główne wyniki rozprawy

W przypadku nierezonansowym, technika uśredniania w połączeniu z metodą kontynuacji wzdłuż parametru, pozwala na wyznaczenie indeksu punktów stałych $\mathrm{Ind}_{uc}(\mathbf{\Phi}_T, U)$[1] operatora przesunięcia wzdłuż trajektorii $\mathbf{\Phi}_T$, gdzie U jest odpowiednio wybranym, otwartym i ograniczonym podzbiorem $H^1(\mathbb{R}^N)$, według wzoru

$$\mathrm{Ind}_{uc}(\mathbf{\Phi}_T, U) = \lim_{\lambda\to 0^+} \mathrm{Ind}_{uc}(\mathbf{\Phi}^{(\lambda)}_{\lambda T}, U) = \lim_{t\to 0^+} \mathrm{Ind}_{uc}(\widehat{\mathbf{\Phi}}_t, U), \tag{6}$$

gdzie $\lambda > 0$ jest parametrem w rodzinie równań

$$\dot{u}(t) = -\mathbf{A}u(t) + \mathbf{F}(t/\lambda, u),\ \ t > 0, \lambda \in (0, 1],$$

$\mathbf{\Phi}^{(\lambda)}_{\lambda T}$ jest jej operatorem przesunięcia wzdłuż trajektorii, zaś $\widehat{\mathbf{\Phi}}_t$ jest operatorem przesunięcia wzdłuż trajektorii stowarzyszonym z autonomicznym problemem

$$\dot{u}(t) = -\mathbf{A}u(t) + \widehat{\mathbf{F}}(u),\ \ t > 0,$$

w którym $\widehat{\mathbf{F}}$ jest odpowiednio zdefiniowanym uśrednieniem $\mathbf{F}$ oraz $U \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ jest otwartym zbiorem ograniczonym takim, że

$$\mathbf{A}\bar{u} + \widehat{\mathbf{F}}(\bar{u}) \neq 0 \qquad \text{dla wszystkich } \bar{u} \in \partial U.$$

Z powyższego rozumowania płynie wniosek, że z punktów równowagi równania uśrednionego o nietrywialnym indeksie emanują rozwiązania okresowe równania (1). Co więcej, warunki typu *a priori* pozwalają na odpowiednie zlokalizowanie gałęzi tych rozwiązań. W sytuacji, gdy nieliniowość f jest asymptotycznie liniowa istnieje możliwość weryfikacji wspomnianych warunków. Naszkicowana powyżej koncepcja wywodzi się z równań różniczkowych zwyczajnych i stosowana była w pracy Furiego oraz Pery (patrz [35]) oraz Furiego, Pery i Spadini'ego w [36]. Idea ta została wykorzystana do problemów nieskończenie wymiarowych przez Ćwiszewskiego w pracach [20] i [23] oraz przez Ćwiszewskiego i Kokockiego w [18] i [19].

W części rozprawy dotyczącej równań parabolicznych bez rezonansu przyjęte zostały następujące założenia dotyczące linearyzacji nieliniowości f w zerze

$$\lim_{u\to 0} \frac{f(t,x,u)}{u} = \alpha(t,x) := \alpha_0(t,x) - \alpha_\infty(t,x), \tag{7}$$

oraz w nieskończoności

$$\lim_{|u|\to \infty} \frac{f(t,x,u)}{u} = \omega(t,x) := \omega_0(t,x) - \omega_\infty(t,x), \tag{8}$$

[1] Ind_{uc} oznacza indeks punktów stałych w klasie odwzorowań ostatecznie zwartych.

dla p.w. $x \in \mathbb{R}^N$ oraz $t \geq 0$, gdzie $\alpha_0(t,\cdot), \omega_0(t,\cdot) \in L^p(\mathbb{R}^N)$, p jest jak w (3), $\alpha_\infty(t,\cdot), \omega_\infty(t,\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\alpha_\infty(t,x) \geq \bar{\alpha}_\infty$, $\omega_\infty(t,x) \geq \bar{\omega}_\infty$ dla wszystkich $t \geq 0$ i p.w. $x \in \mathbb{R}^N$ oraz pewnych $\bar{\alpha}_\infty, \bar{\omega}_\infty > 0$ oraz

$$\sup_{t\geq 0}\left(\|\alpha_0(t,\cdot)\|_{L^p} + \|\alpha_\infty(t,\cdot)\|_{L^\infty}\right) < +\infty \text{ i } \sup_{t\geq 0}\left(\|\omega_0(t,\cdot)\|_{L^p} + \|\omega_\infty(t,\cdot)\|_{L^\infty}\right) < +\infty.$$

Zakładamy również, że dla wszystkich $t, s \geq 0$ i p.w. $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned} |\alpha_0(t,x) - \alpha_0(s,x)| &\leq k^0(x)|t-s|^\nu \quad \text{oraz} \quad |\alpha_\infty(t,x) - \alpha_\infty(s,x)| \leq k^\infty(x)|t-s|^\nu, \\ |\omega_0(t,x) - \omega_0(s,x)| &\leq k^0(x)|t-s|^\nu \quad \text{oraz} \quad |\omega_\infty(t,x) - \omega_\infty(s,x)| \leq k^\infty(x)|t-s|^\nu \end{aligned}$$

dla pewnych $k^0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $k^\infty \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ i $\nu \in (0,1)$.

Najważniejszymi wynikami rozprawy dla równań parabolicznych bez rezonansu są następujące twierdzenia.

Twierdzenie 1. (dokładne sformułowanie - patrz **twierdzenie 3.3.1** na str. 77) *Niech $f : [0,+\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie ciągłym odwzorowaniem, T-okresowym względem pierwszej zmiennej, spełniającym warunek Lipschitza względem trzeciej zmiennej i takim, że dla wszystkich $t, s \in [0,+\infty)$, $u, v \in \mathbb{R}$ i p.w. $x \in \mathbb{R}^N$,*

$$\left(f(t,x,u) - f(t,x,v)\right)(u-v) \leq -a|u-v|^2 + b(x)|u-v|^2$$

dla pewnych $a > 0$ i $b \in L^p(\mathbb{R}^N)$ oraz zachodzi (8). Jeżeli równanie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \lambda\Delta u(x,t) + \lambda\omega(t,x)u(x,t), \ x \in \mathbb{R}^N, \ t > 0, \\ u(\cdot,t) \in H^1(\mathbb{R}^N), \ t \geq 0, \end{cases}$$

nie posiada niezerowych, T- okresowych rozwiązań dla $\lambda \in (0,1]$ oraz $\operatorname{Ker}(\Delta + \widehat{\omega}) = \{0\}$*, gdzie $\widehat{\omega}(x) := \frac{1}{T}\int_0^T \omega(t,x)\,\mathrm{d}t$, to wówczas rówanie (1) posiada rozwiązanie T-okresowe.*

Kolejne twierdzenie dotyczy sytuacji, kiedy linearyzacja w 0 oraz w ∞ są topologicznie różne, tzn. kiedy liczby dodatnich wartości własnych, liczonych wraz z krotnościami[1] dla operatorów $\Delta + \widehat{\alpha}$ i $\Delta + \widehat{\omega}$, gdzie $\widehat{\alpha}$ i $\widehat{\omega}$ oznaczają odpowiednio pochodną w 0 i w nieskończoności funkcji $\widehat{f}$, są różnej parzystości.

[1] patrz str. 108.

Twierdzenie 2. (dokładne sformułowanie - patrz **twierdzenie 3.3.2** na str. 78) *Przypuśćmy, że spełnione są wszystkie założenia poprzedniego twierdzenia oraz załóżmy dodatkowo, że zachodzi* (7). *Jeśli równanie*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \lambda\Delta u(x,t) + \lambda\alpha(t,x)u(x,t), \ x \in \mathbb{R}^N, \, t > 0, \\ u(\cdot,t) \in H^1(\mathbb{R}^N), \ t \geq 0, \end{cases}$$

nie posiada T-okresowych rozwiązań dla $\lambda \in (0,1]$, $\mathrm{Ker}\,(\Delta+\widehat{\alpha}) = \mathrm{Ker}\,(\Delta+\widehat{\omega}) = \{0\}$ *i $m(\infty) \not\equiv m(0)$ mod 2, gdzie $m(0)$ i $m(\infty)$ oznaczają liczbę dodatnich wartości własnych (wraz z krotnościami) operatorów, odpowiednio $\Delta + \widehat{\alpha}$ i $\Delta + \widehat{\omega}$, to wówczas równanie* (1) *posiada nietrywialne T-okresowe rozwiązanie.*

W powyższych twierdzeniach bardzo istotną kwestią są założenia o postaci funkcji α oraz ω. Składnik α_0 (lub ω_0) powoduje, że ujemna część spektrum operatora $-\Delta - \widehat{\alpha}$ (lub odpowiednio $-\Delta - \widehat{\omega}$) składa się z izolowanych wartości własnych o skończonej krotności (patrz uwaga 2.3.3). Dzięki temu liczby $m(0)$ i $m(\infty)$ są poprawnie określone. Co więcej, aby spełniony był warunek $m(\infty) \not\equiv m(0)$ mod 2 w twierdzeniu 2, konieczna jest obecność w równaniu nietrywialnego składnika α_0 lub ω_0 z przestrzeni $L^p(\mathbb{R}^N)$.

W przypadku równania (2), o którym zakładamy, że jest w rezonansie (tzn. $\mathrm{Ker}(\Delta + V) \neq \{0\}$), procedura użyta poprzednio nie ma zastosowania i wymagane jest nieco inne podejście. Zasadniczą kwestię pełni tutaj *rezonansowa wersja zasady uśredniania*, która pozwala wyrazić topologiczne własności operatora $\mathbf{\Phi}_T$ w terminach odwzorowania $\bar{\mathbf{F}} : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, będącego uśrednieniem zaburzenia $\mathbf{F}$, obciętego do skończenie wymiarowej przestrzeni $\mathcal{N} := \mathrm{Ker}(\Delta+V)$ (patrz uwaga 4.2.2), zadanego wzorem

$$\bar{\mathbf{F}}(u) := \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{P}\mathbf{F}(t,u(t))\,\mathrm{d}t,$$

gdzie $\mathbf{P} : L^2(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{N}$ jest projekcją ortogonalną na przestrzeń $\mathcal{N}$. Idea, zaczerpnięta z prac [11], [21], [48] czy [50], polega na rozważeniu rodziny zagadnień z parametrem $\epsilon \in [0,1]$

$$\dot{u}(t) = -\mathbf{A}u(t) + \epsilon\mathbf{F}(t,u(t)), \qquad t > 0, \tag{9}$$

i wykazaniu, że dla małych wartości parametru ϵ,

$$\mathrm{Ind}_{uc}(\mathbf{\Phi}_T^{(\epsilon)}, U \oplus W) = (-1)^{m(\infty)+\dim\mathcal{N}}\mathrm{Deg}_B(\overline{\mathbf{F}}, U),$$

gdzie $U \subset \mathcal{N}$ i $W \subset \mathcal{N}^{\perp}$ są zbiorami otwartymi, ograniczonymi i takimi, że $0 \in W$ oraz $\bar{\mathbf{F}}(\bar{u}) \neq 0$ dla $\bar{u} \in \partial U$, zaś $m(\infty)$ oznacza liczbę dodatnich wartości własnych (liczoną wraz z krotnościami) operatora $-\mathbf{A}$ i Deg_B oznacza stopień topologiczny Brouwera. Zatem nietrywialność stopnia $\mathrm{Deg}_B(\bar{\mathbf{F}}, U)$ implikuje istnienie T-okresowego rozwiązania dla (9). Dodatkowe założenia na f pozwolą na kontunuację wzdłuż parametru ϵ i wyznaczenie $\mathrm{Deg}_B(\bar{\mathbf{F}}, B_{\mathcal{N}}(0, R_0))$ dla dużych $R_0 > 0$.

Najważniejszymi wynikami uzyskanym w rozprawie dotyczącym istnienia T- okresowych rozwiązań dla równań parabolicznych w rezonansie są następujące twierdzenia.

Twierdzenie 3. (dokładne sformułowanie - patrz **twierdzenie 4.3.2** na str. 94) *Załóżmy, że* $\mathrm{Ker}(\Delta+V) \neq \{0\}$ *oraz niech* f *będzie ciągłym, ograniczonym przez funkcję z przestrzeni* $L^2(\mathbb{R}^N)$ *odwzorowaniem,* T*-okresowym względem pierwszej zmiennej, spełniającym warunek Lipschitza względem trzeciej zmiennej i przypuśćmy, ze zachodzi jeden z warunków typu Landesmana-Lazera, tzn. albo*

$$\int_0^T \left(\int_{\{\phi>0\}} \check{f}_+(t,x)\phi(x)dx + \int_{\{\phi<0\}} \hat{f}_-(t,x)\phi(x)dx \right) \mathrm{d}t > 0 \tag{10}$$

dla dowolnego $\phi \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$*, gdzie* $\check{f}_+(t,x) := \liminf_{s\to+\infty} f(t,x,s)$ *oraz* $\hat{f}_-(t,x) := \limsup_{s\to-\infty} f(t,x,s)$*, albo*

$$\int_0^T \left(\int_{\{\phi>0\}} \hat{f}^+(t,x)\phi(x)dx + \int_{\{\phi<0\}} \check{f}^-(t,x)\phi(x)dx \right) \mathrm{d}t < 0 \tag{11}$$

dla dowolnego $\phi \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$*, gdzie* $\hat{f}^+(t,x) := \limsup_{s\to+\infty} f(t,x,s)$ *oraz* $\check{f}^-(t,x) := \liminf_{s\to-\infty} f(t,x,s)$ *. Wówczas równanie* (2) *posiada rozwiązanie* T*-okresowe.*

Założenia typu Landesmana-Lazera można w efektywny sposób zweryfikować (patrz uwaga 4.1.1). Bezpośrednim wnioskiem jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 4. (dokładne sformułowanie - patrz **twierdzenie 4.3.3** na str. 99) *Załóżmy, że* $\mathrm{Ker}(\Delta+V) \neq \{0\}$ *oraz niech* f *będzie ciągłym, ograniczonym przez funkcję z przestrzeni* $L^2(\mathbb{R}^N)$ *odwzorowaniem,* T*-okresowym względem pierwszej zmiennej, spełniającym warunek Lipschitza względem trzeciej zmiennej. Jeśli* $\check{f}_+ \geq 0$*,* $\hat{f}_- \leq 0$ *oraz obie funkcje nie są równe p.w. funkcji zerowej lub* $\hat{f}^+ \leq 0$*,* $\check{f}^- \geq 0$ *oraz obie funkcje nie są równe p.w. funkcji zerowej, to równanie* (2) *posiada rozwiązanie* T*-okresowe.*

Zdaniem autorki do najistotniejszych wyników zawartych w rozprawie należą:

- Twierdzenie 2.2.4 - twierdzenie o ostatecznej zwartości operatora przesunięcia wzdłuż trajektorii,
- Twierdzenia 2.3.4 i 2.4.1 - o indeksie punktów stałych dla operatora przesunięcia wzdłuż trajektorii związanego, odpowiednio z problemem liniowym i autonomicznym problemem nieliniowym;
- Twierdzenie 3.1.1 - wzór indeksowy dla zagadnienia bez rezonansu,
- Twierdzenia 3.3.1 i 3.3.2 - kryteria na istnienie rozwiązań okresowych dla równań parabolicznych bez rezonansu,
- Twierdzenie 4.2.1 - rezonansowa zasada uśredniania,
- Twierdzenia 4.3.2 i 4.3.3 - kryteria na istnienie rozwiązań okresowych dla równań parabolicznych z rezonansem.

Wyniki prezentowane w rozprawie stanowią treść artykułów [24] oraz [25].

Układ pracy

Niniejsza praca jest zorganizowana w następujący sposób.

W Rozdziale 1 przypomnimy klasyczne twierdzenia dotyczące istnienia, jednoznaczności i regularności rozwiązań parabolicznych równań ewolucyjnych, których prawa strona jest ciągłym zaburzeniem operatora sektorialnego. Zbadamy również ciągłą zależność rozwiązań od warunków początkowych i parametru oraz udowodnimy abstrakcyjną zasadę uśrednianiania. Następnie abstrakcyjne wyniki zastosujemy do równania cząstkowego (1).

Rozdział 2 jest poświęcony oszacowaniom reszt (z ang. *tail estimates*) rozwiązań równań parabolicznych. Oszacowania te posłużą w dalszym ciągu do wykazania własności ostatecznej zwartości operatora przesunięcia wzdłuż trajektorii. Ponadto wyznaczone zostaną indeksy punktów stałych operatorów przesunięcia wzdłuż trajektorii stowarzyszonych odpowiednio z równaniem liniowym oraz z autonomicznym problemem nieliniowym. Wzory te, wraz ze wspomnianą zasadą uśredniania, posłużą do wyznaczenia indeksu punktów wstałych operatora przesunięcia wzdłuż trajektorii dla równania (1).

W rozdziale 3 zbadamy istnienie okresowych rozwiązań równań parabolicznych na $\mathbb{R}^N$ w sytuacji, gdy w równaniu nie występuje rezonans. Udowodniony zostanie wzór indeksowy oraz zweryfikowane zostaną odpowiednie warunki *a priori*, niezbędne do kontynuacji wzdłuż λ. Udowodnimy twierdzenie 1 i twierdzenie 2.

Rozdział 4 jest poświęcony kwestii istnienia T- okresowych rozwiązań nieautonomicznych równań parabolicznych z rezonansem. Udowodniona zostanie odpowiednia wersja zasady uśredniania oraz wykazane twierdzenie 3 i twierdzenie 4.

Rozdział 5 stanowi dodatek, który w zwarty sposób prezentuje znane wyniki wykorzystywane w pracy.

Podziękowania

W tym miejscu chciałabym serdeczanie podziękować Promotorowi pracy - **dr hab. Aleksandrowi Ćwiszewskiemu** za cenne dyskusje naukowe i uwagi merytoryczne, za poświęcony czas, jak również za naukę wytrwałości i przezwyciężania problemów na drodze do osiągnięcia zamierzonych celów.

Chciałabym również podziękować moim **Rodzicom**, za niezachwianą wiarę we mnie oraz za to, że zawsze byli moim wzorem i siłą.

Toruń, maj 2016 r. *Renata Łukasiak*

Oznaczenia

$\\|\cdot\\|_X$	norma przestrzeni X
$\mathbb{N}$	zbiór liczb naturalnych
$\mathbb{Z}$	zbiór liczb całkowitych
$\mathbb{R}^N$	N-wymiarowa przestrzeń euklidesowa
$\mathbb{C}$	ciało liczb zespolonych
$\|z\|$	moduł liczby zespolonej z
$\mathrm{Re}\, z$	część rzeczywista liczby zespolonej z
$\mathrm{Im}\, z$	część urojona liczby zespolonej z
$\mathrm{Arg}(z)$	argument główny liczby zespolonej z
$B(x,r)$	kula otwarta w $\mathbb{R}^N$ o środku w $x \in \mathbb{R}^N$ i promieniu $r > 0$
$B_X(x,r)$	kula otwarta w przestrzeni unormowanej X o środku w $x \in X$ i promieniu $r > 0$
$D_X(x,r)$	kula domknięta w przestrzeni unormowanej X o środku w $x \in X$ i promieniu $r > 0$
$Y^\perp$	dopełnienie ortogonalne podprzestrzeni $Y \subset X$ przestrzeni X z iloczynem skalarnym $(\cdot,\cdot)$, tzn. $$Y^\perp := \{x \in X \mid (x,y) = 0,\ y \in Y\}$$
$U \oplus V$	suma algebraiczna zbiorów $U \subset X_1$ oraz $V \subset X_2$, gdzie X_1 i X_2 są przestrzeniami liniowymi takimi, że $X_1 \cap X_2 = \{0\}$
$\overline{\mathrm{conv}}\, A$	uwypuklenie domknięte podzbioru $A \subset X$ przestrzeni unormowanej X, tj. $$\overline{\mathrm{conv}}\, A := \bigcap\{B \subset X \mid B \text{ jest zbiorem wypukłym oraz } A \subset B\}$$
$\beta_X(V)$	miara niezwartości Hausdorffa ograniczonego podzbioru $V \subset X$ przestrzeni Banacha X
$\mathcal{L}(X,Y)$	przestrzeń liniowa ciągłych operatorów liniowych określonych na przestrzeni Banacha X o wartościach w przestrzeni Banacha Y

$\mathcal{L}(X)$	$= \mathcal{L}(X, X)$
$\mathscr{C}(X, Y)$	zbiór domkniętych, gęsto określonych operatorów liniowych określonych na przestrzeni Banacha X o wartościach w przestrzeni Banacha Y
$D(A)$	dziedzina operatora liniowego A określonego w przestrzeni Banacha X o wartościach w X
$\mathrm{Ker}A$	jądro operatora liniowego A
$\mathrm{Im}A$	obraz operatora liniowego A
$\sigma(A)$	spektrum operatora A
$\sigma_{ess}(A)$	spektrum istotne operatora A
$\rho(A)$	zbiór rezolwenty operatora A
u_{x_i}	$= \frac{\partial u}{\partial x_i}$
∇u	$= (u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_N})^t$
Δu	$= \sum_{i=1}^{N} u_{x_i x_i}$
u_t	$= \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t}$
D^α	$= \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N}$ dla dowolnego multi-indeksu $\alpha \in \mathbb{N}^N$
supp u	$:= \overline{\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}}$
$C_c^\infty(\Omega)$	$= \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u$ jest gładka oraz supp u jest zwarty w $\Omega\}$, elementy przestrzeni $C_c^\infty(\Omega)$ nazywamy *funkcjami próbnymi*
$L^p(\Omega)$	$= \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u$ jest mierzalna w sensie Lebesgue'a, $\\|u\\|_{L^p} < +\infty\}$, gdzie $\\|u\\|_{L^\infty} := \big(\int_\Omega \|u\|^p \, \mathrm{d}x \big)^{1/p} \quad (1 \leq p < +\infty)$
$L^p_{loc}(\Omega)$	$= \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u$ jest mierzalna w sensie Lebesgue'a, $u_{\|K} \in L^p(K)$ dla dowolnego zwartego zbioru $K \subset \Omega\}$
$(\cdot, \cdot)_{L^2}$	standardowy iloczyn skalarny w $L^2(\Omega)$, tj. $(u, v)_{L^2} := \int_\Omega u(x) v(x) \, \mathrm{d}x$ dla $u, v \in L^2(\Omega)$
$L^\infty(\Omega)$	$= \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u$ jest mierzalna w sensie Lebesgue'a, $\\|u\\|_{L^\infty} < +\infty\}$, gdzie $\\|u\\|_{L^\infty} := \operatorname{ess\,sup}_\Omega \|u\|$
$W^{m,p}(\Omega)$	przestrzeń Sobolewa składająca się ze wszystkich funkcji lokalnie całkowalnych $u : \Omega \to \mathbb{R}$ takich, że dla każdego multi-indeksu α długości $\|\alpha\| \leq m$, pochodna $D^\alpha u$ istnieje w słabym sensie i należy do $L^p(\Omega)$, wyposażona w normę $\\|u\\|_{W^{m,p}} := \sum_{\|\alpha\| \leq m} \\|D^\alpha u\\|_{L^p}$
$H^m(\Omega)$	$= W^{m,2}(\Omega)$
$C^k(\Omega)$	dla liczby całkowitej $0 \leq k \leq \infty$, przestrzeń funkcji $u : \Omega \to \mathbb{R}$, dla których ciągłe są pochodne $D^\alpha u$, gdzie $\|\alpha\| \leq k$
dla p.w.	dla prawie wszystkich
$x_n \to x$	normowa zbieżność ciągu (x_n) do x

$\overline{A}$	domknięcie zbioru A zawartego w przestrzeni topologicznej X
∂A	brzeg zbioru A zawartego w przestrzeni topologicznej X
Deg_B	stopień topologiczny Brouwera
Ind_{LS}	indeks Leray-Schaudera punktów stałych dla klasy odwzorowań zwartych
Ind_{uc}	indeks punktów stałych dla klasy odwzorowań ostatecznie zwartych

Rozdział 1

Zagadnienia początkowe i zasada uśredniania

Omówione zostaną klasyczne wyniki (patrz np. [14], [42], [56], [66]) dotyczące kwestii istnienia i jednoznaczności rozwiązań abstrakcyjnych równań ewolucyjnych, których prawa strona jest nieliniowym zaburzeniem operatora sektorialnego. Wprowadzone zostaną definicje rozwiązania i łagodnego rozwiązania (z ang. *mild solution*) oraz omówiona zostanie kwestia ich regularności. Następnie zbadana będzie ciągła zależność od warunków początkowych i parametrów oraz udowodniona abstrakcyjna zasada uśredniania. Na zakończenie rozdziału zastosujemy wspomniane wyniki do omówienia istnienia, jednoznaczności oraz ciągłości rozwiązań dla parabolicznego równania różniczkowego cząstkowego

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(x,t) + f(t,x,u(x,t)),\ \ x \in \mathbb{R}^N, t > 0.$$

1.1 Istnienie i jednoznaczność rozwiązań

Niech $A : X \supset D(A) \to X$ będzie operatorem sektorialnym (patrz Dodatek 5.7, str. 114) w przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$ oraz niech $\delta > 0$ będzie liczbą rzeczywistą taką, że

$$\sigma(A + \delta I) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}. \tag{1.1}$$

Wówczas wiadomo[1], że dla dowolnego $\alpha \in [0,1)$, operator $A + \delta I$ wyznacza przestrzeń ułamkową X^α wraz z normą $\|\cdot\|_\alpha$ zadaną wzorem

$$\|x\|_\alpha = \|(A+\delta I)^\alpha x\| \ \text{ dla } x \in X^\alpha.$$

Rozważmy zagadnienie

$$\dot{u}(t) = -Au(t) + F(t, u(t)), \ t > 0, \tag{1.2}$$

z warunkiem początkowym

$$u(0) = \bar{u}_0, \tag{1.3}$$

gdzie $\bar{u}_0 \in X^\alpha$, zaś $F : [0, +\infty) \times X^\alpha \to X$ jest ciągłym odwzorowaniem spełniającym lokalny warunek Lipschitza

> dla dowolnego $(t, u) \in [0, +\infty) \times X^\alpha$ istnieje otwarte otoczenie $U \subset [0, +\infty) \times X^\alpha$ tego punktu oraz stałe $D, L \geq 0$ i $\theta \in (0,1)$ takie, że dla dowolnych $(t_1, u_1) \in U$ oraz $(t_2, u_2) \in U$
>
> $$\|F(t_1, u_1) - F(t_2, u_2)\| \leq D|t_1 - t_2|^\theta + L\|u_1 - u_2\|_\alpha. \tag{1.4}$$

Wyjaśnijmy najpierw, co rozumiemy przez rozwiązanie zagadnienia (1.2)-(1.3).

Definicja 1.1.1. *Powiemy, że odwzorowanie $u : [0, T) \to X^\alpha$, $T > 0$, jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego* (1.2)-(1.3), *jeśli*

$$u \in C([0,T), X^\alpha) \cap C((0,T), D(A)) \cap C^1((0,T), X),$$

$u(0) = \bar{u}_0$ oraz równość (1.2) *zachodzi dla $t \in (0, T)$.*

Następujące twierdzenie dotyczy lokalnego istnienia rozwiązań.

Twierdzenie 1.1.2. (patrz [14, Theorem 2.1.1]) *Jeżeli odwzorowanie $F : [0, +\infty) \times X^\alpha \to X$ spełnia założenie* (1.4), *to dla dowolnego $\bar{u}_0 \in X^\alpha$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $u : [0, T_{\bar{u}_0}) \to X^\alpha$ zagadnienia początkowego* (1.2)-(1.3) *takie, że albo $T_{\bar{u}_0} = +\infty$, albo $T_{\bar{u}_0} < +\infty$ oraz*

$$\limsup_{t \to T_{\bar{u}_0}^-} \|u(t)\|_\alpha = +\infty.$$

Uwaga 1.1.3. Jeżeli w powyższym twierdzeniu $T_{\bar{u}_0} = +\infty$, to mówimy, że u jest *globalnym rozwiązaniem* zagadnienia początkowego (1.2)-(1.3).

[1] patrz Dodatek, str. 117.

Załóżmy teraz dodatkowo, że F posiada subliniowy wzrost, tzn. spełniony jest warunek

istnieje stała $C \geq 0$ taka, że dla $t \geq 0$ oraz $u \in X^\alpha$

$$\|F(t,u)\| \leq C(1 + \|u\|_\alpha). \tag{1.5}$$

Twierdzenie 1.1.4. (patrz [14, Ch.3]) *Jeżeli odwzorowanie $F : [0,+\infty) \times X^\alpha \to X$ spełnia założenia* (1.4) *i* (1.5)*, to istnieje dokładnie jedno globalne rozwiązanie $u : [0,+\infty) \to X^\alpha$ zagadnienia* (1.2)-(1.3).

Definicja 1.1.5. *Powiemy, że ciągłe odwzorowanie $u : [0,T) \to X^\alpha$, $T > 0$, jest łagodnym rozwiązaniem (z ang. mild solution) zagadnienia* (1.2)-(1.3)*, jeśli*

$$u(t) = e^{-tA}\bar{u}_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A} F(s,u(s))\,\mathrm{d}s, \;\; t \in [0,T). \tag{1.6}$$

Równość całkowa (1.6) *nazywana jest formułą Duhamela.*

Twierdzenie 1.1.6. (patrz [42, Lemma 3.3.2]) *Niech $F : [0,+\infty) \times X^\alpha \to X$ będzie ciągłym odwzorowaniem spełniającym warunek* (1.4)*. Wówczas jeśli $u : [0,T) \to X^\alpha$, $T > 0$, jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego* (1.2)-(1.3)*, to u jest rozwiązaniem łagodnym tego zagadnienia.*

Na zakończenie tej sekcji sformułujemy fakt dotyczący ograniczoności rozwiązań.

Lemat 1.1.7. *Niech $F : [0,+\infty) \times X^\alpha \to X$ będzie ciągłym odwzorowaniem spełniającym warunek* (1.5)*. Załóżmy, że $u : [0,T] \to X^\alpha$, $T > 0$, jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego* (1.2)-(1.3)*. Wówczas istnieje stała $\tilde{M} > 0$, która zależy od $C, \delta, T, \alpha, C_0, C_\alpha$, gdzie $C_0, C_\alpha > 0$ są stałymi takimi jak w uwadze* 5.7.13 *(patrz Dodatek, str.* 118*) taka, że dla $t \in [0,T]$*

$$\|u(t)\|_\alpha \leq \tilde{M}(1 + \|\bar{u}_0\|_\alpha).$$

Dowód. Na mocy twierdzenia 1.1.6 wnosimy, że dla $t \in (0,T]$

$$\|u(t)\|_\alpha \leq \|e^{-tA}\bar{u}_0\|_\alpha + \int_0^t \|e^{-(t-s)A}F(s,u(s))\|_\alpha \,\mathrm{d}s,$$

co, razem z (1.5) implikuje, że dla $t \in (0,T]$

$$\|u(t)\|_\alpha \leq C_0 e^{\delta t}\|\bar{u}_0\|_\alpha + \int_0^t C_\alpha C (t-s)^{-\alpha} e^{\delta(t-s)}(1 + \|u(s)\|_\alpha)\,\mathrm{d}s,$$

gdzie $C_0, C_\alpha > 0$ są jak w uwadze 5.7.13. Zatem, korzystając z nierówności Volterry (patrz lemat 5.1.5) widzimy, że istnieje $\tilde{M} = \tilde{M}(C,\delta,T,\alpha,C_0,C_\alpha) > 0$ taka, że

$$\|u(t)\|_\alpha \leq \tilde{M}(1 + \|\bar{u}_0\|_\alpha) \quad \text{dla } t \in [0,T],$$

co kończy dowód. □

1.2 Ciągła zależność od warunków początkowych i parametru

Zajmiemy się teraz równaniami postaci

$$\dot{u}(t) = -A_n u(t) + F_n(t, u(t)), \qquad t \in (0, T], \tag{1.7}$$

w których, dla $n \geq 0$, $A_n := \mu_n A$, gdzie (μ_n) jest ciągiem liczb dodatnich takim, że $\mu_n \to \mu_0$, gdy $n \to +\infty$, dla pewnego $\mu_0 > 0$, operator $A : X \supset D(A) \to X$ jest taki jak w poprzednim podrozdziale oraz $F_n : [0, T] \times X^\alpha \to X$, $n \geq 0$, spełniają warunki (1.4) i (1.5) ze wspólnymi stałymi L i C (niezależnymi od n). Niech $\bar{u}_n$, $n \geq 0$, będą elementami X^α. Dla $n \geq 0$, oznaczmy przez $u_n : [0, T] \to X^\alpha$ rozwiązanie równania (1.7) z warunkiem początkowym $u_n(0) = \bar{u}_n$, które istnieje na mocy twierdzenia 1.1.4.

Przejdziemy teraz do sformułowania twierdzenia mówiącego o ciągłej zależności rozwiązań od parametru i warunków początkowych.

Twierdzenie 1.2.1. *Załóżmy, że dla dowolnego $u \in X^\alpha$*

$$\int_0^t F_n(s, u)\,\mathrm{d}s \to \int_0^t F_0(s, u)\,\mathrm{d}s \text{ w } X, \text{ gdy } n \to +\infty$$

jednostajnie względem $t \in [0, T]$. Wówczas

(i) jeśli $\bar{u}_n \to \bar{u}_0$ w X, gdy $n \to +\infty$ i $(\bar{u}_n)$ jest ograniczony w X^α, to $u_n(t) \to u_0(t)$ w X^α, gdy $n \to +\infty$, jednostajnie względem t ze zwartych podzbiorów $(0, T]$;

(ii) jeśli $\bar{u}_n \to \bar{u}_0$ w X^α, gdy $n \to +\infty$, to $u_n(t) \to u_0(t)$ w X^α, gdy $n \to +\infty$, jednostajnie względem $t \in [0, T]$.

Uwaga 1.2.2. Rezultat z punktu (ii) - w przypadku, gdy $\mu_n \equiv 1$ dla $n \geq 0$, otrzymał Henry (patrz [42, Theorem 3.4.8]). Dowód twierdzenia 1.2.1 jest modyfikacją rozumowania Henry'ego.

W dowodzie powyższego twierdzenia wykorzystamy następujący lemat.

Lemat 1.2.3. (patrz [42, Lemma 3.4.7])
Przy założeniach twierdzenia 1.2.1*, dla dowolnej ciągłej funkcji $u : [0, T] \to X^\alpha$,*

$$\int_0^t e^{-(t-s)A_n} F_n(s, u(s))\,\mathrm{d}s \to \int_0^t e^{-(t-s)A_0} F_0(s, u(s))\,\mathrm{d}s \quad w\ X^\alpha, \text{ gdy } \ n \to +\infty, \tag{1.8}$$

jednostajnie względem $t \in [0, T]$.

Dowód. Udowodnimy najpierw, że teza zachodzi przy założeniu, że u jest funkcją stałą, tzn. $u(t) \equiv \bar{u}$ dla $t \in [0,T]$, gdzie $\bar{u} \in X^\alpha$. Z założenia o funkcjach F_n, $n \geq 0$ wynika, że dla dowolnych $t \in [0,T]$ i $n \geq 0$,

$$\left\| \int_0^t e^{-(t-s)A_n} F_n(s,\bar{u})\,\mathrm{d}s \right\|_\alpha \leq \int_0^t C_\alpha \mu_n^{-\alpha}(t-s)^{-\alpha} e^{\mu_n \delta(t-s)} C(1+\|\bar{u}\|_\alpha)\,\mathrm{d}s,$$

gdzie $C_\alpha > 0$ jest pewną stałą (patrz uwaga 5.7.13). Weźmy $\varepsilon > 0$. Wówczas istnieją $\eta > 0$, $\tilde{C} > 0$ oraz $\tilde{\delta} > 0$ takie, że dla dowolnych $n \geq 0$ i $t \in [0,\eta]$

$$\left\| \int_0^t e^{-(t-s)A_n} F_n(s,\bar{u})\,\mathrm{d}s \right\|_\alpha \leq \tilde{C} \int_0^t \tau^{-\alpha} e^{\tilde{\delta}\tau}\,\mathrm{d}\tau \leq \tilde{C} e^{\tilde{\delta}T}(1-\alpha)^{-1}\eta^{1-\alpha} < \varepsilon/4 \quad (1.9)$$

oraz, dla dowolnych $n \geq 0$ i $t \in [\eta, T]$,

$$\left\| \int_{t-\eta}^t e^{-(t-s)A_n} F_n(s,\bar{u})\,\mathrm{d}s \right\|_\alpha \leq \tilde{C} \int_0^\eta \tau^{-\alpha} e^{\tilde{\delta}\tau}\,\mathrm{d}\tau \leq \tilde{C} e^{\tilde{\delta}T}(1-\alpha)^{-1}\eta^{1-\alpha} < \varepsilon/4. \quad (1.10)$$

Zauważmy dalej, że dla dowolnych $n \geq 0$ i $t \in [\eta, T]$ mamy[1],

$$\begin{aligned}\int_0^{t-\eta} e^{-(t-s)A_n} F_n(s,\bar{u})\,\mathrm{d}s = e^{-tA_n} \int_0^t F_n(\tau,\bar{u})\,\mathrm{d}\tau - e^{-\eta A_n} \int_{t-\eta}^t F_n(\tau,\bar{u})\,\mathrm{d}\tau \\ + \int_0^{t-\eta} A_n e^{-(t-s)A_n} \int_s^t F_n(\tau,\bar{u})\,\mathrm{d}\tau\ \mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Z założenia wynika, że

$$e^{-tA_n} \int_0^t F_n(\tau,\bar{u})\,\mathrm{d}\tau \to e^{-tA_0} \int_0^t F_0(\tau,\bar{u})\,\mathrm{d}\tau \quad \text{w } X^\alpha, \text{ gdy } n \to +\infty,$$

jednostajnie względem $t \in [\eta, T]$. Co więcej, dla wszystkich $t \in [\eta, T]$ i $n \geq 1$,

$$\left\| e^{-\eta A_n} \int_{t-\eta}^t F_n(\tau,\bar{u})\,\mathrm{d}\tau \right\|_\alpha \leq \tilde{C} e^{\tilde{\delta}T} \eta^{1-\alpha} \leq \varepsilon/4$$

---

[1] Jeżeli $A : X \supset D(A) \to X$ jest operatorem sektorialnym i $\eta \in (0,T)$, $T > 0$, to dla dowolnej funkcji ciągłej $g : [0,T] \to X$ i $t \in [\eta, T]$, zachodzi równość

$$\int_0^{t-\eta} e^{-(t-s)A} g(s)\,\mathrm{d}s = e^{-tA} \int_0^t g(\tau)\,\mathrm{d}\tau - e^{-\eta A} \int_{t-\eta}^t g(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_0^{t-\eta} A e^{-(t-s)A} \int_s^t g(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}s. \quad (*)$$

Istotnie, ze wzoru na całkowanie przez części wynika, że

$$e^{-(t-s)A} \int_s^t g(\tau)\,\mathrm{d}\tau \Big|_{s=0}^{s=t-\eta} = \int_0^{t-\eta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(e^{-(t-s)A}\right) \int_s^t g(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}s + \int_0^{t-\eta} e^{-(t-s)A} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\int_s^t g(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s.$$

Stąd oraz twierdzenia 5.6.4 dostajemy dla $t \in [\eta, T]$

$$e^{-\eta A} \int_{t-\eta}^t g(\tau)\,\mathrm{d}\tau - e^{-tA} \int_0^t g(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^{t-\eta} A e^{-(t-s)A} \int_s^t g(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}s - \int_0^{t-\eta} e^{-(t-s)A} g(s)\,\mathrm{d}s,$$

co dowodzi (*).

oraz, dla dużych n i wszystkich $t \in [\eta, T]$ i $s \in [0, t-\eta]$, mamy

$$\begin{aligned}
&\left\| A_n e^{-(t-s)A_n} \int_s^t F_n(\tau,\bar{u})\,\mathrm{d}\tau - A_0 e^{-(t-s)A_0} \int_s^t F_0(\tau,\bar{u})\,\mathrm{d}\tau \right\|_\alpha \\
&\le |\mu_n - \mu_0| \left\| A e^{-(t-s)A_n} \int_s^t F_n(\tau,\bar{u})\,\mathrm{d}\tau \right\|_\alpha \\
&\quad + \mu_0 \left\| A e^{-(t-s)A_n} \int_s^t F_n(\tau,\bar{u})\,\mathrm{d}\tau - A e^{-(t-s)A_0} \int_s^t F_0(\tau,\bar{u})\,\mathrm{d}\tau \right\|_\alpha \\
&\le \bar{C} |\mu_n - \mu_0| \left\| e^{-(t-s)A_n} \int_s^t F_n(\tau,\bar{u})\,\mathrm{d}\tau \right\|_{1+\alpha} \\
&\quad + \bar{C}\mu_0 \left\| e^{-(t-s)A_n} \left(\int_s^t F_n(\tau,\bar{u})\,\mathrm{d}\tau - \int_s^t F_0(\tau,\bar{u})\,\mathrm{d}\tau \right) \right\|_{1+\alpha} \\
&\quad + \bar{C}\mu_0 \left\| \left(e^{-(t-s)A_n} - e^{-(t-s)A_0} \right) \int_s^t F_0(\tau,\bar{u})\,\mathrm{d}\tau \right\|_{1+\alpha} \\
&\le |\mu_n - \mu_0| \frac{\bar{C} C_{1+\alpha} e^{\tilde{\delta}T}}{\eta^{1+\alpha}} \left\| \int_s^t F_n(\tau,\bar{u})\,\mathrm{d}\tau \right\| \\
&\quad + \mu_0 \frac{\bar{C} C_{1+\alpha} e^{\tilde{\delta}T}}{\eta^{1+\alpha}} \left\| \int_s^t F_n(\tau,\bar{u})\,\mathrm{d}\tau - \int_s^t F_0(\tau,\bar{u})\,\mathrm{d}\tau \right\| \\
&\quad + \mu_0 \frac{\bar{C} C_{1+\alpha} e^{\tilde{\delta}T}}{(\mu_0\eta/2)^{1+\alpha}} \left\| \left(e^{-((t-s)\mu_n/\mu_0 - \eta/2)A_0} - e^{-(t-s-\eta/2)A_0} \right) \int_s^t F_0(\tau,\bar{u})\,\mathrm{d}\tau \right\|,
\end{aligned}$$

gdzie stała $\bar{C} > 0$ jest taka, że $\|Aw\|_\alpha \le \bar{C}\|w\|_{1+\alpha}$ dla wszystkich $w \in X^{1+\alpha}$ [1]. Stąd wynika, że dla dużych n i wszystkich $t \in [\eta, T]$,

$$\left\| \int_0^{t-\eta} e^{-(t-s)A_n} F_n(s,\bar{u})\,\mathrm{d}s - \int_0^{t-\eta} e^{-(t-s)A_0} F_0(s,\bar{u})\,\mathrm{d}s \right\|_\alpha \le \varepsilon/4 + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = 3\varepsilon/4,$$

co razem z (1.9) i (1.10) dowodzi tezy dla $u \equiv \bar{u}$. Zatem, stąd wnioskujemy, że zbieżność (1.8) zachodzi dla dowolnej funkcji schodkowej $\tilde{u} : [0,T] \to X^\alpha$. Ponieważ dla dowolnej funkcji ciągłej $u : [0,T] \to X^\alpha$ istnieje ciąg funkcji schodkowych $(\tilde{u}_m)$ taki, że $\|u(t) - \tilde{u}_m(t)\|_\alpha \to 0$, gdy $m \to +\infty$, jednostajnie względem $t \in [0,T]$ i co więcej, dla dowolnego $n \ge 0$

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^t e^{-(t-s)A_n} (F_n(s,\tilde{u}_m(s)) - F_n(s,u(s)))\,\mathrm{d}s \right\|_\alpha \\
&\qquad \le \int_0^t L C_\alpha \mu_n^{-\alpha} (t-s)^{-\alpha} e^{\delta(t-s)} \|\tilde{u}_m(s) - u(s)\|_\alpha\,\mathrm{d}s \to 0, \text{ gdy } m \to +\infty,
\end{aligned}$$

---

[1] Zauważmy, że dla dowolnego $x \in X^{1+\alpha}$ mamy

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_\alpha &= \|(A+\delta I)^\alpha (Ax)\| \le \|(A+\delta I)^{1+\alpha} x\| + \delta \|(A+\delta I)^\alpha x\| \\
&\le \|x\|_{1+\alpha} + \delta\|x\|_\alpha \le \|x\|_{1+\alpha} + \delta \bar{C}_1 \|x\|_{1+\alpha},
\end{aligned}$$

gdzie $\bar{C}_1 > 0$ jest stałą taką, że $\|x\|_\alpha \le \bar{C}_1 \|x\|_{1+\alpha}$, $x \in X^{1+\alpha}$. Oczywiście z powyższej równości wynika istnienie stałej $\bar{C} > 0$ takiej, że dla dowolnego $x \in X^\alpha$ zachodzi $\|Ax\|_\alpha \le \bar{C}\|x\|_{1+\alpha}$.

jednostajnie względem $t \in [0,T]$, więc to kończy dowód. $\square$

Dowód twierdzenia 1.2.1.
Korzystając z twierdzenia 1.1.6, dla $t \in (0,T]$ oraz $n \geq 1$ mamy

$$\begin{aligned} u_n(t)-u_0(t) &= e^{-tA_n}\bar{u}_n - e^{-tA_0}\bar{u}_0 \\ &\quad + \int_0^t e^{-(t-s)A_n}F_n(s,u_0(s)) - e^{-(t-s)A_0}F_0(s,u_0(s))\,\mathrm{d}s \\ &\quad + \int_0^t e^{-(t-s)A_n}(F_n(s,u_n(s)) - F_n(s,u_0(s)))\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Załóżmy najpierw, że spełnione jest założenie z punktu (i). Wówczas, z powyższej równości oraz założeń o funkcjach F_n, $n \geq 0$, wynika, że dla wszystkich $t \in (0,T]$ i $n \geq 1$ mamy

$$\|u_n(t) - u_0(t)\|_\alpha \leq \gamma_n(t) + C_\alpha L \int_0^t e^{\delta\mu_n(t-s)}(\mu_n(t-s))^{-\alpha}\|u_n(s) - u_0(s)\|_\alpha\,\mathrm{d}s,$$

gdzie

$$\begin{aligned} \gamma_n(t) :=& \frac{C_\alpha e^{\delta\mu_n t}}{(\mu_n t)^\alpha}\|\bar{u}_n - \bar{u}_0\| + \left\|(e^{-tA_n} - e^{-tA_0})\bar{u}_0\right\|_\alpha \\ &+ \left\|\int_0^t \left(e^{-(t-s)A_n}F_n(s,u_0(s)) - e^{-(t-s)A_0}F_0(s,u_0(s))\right)\mathrm{d}s\right\|_\alpha \end{aligned}$$

oraz stała $C_\alpha > 0$ jest taka, jak w uwadze 5.7.13 (patrz Dodatek), zaś $L > 0$ jest stałą z warunku (1.4). Stąd wnosimy, że istnieją stałe $\tilde{\delta} > 0$ oraz $\tilde{C} > 0$ takie, że dla wszystkich $t \in (0,T]$ i $n \geq 1$,

$$\|u_n(t) - u_0(t)\|_\alpha \leq \gamma_n(t) + \tilde{C}\int_0^t e^{\tilde{\delta}(t-s)}(t-s)^{-\alpha}\|u_n(s) - u_0(s)\|_\alpha\,\mathrm{d}s.$$

Zatem, na mocy lematu 5.1.6[1], dostajemy

$$\|u_n(t) - u_0(t)\|_\alpha \leq \gamma_n(t) + K\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\gamma_n(s)\,\mathrm{d}s \tag{1.11}$$

dla pewnej stałej $K > 0$. Ustalmy $\eta \in (0,T)$. Wówczas dla $t \in [\eta,T]$ mamy

$$\begin{aligned} \int_0^t (t-s)^{-\alpha}\gamma_n(s)\,\mathrm{d}s &\leq \frac{2^\alpha}{\eta^\alpha}\int_0^{t-\eta/2}\gamma_n(s)\,\mathrm{d}s + \int_{t-\eta/2}^t (t-s)^{-\alpha}\gamma_n(s)\,\mathrm{d}s \\ &\leq \frac{2^\alpha}{\eta^\alpha}\int_0^T \gamma_n(s)\,\mathrm{d}s + \frac{(\eta/2)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\cdot\sup_{s\in[\eta/2,T]}\gamma_n(s). \end{aligned}$$

[1] W lemacie 5.1.6 wystarczy przyjąć $y(t) := \|u_n(t) - u_0(t)\|_\alpha$, $\beta := 1-\alpha$, $a(t) := \gamma_n(t)$ i $b := \tilde{C}e^{\tilde{\delta}T}$.

Z lematu 1.2.3 wnioskujemy, że $\gamma_n(t) \to 0$, gdy $n \to +\infty$, jednostajnie względem t należących do zwartych podzbiorów przedziału $(0, T]$. Co więcej, z (1.5) wynika, że

$$\gamma_n(t) \le C_1\left(t^{-\alpha}\|\bar{u}_n - \bar{u}_0\| + t^{-\alpha}\|\bar{u}_0\| + \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\sup_{s\in[0,T]}(1 + \|u_0(s)\|_\alpha)\right),$$

gdzie $C_1 > 0$ jest pewną stałą, a więc funkcje γ_n, $n \ge 1$, są ograniczone przez całkowalną funkcję postaci $t \mapsto \tilde{C}_1(t^{-\alpha} + t^{1-\alpha})$ dla pewnej stałej $\tilde{C}_1 > 0$. Zatem, na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zmajoryzowanym przejściu do granicy pod znakiem całki (patrz Dodatek, twierdzenie 5.2.2) wnioskujemy, że $\int_0^T \gamma_n(s)ds \to 0$, gdy $n \to +\infty$. W konsekwencji, na mocy (1.11) stwierdzamy, że $\|u_n(t) - u_0(t)\|_\alpha \to 0$, gdy $n \to +\infty$, jednostajnie względem $t \in [\eta, T]$. To kończy dowód (i).

Przypuśćmy teraz, że $\bar{u}_n \to \bar{u}_0$ w X^α, gdy $n \to +\infty$. Wówczas, dla wszystkich $t \in (0, T]$ i $n \ge 1$,

$$\|u_n(t) - u_0(t)\|_\alpha \le \gamma_n(t) + C_\alpha L\int_0^t e^{\delta\mu_n(t-s)}(\mu_n(t-s))^{-\alpha}\|u_n(s) - u_0(s)\|_\alpha\,\mathrm{d}s,$$

gdzie

$$\begin{aligned}\gamma_n(t) :=& C_0\|\bar{u}_n - \bar{u}_0\|_\alpha + \left\|(e^{-tA_n} - e^{-tA_0})\bar{u}_0\right\|_\alpha \\ &+ \left\|\int_0^t \left(e^{-(t-s)A_n}F_n(s, u_0(s)) - e^{-(t-s)A_0}F_0(s, u_0(s))\right)\mathrm{d}s\right\|_\alpha\end{aligned}$$

dla pewnej stałej $C_0 > 0$. Powtarzając argumentację z dowodu (i) stwierdzamy, że $\|u_n(t) - u_0(t)\|_\alpha \to 0$, gdy $n \to +\infty$, jednostajnie względem t. To kończy dowód. □

1.3 Zasada uśredniania

Niech dana będzie rodzina zagadnień

$$\dot{u}(t) = -Au(t) + F_n(t/\lambda_n, u(t)),\ t > 0, \tag{1.12}$$

gdzie operator $A : X \supset D(A) \to X$ jest jak w poprzednim podrozdziale, $\lambda_n > 0$, $n \ge 1$, są parametrami zaś odwzorowania $F_n : [0, +\infty) \times X^\alpha \to X$, $n \ge 1$, spełniają założenia (1.4) i (1.5) ze wspólnymi stałymi L i C (niezależnymi od n). Załóżmy ponadto, że istnieje ciągła funkcja $\widehat{F} : X^\alpha \to X$ taka, że dla wszystkich $\bar{u} \in X^\alpha$

$$\lim_{\tau\to+\infty,\ n\to+\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau F_n(t, \bar{u})\,\mathrm{d}t = \widehat{F}(\bar{u}) \quad \text{w} \quad X. \tag{1.13}$$

Na mocy twierdzenia 1.1.4 wnosimy, że dla każdego $n \ge 1$, istnieje dokładnie jedno globalne rozwiązanie $u_n : [0, +\infty) \to X^\alpha$ problemu (1.12) z warunkiem początkowym $u_n(0) = \bar{u}_n$, gdzie $\bar{u}_n \in X^\alpha$. Rozważmy dalej autonomiczne równanie

$$\dot{u}(t) = -Au(t) + \widehat{F}(u(t)),\ t > 0. \tag{1.14}$$

Z określenia funkcji $\widehat{F}$ oraz założeń o funkcjach F_n, $n \geq 1$, wynika, że $\widehat{F}$ spełnia warunki (1.4) i (1.5) (również ze stałymi L i C). Widzimy zatem, że na mocy twierdzenia 1.1.4, równanie (1.14) z warunkiem początkowym $u(0) = \bar{u}_0$ dla dowolnego $\bar{u}_0 \in X^\alpha$, posiada dokładnie jedno globalne rozwiązanie.

Twierdzenie 1.3.1. (Zasada uśredniania) *Przypuśćmy, że funkcje $F_n : [0, +\infty) \times X^\alpha \to X$, $n \geq 1$ i $\widehat{F} : X^\alpha \to X$ są jak powyżej oraz załóżmy, że $\bar{u}_n \to \bar{u}_0$ w X, gdy $n \to +\infty$ dla pewnego $\bar{u}_0 \in X^\alpha$, $(\bar{u}_n)$ jest ograniczony w X^α oraz $\lambda_n \to 0^+$, gdy $n \to +\infty$. Wówczas $u_n(t) \to \widehat{u}(t)$ w X^α, jednostajnie względem t należących do zwartych podzbiorów $(0, +\infty)$, gdzie $\widehat{u} : [0, +\infty) \to X^\alpha$ jest rozwiązaniem równania (1.14) z warunkiem początkowym $u(0) = \bar{u}_0$.*

Dowód. Dla $n \geq 1$ określmy $\tilde{F}_n := F_n(\cdot/\lambda_n, \cdot)$ oraz połóżmy $\tilde{F}_0 := \widehat{F}$. Oczywiście funkcje $\tilde{F}_n$, $n \geq 1$, oraz $\tilde{F}_0$ spełniają warunki (1.4) i (1.5) ze wspólnymi stałymi L i C. Korzystając z (1.13), otrzymujemy dla dowolnych $\bar{u} \in X^\alpha$ i $t > 0$,

$$\int_0^t \tilde{F}_n(s, \bar{u})\,\mathrm{d}s = \lambda_n \int_0^{t/\lambda_n} F_n(\rho, \bar{u})\,\mathrm{d}\rho \to t\widehat{F}(\bar{u}) = \int_0^t \tilde{F}_0(\bar{u})\,\mathrm{d}s \quad \text{w } X, \text{ gdy } n \to +\infty$$

i powyższa zbieżność jest jednostajna względem t należących do zwartych podzbiorów $[0, +\infty)$. Zatem, na mocy twierdzenia 1.2.1 (i), otrzymujemy tezę. □

Uwaga 1.3.2. (a) Twierdzenie 1.3.1 jest rozszerzeniem zasady uśredniania otrzymanej przez Henry'ego (patrz [42, Theorem 3.4.9]) na przypadek, gdy ciąg wartości początkowych z przestrzeni ułamkowej X^α jest zbieżny względem topologii przestrzeni X (a nie X^α). Jest to istotne z punktu widzenia dalszej części rozprawy.

(b) Zasada uśredniania dla równań parabolicznych na $\mathbb{R}^N$ została udowodniona w pracach [4] (patrz Theorem 4.4) oraz [58] (patrz Theorem 2.4) w sytuacji, gdy współczynniki liniowego operatora eliptycznego są zależne od czasu. Powyższe twierdzenie 1.3.1 dotyczy ogólnego przypadku abstrakcyjnych równań parabolicznych.

1.4 Ciągłość i uśrednianie dla równań parabolicznych

Rozważmy nieautonomiczne równanie paraboliczne

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \mathcal{A}u(x,t) + f\left(t, x, u(x,t)\right), \ x \in \mathbb{R}^N, \ t > 0, \\ u(x,0) = \bar{u}(x), \ x \in \mathbb{R}^N, \\ u(\cdot, t) \in H^1(\mathbb{R}^N), \ t > 0, \end{cases} \tag{1.15}$$

gdzie $\mathcal{A} := \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}$, rzeczywiste współczynniki a_{ij} są takie, że $a_{ij} = a_{ji}$ dla $i, j = 1, \ldots, N$ oraz spełniony jest *warunek eliptyczności*, tzn. istnieje stała $\theta_0 > 0$ o tej własności, że

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \theta_0 |\xi|^2 \text{ dla } \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N, \tag{1.16}$$

zaś $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest T-okresowym odwzorowaniem, tzn.

$$f(t, x, u) = f(t + T, x, u) \text{ dla } t \geq 0, \ u \in \mathbb{R} \text{ i } x \in \mathbb{R}^N, \tag{1.17}$$

spełniającym dla wszystkich $t, s \in [0, +\infty)$, $u, v \in \mathbb{R}$ oraz p.w. $x \in \mathbb{R}^N$ następujące warunki

$$f(t, \cdot, u) \text{ jest mierzalna oraz } |f(t, x, 0)| \leq m_0(x), \tag{1.18}$$

gdzie $m_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$;

$$|f(t, x, u) - f(s, x, v)| \leq (\tilde{k}(x) + k(x)|u|)|t - s|^\theta + l(s, x)|u - v|, \tag{1.19}$$

gdzie $\theta \in (0, 1)$, $\tilde{k} \in L^2(\mathbb{R}^N)$, zaś k i l są postaci $k = k_0 + k_\infty$, $l = l_0 + l_\infty$, przy czym, dla $t \geq 0$, $k_0, l_0(t, \cdot) \in L^p(\mathbb{R}^N)$, ($p$ jest jak w (3) - patrz str. 5), $k_\infty, l_\infty(t, \cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ oraz $\sup_{t \geq 0} \left(\|l_0(t, \cdot)\|_{L^p} + \|l_\infty(t, \cdot)\|_{L^\infty}\right) < +\infty$;

$$(f(t, x, u) - f(t, x, v))(u - v) \leq -a|u - v|^2 + b(x)|u - v|^2, \tag{1.20}$$

dla pewnych $a > 0$ i $b \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

Przykład 1.4.1. Rozważmy odwzorowanie $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ postaci

$$f(t, x, u) := U(t, x) + V(t, x)u + g(W(t, x)u) \tag{1.21}$$

gdzie funkcje $U, V, W \in C([0, +\infty) \times \mathbb{R}^N)$ są takie, że dla wszystkich $t \geq 0$, $|U(t, \cdot)| \leq M_0$ dla pewnego $M_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $V = V_0 + V_\infty$, $W = W_0 + W_\infty$, przy czym $V_0(t,\cdot), W_0(t,\cdot) \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $V_\infty(t,\cdot), W_\infty(t,\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\sup_{\tau\geq 0}(\|V_0(\tau,\cdot)\|_{L^p} + \|V_\infty(\tau,\cdot)\|_{L^\infty}) < +\infty$, $\sup_{\tau\geq 0}(\|W_0(\tau,\cdot)\|_{L^p} + \|W_\infty(\tau,\cdot)\|_{L^\infty}) < +\infty$ oraz dla wszystkich $t, s \geq 0$ i p.w. $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned}|U(t,x) - U(s,x)| &\leq L_U(x)|t-s|^\theta,\\ |V(t,x) - V(s,x)| &\leq L_V(x)|t-s|^\theta\\ |W(t,x) - W(s,x)| &\leq L_W(x)|t-s|^\theta,\end{aligned}$$

dla pewnych $L_U \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $L_V, L_W \in L^p(\mathbb{R}^N) + L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Co więcej, przypuśćmy, że $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest odwzorowaniem ograniczonym, spełniającym warunek Lipschitza ze stałą $L > 0$ oraz takim, że $g(0) = 0$ i $g'(0)$ istnieje. Przy powyższych założeniach (1.21) dostarcza przykładu klasy odwzorowań dla których zachodzą warunki (1.18) i (1.19).

Istotnie, z określenia funkcji f wynika, że dla wszystkich $t \geq 0$, $u \in \mathbb{R}$ i p.w. $x \in \mathbb{R}^N$, $f(t,\cdot,u)$ jest funkcją mierzalną oraz

$$|f(t,x,0)| = |U(t,x)| \leq M_0(x),$$

tzn. spełniony jest warunek (1.18). Co więcej, dla dowolnych $t, s \geq 0$, $u, v \in \mathbb{R}$ i p.w. $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned}|f(t,x,u) - f(s,x,v)| \leq &\Big(L_U(x) + \big(L_V(x) + LL_W(x)\big)|u|\Big)|t-s|^\theta\\ &+ \big(|V(s,x)| + L|W(s,x)|\big)|u-v|,\end{aligned}$$

a stąd widzimy, że zachodzi (1.19). Jeżeli dodatkowo istnieje liczba $a > 0$ taka, że

$$V_\infty(t,x) + L|W_\infty(t,x)| \leq -a \tag{1.22}$$

dla wszystkich $t \geq 0$ i p.w. $x \in \mathbb{R}^N$, to spełniony jest warunek (1.20). Istotnie, dla $t \geq 0$, $u, v \in \mathbb{R}$ i p.w. $x \in \mathbb{R}^N$, mamy

$$\begin{aligned}(f(t,x,u) - f(t,x,v))(u-v) &\leq V(t,x)|u-v|^2 + L|W(t,x)||u-v|^2\\ &\leq \big(V_\infty(t,x) + L|W_\infty(t,x)|\big)|u-v|^2\\ &\quad+ \big(V_0(t,x) + L|W_0(t,x)|\big)|u-v|^2,\end{aligned}$$

a stąd widzimy, że jeśli tylko zachodzi (1.22), to f spełnia (1.20). Jako konkretny przykład rozważmy funkcję $f : [0,+\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$f(t,x,u) := -2au + \sin\left(au + bu(1+|x|)^{-s}|\cos t|\right),$$

gdzie $a, b > 0$ i $s > 1$ dla $N = 1, 2$ oraz $s > N/p$ dla $N \geq 3$. Wówczas tak zadana funkcja spełnia, poza oczywiście warunkami (1.17)-(1.20), również założenia (7) i (8) (patrz str. 9). W tym przypadku, $\alpha_0(t, x) = b(1 + |x|)^{-s}|\cos t|$, $\alpha_\infty \equiv a$, $\omega_0 \equiv 0$, $\omega_\infty \equiv 2a$.

Zajmiemy się teraz problemem istnienia rozwiązań równania (1.15). W tym celu określmy liniowy operator $\mathbf{A} : X \supset D(\mathbf{A}) \to X$, $X := L^2(\mathbb{R}^N)$, kładąc

$$\mathbf{A}u := -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \text{ dla } u \in D(\mathbf{A}) := H^2(\mathbb{R}^N). \tag{1.23}$$

Twierdzenie 1.4.2. (patrz [56, Theorem 7.3.5]) *Liniowy operator* $\mathbf{A} : D(\mathbf{A}) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ *zadany formułą* (1.23) *jest dodatnim, samosprzężonym operatorem sektorialym.*

Uwaga 1.4.3. (i) Dla operatora $\mathbf{A} : D(\mathbf{A}) \to X$, $X := L^2(\mathbb{R}^N)$ określonego powyżej, mamy $X^{1/2} = H^1(\mathbb{R}^N)$ oraz zachodzi równoważność norm $\|\cdot\|_{X^{1/2}}$ i $\|\cdot\|_{H^1}$. Istotnie, zauważmy, że dla dowolnego $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$

$$\begin{aligned} \|u\|_{X^{1/2}}^2 &= \|\mathbf{A}^{1/2}u\|_{L^2}^2 = (\mathbf{A}^{1/2}u, \mathbf{A}^{1/2}u)_{L^2} = (\mathbf{A}u, u)_{L^2} \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} u \, \mathrm{d}x \leq MN^2 \|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq MN^2 \|u\|_{H^1}^2, \end{aligned} \tag{1.24}$$

gdzie $M := \max_{i,j=1,\dots,N} |a_{ij}|$. Z drugiej strony, na mocy eliptyczności operatora $\mathbf{A}$, dla dowolnego $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$

$$\|u\|_{X^{1/2}}^2 \geq \theta_0 \|\nabla u\|_{L^2}^2,$$

czyli, dla pewnej stałej $\tilde{\theta}_0 > 0$,

$$\|u\|_{X^{1/2}}^2 \geq \tilde{\theta}_0 \|u\|_{H^1}^2. \tag{1.25}$$

Łącząc (1.24) i (1.25) dostajemy dla dowolnego $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$

$$\tilde{\theta}_0 \|u\|_{H^1}^2 \leq \|u\|_{X^{1/2}}^2 \leq MN^2 \|u\|_{H^1}^2. \tag{1.26}$$

Pokażemy najpierw, że $H^1(\mathbb{R}^N) \subset X^{1/2}$. Niech $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Z gęstości $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ w $H^1(\mathbb{R}^N)$ wnosimy, że istnieje ciąg (u_n) w $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ taki, że $u_n \to u$ w $H^1(\mathbb{R}^N)$, gdy $n \to +\infty$. Zatem (u_n) jest ciągiem Cauchy'ego w $H^1(\mathbb{R}^N)$, a z (1.26) wynika, że (u_n) jest również ciągiem Cauchy'ego w $X^{1/2}$. Ponieważ $X^{1/2}$ jest przestrzenią Banacha (patrz Dodatek, uwaga 5.7.8) wnioskujemy, że $u_n \to \tilde{u}$ w $X^{1/2}$, gdy $n \to +\infty$, dla pewnego $\tilde{u} \in X^{1/2}$. Na mocy jednoznaczności granicy w $L^2(\mathbb{R}^N)$[1] stwierdzamy, że $u = \tilde{u}$, co oznacza $u \in X^{1/2}$.

Aby pokazać, że $X^{1/2} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ weźmy $u \in X^{1/2}$. Z gęstości $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ w $X^{1/2}$ (patrz Dodatek, twierdzenie 5.7.9) wnosimy, że istnieje ciąg (u_n) w $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ taki, że $u_n \to u$ w $X^{1/2}$, gdy $n \to +\infty$. Zatem (u_n) jest ciągiem Cauchy'ego w $X^{1/2}$, a z (1.26) wynika, że (u_n) jest również ciągiem Cauchy'ego w $H^1(\mathbb{R}^N)$. Z zupełności przestrzeni $H^1(\mathbb{R}^N)$ wnioskujemy, że $u_n \to \tilde{u}$ w $H^1(\mathbb{R}^N)$, gdy $n \to +\infty$, dla pewnego $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Na mocy jednoznaczności granicy w $L^2(\mathbb{R}^N)$ stwierdzamy, że $u = \tilde{u}$, co oznacza $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. W konsekwencji $H^1(\mathbb{R}^N) = X^{1/2}$. Aby dowieść równoważności norm $\|\cdot\|_{H^1}$ i $\|\cdot\|_{X^{1/2}}$ zauważmy, że dla dowolnego $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ istnieje ciąg (u_n) w $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, zbieżny do u w $H^1(\mathbb{R}^N)$ oraz, dla $n \geq 1$, mamy

$$\tilde{\theta}_0 \|u_n\|_{H^1}^2 \leq \|u_n\|_{X^{1/2}}^2 \leq MN^2 \|u_n\|_{H^1}^2.$$

Przechodząc do granicy w powyższej nierówności widzimy, że (1.26) zachodzi dla dowolnego $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, co kończy dowód. □

(ii) Z twierdzenia 1.4.2 oraz z twierdzenia 5.7.3 (patrz Dodatek) natychmiast wynika, że operator $-\Delta : D(-\Delta) \to L^2(\mathbb{R}^N)$, $D(-\Delta) := H^2(\mathbb{R}^N)$ jest dodatnim operatorem samosprzężonym oraz generuje analityczną C_0-półgrupę operatorów liniowych na $L^2(\mathbb{R}^N)$. Wystarczy bowiem przyjąć $a_{ij} \equiv \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, N$, gdzie

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{gdy } i = j \\ 0, & \text{gdy } i \neq j \end{cases}.$$

Zdefiniujmy teraz operator Niemyckiego stowarzyszony z odwzorowaniem f, tzn. określmy funkcję $\mathbf{F} : [0, +\infty) \times H^1(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ wzorem

$$[\mathbf{F}(t, u)](x) := f(t, x, u(x)) \text{ dla } t \geq 0, u \in H^1(\mathbb{R}^N) \text{ i p.w. } x \in \mathbb{R}^N.$$

Twierdzenie 1.4.4. *Przy powyższych założeniach istnieją stała $D > 0$, która zależy tylko od $\tilde{k}$, k, N i p, stała $L > 0$, która zależy tylko od l, N i p oraz stała $C > 0$ zależna tylko od m_0, l, N i p takie, że dla wszystkich $t_1, t_2 \geq 0$ oraz $u_1, u_2 \in H^1(\mathbb{R}^N)$,*

$$\|\mathbf{F}(t_1, u_1) - \mathbf{F}(t_2, u_2)\|_{L^2} \leq D(1 + \|u_1\|_{H^1})|t_1 - t_2|^\theta + L\|u_1 - u_2\|_{H^1} \tag{1.27}$$

oraz dla $t \geq 0$ i $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$,

$$\|\mathbf{F}(t, u)\|_{L^2} \leq C(1 + \|u\|_{H^1}). \tag{1.28}$$

W dowodzie wykorzystamy następujący, techniczny lemat.

[1] Zauważmy, że $C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \subset X^1 \subset X^{1/2} \subset X^0 = L^2(\mathbb{R}^N)$ oraz $C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \subset H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^2(\mathbb{R}^N)$.

Lemat 1.4.5. *Istnieją stałe $C_1, C_2 > 0$, które zależą od N i p takie, że dla wszystkich $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$,*

$$\|u\|_{L^{2p/(p-1)}} \leq C_1 \|u\|_{H^1} \tag{1.29}$$

oraz

$$\|u\|_{L^{2p/(p-2)}} \leq C_2 \|u\|_{H^1}. \tag{1.30}$$

Dowód. Niech $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Załóżmy najpierw, że $N = 1$. Wykorzystując nierówność interpolacyjną (patrz Dodatek, twierdzenie 5.1.3) oraz ciągłość zanurzenia (patrz Dodatek, twierdzenie 5.3.4) $H^1(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$, otrzymujemy

$$\|u\|_{L^{2p/(p-1)}} \leq \|u\|_{L^2}^{1-1/p} \|u\|_{L^\infty}^{1/p} \leq \tilde{C}_1 \|u\|_{H^1}, \tag{1.31}$$

gdzie stała $\tilde{C}_1 > 0$ jest taka, że $\|u\|_{L^\infty}^{1/p} \leq \tilde{C}_1 \|u\|_{H^1}^{1/p}$ oraz

$$\|u\|_{L^{2p/(p-2)}} \leq \|u\|_{L^2}^{1-2/p} \|u\|_{L^\infty}^{2/p} \leq \tilde{C}_2 \|u\|_{H^1}, \tag{1.32}$$

gdzie $\tilde{C}_2 > 0$ jest taka, że $\|u\|_{L^\infty}^{2/p} \leq \tilde{C}_2 \|u\|_{H^1}^{2/p}$, $u \in H^1(\mathbb{R})$. W przypadku $N = 2$ nierówność interpolacyjna implikuje, że

$$\|u\|_{L^{2p/(p-1)}} \leq \|u\|_{L^2}^{1-2/p} \|u\|_{L^4}^{2/p} \leq \tilde{C}_1 \|u\|_{H^1}, \tag{1.33}$$

gdzie $\tilde{C}_1 > 0$ jest stałą z nierówności $\|u\|_{L^4}^{2/p} \leq \tilde{C}_1 \|u\|_{H^1}^{2/p}$, $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$, która zachodzi na mocy ciągłości zanurzenia przestrzeni $H^1(\mathbb{R}^2)$ w $L^4(\mathbb{R}^2)$ oraz

$$\|u\|_{L^{2p/(p-2)}} \leq \|u\|_{L^2}^{1-2q/(pq-2p)} \|u\|_{L^q}^{2q/(pq-2p)},$$

gdzie q jest dowolną, ustaloną liczbą z przedziału $(\frac{2p}{p-2}, +\infty)$. Stąd oraz z ciągłości włożenia przestrzeni $H^1(\mathbb{R}^2)$ w przestrzeń $L^q(\mathbb{R}^2)$, otrzymujemy istnienie stałej $\tilde{C}_2 > 0$ takiej, że

$$\|u\|_{L^{2p/(p-2)}} \leq \tilde{C}_2 \|u\|_{H^1}. \tag{1.34}$$

Załóżmy teraz, że $N \geq 3$. Wówczas z nierówności interpolacyjnej i ciągłości włożenia przestrzeni $H^1(\mathbb{R}^N)$ w $L^{2N/N-2}(\mathbb{R}^N)$ dostajemy

$$\|u\|_{L^{2p/(p-1)}} \leq \|u\|_{L^2}^{1-N/2p} \|u\|_{L^{2N/(N-2)}}^{N/2p} \leq \tilde{C}_1 \|u\|_{H^1}, \tag{1.35}$$

gdzie $\tilde{C}_1 > 0$ jest taka, że $\|u\|_{L^{2N/(N-2)}}^{N/2p} \leq \tilde{C}_1 \|u\|_{H^1}^{N/2p}$ oraz

$$\|u\|_{L^{2p/(p-2)}} \leq \|u\|_{L^2}^{1-N/p} \|u\|_{L^{2N/(N-2)}}^{N/p} \leq \tilde{C}_2 \|u\|_{H^1}, \tag{1.36}$$

gdzie $\tilde{C}_2 > 0$ jest stałą z nierówności $\|u\|_{L^{2N/(N-2)}}^{N/p} \leq \tilde{C}_2 \|u\|_{H^1}^{N/p}$, $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Oczywiście (1.31), (1.33) i (1.35) implikują istnienie stałej $C_1 = C_1(N, p) > 0$ takiej, że zachodzi (1.29) oraz z (1.32), (1.34) i (1.36) otrzymujemy istnienie $C_2 = C_2(N, p) > 0$ takiej, że zachodzi (1.30). $\square$

Dowód twierdzenia 1.4.4. Zauważmy, że na mocy założenia (1.19), nierówności Höldera oraz lematu 1.4.5, dla dowolnych $t_1, t_2 \geq 0$ i $u_1, u_2 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, mamy

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{F}(t_1,u_1) - \mathbf{F}(t_2,u_2)\|_{L^2} &\leq (\|\tilde{k}\|_{L^2} + \|k_0\|_{L^p}\|u_1\|_{L^{2p/(p-2)}} + \|k_\infty\|_{L^\infty}\|u_1\|_{L^2})|t_1-t_2|^\theta \\
&\quad + \|l_0(t_2,\cdot)\|_{L^p}\|u_1-u_2\|_{L^{2p/(p-2)}} + \|l_\infty(t_2,\cdot)\|_{L^\infty}\|u_1-u_2\|_{L^2} \\
&\leq (\|\tilde{k}\|_{L^2} + C_2\|k_0\|_{L^p}\|u_1\|_{H^1} + \|k_\infty\|_{L^\infty}\|u_1\|_{H^1})|t_1-t_2|^\theta \\
&\quad + C_2\|l_0(t_2,\cdot)\|_{L^p}\|u_1-u_2\|_{H^1} + \|l_\infty(t_2,\cdot)\|_{L^\infty}\|u_1-u_2\|_{H^1},
\end{aligned}$$

gdzie $C_2 = C_2(N,p) > 0$. Stąd wynika, że istnieją stałe $D = D(\tilde{k},k,N,p) > 0$ i $L = L(l,N,p) > 0$ takie, że

$$\|\mathbf{F}(t_1,u_1) - \mathbf{F}(t_2,u_2)\|_{L^2} \leq D(1+\|u_1\|_{H^1})|t_1-t_2|^\theta + L\|u_1-u_2\|_{H^1},$$

tzn. zachodzi (1.27). Dalej, dla $t \geq 0$, $u \in \mathbb{R}$ i p.w. $x \in \mathbb{R}^N$,

$$|f(t,x,u)| \leq |f(t,x,u) - f(t,x,0)| + |f(t,x,0)|,$$

co na mocy (1.18) i (1.19) implikuje, że dla $t \geq 0$, $u \in \mathbb{R}$ i p.w. $x \in \mathbb{R}^N$,

$$|f(t,x,u)| \leq l(t,x)|u| + m_0(x). \tag{1.37}$$

Stąd, z nierówności Höldera oraz lematu 1.4.5 otrzymujemy dla $t \geq 0$ i $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{F}(t,u)\|_{L^2} &\leq \|l_0(t,\cdot)\|_{L^p}\|u\|_{L^{2p/(p-2)}} + \|l_\infty(t,\cdot)\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2} + \|m_0\|_{L^2} \\
&\leq C_2\|l_0(t,\cdot)\|_{L^p}\|u\|_{H^1} + \|l_\infty(t,\cdot)\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2} + \|m_0\|_{L^2},
\end{aligned}$$

dla pewnej stałej $C_2 = C_2(N,p) > 0$. Zatem otrzymujemy istnienie stałej $C = C(m_0,l,N,p) > 0$ takiej, że

$$\|\mathbf{F}(t,u)\|_{L^2} \leq C(1+\|u\|_{H^1}),$$

tzn. zachodzi (1.28). □

Uwaga 1.4.6. Korzystając z twierdzenia 1.4.4 widzimy, że $\mathbf{F}$ spełnia założenia (1.4) i (1.5). Zatem na mocy twierdzenia 1.1.4 wnosimy, że dla każdego $\bar{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$, istnieje dokładnie jedno globalne rozwiązanie

$$u \in C([0,+\infty), H^1(\mathbb{R}^N)) \cap C((0,+\infty), H^2(\mathbb{R}^N)) \cap C^1((0,+\infty), L^2(\mathbb{R}^N))$$

następującego zagadnienia ewolucyjnego

$$\dot{u}(t) = -\mathbf{A}u(t) + \mathbf{F}(t,u(t)),\ t \geq 0, \quad u(0) = \bar{u}. \tag{1.38}$$

Definicja 1.4.7. *Funkcja* $u : [0, T_0) \to H^1(\mathbb{R}^N)$, $T_0 > 0$ *jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego* (1.15)*, jeśli*

$$u \in C([0, +\infty), H^1(\mathbb{R}^N)) \cap C((0, +\infty), H^2(\mathbb{R}^N)) \cap C^1((0, +\infty), L^2(\mathbb{R}^N))$$

i zachodzi (1.38)*.*

Korzystając z uwagi 1.4.6 otrzymujemy istnienie jedynego, globalnego rozwiązania u parabolicznego zagadnienia początkowego (1.15).

Następujący fakt (będący modyfikacją Proposition 2.3 w [57]) mówi o ciągłej zależności rozwiązań od warunków początkowych.

Twierdzenie 1.4.8. *Załóżmy, że odwzorowania* $f_n : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \geq 0$, *spełniają założenia* (1.18) *ze wspólną* m_0 *i* (1.19) *ze wspólną funkcją* l. *Ponadto załóżmy, że* $f_n(t, x, u) \to f_0(t, x, u)$, *gdy* $n \to +\infty$, *dla wszystkich* $t \geq 0$, $u \in \mathbb{R}$ *i* $x \in \mathbb{R}^N$ *oraz* $f_n(t, \cdot, 0) \to f_0(t, \cdot, 0)$ *w* $L^2(\mathbb{R}^N)$, *gdy* $n \to +\infty$, *dla wszystkich* $t \geq 0$. *Niech* (μ_n) *będzie ciągiem liczb dodatnich takim, że* $\mu_n \to \mu_0$, *gdy* $n \to +\infty$ *dla pewnego* $\mu_0 > 0$ *oraz niech* $u_n : [0, T] \to H^1(\mathbb{R}^N)$, $n \geq 0$, *będą rozwiązaniami zagadnienia*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \mu_n \mathcal{A} u(x, t) + f_n(t, x, u(x, t)), \ x \in \mathbb{R}^N, t \in (0, T],$$

takimi, że dla pewnego $R > 0$, $\|u_n(t)\|_{H^1} \leq R$ *dla wszystkich* $t \in [0, T]$ *i* $n \geq 0$. *Wówczas* $f_n(t, \cdot, u(\cdot)) \to f_0(t, \cdot, u(\cdot))$ *w* $L^2(\mathbb{R}^N)$, *gdy* $n \to +\infty$, *dla wszystkich* $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *i* $t \geq 0$ *oraz*
(i) *jeżeli* $u_n(0) \to u(0)$ *w* $L^2(\mathbb{R}^N)$, *gdy* $n \to +\infty$, *to* $u_n(t) \to u(t)$ *w* $H^1(\mathbb{R}^N)$ *dla* t *należących do zwartych podzbiorów przedziału* $(0, T]$*;*
(ii) *jeżeli* $u_n(0) \to u(0)$ *w* $H^1(\mathbb{R}^N)$, *gdy* $n \to +\infty$, *to* $u_n(t) \to u(t)$ *w* $H^1(\mathbb{R}^N)$ *jednostajnie względem* $t \in [0, T]$.

Dowód. (i) Zdefiniujmy odwzorowania $\mathbf{F}_n : [0, +\infty) \times H^1(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$, $n \geq 0$, wzorem

$$[\mathbf{F}_n(t, u)](x) := f_n(t, x, u).$$

Ponieważ dla wszystkich $t \geq 0$, $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ i p.w. $x \in \mathbb{R}^N$ mamy [1]

$$\begin{aligned} |f_n(t,x,u(x)) - f_0(t,x,u(x))|^2 \leq \big(&|f_n(t,x,u(x)) - f_n(t,x,0)| + |f_n(t,x,0) - f_0(t,x,0)| \\ &+ |f_0(t,x,0) - f_0(t,x,u(x))|\big)^2 \end{aligned}$$
$$\leq 3|f_n(t,x,u(x)) - f_n(t,x,0)|^2 + 3|f_n(t,x,0) - f_0(t,x,0)|^2 + 3|f_0(t,x,0) - f_0(t,x,u(x))|^2,$$

[1] Zauważmy, że dla dowolnych liczb $a, b, c \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest nierówność $(a + b + c)^2 \leq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$.

więc z założenia (1.19) wynika, że dla wszystkich $t \geq 0$, $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ i p.w. $x \in \mathbb{R}^N$

$$|f_n(t,x,u(x)) - f_0(t,x,u(x))|^2 \leq 3|f_n(t,x,0) - f_0(t,x,0)|^2 + 6|l(t,x)u(x)|^2.$$

Ponieważ dla wszystkich $t \geq 0$, $f_n(t,\cdot,0) \to f_0(t,\cdot,0)$ w $L^2(\mathbb{R}^N)$, gdy $n \to +\infty$, więc prawą stronę powyższej nierówności można ograniczyć przez funkcję całkowalną, co na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zmajoryzowanym przejściu do granicy pod znakiem całki implikuje, że

$$\mathbf{F}_n(t,u) \to \mathbf{F}_0(t,u) \text{ w } L^2(\mathbb{R}^N), \text{ gdy } n \to +\infty.$$

Co więcej, na mocy twierdzenia 1.4.4 mamy

$$\int_0^t \mathbf{F}_n(s,u)\,\mathrm{d}s \to \int_0^t \mathbf{F}_0(s,u)\,\mathrm{d}s \quad \text{w} \quad L^2(\mathbb{R}^N), \text{ gdy } n \to +\infty,$$

dla wszystkich $t \geq 0$. Zatem korzystając z twierdzenia 1.2.1 (i) wnioskujemy, że $u_n(t) \to u(t)$ w $H^1(\mathbb{R}^N)$ jednostajnie względem t należących do zwartych podzbiorów przedziału $(0,T]$, co kończy dowód (i). Dowód punktu (ii) wynika z twierdzenia 1.2.1 (ii). □

Na zakończenie tego rozdziału udowodnimy *zasadę uśredniania.*

Twierdzenie 1.4.9. *Załóżmy, że funkcje* $f_n : [0,+\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $n \geq 0$*, spełniają wszystkie założenia twierdzenia* 1.4.8 *oraz dodatkowo* (1.17)*. Przypuśćmy, że* $\bar{u}_n \to \bar{u}_0$ *w* $L^2(\mathbb{R}^N)$*,* $(\bar{u}_n)$ *jest ciągiem ograniczonym w* $H^1(\mathbb{R}^N)$*,* $\lambda_n \to 0^+$*, gdy* $n \to +\infty$ *oraz* $u_n : [0,+\infty) \to H^1(\mathbb{R}^N)$*,* $n \geq 1$*, są rozwiązaniami*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{A}u + f_n(t/\lambda_n, x, u), & x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0, \\ \quad u(x,0) = \bar{u}_n(x), & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Wówczas $u_n(t) \to \widehat{u}(t)$ *w* $H^1(\mathbb{R}^N)$*, gdy* $n \to +\infty$*, jednostajnie względem* t *należących do zwartych podzbiorów przedziału* $(0,+\infty)$*, gdzie* $\widehat{u} : [0,+\infty) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ *jest rozwiązaniem zagadnienia*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{A}u + \widehat{f_0}(x,u), & x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0, \\ \quad u(x,0) = \bar{u}_0(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

w którym funkcja $\widehat{f_0} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *zadana jest wzorem* $\widehat{f_0}(x,u) := \frac{1}{T}\int_0^T f_0(t,x,u)\,\mathrm{d}t$ *dla wszystkich* $u \in \mathbb{R}$ *i* $x \in \mathbb{R}^N$.

Uwaga 1.4.10. Jeżeli $\mathbf{F} : [0,T] \times H^1(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ jest operatorem Niemyckiego stowarzyszonym z odwzorowaniem $f : [0,+\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniającym warunki (1.18) i (1.19), to wówczas dla wszystkich $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$

$$[\widehat{\mathbf{F}}(u)](x) = \widehat{f}(x, u(x)) \quad \text{dla p.w. } x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.39}$$

Aby dowieść powyższej równości oznaczmy przez $P_n := \{t_k^{(n)} := k\frac{T}{n};\ k = 0, \ldots, n\}$ oraz

$$S(\mathbf{F}(\cdot, u), P_n) := \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}(t_{k-1}^{(n)}, u)(t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}), \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Wówczas, dla wszystkich $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$

$$S(\mathbf{F}(\cdot, u), P_n) \to \int_0^T \mathbf{F}(t, u)\,\mathrm{d}t \ \text{ w } L^2(\mathbb{R}^N), \text{ gdy } n \to +\infty.$$

Zatem (patrz Dodatek, twierdzenie 5.4.1) istnieje podciąg $(S(\mathbf{F}(\cdot, u), P_{n_m}))_{m=1}^{\infty}$ ciągu $(S(\mathbf{F}(\cdot, u), P_n))_{n=1}^{\infty}$ taki, że

$$S(\mathbf{F}(\cdot, u)(x), P_{n_m}) \to \left(\int_0^T \mathbf{F}(t, u)\,\mathrm{d}t\right)(x) \ \text{ dla p.w. } x \in \mathbb{R}^N, \text{ gdy } m \to +\infty. \tag{1.40}$$

Z drugiej strony, gdy $m \to +\infty$,

$$S(\mathbf{F}(\cdot, u)(x), P_{n_m}) = S(f(\cdot, x, u(x)), P_{n_m}) \to \int_0^T f(t, x, u(x))\,\mathrm{d}t. \tag{1.41}$$

Zatem łącząc (1.40) i (1.41) oraz korzystając z definicji $\widehat{\mathbf{F}}$ i $\widehat{f}$, otrzymujemy (1.39).

Dowód twierdzenia 1.4.9. Zdefiniujmy dla $n \geq 0$ odwzorowania $\mathbf{F}_n : [0, +\infty) \times H^1(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ kładąc

$$[\mathbf{F}_n(t, u)](x) := f_n(t, x, u(x))$$

oraz niech $\widehat{\mathbf{F}}_0 : H^1(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ dane będzie wzorem

$$\widehat{\mathbf{F}}_0(u) := \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{F}_0(t, u)\,\mathrm{d}t.$$

Na mocy uwagi 1.4.10 dla $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ i $n \geq 0$,

$$[\widehat{\mathbf{F}}_n(u)](x) = \widehat{f}_n(x, u(x)) \text{ dla p.w. } x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.42}$$

Ustalmy dowolne $\bar{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ oraz niech ciąg (τ_n) w $(0, +\infty)$ będzie taki, że $\tau_n \to +\infty$, gdy $n \to +\infty$. Oczywiście, na mocy (1.17), funkcje $\mathbf{F}_n$, $n \geq 1$, są T-okresowe względem pierwszej zmiennej. W konsekwencji mamy

$$I_n := \frac{1}{\tau_n}\int_0^{\tau_n} \mathbf{F}_n(t, u)\,\mathrm{d}t = \frac{[\tau_n/T]}{\tau_n/T} \cdot \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{F}_n(t, u)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\tau_n}\int_0^{\tau_n - [\tau_n/T]T} \mathbf{F}_n(t, u)\,\mathrm{d}t.$$

Pokażemy, że $I_n \to \widehat{\mathbf{F}}_0(u)$, co pozwoli na zastosowanie twierdzenia 1.3.1. Aby tego dowieść wystarczy pokazać, że

$$I_n^{(T)} := \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{F}_n(t,u)\,\mathrm{d}t \to \widehat{\mathbf{F}}_0(u) \quad \text{w } L^2(\mathbb{R}^N), \quad \text{gdy } n \to +\infty.$$

W tym celu zauważmy, że na mocy (1.42), dla p.w. $x \in \mathbb{R}^N$,

$$I_n^{(T)}(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f_n(t,x,u(x))\,\mathrm{d}t \to \frac{1}{T}\int_0^T f_0(t,x,u(x))\,\mathrm{d}t = \widehat{f}_0(x,u(x)) = [\widehat{\mathbf{F}}_0(u)](x).$$

Dalej, wykorzystując założenia (1.18) i (1.19) widzimy, że

$$|I_n^{(T)}(x)| \;=\; \left|\frac{1}{T}\int_0^T f_n(t,x,u(x))\,\mathrm{d}t\right| \le m_0(x) + g(x)$$

gdzie $g(x) := \frac{1}{T}\int_0^T |l(t,x)||u(x)|\,\mathrm{d}t$. Co więcej, z nierówności Jensena (patrz Dodatek, twierdzenie 5.1.4) mamy

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g(x)|^2\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^T |l(t,x)|^2|u(x)|^2\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x < +\infty^1.$$

Zatem na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zmajoryzowanym przejściu do granicy pod znakiem całki wnioskujemy, że $I_n^{(T)} \to \widehat{\mathbf{F}}_0(u)$ w $L^2(\mathbb{R}^N)$, gdy $n \to +\infty$. Ponieważ ciąg (τ_n) był dowolny, więc

$$\lim_{\tau\to+\infty,\ n\to+\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \mathbf{F}_n(t,u)\,\mathrm{d}t = \widehat{\mathbf{F}}_0(u).$$

Korzystając z twierdzenia 1.3.1, otrzymujemy tezę. □

[1]Istotnie, zauważmy najpierw, że z nierówności Höldera oraz lematu 1.4.5 mamy

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |l(t,x)|^2|u(x)|^2\,\mathrm{d}x &\le 2\Big(\int_{\mathbb{R}^N} |l_0(t,x)|^p\,\mathrm{d}x\Big)^{2/p}\Big(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{2p/(p-2)}\,\mathrm{d}x\Big)^{(p-2)/p} \\
&\quad + 2\int_{\mathbb{R}^N} |l_\infty(t,x)|^2|u(x)|^2\,\mathrm{d}x \\
&\le 2\|l_0(t,\cdot)\|_{L^p}^2\|u\|_{L^{2p/(p-2)}}^2 + 2\|l_\infty(t,\cdot)\|_{L^\infty}^2\|u\|_{L^2}^2 \\
&\le 2C_2^2\|l_0(t,\cdot)\|_{L^p}^2\|u\|_{H^1}^2 + 2\|l_\infty(t,\cdot)\|_{L^\infty}^2\|u\|_{H^1}^2,
\end{aligned}$$

gdzie stała $C_2 = C_2(N,p) > 0$ jest jak w lemacie 1.4.5. Ponieważ $\sup_{t\ge 0}(\|l_0(t,\cdot)\|_{L^p} + \|l_\infty(t,\cdot)\|_{L^\infty}) < +\infty$, więc w konsekwencji $\int_{\mathbb{R}^N} |l(t,x)|^2|u(x)|^2\,\mathrm{d}x < +\infty$.

Rozdział 2

Operator przesunięcia wzdłuż trajektorii

W tym rozdziale, dzięki użyciu techniki oszacowań reszt (z ang. *tail estimates*) rozwiązań równań parabolicznych pokazuję, że operator przesunięcia wzdłuż trajektorii stowarzyszony z zagadnieniem ewolucyjnym

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} + V(x)u + f(t,x,u),\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^N,$$

w którym $V \in L^p(\mathbb{R}^N) + L^\infty(\mathbb{R}^N)$, jest odwzorowaniem ostatecznie zwartym (patrz Dodatek, str. 121). Ma to kluczowe znaczenie, gdyż dla tej klasy odwzorowań istnieje teoria indeksu punktów stałych (patrz np. [2]). Następnie wyznaczam indeks punktów stałych operatora przesunięcia wzdłuż trajektorii związanego z parabolicznym równaniem liniowym

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + V(x)u,\ x \in \mathbb{R}^N,$$

a także - z autonomicznym równaniem nieliniowym

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(x,u),\ x \in \mathbb{R}^N.$$

2.1 Oszacowania reszt rozwiązań równań parabolicznych

Zajmiemy się teraz badaniem własności zwartości operatora przesunięcia wzdłuż trajektorii związanego z równiem parabolicznym

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \mathcal{A}u(x,t) + V(x)u(x,t) + f(t,x,u(x,t)),\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^N,$$

w którym $\mathcal{A} := \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}$ jest operatorem eliptycznym, $V = V_0 + V_\infty \in L^p(\mathbb{R}^N) + L^\infty(\mathbb{R}^N)$, p jest jak w (3), $V_\infty \geq \bar{v}_\infty > 0$ oraz $f : [0,+\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest odwzorowaniem spełniającym warunki (1.18) i (1.19). Przyjmując dodatkowe założenie dotyczące $V + f$, zastosujemy metodę oszacowań reszt dla rozwiązań równań parabolicznych. Technika ta dostarcza informacji na temat miary niezwartości w $L^2(\mathbb{R}^N)$ operatora przesunięcia wzdłuż trajektorii związanego z wyjsciowym równaniem na ograniczonych podzbiorach przestrzeni fazowej $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Rozważmy zagadnienie ewolucyjne

$$\dot{u}(t) = -\mathbf{A}u(t) + \mathbf{F}(t,u(t)),\ t > 0, \tag{2.1}$$

w którym $\mathbf{A} : D(\mathbf{A}) \to L^2(\mathbb{R}^N)$, $D(\mathbf{A}) := H^2(\mathbb{R}^N)$ jest liniowym operatorem postaci $\mathbf{A} := \mathbf{A}_0 - \mathbf{V}$, gdzie $\mathbf{A}_0 : D(\mathbf{A}_0) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ jest operatorem zadanym wzorem

$$\mathbf{A}_0 u := -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \text{ dla } u \in D(\mathbf{A}_0) := H^2(\mathbb{R}^N), \tag{2.2}$$

gdzie rzeczywiste współczynniki a_{ij} są takie, że $a_{ij} = a_{ji}$ dla $i, j = 1, \ldots, N$ oraz zachodzi (1.16), $\mathbf{V} : D(\mathbf{V}) \to L^2(\mathbb{R}^N)$, $D(\mathbf{V}) := H^1(\mathbb{R}^N)$ jest domkniętym operatorem liniowym, zaś $\mathbf{F} : [0,+\infty) \times H^1(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ jest odwzorowaniem takim, że dla dowolnych $t_1, t_2 \geq 0$ oraz $u_1, u_2 \in H^1(\mathbb{R}^N)$

$$\|\mathbf{F}(t_1,u_1) - \mathbf{F}(t_2,u_2)\|_{L^2} \leq C_1(1 + \|u_1\|_{H^1})|t_1 - t_2|^\theta + C_2\|u_1 - u_2\|_{H^1}, \tag{2.3}$$

dla pewnych stałych $C_1, C_2 > 0$ i $\theta \in (0,1)$ oraz, dla $t \geq 0$, $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ i p.w. $x \in \mathbb{R}^N$

$$|\mathbf{F}(t,u)(x)| \leq K(t,x)|u(x)| + \tilde{K}(x)(1 + \|u\|_{H^1}), \tag{2.4}$$

gdzie $K = K_0 + K_\infty$, $K_0(t,\cdot) \in L^p(\mathbb{R}^N)$, p jest jak w (3) - patrz str. 5, $K_\infty(t,\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ dla $t \geq 0$, $\sup_{t\geq 0}(\|K_0(t,\cdot)\|_{L^p} + \|K_\infty(t,\cdot)\|_{L^\infty}) < +\infty$ oraz $\tilde{K} \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

Zakładamy również, że istnieją $a > 0$, $b \in L^p(\mathbb{R}^N)$ i $c \in L^2(\mathbb{R}^N)$ takie, że dla $t \geq 0$, $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ i p.w. $x \in \mathbb{R}^N$

$$\Big([\mathbf{V}u](x) + [\mathbf{F}(t,u)](x)\Big)u(x) \leq -a|u(x)|^2 + b(x)|u(x)|^2 + c(x)|u(x)|. \tag{2.5}$$

Wówczas, z twierdzenia 1.4.2 wiemy, że $\mathbf{A}_0$ jest dodatnim operatorem sektorialnym, a więc również (patrz Dodatek, twierdzenie 5.7.10) $\mathbf{A}$ jest operatorem sektorialnym. Co więcej, zaburzenie $\mathbf{F}$ spełnia warunki (1.4) i (1.5) (co jest wynikiem założenia (2.4) - wystarczy powtórzyć argumentację z dowodu twierdzenia 1.4.4). W konsekwencji, na mocy twierdzenia 1.1.4 widzimy, że dla dowolnego $\bar{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$, zagadnienie (2.1) z warunkiem początkowym $u(0) = \bar{u}$, posiada dokładnie jedno globalne rozwiązanie

$$u \in C([0,+\infty), H^1(\mathbb{R}^N)) \cap C((0,+\infty), H^2(\mathbb{R}^N)) \cap C^1((0,+\infty), L^2(\mathbb{R}^N)).$$

Uwaga 2.1.1. Jeśli $f : [0,+\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest odwzorowaniem spełniającym założenia (1.18), (1.19) i (1.20), to operator Niemyckiego $\mathbf{F} : [0,+\infty) \times H^1(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ wyznaczony przez f spełnia warunki (2.3), (2.4), (2.5). Mając jednak na uwadze zastosowanie w Rozdziale 4, nie zakładamy tutaj, że zaburzenie $\mathbf{F}$ operatora sektorialnego $\mathbf{A}_0$ jest operatorem Niemyckiego.

Oznaczmy przez $u : [0,+\infty) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ rozwiązanie problemu (2.1) z warunkiem początkowym $u(0) = \bar{u}$.

Lemat 2.1.2. *Niech $T > 0$ oraz niech $u : [0,T] \to H^1(\mathbb{R}^N)$ będzie rozwiązaniem (2.1) takim, że $\|u(t)\|_{H^1} \leq R$ dla wszystkich $t \in [0,T]$ oraz pewnej stałej $R > 0$. Wóczas istnieje ciąg (α_n) taki, że $\alpha_n \to 0^+$, gdy $n \to +\infty$ oraz*

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,n)} |u(t)|^2 \, \mathrm{d}x \leq R^2 e^{-2at} + \alpha_n \quad \text{dla} \quad t \in [0,T],\ n \geq 1,$$

gdzie wyrazy ciągu (α_n) zależą jedynie od p, N, a, b, c, R oraz współczynników a_{ij}.

Dowód. Niech $\phi : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją gładką i taką, że $\phi(s) \in [0,1]$ dla $s \in [0,+\infty)$, $\phi_{|[0,\frac{1}{2}]} \equiv 0$ oraz $\phi_{|[1,+\infty)} \equiv 1$. Definiujemy $\phi_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ wzorem $\phi_n(x) := \phi(|x|^2/n^2)$, $x \in \mathbb{R}^N$, $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ $u \in C^1((0,T], L^2(\mathbb{R}^N))$, dla $t \in (0,T]$ mamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(t), \phi_n u(t))_{L^2} &= \frac{1}{2}\Big((u(t), \phi_n \dot{u}(t))_{L^2} + (\dot{u}(t), \phi_n u(t))_{L^2}\Big) = (\phi_n u(t), \dot{u}(t))_{L^2} \\ &= I_1(t) + I_2(t), \end{aligned} \tag{2.6}$$

gdzie

$$\begin{aligned} I_1(t) &:= \big(\phi_n u(t), -\mathbf{A}_0 u(t)\big)_{L^2}, \\ I_2(t) &:= \big(\phi_n u(t), \mathbf{V}u(t) + \mathbf{F}(t, u(t))\big)_{L^2}. \end{aligned}$$

Jeśli chodzi o pierwszy składnik, to oznaczając przez $L_\phi := \sup_{s\in[0,+\infty)} |\phi'(s)|$ (zauważmy, że $L_\phi < +\infty$, gdyż ϕ jest funkcją gładką i $\phi' \equiv 0$ poza zbiorem ograniczonym) oraz przez $M := \max_{1\le i,j\le N} |a_{ij}|$, mamy

$$\begin{aligned} I_1(t) &= -\int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\phi_n(x)u(t)\Big)\frac{\partial}{\partial x_i}(u(t))\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N} \phi_n(x) \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}(u(t))\frac{\partial}{\partial x_i}(u(t))\,\mathrm{d}x \\ &\quad - \frac{2}{n^2}\int_{\mathbb{R}^N} \phi'(|x|^2/n^2) \sum_{i,j=1}^N a_{ij}x_j \frac{\partial}{\partial x_i}(u(t))u(t)\,\mathrm{d}x \\ &\le \frac{2L_\phi}{n^2}\int_{\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}n\le|x|\le n\right\}} \sum_{i,j=1}^N |a_{ij}|\,|x|\,|u(t)|\,|\nabla u(t)|\ \mathrm{d}x \\ &\le \frac{2L_\phi M N^2 R^2}{n}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Dalej, wprost z (2.5) wynika, że

$$I_2(t) \le -a\int_{\mathbb{R}^N} \phi_n(x)|u(t)|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N}\phi_n(x)b(x)|u(t)|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N}\phi_n(x)c(x)|u(t)|\,\mathrm{d}x.$$

Stąd, na mocy nierówności Höldera oraz lematu 1.4.5, otrzymujemy

$$\begin{aligned} I_2(t) &\le -a\int_{\mathbb{R}^N}\phi_n(x)|u(t)|^2\,\mathrm{d}x + \bigg(\int_{\left\{|x|\ge\frac{\sqrt{2}}{2}n\right\}} |b(x)|^p\,\mathrm{d}x\bigg)^{1/p} \|u(t)\|^2_{L^{2p/(p-1)}} \\ &\quad + \bigg(\int_{\left\{|x|\ge\frac{\sqrt{2}}{2}n\right\}} |c(x)|^2\,\mathrm{d}x\bigg)^{1/2}\|u(t)\|_{L^2} \\ &\le -a\int_{\mathbb{R}^N}\phi_n(x)|u(t)|^2\,\mathrm{d}x + C_1^2\|u(t)\|^2_{H^1}\bigg(\int_{\left\{|x|\ge\frac{\sqrt{2}}{2}n\right\}}|b(x)|^p\,\mathrm{d}x\bigg)^{1/p} \\ &\quad + \bigg(\int_{\left\{|x|\ge\frac{\sqrt{2}}{2}n\right\}}|c(x)|^2\,\mathrm{d}x\bigg)^{1/2}\|u(t)\|_{H^1} \\ &\le -a\int_{\mathbb{R}^N}\phi_n(x)|u(t)|^2\,\mathrm{d}x + C_1^2R^2\bigg(\int_{\left\{|x|\ge\frac{\sqrt{2}}{2}n\right\}} b(x)^p\,\mathrm{d}x\bigg)^{1/p} \\ &\quad + R\bigg(\int_{\left\{|x|\ge\frac{\sqrt{2}}{2}n\right\}}|c(x)|^2\,\mathrm{d}x\bigg)^{1/2} \end{aligned} \tag{2.8}$$

dla pewnej stałej $C_1 > 0$. Łącząc (2.6), (2.7) i (2.8) otrzymujemy

$$\frac{d}{dt}(u(t), \phi_n u(t))_{L^2} \leq -2a(u(t), \phi_n u(t))_{L^2} + \alpha_n, \tag{2.9}$$

gdzie

$$\alpha_n := \frac{4L_\phi M N^2 R^2}{n} + 2C_1^2 R^2 \left(\int_{\left\{|x| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} n\right\}} |b(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p} + 2R \left(\int_{\left\{|x| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} n\right\}} |c(x)|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2}.$$

Oczywiście $\alpha_n \to 0$ gdy $n \to +\infty$. Mnożąc obustronnie nierówność (2.9) przez e^{2at} oraz całkując na przedziale $[0, \tau]$ dostajemy

$$e^{2a\tau}(u(\tau), \phi_n u(\tau))_{L^2} \leq (u(0), \phi_n u(0))_{L^2} + (2a)^{-1}(e^{2a\tau} - 1)\alpha_n,$$

co implikuje

$$(u(\tau), \phi_n u(\tau))_{L^2} \leq e^{-2a\tau} \|u(0)\|_{L^2} + \alpha_n, \tag{2.10}$$

gdzie w powyższej nierówności $(2a)^{-1}\alpha_n$ ponownie oznaczamy przez α_n. Ostatecznie otrzymujemy

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,n)} |u(t)|^2 \, \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^N} \phi_n(x) |u(t)|^2 \, \mathrm{d}x \leq e^{-2at} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_n(x) |u(0)|^2 \, \mathrm{d}x + \alpha_n,$$

co kończy dowód. □

2.2 Własność uzwarcania operatora przesunięcia

Rozważmy teraz rodzinę zagadnień ewolucyjnych z parametrem

$$\dot{u}(t) = -\mathbf{A}^{(\mu)} u(t) + \mathbf{F}(t, u, \mu), \qquad t > 0, \ \mu \in [0, 1], \tag{2.11}$$

w której rodzina operatorów $\mathbf{A}^{(\mu)} : D(\mathbf{A}^{(\mu)}) \to L^2(\mathbb{R}^N)$, $\mu \in [0, 1]$, jest postaci $\mathbf{A}^{(\mu)} := \mathbf{A}_0^{(\mu)} - \mathbf{V}$, gdzie

$$\mathbf{A}_0^{(\mu)} u := -\sum_{i,j=1}^{N} (\mu + \bar{\mu}_0) a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}, \quad \text{dla } u \in D(\mathbf{A}_0^{(\mu)}) := H^2(\mathbb{R}^N),$$

gdzie rzeczywiste współczynniki a_{ij} są takie, że $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, \ldots, N$, $\bar{\mu}_0 > 0$ oraz istnieje $\theta_0 > 0$ taka, że dla wszystkich $\xi \in \mathbb{R}^N$ spełniony jest warunek

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \theta_0 |\xi|^2,$$

natomiast $\mathbf{V} : D(\mathbf{V}) \to L^2(\mathbb{R}^N)$, $D(\mathbf{V}) := H^1(\mathbb{R}^N)$ jest domkniętym operatorem liniowym. Odwzorowanie $\mathbf{F} : [0, +\infty) \times H^1(\mathbb{R}^N) \times [0, 1] \to L^2(\mathbb{R}^N)$ jest takie, że dla wszystkich $t_1, t_2, t \geq 0$, $u_1, u_2, u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $\mu_1, \mu_2, \mu \in [0,1]$ i p.w. $x \in \mathbb{R}^N$ spełnione są następujące warunki:

$$\|\mathbf{F}(t_1, u_1, \mu) - \mathbf{F}(t_2, u_2, \mu)\|_{L^2} \leq \tilde{C}_1(1 + \|u_1\|_{H^1})|t_1 - t_2|^\theta + \tilde{C}_2\|u_1 - u_2\|_{H^1}, \quad (2.12)$$

$$|\mathbf{F}(t, u, \mu)(x)| \leq K(t, x)|u(x)| + \tilde{K}(x)(1 + \|u\|_{H^1}), \quad (2.13)$$

$$\|\mathbf{F}(t, u, \mu_1) - \mathbf{F}(t, u, \mu_2)\|_{L^2} \leq |\rho(\mu_1) - \rho(\mu_2)|(1 + \|u\|_{H^1}), \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \Big(\big([\mathbf{V}u_1](x) - [\mathbf{V}u_2](x)\big) + \big([\mathbf{F}(t, u_1, \mu)](x) - [\mathbf{F}(t, u_2, \mu)](x)\big)\Big)(u_1(x) - u_2(x)) \\ \leq -a|u_1(x) - u_2(x)|^2 + b(x)|u_1(x) - u_2(x)|^2 \quad (2.15) \end{aligned}$$

dla pewnych $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2 > 0$, $\theta \in (0,1)$, $K = K_0 + K_\infty$, gdzie $K_0(t, \cdot) \in L^p(\mathbb{R}^N)$ (p jest jak w (3) - patrz str. 5), $K_\infty(t, \cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ dla $t \geq 0$, $\sup_{t \geq 0}(\|K_0(t, \cdot)\|_{L^p} + \|K_\infty(t, \cdot)\|_{L^\infty}) < +\infty$, $\tilde{K} \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $\rho \in C([0,1])$, $a > 0$ oraz $b \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

Wówczas, dla dowolnego $\mu \in [0,1]$, operator $\mathbf{A}^{(\mu)}$ jest operatorem sektorialnym, zaś odwzorowanie $\mathbf{F}(\cdot, \cdot, \mu)$ spełnia dla wszystkich $\mu \in [0,1]$ warunki (1.4) i (1.5) ze wspólnymi stałymi, niezależnymi od parametru μ. Zatem, na mocy twierdzenia 1.1.4 wnosimy, że dla dowolnego $\bar{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$, równanie (2.11) z warunkiem początkowym $u(0) = \bar{u}$ posiada dokładnie jedno globalne rozwiązanie

$$u \in C([0, +\infty), H^1(\mathbb{R}^N)) \cap C((0, +\infty), H^2(\mathbb{R}^N)) \cap C^1((0, +\infty), L^2(\mathbb{R}^N)).$$

Oznaczmy przez $u(\cdot; \bar{u}, \mu) : [0, +\infty) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ rozwiązanie równania (2.11) z warunkiem początkowym $u(0) = \bar{u}$.

Lemat 2.2.1. *Niech $T > 0$ oraz niech $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $\mu_1, \mu_2 \in [0,1]$. Załóżmy, że $u(\cdot; \bar{u}_i, \mu_i) : [0, T] \to H^1(\mathbb{R}^N)$, $i = 1, 2$, są rozwiązaniami równania* (2.11) *takimi, że dla $t \in [0, T]$, $\|u(t; \bar{u}_i, \mu_i)\|_{H^1} \leq R$, $i = 1, 2$, dla pewnej $R > 0$. Wówczas istnieje ciąg (α_n) taki, że $\alpha_n \to 0^+$, gdy $n \to +\infty$ oraz*

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,n)} |u(t; \bar{u}_1, \mu_1) - u(t; \bar{u}_2, \mu_2)|^2 \, \mathrm{d}x \leq e^{-2at}\|\bar{u}_1 - \bar{u}_2\|_{L^2}^2 + Q\eta(\mu_1, \mu_2) + \alpha_n,$$

gdzie α_n i $Q > 0$ zależą tylko od N, p, R, a, b współczynników a_{ij}, $\bar{\mu}_0$ oraz

$$\eta(\mu_1, \mu_2) := \max\left\{|\rho(\mu_1) - \rho(\mu_2)|, \max_{i,j=1,\ldots,N} |a_{ij}| \, |\mu_1 - \mu_2|\right\}.$$

Dowód. Niech $\phi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją gładką i taką, że $\phi(s) \in [0,1]$ dla $s \in [0, +\infty)$, $\phi_{|[0, \frac{1}{2}]} \equiv 0$ oraz $\phi_{|[1, +\infty)} \equiv 1$. Definiujemy $\phi_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ wzorem

$\phi_n(x) := \phi(|x|^2/n^2)$, $x \in \mathbb{R}^N$. Oznaczmy $u_1 := u(\cdot;\bar{u}_1,\mu_1)$, $u_2 := u(\cdot;\bar{u}_2,\mu_2)$ oraz $w := u_1 - u_2$. Wówczas, ponieważ $w \in C^1((0,T],L^2(\mathbb{R}^N))$, mamy równość

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(w(t),\phi_n w(t))_{L^2} &= \frac{1}{2}\left((w(t),\phi_n\dot{w}(t))_{L^2} + (\dot{w}(t),\phi_n w(t))_{L^2}\right) = (\phi_n w(t),\dot{w}(t))_{L^2}\\ &= I_1(t) + I_2(t) + I_3(t),\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}I_1(t) &:= (\phi_n w(t), -\mathbf{A}_0^{(\mu_1)}u_1(t) + \mathbf{A}_0^{(\mu_1)}u_2(t))_{L^2},\\ I_2(t) &:= (\phi_n w(t), -\mathbf{A}_0^{(\mu_1)}u_2(t) + \mathbf{A}_0^{(\mu_2)}u_2(t))_{L^2},\\ I_3(t) &:= (\phi_n w(t), \mathbf{V}w(t) + \mathbf{F}(t,u_1(t),\mu_1) - \mathbf{F}(t,u_2(t),\mu_2))_{L^2}.\end{aligned}$$

Zauważmy najpierw, że

$$\begin{aligned}I_1(t) &= (\phi_n w(t), -\mathbf{A}_0^{(\mu_1)}w(t))_{L^2}\\ &= -\int_{\mathbb{R}^N}\sum_{i,j=1}^N(\mu_1+\bar{\mu}_0)a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}(\phi_n(x)w(t))\frac{\partial}{\partial x_i}(w(t))\,\mathrm{d}x\\ &= -\int_{\mathbb{R}^N}\phi_n(x)\sum_{i,j=1}^N(\mu_1+\bar{\mu}_0)a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}(w(t))\frac{\partial}{\partial x_i}(w(t))\,\mathrm{d}x\\ &\quad -\frac{2}{n^2}\int_{\mathbb{R}^N}\sum_{i,j=1}^N\phi'(|x|^2/n^2)w(t)x_j(\mu_1+\bar{\mu}_0)a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}(w(t))\,\mathrm{d}x\\ &\le \frac{2L_\phi}{n^2}\int_{\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}n\le|x|\le n\right\}}\sum_{i,j=1}^N(1+\bar{\mu}_0)|a_{ij}||x||w(t)||\nabla w(t)|\,\mathrm{d}x\\ &\le \frac{2L_\phi MN^2}{n}(1+\bar{\mu}_0)\|w(t)\|_{L^2}\|w(t)\|_{H^1} \qquad (2.16)\end{aligned}$$

gdzie $M := \max_{1\le i,j\le N}|a_{ij}|$ oraz $L_\phi := \sup_{s\in[0,+\infty)}|\phi'(s)|$. Oczywiście $L_\phi < +\infty$, co wynika z faktu, że ϕ jest gładką funkcją oraz ϕ' przyjmuje niezerowe wartości jedynie na zbiorze ograniczonym. Rozumując podobnie jak w (2.16), otrzymujemy następującą nierówność

$$\begin{aligned}I_2(t) &= -\int_{\mathbb{R}^N}\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\mu_1-\mu_2)\frac{\partial}{\partial x_j}(\phi_n w(t))\frac{\partial}{\partial x_i}(u_2(t))\,\mathrm{d}x\\ &= -\int_{\mathbb{R}^N}\phi_n(x)\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\mu_1-\mu_2)\frac{\partial}{\partial x_j}(w(t))\frac{\partial}{\partial x_i}(u_2(t))\,\mathrm{d}x\\ &\quad -\frac{2}{n^2}\int_{\mathbb{R}^N}\sum_{i,j=1}^N\phi'(|x|^2/n^2)w(t)x_j a_{ij}(\mu_1-\mu_2)\frac{\partial}{\partial x_i}(u_2(t))\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\leq \ N^2\eta(\mu_1,\mu_2)\|w(t)\|_{H^1}\|u_2(t)\|_{H^1} + \frac{4L_\phi \eta(\mu_1,\mu_2)N^2}{n}\|w(t)\|_{L^2}\|u_2(t)\|_{H^1}. \tag{2.17}$$

Aby oszacować składnik $I_3(t)$ zauważmy najpierw, że

$$\begin{aligned} I_3(t) \ = \ & \int_{\mathbb{R}^N} \phi_n(x)(\mathbf{F}(t,u_1(t),\mu_1) - \mathbf{F}(t,u_1(t),\mu_2))w(t)\,\mathrm{d}x \\ & + \int_{\mathbb{R}^N} \phi_n(x)(\mathbf{V}w(t) + \mathbf{F}(t,u_1(t),\mu_2) - \mathbf{F}(t,u_2(t),\mu_2))w(t)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Z założenia (2.14) wynika natychmiast, że

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi_n(x)(\mathbf{F}(t,u_1(t),\mu_1) - \mathbf{F}(t,u_1(t),\mu_2))w(t)\,\mathrm{d}x \leq |\rho(\mu_1)-\rho(\mu_2)|(1+R)2R. \tag{2.18}$$

Dalej, na mocy założenia (2.15), nierówności Höldera oraz lematu 1.4.5 mamy

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \phi_n(x)(\mathbf{V}w(t) + \mathbf{F}(t,u_1(t),\mu_2) - \mathbf{F}(t,u_2(t),\mu_2))w(t)\,\mathrm{d}x \leq \\ & - a\int_{\mathbb{R}^N} \phi_n(x)|w(t)|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\left\{|x|\geq \frac{\sqrt{2}}{2}n\right\}} b(x)|w(t)|^2\,\mathrm{d}x \\ & \leq -a\int_{\mathbb{R}^N} \phi_n(x)|w(t)|^2\,\mathrm{d}x + \left(\int_{\left\{|x|\geq \frac{\sqrt{2}}{2}n\right\}} |b(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \|w(t)\|^2_{L^{2p/(p-1)}} \\ & \leq -a\int_{\mathbb{R}^N} \phi_n(x)|w(t)|^2\,\mathrm{d}x + C_1^2R^2\left(\int_{\{|x|\geq \frac{\sqrt{2}}{2}n\}} |b(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \end{aligned} \tag{2.19}$$

dla pewnej stałej $C_1 > 0$. Łącząc nierówności (2.16), (2.17), (2.18) oraz (2.19), otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(w(t),\phi_n w(t))_{L^2} \leq -2a(w(t),\phi_n w(t))_{L^2} + \bar{C}\eta(\mu_1,\mu_2) + \alpha_n \tag{2.20}$$

dla pewnej stałej $\bar{C} > 0$. Mnożąc obustronnie nierówność (2.20) przez e^{2at} oraz całkując na przedziale $[0,\tau]$ dostajemy

$$e^{2a\tau}(w(\tau),\phi_n w(\tau))_{L^2} - (w(0),\phi_n w(0))_{L^2} \leq (2a)^{-1}(e^{2a\tau}-1)\,(\bar{C}\eta(\mu_1,\mu_2)+\alpha_n),$$

co implikuje, że

$$(w(\tau),\phi_n w(\tau))_{L^2} \leq e^{-2a\tau}\|w(0)\|^2_{L^2} + (2a)^{-1}\left(\bar{C}\eta(\mu_1,\mu_2)+\alpha_n\right). \tag{2.21}$$

Ponieważ

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,n)} |w(t)|^2\,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^N} \phi_n(x)|w(t)|^2\,\mathrm{d}x \tag{2.22}$$

więc łącząc (2.21) i (2.22), otrzymujemy tezę. □

Definicja 2.2.2. *Dla dowolnego $t \geq 0$, (sparametryzowanym) operatorem przesunięcia wzdłuż trajektorii (o czas t) stowarzyszonym z rodziną równań* (2.11) *będziemy nazywać odwzorowanie $\mathbf{\Psi}_t : H^1(\mathbb{R}^N) \times [0,1] \to H^1(\mathbb{R}^N)$ zdefiniowane wzorem*

$$\mathbf{\Psi}_t(\bar{u}, \mu) := u(t; \bar{u}, \mu), \qquad \text{dla } \bar{u} \in H^1(\mathbb{R}^N) \text{ oraz } \mu \in [0,1].$$

Uwaga 2.2.3. Załóżmy, że $(\bar{u}_n)$ w $H^1(\mathbb{R}^N)$ jest ciągiem ograniczonym i takim, że $\bar{u}_n \to \bar{u}_0$ w $L^2(\mathbb{R}^N)$, gdy $n \to +\infty$ dla pewnego $\bar{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ oraz (μ_n) w $[0,1]$ jest taki, że $\mu_n \to \mu_0$, gdy $n \to +\infty$. Wówczas, że dla dowolnego $t > 0$, $\mathbf{\Psi}_t(\bar{u}_n, \mu_n) \to \mathbf{\Psi}_t(\bar{u}_0, \mu_0)$ w $H^1(\mathbb{R}^N)$, gdy $n \to +\infty$, co oznacza, że operator przesunięcia wzdłuż trajektorii stowarzyszony z (2.11) jest ciągły.

Istotnie, zauważmy bowiem, że wówczas, dla $n \geq 1$, $\mathbf{A}_0^{(\mu_n)} := \tilde{\mu}_n \tilde{\mathbf{A}}_0$, gdzie $\tilde{\mu}_n := (\mu_n + \bar{\mu}_0)$ i mamy $\tilde{\mu}_n \to (\mu_0 + \bar{\mu}_0) > 0$, gdy $n \to +\infty$ oraz $\tilde{\mathbf{A}}_0 : D(\tilde{\mathbf{A}}_0) \to L^2(\mathbb{R}^N)$, $\tilde{\mathbf{A}}_0 := -\sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$ dla $u \in D(\tilde{\mathbf{A}}_0) := H^2(\mathbb{R}^N)$ jest operatorem sektorialnym. Ponadto, dla dla dowolnego $t \geq 0$

$$\int_0^t \mathbf{F}(s, u, \mu_n)\,\mathrm{d}s \to \int_0^t \mathbf{F}(s, u, \mu_0)\,\mathrm{d}s \text{ w } L^2(\mathbb{R}^N), \text{ gdy } n \to +\infty, \tag{2.23}$$

gdyż z założenia (2.14) wynika, że

$$\begin{aligned}\left\| \int_0^t \mathbf{F}(s, u, \mu_n)\,\mathrm{d}s - \int_0^t \mathbf{F}(s, u, \mu_0)\,\mathrm{d}s \right\|_{L^2} &\leq \int_0^t \|\mathbf{F}(s, u, \mu_n) - \mathbf{F}(s, u, \mu_0)\|_{L^2}\,\mathrm{d}s \\ &\leq \int_0^t |\rho(\mu_n) - \rho(\mu_0)|(1 + \|u\|_{H^1})\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

a ponieważ $\rho \in C([0,1])$, więc $\rho(\mu_n) \to \rho(\mu_0)$, gdy $n \to +\infty$. Zatem, dla dowolnego $t > 0$, ciągłość $\mathbf{\Psi}_t$ wynika z twierdzenia 1.2.1 (i). □

Przejdziemy teraz do własności zwartości operatora przesunięcia dla rozważanego równania parabolicznego (2.11).

Twierdzenie 2.2.4. *Załóżmy, że spełnione są warunki* (2.12), (2.13), (2.14) *oraz* (2.15). *Wówczas*

(i) dla dowolnego, ograniczonego zbioru $Z \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ oraz $t > 0$,

$$\beta_{L^2}(\mathbf{\Psi}_t(Z \times [0,1])) \leq e^{-at} \beta_{L^2}(Z),$$

gdzie β_{L^2} oznacza miarę niezwartości Hausdorffa w przestrzeni $L^2(\mathbb{R}^N)$;

(ii) jeśli ograniczony zbiór $Z \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ jest relatywnie zwarty jako podzbiór $L^2(\mathbb{R}^N)$, to dla dowolnego $t > 0$, zbiór $\mathbf{\Psi}_t(Z \times [0,1])$ jest relatywnie zwarty w $H^1(\mathbb{R}^N)$;

(iii) jeśli $Z \subset \overline{\mathrm{conv}}^{H^1} \mathbf{\Psi}_t(Z \times [0,1])$ *dla pewnego ograniczonego zbioru* $Z \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ *oraz* $t > 0$*, to* Z *jest relatywnie zwarty w* $H^1(\mathbb{R}^N)$*.*

Dowód. (i) Niech $\chi_n : B(0,n) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją charakterystyczną kuli $B(0,n)$. Wówczas dla każdego $n \geq 1$,

$$\mathbf{\Psi}_t(Z \times [0,1]]) \subset \{u(t;\bar{u},\mu) \mid \bar{u} \in Z,\ \mu \in [0,1]\} \subset W_n + R_n,$$

gdzie

$$W_n := \{\chi_n u(t;\bar{u},\mu) \mid \bar{u} \in Z,\ \mu \in [0,1]\}$$

oraz

$$R_n := \{(1-\chi_n)u(t;\bar{u},\mu) \mid \bar{u} \in Z,\ \mu \in [0,1]\}.$$

Ponieważ zbiór W_n jest podzbiorem przestrzeni $H^1(B(0,n))$, więc na mocy twierdzenia Rellicha-Kondraszowa wnosimy, że W_n jest relatywnie zwarty w $L^2(\mathbb{R}^N)$. Stąd wynika, że

$$\beta_{L^2}(\mathbf{\Psi}_t(Z \times [0,1]])) \leq \beta_{L^2}(R_n) \quad \text{dla wszystkich} \quad n \geq 1. \tag{2.24}$$

Zajmiemy się teraz oszacowaniem miary niezwartości zbioru R_n w przestrzeni $L^2(\mathbb{R}^N)$. W tym celu ustalmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$. Wybierzmy dalej skończone pokrycie zbioru Z złożone z kul $B_{L^2}(\bar{u}_k, r_\varepsilon)$, $k = 1,\ldots,m_\varepsilon$, o promieniu $r_\varepsilon := \beta_{L^2}(Z) + \varepsilon$ i takie, że $\bar{u}_k \in Z$ dla wszystkich $k = 1,\ldots,m_\varepsilon$ oraz pokryjmy odcinek $[0,1]$ przedziałami $(\mu_l - \delta, \mu_l + \delta)$, $l = 1,\ldots,n_\delta$, gdzie $\delta > 0$ jest dobrana tak, że $\eta(\xi_1,\xi_2) < \varepsilon$ jeśli tylko $|\xi_1 - \xi_2| < \delta$. Połóżmy

$$\bar{u}_{k,l} := (1-\chi_n)u(t;\bar{u}_k,\mu_l), \qquad k = 1,\ldots,m_\varepsilon,\ l = 1,\ldots,n_\delta.$$

Weźmy teraz dowolne $\bar{v} \in R_n$. Wówczas $\bar{v} = (1-\chi_n)u(t;\bar{u},\mu)$ dla pewnych $\bar{u} \in Z$ oraz $\mu \in [0,1]$. Oczywiście istnieją $k_0 \in \{1,\ldots,m_\varepsilon\}$ i $l_0 \in \{1,\ldots,n_\delta\}$ takie, że $\|\bar{u} - \bar{u}_{k_0}\| < r_\varepsilon$ oraz $|\mu - \mu_{l_0}| < \delta$. Na mocy lematu 2.2.1 otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\|\bar{v} - \bar{u}_{k_0,l_0}\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,n)} |u(t;\bar{u},\mu) - u(t;\bar{u}_{k_0},\mu_{l_0})|^2 \,\mathrm{d}x \\
&\leq e^{-2at}\|\bar{u} - \bar{u}_{k_0}\|_{L^2}^2 + Q\,\eta(\mu,\mu_{l_0}) + \alpha_n \\
&\leq r_{\varepsilon,n} := e^{-2at} r_\varepsilon^2 + Q\,\varepsilon + \alpha_n.
\end{aligned}$$

Z powyższej nierówności wynika, że kule $B_{L^2}(\bar{u}_{k,l}, \sqrt{r_{\varepsilon,n}})$, $k = 1,\ldots,m_\varepsilon$, $l = 1,\ldots,n_\delta$ stanowią skończone pokrycie zbioru R_n. Stąd wnioskujemy, że $\beta_{L^2}(R_n) \leq \sqrt{r_{\varepsilon,n}}$ dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i w konsekwencji,

$$\beta_{L^2}(R_n) \leq (e^{-2at}(\beta_{L^2}(Z))^2 + \alpha_n)^{1/2}. \tag{2.25}$$

Łącząc (2.24) oraz (2.25) dostajemy

$$\beta_{L^2}(\mathbf{\Psi}_t(Z \times [0,1])) \le (e^{-2at}(\beta_{L^2}(Z))^2 + \alpha_n)^{1/2} \text{ dla } n \ge 1.$$

Ostatecznie, przechodząc do granicy z $n \to +\infty$ otrzymujemy żądaną nierówność, gdyż $\alpha_n \to 0^+$.

(ii) Weźmy dowolny ciąg (w_n) w $\mathbf{\Psi}_t(Z \times [0,1])$. Wówczas istnieją ciągi $(\bar{u}_n)$ w Z oraz (μ_n) w $[0,1]$ takie, że dla $n \ge 1$, $w_n = \mathbf{\Psi}_t(\bar{u}_n, \mu_n)$. Bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy założyć, że $\mu_n \to \mu_0$, gdy $n \to +\infty$, dla pewnego $\mu_0 \in [0,1]$. Ponieważ $(\bar{u}_n)$ jest ciągiem ograniczonym w $H^1(\mathbb{R}^N)$, na mocy twierdzenia Eberleina-Šmuliana[1] wnioskujemy, że posiada on podciąg, ponownie oznaczony przez $(\bar{u}_n)$, słabo zbieżny w $H^1(\mathbb{R}^N)$ do pewnego $\bar{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Dalej, ponieważ zbiór Z jest relatywnie zwarty w $L^2(\mathbb{R}^N)$, możemy założyć, że $\bar{u}_n \to \bar{u}$ w $L^2(\mathbb{R}^N)$, gdy $n \to +\infty$. Zatem, na mocy uwagi 2.2.3 wnosimy, że $\mathbf{\Psi}_t(\bar{u}_n, \mu_n) \to \mathbf{\Psi}_t(\bar{u}, \mu_0)$ w $H^1(\mathbb{R}^N)$, co kończy dowód.

(iii) Z faktu, że $Z \subset \overline{\mathrm{conv}}^{H^1} \mathbf{\Psi}_t(Z \times [0,1]) \subset \overline{\mathrm{conv}}^{L^2} \mathbf{\Psi}_t(Z \times [0,1])$ wynika, że

$$\beta_{L^2}(Z) \le \beta_{L^2}(\mathbf{\Psi}_t(Z \times [0,1])). \tag{2.26}$$

Dalej, na mocy punktu (i),

$$\beta_{L^2}(\mathbf{\Psi}_t(Z \times [0,1])) \le e^{-at}\beta_{L^2}(Z). \tag{2.27}$$

Łącząc (2.26) i (2.27) wnioskujemy, że $\beta_{L^2}(Z) = 0$, tzn. zbiór Z jest relatywnie zwarty w $L^2(\mathbb{R}^N)$. Zatem, na mocy punktu (ii) wiadomo, że zbiór $\mathbf{\Psi}_t(Z \times [0,1])$ jest relatywnie zwarty w $H^1(\mathbb{R}^N)$, co kończy dowód. □

2.3 Indeks punktów stałych operatora przesunięcia dla równań liniowych

Zajmiemy się teraz wyznaczeniem indeksu punktów stałych operatora przesunięcia wzdłuż trajektorii stowarzyszonego z równaniem liniowym

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u(x,t) + V(x)u(x,t), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^N, \\ u(\cdot,t) \in H^1(\mathbb{R}^N),\ t \ge 0, \end{cases}$$

[1] Przypomnijmy, że twierdzenie Eberleina-Šmuliana mówi, że przestrzeń Banacha X jest refleksywna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy ciąg ograniczony w X posiada podciąg słabo zbieżny. Dowód można znaleźć w [70, str. 141] oraz [29, Thm. 9.8.1].

w którym V jest funkcją postaci $V = V_0 - V_\infty$, gdzie $V_0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$, ($p$ jest jak w (3)), $V_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ oraz $V_\infty \geq \bar{v}_\infty > 0$ dla pewnej liczby rzeczywistej $\bar{v}_\infty$. Określmy liniowy operator $\mathbf{A}_0 : D(\mathbf{A}_0) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ wzorem

$$\mathbf{A}_0 u := -\Delta u \text{ dla } u \in D(\mathbf{A}_0) := H^2(\mathbb{R}^N).$$

Wówczas $\mathbf{A}_0$ jest dodatnim, samosprzężonym operatorem sektorialnym. Niech dalej $\mathbf{V}_0 : D(\mathbf{V}_0) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ będzie operatorem danym wzorem

$$\mathbf{V}_0 u := V_0 u \text{ dla } u \in D(\mathbf{V}_0) := H^1(\mathbb{R}^N)$$

oraz zdefiniujmy $\mathbf{V}_\infty : L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ kładąc

$$\mathbf{V}_\infty u := V_\infty u.$$

Uwaga 2.3.1. Zauważmy, że dla dowolnego $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, na mocy nierówności Höldera oraz lematu 1.4.5 mamy

$$\|\mathbf{V}_0 u\|_{L^2} \leq \|V_0\|_{L^p} \|u\|_{L^{2p/(p-2)}} \leq C_2 \|V_0\|_{L^p} \|u\|_{H^1},$$

gdzie stała $C_2 > 0$ jest jak w lemacie 1.4.5 oraz

$$\|\mathbf{V}_\infty u\|_{L^2} \leq \|V_\infty\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2} \leq \|V_\infty\|_{L^\infty} \|u\|_{H^1}.$$

Stąd wnosimy, że operator $\mathbf{V} := \mathbf{V}_0 - \mathbf{V}_\infty \in \mathcal{L}(H^1(\mathbb{R}^N), L^2(\mathbb{R}^N))$ jest liniowym, domkniętym operatorem, a zatem na mocy twierdzenia 5.7.10, operator

$$\mathbf{A} := \mathbf{A}_0 - \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_\infty$$

jest operatorem sektorialnym.

Oznaczmy przez $\{e^{-t\mathbf{A}} : L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)\}_{t \geq 0}$ C_0-półgrupę operatorów liniowych generowanych przez $-\mathbf{A}$.

W naszych rozważaniach wykorzystamy następujący lemat, stanowiący uzupełnienie (dla wymiarów $N = 1, 2$) wyniku Prizziego (patrz [58, Lemma 3.1]), który zakładał, że $N \geq 3$.

Lemat 2.3.2. *Przy powyższych oznaczeniach operator*

$$\mathbf{V}_0(\mathbf{A}_0 + \mathbf{V}_\infty)^{-1} : L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$$

jest zwarty.

Dowód. Pokażemy najpierw, że operator $(\mathbf{A}_0 + \mathbf{V}_\infty)^{-1} : L^2(\mathbb{R}^N) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ jest poprawnie określony i ograniczony. W tym celu zdefiniujmy formę dwuliniową $B : H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ wzorem

$$B(u,v) := (\nabla u, \nabla v)_{L^2} + (V_\infty u, v)_{L^2}, \qquad u,v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Wówczas B spełnia założenia twierdzenia Laxa-Milgrama (patrz Dodatek, twierdzenie 5.5.2). Istotnie, na mocy nierówności Cauchy'ego-Schwarza dla dowolnych $u,v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ mamy

$$|B(u,v)| \le \|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2} + \|V_\infty\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \le (1 + \|V_\infty\|_{L^\infty})\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$$

oraz, dla $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$,

$$B(u,u) \ge (\nabla u, \nabla u)_{L^2} + \bar{v}_\infty (u,u)_{L^2} \ge C\|u\|^2_{H^1}, \tag{2.28}$$

gdzie $C := \min\{1, \bar{v}_\infty\}$. Weźmy teraz dowolny $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ i określmy $F : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ wzorem $F(v) := (f,v)_{L^2}$, $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Ponieważ, stosując nierówność Cauchy'ego-Schwarza, mamy

$$(f,v)_{L^2} \le \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \le \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1}, \;\; f \in L^2(\mathbb{R}^N), \;\; v \in H^1(\mathbb{R}^N), \tag{2.29}$$

więc widzimy, że F jest ograniczonym funkcjonałem liniowym na $H^1(\mathbb{R}^N)$. Na mocy twierdzenia Laxa-Milgrama wnosimy więc, że istnieje dokładnie jeden element $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ taki, że dla wszystkich $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ zachodzi równość

$$B(u,v) = (f,v)_{L^2},$$

co oznacza że u jest jedynym, słabym rozwiązaniem zagadnienia

$$-\Delta u + V_\infty u = f \tag{2.30}$$

i $(\mathbf{A}_0 + \mathbf{V}_\infty)^{-1}$ jest poprawnie określony. Korzystając z tego faktu oraz łącząc (2.28) i (2.29) widzimy, że

$$\|(\mathbf{A}_0 + \mathbf{V}_\infty)^{-1} f\|_{H^1} = \|u\|_{H^1} \le \tilde{C}\|f\|_{L^2},$$

dla pewnej stałej $\tilde{C} > 0$, co dowodzi ograniczoności operatora $(\mathbf{A}_0 + \mathbf{V}_\infty)^{-1}$.

Dla dowodu zwartości operatora $\mathbf{V}_0(\mathbf{A}_0 + \mathbf{V}_\infty)^{-1} : L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ wystarczy wziąć ograniczony ciąg (u_n) w $H^1(\mathbb{R}^N)$ i pokazać, że ciąg $(\mathbf{V}_0 u_n)$ posiada podciąg zbieżny w $L^2(\mathbb{R}^N)$ [1]. Dla dowolnego $m \geq 1$, oznaczmy przez χ_m funkcję charakterystyczną kuli $B(0,m)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^N$. Wówczas

$$\{\mathbf{V}_0 u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \{\chi_m \mathbf{V}_0 u_n + (1-\chi_m)\mathbf{V}_0 u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset W_m + R_m,$$

gdzie $R_m := \{\chi_m \mathbf{V}_0 u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ oraz $W_m := \{(1-\chi_m)\mathbf{V}_0 u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Weźmy dowolny $\epsilon > 0$. Zauważmy, że dla dowolnego $m \geq 1$, na mocy nierówności Höldera oraz lematu 1.4.5, mamy

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,m)} |V_0(x)u_n(x)|^2 dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,m)} |V_0(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{2/p} \|u_n\|^2_{L^{2p/(p-2)}} \\ &\leq C_2^2\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,m)} |V_0(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{2/p} \|u_n\|^2_{H^1},\end{aligned}$$

gdzie $C_2 > 0$ jest pewną stałą. Stąd i ograniczoności ciągu (u_n) w $H^1(\mathbb{R}^N)$ wnosimy, że istnieje $m \geq 1$ takie, że dla wszystkich $n \geq 1$,

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,m)} |V_0(x)u_n(x)|^2 dx \leq \epsilon.$$

W konsekwencji,

$$\beta_{L^2}(\{\mathbf{V}_0 u_n \mid n \in \mathbb{N}\}) \leq \beta_{L^2}(R_m) + \epsilon. \tag{2.31}$$

Dla wykazania, że $\beta_{L^2}(R_m) = 0$ szacujemy podobnie jak w dowodzie lematu 1.4.5. Załóżmy, że $N = 1$. Wówczas, ponieważ zbiór $\{\chi_m u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ jest ograniczonym podzbiorem przestrzeni $H^1(-m,m)$, więc na mocy twierdzenia Arzeli-Ascoliego, zbiór $\{\chi_m u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ jest relatywnie zwarty w $C([-m,m])$, tzn. ciąg $(\chi_m u_n)_{n\geq 1}$ zawiera podciąg, który ponownie oznaczamy przez $(\chi_m u_n)_{n\geq 1}$ taki, że $\chi_m u_n \to u$ w $C([-m,m])$, gdy $n \to +\infty$, dla pewnej funkcji $u \in C([-m,m])$. Ponieważ, dla dowolnego $m \geq 1$, na mocy nierówności Höldera i nierówności interpolacyjnej,

$$\begin{aligned}&\left(\int_{(-m,m)} |V_0(x)u_n(x) - V_0(x)u(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \\ &\qquad\leq \left(\int_{(-m,m)} |V_0(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \|u_n - u\|_{L^{\frac{2p}{p-2}}(-m,m)} \\ &\qquad\leq \left(\int_{(-m,m)} |V_0(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \|u_n - u\|^{1-2/p}_{L^2(-m,m)} \|u_n - u\|^{2/p}_{L^\infty(-m,m)},\end{aligned}$$

więc wnosimy, że dla dowolnego $m \geq 1$, zbiór R_m jest relatywnie zwarty w przestrzeni $L^2(-m,m)$, co razem z (2.31) i dowolnością $\epsilon > 0$ dowodzi tezy dla $N = 1$.

[1] Zauważmy, że wobec ograniczoności operatora $(\mathbf{A}_0 + \mathbf{V}_\infty)^{-1} : L^2(\mathbb{R}^N) \to H^1(\mathbb{R}^N)$, dla dowolnego ograniczonego ciągu (u_n) w $L^2(\mathbb{R}^N)$, ciąg $((\mathbf{A}_0 + \mathbf{V}_\infty)^{-1} u_n)$ jest ograniczony w $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Przypuśćmy teraz, że $N \geq 2$. Ponieważ dla dowolnego $m \geq 1$, zbiór $\{\chi_m u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ jest ograniczonym podzbiorem przestrzeni $H^1(B(0,m))$, więc na mocy twierdzenia Rellicha-Kondraszowa ciąg $(\chi_m u_n)_{n\geq 1}$ jest relatywnie zwarty w $L^2(B(0,m))$. Stąd oraz z twierdzenia Eberleina-Šmuliana wnosimy, że istnieje podciąg ciągu $(\chi_m u_n)_{n\geq 1}$, który ponownie oznaczamy przez $(\chi_m u_n)_{n\geq 1}$ taki, że $\chi_m u_n \to u$ w $L^2(B(0,m))$, gdy $n \to +\infty$ dla pewnego $u \in H^1(B(0,m))$. Zauważmy dalej, że dla dowolnego $m \geq 1$, w przypadku gdy $N = 2$ mamy

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{B(0,m)} |V_0(x)u_n(x) - V_0(x)u(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\\
&\qquad \leq \left(\int_{B(0,m)} |V_0(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \|u_n - u\|_{L^{\frac{2p}{p-2}}(B(0,m))}\\
&\qquad \leq \left(\int_{B(0,m)} |V_0(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \|u_n - u\|^{1-2q/(pq-2p)}_{L^2(B(0,m))} \|u_n - u\|^{2q/(pq-2p)}_{L^q(B(0,m))}\\
&\qquad \leq \tilde{C}_2\left(\int_{B(0,m)} |V_0(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \|u_n - u\|^{1-2q/(pq-2p)}_{L^2(B(0,m))} \|u_n - u\|^{2q/(pq-2p)}_{H^1(B(0,m))},
\end{aligned} \tag{2.32}$$

gdzie $q \in (\frac{2p}{p-2}, +\infty)$ oraz $\tilde{C}_2 > 0$ jest stałą z nierówności $\|u\|_{L^q} \leq \tilde{C}_2\|u\|_{H^1}$, zaś dla $N \geq 3$

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{B(0,m)} |V_0(x)u_n(x) - V_0(x)u(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\\
&\qquad \leq \left(\int_{B(0,m)} |V_0(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \|u_n - u\|^{N/p}_{L^{\frac{2N}{N-2}}(B(0,m))} \|u_n - u\|^{1-N/p}_{L^2(B(0,m))}\\
&\qquad \leq \tilde{C}_N\left(\int_{B(0,m)} |V_0(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \|u_n - u\|^{N/p}_{H^1(B(0,m))} \|u_n - u\|^{1-N/p}_{L^2(B(0,m))},
\end{aligned} \tag{2.33}$$

gdzie stała $\tilde{C}_N > 0$ jest taka, że $\|u\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}} \leq \tilde{C}_N\|u\|_{H^1}$. Nierówności (2.32) i (2.33) implikują, odpowiednio w przypadku $N = 2$ i $N \geq 3$, że również zbiór R_m jest relatywnie zwarty w przestrzeni $L^2(B(0,m))$. To razem z (2.31) kończy dowód. □

Uwaga 2.3.3. Ponieważ $\mathbf{A}_0$ jest samosprzężonym, dodatnim operatorem, więc $\sigma(\mathbf{A}_0 + \mathbf{V}_\infty) \subset [\bar{v}_\infty, +\infty)$. Co więcej, z lematu 2.3.2 mamy, że $\mathbf{V}_0(\mathbf{A}_0 + \mathbf{V}_\infty)^{-1}$ jest operatorem zwartym, więc na mocy twierdzenia Weyl'a (patrz Dodatek, twierdzenie 5.5.3) wnosimy, że

$$\sigma_{ess}(\mathbf{A}) = \sigma_{ess}(\mathbf{A}_0 + \mathbf{V}_\infty) \subset \sigma(\mathbf{A}_0 + \mathbf{V}_\infty) \subset [\bar{v}_\infty, +\infty). \tag{2.34}$$

Korzystając teraz z sektorialnosci operatora $\mathbf{A}$ wnioskujemy, że

$$\sigma(\mathbf{A}) \subset (-c, +\infty) \tag{2.35}$$

dla pewnego $c > 0$. Łącząc (2.34) i (2.35) stwierdzamy, że zbiór $\sigma(\mathbf{A}) \cap (-\infty, 0)$ jest ograniczony i składa się z izolowanych wartości własnych o skończonej krotności[1].

Twierdzenie 2.3.4. *Niech $R > 0$ oraz załóżmy, że* $\mathrm{Ker}\mathbf{A} = \{0\}$. *Wówczas dla dowolnego $t > 0$,*

$$\mathrm{Ind}_{uc}(e^{-t\mathbf{A}}, B_{H^1}(0, R)) = (-1)^m,$$

gdzie Ind_{uc} *oznacza indeks punktów stałych dla klasy odwzorowań ostatecznie zwartych* [2]*, zaś m oznacza liczbę dodatnich wartości własnych operatora $-\mathbf{A}$ liczoną wraz z krotnościami*[3].

Dowód. Z uwagi 2.3.3 wynika, że możemy zastosować twierdzenie spektralne (patrz Dodatek, twierdzenie 5.8.4). Na jego mocy wnioskujemy, że istnieją domknięte podprzestrzenie X_- i X_+ przestrzeni $L^2(\mathbb{R}^N)$ o następujących własnościach: $X_- \oplus X_+ = L^2(\mathbb{R}^N)$, $\dim X_- < +\infty$, $\mathbf{A}(X_-) \subset X_-$, $\mathbf{A}(D(\mathbf{A}) \cap X_+) \subset X_+$, $\sigma(\mathbf{A}|_{X_-}) = \sigma(\mathbf{A}) \cap (-\infty, 0)$, $\sigma(\mathbf{A}|_{X_+}) = \sigma(\mathbf{A}) \cap (0, +\infty)$.
Ustalmy $t > 0$. Definiujemy homotopię $\mathbf{\Theta}_t : H^1(\mathbb{R}^N) \times [0, 1] \to H^1(\mathbb{R}^N)$ wzorem

$$\mathbf{\Theta}_t(\bar{u}, \mu) := (1 - \mu)e^{-t\mathbf{A}}\bar{u} + \mu e^{-t\mathbf{A}}\mathbf{P}_-\bar{u},$$

gdzie $\mathbf{P}_- : H^1(\mathbb{R}^N) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ jest projekcją ortogonalną na X_- w $L^2(\mathbb{R}^N)$. Ponieważ $\dim X_- < +\infty$ widzimy, że odwzorowanie $\mathbf{P}_-$ jest ciągłe.

Twierdzimy teraz, że $\mathbf{\Theta}_t$ jest odwzorowaniem ostatecznie zwartym. Aby tego dowieść weźmy ograniczony zbiór $W \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ o tej własności, że

$$W = \overline{\mathrm{conv}}^{H^1}\mathbf{\Theta}_t(W \times [0, 1]).$$

Powyższa równość implikuje, że $W \subset \overline{\mathrm{conv}}^{H^1} e^{-t\mathbf{A}}(W \cup \mathbf{P}_-W)$, a ponieważ $W \cup \mathbf{P}_-W$ jest zbiorem ograniczonym, z twierdzenia 2.2.4 (i) jest on relatywnie zwarty w $L^2(\mathbb{R}^N)$. Zatem z twierdzenia 2.2.4 (ii) wynika, że $e^{-t\mathbf{A}}(W \cup \mathbf{P}_-W)$ jest relatywnie zwarty w $H^1(\mathbb{R}^N)$, a stąd wnosimy, że W jest zwarty w $H^1(\mathbb{R}^N)$, co dowodzi ostatecznej zwartości $\mathbf{\Theta}_t$. Co więcej zauważmy, że

$$\mathrm{Ker}(I - \mathbf{\Theta}_t(\cdot, \mu)) = \{0\} \text{ dla } \mu \in [0, 1]. \tag{2.36}$$

[1] Informacja na temat charakteryzacji spektrum istotnego gęsto określonych, domkniętych operatorów liniowych zawarta jest w Dodatku - patrz str. 110.

[2] patrz Dodatek - str. 121.

[3] patrz Dodatek - str 109.

Istotnie, przypuśćmy że

$$(1-\mu)e^{-t\mathbf{A}}\bar{u} + \mu e^{-t\mathbf{A}}\mathbf{P}_{-}\bar{u} = \bar{u} \tag{2.37}$$

dla pewnych $\bar{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ i $\mu \in [0,1]$. Ponieważ $\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2$ dla pewnych $\bar{u}_1 \in X_-$ i $\bar{u}_2 \in X_+ \cap H^1(\mathbb{R}^N)$ oraz $\mathbf{P}_-\bar{u} = \bar{u}_1$, więc z (2.37) wynika, że

$$e^{-t\mathbf{A}}\bar{u}_1 + (1-\mu)e^{-t\mathbf{A}}\bar{u}_2 = \bar{u}_1 + \bar{u}_2.$$

Korzystając z faktu, że $e^{-t\mathbf{A}}\bar{u}_1 \subset X_-$ oraz $(1-\mu)e^{-t\mathbf{A}}\bar{u}_2 \subset X_+$ oraz jednoznaczności rozkładu wnosimy, że $e^{-t\mathbf{A}}\bar{u}_1 = \bar{u}_1$ oraz $(1-\mu)e^{-t\mathbf{A}}\bar{u}_2 = \bar{u}_2$. Z pierwszej równości wynika natychmiast, że $\bar{u}_1 = 0$, gdyż $\mathrm{Ker}(e^{-t\mathbf{A}} - I) = \mathrm{Ker}\mathbf{A}$ (patrz wniosek 5.8.2). W przypadku, gdy $\mu = 0$ lub $\mu = 1$, druga równość implikuje $\bar{u}_2 = 0$. Jeżeli natomiast $\mu \in (0,1)$, to $\bar{u}_2 \in \mathrm{Ker}(e^{-t\mathbf{A}} - \frac{1}{1-\mu})$. Ponieważ (patrz Dodatek, twierdzenie 5.8.1)

$$\mathrm{Ker}\left(e^{-t\mathbf{A}} - \frac{1}{1-\mu}I\right) = \mathrm{Ker}\left(\frac{1}{t}\ln\frac{1}{1-\mu}I + \mathbf{A}\right),$$

więc stąd wynika, że istnieje $\lambda < 0$ taka, że $\mathbf{A}\bar{u}_2 = \lambda\bar{u}_2$. Stąd wnioskujemy, że $\bar{u}_2 = 0$, gdyż $\sigma(\mathbf{A}|_{X_+}) = \sigma(\mathbf{A}) \cap (0,+\infty)$. To dowodzi (2.37).

Zatem $\mathbf{\Theta}_t$ jest dopuszczalną homotopią w teorii indeksu punktów stałych dla klasy odwzorowań ostatecznie zwartych. Na mocy własności homotopijnej niezmienniczości indeksu punktów stałych oraz własności obcinania (patrz Dodatek, str. 120) indeksu punktów stałych dla odwzorowań zwartych[1], otrzymujemy dla $R > 0$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_{uc}(e^{-t\mathbf{A}}, B_{H^1}(0,R)) &= \mathrm{Ind}_{LS}(e^{-t\mathbf{A}}\mathbf{P}_-, B_{H^1}(0,R)) \\ &= \mathrm{Ind}_{LS}(e^{-t(\mathbf{A}|_{X_-})}, B_{H^1}(0,R) \cap X_-).\end{aligned}$$

Ponieważ zbiór $\sigma(\mathbf{A}|_{X_-}) \subset (-\infty, 0)$ składa się z izolowanych wartości własnych o skończonej krotności, więc

$$\mathrm{Ind}_{LS}(e^{-t(\mathbf{A}|_{X_-})}, B_{H^1}(0,R) \cap X_-) = (-1)^m,$$

co kończy dowód twierdzenia. □

[1] Patrz uwaga 5.9.3.

2.4 Indeks punktów stałych operatora przesunięcia dla równań nieliniowych

Przejdźmy teraz do wyznaczenia indeksu punktów stałych operatora przesunięcia wzdłuż trajektorii stowarzyszonego z autonomicznym równaniem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u(x,t) + f(x,u(x,t)),\ x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0, \\ u(\cdot,t) \in H^1(\mathbb{R}^N),\ t \geq 0, \end{cases} \tag{2.38}$$

gdzie $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest odwzorowaniem spełniającym dla wszystkich $u, v \in \mathbb{R}$ i p.w. $x \in \mathbb{R}^N$, następujące warunki:

$$f(\cdot,0) \text{ jest mierzalna oraz } |f(x,0)| \leq m_0(x), \tag{2.39}$$

dla pewnego $m_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$,

$$|f(x,u) - f(x,v)| \leq l(x)|u - v|, \tag{2.40}$$

gdzie $l := l_0 + l_\infty$, $l_0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$, p jest jak w warunku (3), $l_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ oraz

$$(f(x,u) - f(x,v))(u - v) \leq -a|u - v|^2 + b(x)|u - v|^2, \tag{2.41}$$

dla pewnych $a > 0$ i $b \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

Twierdzenie 2.4.1. *Załóżmy, że* $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *spełnia warunki* (2.39), (2.40) *i* (2.41) *oraz niech* $\mathbf{\Phi}_t : H^1(\mathbb{R}^N) \to H^1(\mathbb{R}^N)$, $t > 0$, *będzie operatorem przesunięcia wzdłuż trajektorii stowarzyszonym z równaniem* (2.38)[1].
(i) *Przypuśćmy, że dla p.w.* $x \in \mathbb{R}^N$

$$\lim_{|u|\to\infty} \frac{f(x,u)}{u} = \omega(x) := \omega_0(x) - \omega_\infty(x), \tag{2.42}$$

gdzie $\omega_0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $\omega_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *i* $\omega_\infty(x) \geq \bar{\omega}_\infty$ *dla p.w.* $x \in \mathbb{R}^N$ *oraz pewnej liczby rzeczywistej* $\bar{\omega}_\infty > 0$. *Załóżmy również, że* $\mathrm{Ker}(\Delta + \omega) = \{0\}$. *Wówczas istnieje* $R_0 > 0$ *takie, że równanie*

$$-\Delta u(x) = f(x,u(x)),\ x \in \mathbb{R}^N, \tag{2.43}$$

nie posiada rozwiązań $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *o tej własności, że* $\|u\|_{H^1} \geq R_0$ *oraz istnieje* $\bar{t} > 0$ *takie, że dla wszystkich* $t \in (0,\bar{t}]$ *oraz* $\bar{u} \in \partial B_{H^1}(0,R_0)$, $\mathbf{\Phi}_t(\bar{u}) \neq \bar{u}$. *Ponadto, dla wszystkich* $t \in (0,\bar{t}]$,

$$\mathrm{Ind}_{uc}(\mathbf{\Phi}_t, B_{H^1}(0,R_0)) = (-1)^{m(\infty)},$$

[1] Zauważmy, że na mocy uwagi 1.4.6, $\mathbf{\Phi}_t$ jest poprawnie określony.

gdzie $m(\infty)$ jest liczbą dodatnich wartości własnych operatora $\Delta + \omega$ liczoną wraz z krotnościami.

(ii) *Przypuśćmy, że dla p.w. $x \in \mathbb{R}^N$*

$$\lim_{u \to 0} \frac{f(x,u)}{u} = \alpha(x) := \alpha_0(x) - \alpha_\infty(x), \tag{2.44}$$

gdzie $\alpha_0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $\alpha_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ i $\alpha_\infty(x) \geq \bar{\alpha}_\infty$ dla p.w. $x \in \mathbb{R}^N$ oraz pewnej liczby rzeczywistej $\bar{\alpha}_\infty > 0$. Załóżmy również, że $\mathrm{Ker}(\Delta + \alpha) = \{0\}$. Wówczas istnieje $r_0 > 0$ takie, że równanie (2.43) nie posiada rozwiązań $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ o tej własności, że $0 < \|u\|_{H^1} \leq r_0$ oraz istnieje $\bar{t} > 0$ takie, że dla wszystkich $t \in (0, \bar{t}]$ oraz $\bar{u} \in \partial B_{H^1}(0, r_0)$, $\mathbf{\Phi}_t(\bar{u}) \neq \bar{u}$. Ponadto, dla wszystkich $t \in (0, \bar{t}]$,

$$\mathrm{Ind}_{uc}(\mathbf{\Phi}_t, B_{H^1}(0, r_0)) = (-1)^{m(0)},$$

gdzie $m(0)$ jest liczbą dodatnich wartości własnych operatora $\Delta + \alpha$ liczoną wraz z krotnościami.

W dowodzie wykorzystamy następujący fakt, który ze względu na późniejsze zastosowanie, sformułujemy w ogólniejszej, nieautonomicznej wersji.

Stwierdzenie 2.4.2. *Załóżmy, że odwzorowania $f_n : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \geq 0$ spełniają założenia: (1.17) dla pewnego $T > 0$, (1.18) ze wspólną m_0, (1.19) ze wspólną l oraz (1.20) ze wspólnymi a i b, $f_n(t,x,u) \to f_0(t,x,u)$, gdy $n \to +\infty$ dla wszystkich $t \geq 0$, $u \in \mathbb{R}$ i $x \in \mathbb{R}^N$ oraz dla $t \geq 0$, $f_n(t,\cdot,0) \to f_0(t,\cdot,0)$ w $L^2(\mathbb{R}^N)$, gdy $n \to +\infty$. Wówczas, dla dowolnego ograniczonego ciągu $(\bar{u}_n)$ w $H^1(\mathbb{R}^N)$, ciągu (λ_n) w $(0, +\infty)$ takiego, że $\lambda_n \to 0^+$, gdy $n \to +\infty$ oraz ciągu rozwiązań $u_n : [0, +\infty) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ zagadnienia*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f_n(t/\lambda_n, x, u),\ x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0, \\ u(x,0) = u(x, \lambda_n T) = \bar{u}_n(x),\ \ x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

istnieje podciąg $(\bar{u}_{n_k})$ ciągu $(\bar{u}_n)$ zbieżny w $H^1(\mathbb{R}^N)$ do pewnego $\bar{u}_0 \in H^2(\mathbb{R}^N)$ będącego słabym rozwiązaniem równania

$$\Delta u(x) + \widehat{f}_0(x, u(x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Ponadto, $u_{n_k}(t) \to \bar{u}_0$ w $H^1(\mathbb{R}^N)$, gdy $k \to +\infty$, jednostajnie względem t należących do zwartych podzbiorów przedziału $[0, +\infty)$.

Dowód. Dla $n \geq 0$ definiujemy odwzorowania $\mathbf{F}_n : [0, +\infty) \times H^1(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ kładąc $[\mathbf{F}_n(t,u)](x) := f_n(t, x, u(x))$. Wówczas, dla $n \geq 1$, funkcje $u_n : [0, +\infty) \to$

$H^1(\mathbb{R}^N)$ są rozwiązaniami zagadnienia

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = -\mathbf{A}u(t) + \mathbf{F}_n(t/\lambda_n, u, \mu_n), \ t > 0, \\ u_n(0) = u_n(\lambda_n T) = \bar{u}_n, \end{cases}$$

w którym $\mathbf{A}u := -\Delta u$ dla $u \in D(\mathbf{A}) := H^2(\mathbb{R}^N)$. Korzystając z twierdzenia 1.4.4 otrzymujemy istnienie stałej $C > 0$ takiej, że dla wszystkich $t \geq 0$, $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ i $n \geq 1$

$$\|\mathbf{F}_n(t,u)\|_{L^2} \leq C(1 + \|u\|_{H^1}).$$

Zatem, na mocy lematu 1.1.7 stwierdzamy, że $\|u_n(t)\|_{H^1} \leq R$ dla wszystkich $t \geq 0$, $n \geq 1$ oraz pewnej stałej $R > 0$. Ustalmy dowolne $M > 0$. Dla $n \geq 1$ weźmy $k_n \in \mathbb{N}$ takie, że $k_n \lambda_n T > M$. Z lematu 2.1.2, dla wszystkich $m \geq 1$ i $n \geq 1$ mamy,

$$\|(1-\chi_m)\bar{u}_n\|_{L^2}^2 = \|(1-\chi_m)u_n(k_n\lambda_n T)\|_{L^2}^2 \leq R^2 e^{-2ak_n\lambda_n T} + \alpha_m \leq R^2 e^{-2aM} + \alpha_m,$$

gdzie χ_m jest funkcją charakterystyczną kuli $B(0,m)$ w $\mathbb{R}^N$ oraz $\alpha_m \to 0^+$, gdy $m \to +\infty$. Z dowolności $M > 0$ wnioskujemy, że $\|(1-\chi_m)\bar{u}_n\|_{L^2} \leq \sqrt{\alpha_m}$ dla wszystkich $m, n \geq 1$. Dalej, z twierdzenia Rellicha-Kondraszowa, dla dowolnego $m \geq 1$, zbiór $\{\chi_m \bar{u}_n\}_{n\geq 1}$ jest relatywnie zwarty w $L^2(\mathbb{R}^N)$, zatem $\{\bar{u}_n\}_{n\geq 1}$ jest relatywnie zwarty w $L^2(\mathbb{R}^N)$, a ponieważ $(\bar{u}_n)$ jest ograniczony w $H^1(\mathbb{R}^N)$, więc stosując twierdzenie Eberleina-Šmuliana, otrzymujemy istnienie podciągu $(\bar{u}_{n_k})$ ciągu $(\bar{u}_n)$ zbieżnego w $L^2(\mathbb{R}^N)$ do pewnego $\bar{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$. A zatem, z twierdzenia 1.3.1, $u_{n_k}(t) \to \widehat{u}(t)$ w $H^1(\mathbb{R}^N)$, gdy $k \to +\infty$, jednostajnie względem t należących do zwartych podzbiorów przedziału $(0, +\infty)$, gdzie $\widehat{u} : [0,+\infty) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ jest rozwiązaniem równania

$$\dot{u}(t) = -\mathbf{A}u(t) + \widehat{\mathbf{F}}_0(u), \ t > 0,$$

w którym $\widehat{\mathbf{F}}_0 : H^1(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ jest zadane wzorem

$$\widehat{\mathbf{F}}_0(u) := \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{F}_0(t,u)\,\mathrm{d}t \text{ dla } u \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Z uwagi 1.4.10 mamy, dla $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ i p.w. $x \in \mathbb{R}^N$,

$$[\widehat{\mathbf{F}}_0(u)](x) = \widehat{f}_0(x, u(x)).$$

Zatem, dla dowolnego $t > 0$, kładąc $k_n := [t/\lambda_n T]$, $n \geq 1$ mamy

$$\bar{u}_{n_k} = u_{n_k}(0) = u_{n_k}(k_n\lambda_n T) \to \widehat{u}(t) \ \text{ w } H^1(\mathbb{R}^N), \text{ gdy } k \to +\infty.$$

W konsekwencji, $\bar{u}_{n_k} \to \bar{u}_0$ w $H^1(\mathbb{R}^N)$, $\widehat{u}(t) = \widehat{u}(0) = \bar{u}_0$ oraz $u_{n_k}(t) \to \bar{u}_0$, gdy $k \to +\infty$, jednostajnie względem t ze zwartych podzbiorów $[0, +\infty)$, co kończy dowód. □

Dowód twierdzenia 2.4.1. (i) Pokażemy najpierw, że istnieje stała $R_0 > 0$ taka, że zagadnienie

$$0 = \Delta u + (1-\mu)f(x,u) + \mu\omega(x)u,\ x \in \mathbb{R}^N, \mu \in [0,1], \tag{2.45}$$

nie posiada rozwiązań w $H^1(\mathbb{R}^N) \setminus B_{H^1}(0, R_0)$. Będziemy rozumować przez sprzeczność. A więc przypuśćmy, że nie jest to prawdą. Wówczas istnieją ciąg (μ_n) w $[0,1]$ oraz ciąg rozwiązań $\bar{u}_n$, $n \geq 1$, równania (2.45) z $\mu := \mu_n$ taki, że $\|\bar{u}_n\|_{H^1} \to +\infty$, gdy $n \to +\infty$. Połóżmy $\rho_n := 1 + \|\bar{u}_n\|_{H^1}$ i niech $\bar{v}_n := \bar{u}_n/\rho_n$. Z definicji ciągu (ρ_n) widzimy, że $\rho_n \to +\infty$, gdy $n \to +\infty$. Wówczas dla każdego $n \geq 1$, $\bar{v}_n$ jest rozwiązaniem

$$0 = \Delta v + f_n(x,v),\ x \in \mathbb{R}^N,$$

gdzie, dla $n \geq 1$, funkcje $f_n : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są określone wzorem

$$f_n(x,v) := (1-\mu_n)\rho_n^{-1} f(x, \rho_n v) + \mu_n \omega(x)v,\ x \in \mathbb{R}^N, v \in \mathbb{R}.$$

Ponieważ, dla $n \geq 1$, f_n spełniają założenia (2.39), (2.40) i (2.41)[1] ze wspólnymi m_0, l, a i b, niezależnymi od n, oraz na mocy (2.42),

$$f_n(x,v) \to \omega(x)v,\ \text{gdy } n \to +\infty \text{ dla wszystkich } v \in \mathbb{R} \text{ i p.w. } x \in \mathbb{R}^N$$

i $f_n(\cdot, 0) \to 0$ w $L^2(\mathbb{R}^N)$, gdy $n \to +\infty$, więc ze stwierdzenia 2.4.2 wnosimy, że ciąg $(\bar{v}_n)$ posiada podciąg zbieżny do pewnego $\bar{v}_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ będącego rozwiązaniem równania

$$0 = \Delta v + \omega(x)v,\ x \in \mathbb{R}^N \tag{2.46}$$

i takiego, że $\bar{v}_0 \neq 0$, gdyż z definicji ciągu $(\bar{v}_n)$ widać, że $\|\bar{v}_n\|_{H^1} \to 1$, gdy $n \to +\infty$. To przeczy założeniu $\mathrm{Ker}(\Delta + \omega) = \{0\}$, tym samym dowodząc, że (2.45) nie posiada rozwiązań poza pewną kulą $B_{H^1}(0, R_0)$.

Rozważmy teraz równanie

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + (1-\mu)f(x,u) + \mu\omega(x)u,\ x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0, \tag{2.47}$$

w którym $\mu \in [0,1]$ jest parametrem. Niech $\mathbf{\Psi}_t : H^1(\mathbb{R}^N) \times [0,1] \to H^1(\mathbb{R}^N)$, $t > 0$ będzie operatorem przesunięcia wzdłuż trajektorii związanym z powyższym równaniem. Udowodnimy, że istnieje $\bar{t} > 0$ takie, że

$$\mathbf{\Psi}_t(\bar{u}, \mu) \neq \bar{u} \quad \text{dla wszystkich} \quad t \in (0, \bar{t}],\ \mu \in [0,1] \text{ i } \bar{u} \in \partial B_{H^1}(0, R_0). \tag{2.48}$$

[1] Zauważmy, że warunki (2.39), (2.40) i (2.41) są autonomiczną wersją założeń, odpowiednio, (1.18), (1.19) i (1.20).

Przypuśćmy, że nie jest to prawdą. Wówczas istnieją ciągi (t_n) w $(0,+\infty)$, $(\bar{u}_n)$ w $\partial B_{H^1}(0,R_0)$ i (μ_n) w $[0,1]$ takie, że $t_n \to 0^+$, gdy $n \to +\infty$ oraz

$$\mathbf{\Psi}_{t_n}(\bar{u}_n,\mu_n) = \bar{u}_n \text{ dla } n \geq 1.$$

Z powyższej równości wynika, że dla każdego $n \geq 1$, istnieje rozwiązanie $u_n : [0,+\infty) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ zagadnienia

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f_n(x,u), \; x \in \mathbb{R}^N, \\ u(x,0) = u(x,\lambda_n) = \bar{u}_n(x), \;\; x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

w którym, dla $n \geq 1$, funkcje $f_n : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, są zadane wzorem

$$f_n(x,u) := (1-\mu_n)f(x,u) + \mu_n\omega(x)u, \;\; x \in \mathbb{R}^N, u \in \mathbb{R}$$

oraz $\lambda_n := t_n$. Zauważmy, że dla $n \geq 1$, f_n spełniają założenia (2.39), (2.40) i (2.41) ze wspólnymi m_0, l, a i b, niezależnymi od n. Bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy założyć, że $\mu_n \to \mu_0$, gdy $n \to +\infty$ dla pewnego $\mu_0 \in [0,1]$ i mamy dla $x \in \mathbb{R}^N$ i $u \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x,u) \to (1-\mu_0)f(x,u) + \mu_0\omega(x)u, \;\text{ gdy } n \to +\infty,$$

$f_n(\cdot,0) \to (1-\mu_0)f(\cdot,0)$ w $L^2(\mathbb{R}^N)$, oraz $\lambda_n \to 0^+$, gdy $n \to +\infty$. Zatem ze stwierdzenia 2.4.2 wynika, że $(\bar{u}_n)$ posiada podciąg, który ponownie oznaczamy przez $(\bar{u}_n)$ taki, że $\bar{u}_n \to \bar{u}_0$ w $H^1(\mathbb{R}^N)$, gdzie $\bar{u}_0 \in H^2(\mathbb{R}^N)$ jest rozwiązaniem

$$0 = \Delta u + (1-\mu_0)f(x,u) + \mu_0\omega(x)u, \;\; x \in \mathbb{R}^N$$

oraz $u_n(t) \to \bar{u}_0$ w $H^1(\mathbb{R}^N)$, gdy $n \to +\infty$, jednostajnie względem t ze zwartych podzbiorów $[0,+\infty)$. Jest to sprzeczne z faktem, że (2.45) nie posiada rozwiązań w $H^1(\mathbb{R}^N) \setminus B_{H^1}(0,R_0)$, tym samym dowodząc (2.48).

Korzystając z twierdzenia 2.2.4 (iii) stwierdzamy, że homotopia $\mathbf{\Psi}_t$ jest dopuszczalna w sensie teorii indeksu punktów stałych dla odwzorowań ostatecznie zwartych. Dlatego własność homotopijnej niezmienniczości indeksu punktów stałych implikuje, dla wszystkich $t \in (0,\bar{t}]$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}_{uc}(\mathbf{\Phi}_t, B_{H^1}(0,R_0)) &= \mathrm{Ind}_{uc}(\mathbf{\Psi}_t(\cdot,0), B_{H^1}(0,R_0)) = \mathrm{Ind}_{uc}(\mathbf{\Psi}_t(\cdot,1), B_{H^1}(0,R_0)) \\ &= \mathrm{Ind}_{uc}(e^{-t\mathbf{A}_\infty}, B_{H^1}(0,R_0)), \end{aligned} \tag{2.49}$$

gdzie $\mathbf{A}_\infty := \mathbf{A} - \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_\infty$, $\mathbf{A} := -\Delta$ oraz operatory $\mathbf{B}_0 : D(\mathbf{B}_0) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ z $D(\mathbf{B}_0) := H^1(\mathbb{R}^N)$ i $\mathbf{B}_\infty : L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ są zadane wzorem $\mathbf{B}_i u := \omega_i u$,

$i \in \{0, \infty\}$. Stosując uwagę 2.3.1 i twierdzenie 2.3.4[1] widzimy, że

$$\mathrm{Ind}_{uc}(e^{-t\mathbf{A}_\infty}, B_{H^1}(0, R_0)) = (-1)^{m(\infty)},$$

co razem z (2.49) kończy dowód (i).

(ii) Wykażemy najpierw, że istnieje $r_0 > 0$ takie, że równanie

$$0 = \Delta u + (1-\mu) f(x,u) + \mu\alpha(x) u,\ x \in \mathbb{R}^N, \mu \in [0,1], \tag{2.50}$$

nie posiada rozwiązań w $D_{H^1}(0, r_0) \setminus \{0\}$. Będziemy rozumować przez sprzeczność. Przypuśćmy, że nie jest to prawdą. Wówczas że istnieją ciąg (μ_n) w $[0,1]$ i ciąg $\bar{u}_n : [0, +\infty) \to H^1(\mathbb{R}^N)$, $n \geq 1$ rozwiązań (2.50) z $\mu := \mu_n$ taki, że $\|\bar{u}_n\|_{H^1} \to 0^+$ gdy $n \to +\infty$ oraz $\|\bar{u}_n\|_{H^1} \neq 0$, $n \geq 1$. Połóżmy $\rho_n := \|\bar{u}_n\|_{H^1}$. Wówczas, dla $n \geq 1$ funkcje $\bar{v}_n := \bar{u}_n / \rho_n$ są rozwiązaniami równania

$$0 = \Delta v + f_n(x, v),\ \ x \in \mathbb{R}^N,$$

gdzie, dla $n \geq 1$, funkcje $f_n : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są określone wzorem

$$f_n(x,v) := (1-\mu_n)\rho_n^{-1} f(x, \rho_n v) + \mu_n \alpha(x) v,\ x \in \mathbb{R}^N, v \in \mathbb{R}.$$

Ponieważ, dla $n \geq 1$, f_n spełniają założenia (2.39), (2.40) i (2.41) ze wspólnymi m_0, l, a i b, niezależnymi od n, oraz na mocy (2.44),

$$f_n(x,v) \to \alpha(x)v,\ \text{gdy } n \to +\infty \text{ dla wszystkich } v \in \mathbb{R} \text{ i p.w. } x \in \mathbb{R}^N$$

i $f_n(\cdot, 0) \to 0$ w $L^2(\mathbb{R}^N)$, gdy $n \to +\infty$, więc ze stwierdzenia 2.4.2 oraz faktu, że $\|\bar{v}_n\|_{H^1} = 1$ dla $n \geq 1$, wnioskujemy, że ciąg $(\bar{v}_n)$ posiada podciąg zbieżny do pewnego niezerowego rozwiązania równania

$$0 = \Delta v + \alpha(x) v,\ x \in \mathbb{R}^N,$$

co jest sprzeczne z założeniem $\mathrm{Ker}(\Delta + \alpha) = \{0\}$. Zatem istnieje $r_0 > 0$ takie, że (2.50) nie posiada rozwiązań $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ o tej własności, że $0 < \|u\|_{H^1} \leq r_0$.

Rozważmy teraz równanie

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + (1-\mu) f(x,u) + \mu\alpha(x) u,\ x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0, \tag{2.51}$$

---

[1]Ponieważ w uwadze 2.3.1 V_0 i V_∞ są dowolne, a ω_0 i ω_∞ spełniają dokładnie te same założenia, możemy skorzystać z twierdzenia 2.3.4.

w którym $\mu \in [0,1]$ jest parametrem. Niech $\mathbf{\Psi}_t : H^1(\mathbb{R}^N) \times [0,1] \to H^1(\mathbb{R}^N)$, $t > 0$ będzie operatorem przesunięcia wzdłuż trajektorii związanym z powyższym równaniem. Udowodnimy, że istnieje $\bar{t} > 0$ takie, że

$$\mathbf{\Psi}_t(\bar{u}, \mu) \neq \bar{u} \quad \text{dla wszystkich} \quad t \in (0, \bar{t}],\ \mu \in [0,1] \text{ i } \bar{u} \in \partial B_{H^1}(0, r_0). \tag{2.52}$$

Przypuśćmy, że nie jest to prawdą. Wówczas istnieją ciągi (t_n) w $(0, +\infty)$, $(\bar{u}_n)$ w $\partial B_{H^1}(0, r_0)$ i (μ_n) w $[0,1]$ takie, że $t_n \to 0^+$ gdy $n \to +\infty$ oraz

$$\mathbf{\Psi}_{t_n}(\bar{u}_n, \mu_n) = \bar{u}_n \text{ dla } n \geq 1.$$

Z powyższej równości wynika, że dla każdego $n \geq 1$, istnieje t_n-okresowe rozwiązanie $u_n : [0, +\infty) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ zagadnienia

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f_n(x, u),\ x \in \mathbb{R}^N, \\ u(x, 0) = u(x, \lambda_n) = \bar{u}_n(x),\ \ x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

w którym, dla $n \geq 1$, funkcje $f_n : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, są zadane wzorem

$$f_n(x, u) := (1 - \mu_n) f(x, u) + \mu_n \alpha(x) u,\ \ x \in \mathbb{R}^N, u \in \mathbb{R}$$

oraz $\lambda_n := t_n$. Zauważmy, że dla $n \geq 1$, f_n spełniają założenia (2.39), (2.40) i (2.41) ze wspólnymi m_0, l, a i b, niezależnymi od n. Bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy założyć, że $\mu_n \to \mu_0$, gdy $n \to +\infty$ dla pewnego $\mu_0 \in [0,1]$ i mamy dla $x \in \mathbb{R}^N$ i $u \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x, u) \to (1 - \mu_0) f(x, u) + \mu_0 \alpha(x) u,\ \text{ gdy } n \to +\infty,$$

$f_n(\cdot, 0) \to (1 - \mu_0) f(\cdot, 0) \equiv 0$ w $L^2(\mathbb{R}^N)$, oraz $\lambda_n \to 0^+$, gdy $n \to +\infty$. Zatem ze stwierdzenia 2.4.2 wynika, że $(\bar{u}_n)$ posiada podciąg, który ponownie oznaczamy przez $(\bar{u}_n)$ taki, że $\bar{u}_n \to \bar{u}_0$ w $H^1(\mathbb{R}^N)$, gdzie $\bar{u}_0 \in H^2(\mathbb{R}^N)$ jest rozwiązaniem

$$0 = \Delta u + (1 - \mu_0) f(x, u) + \mu_0 \alpha(x) u,\ \ x \in \mathbb{R}^N$$

oraz $u_n(t) \to \bar{u}_0$ w $H^1(\mathbb{R}^N)$, gdy $n \to +\infty$, jednostajnie względem t ze zwartych podzbiorów $[0, +\infty)$. Jest to sprzeczne z faktem, że (2.50) nie posiada rozwiązań w $D_{H^1}(0, r_0) \setminus \{0\}$, tym samym dowodząc (2.52).

Korzystając z twierdzenia 2.2.4 (iii) stwierdzamy, że homotopia $\mathbf{\Psi}_t$ jest dopuszczalna w sensie teorii indeksu punktów stałych dla odwzorowań ostatecznie zwartych. Dlatego własność homotopijnej niezmienniczości indeksu punktów stałych implikuje, dla wszystkich $t \in (0, \bar{t}]$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}_{uc}(\mathbf{\Phi}_t, B_{H^1}(0, r_0)) &= \mathrm{Ind}_{uc}(\mathbf{\Psi}_t(\cdot, 0), B_{H^1}(0, r_0)) = \mathrm{Ind}_{uc}(\mathbf{\Psi}_t(\cdot, 1), B_{H^1}(0, r_0)) \\ &= \mathrm{Ind}_{uc}(e^{-t\mathbf{A}_0}, B_{H^1}(0, r_0)), \end{aligned} \tag{2.53}$$

gdzie $\mathbf{A}_0 := \mathbf{A} - \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_\infty$, $\mathbf{A} := -\Delta$ oraz operatory $\mathbf{C}_0 : D(\mathbf{C}_0) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ z $D(\mathbf{C}_0) := H^1(\mathbb{R}^N)$ i $\mathbf{C}_\infty : L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ są zadane wzorem $\mathbf{C}_i u := \alpha_i u$, $i \in \{0, \infty\}$[1]. Stosując uwagę 2.3.1 i twierdzenie 2.3.4 widzimy, że

$$\mathrm{Ind}_{uc}(e^{-t\mathbf{A}_0}, B_{H^1}(0, r_0)) = (-1)^{m(0)},$$

co razem z (2.53) kończy dowód. □

Zastępując kulę $B_{H^1}(0, R_0)$ dowolnym, otwartym i ograniczonym zbiorem w $H^1(\mathbb{R}^N)$ i adaptując argumenty użyte w dowodzie (2.48) wnioskujemy, że ma miejsce następujacy fakt.

Wniosek 2.4.3. *Niech $U \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ będzie zbiorem otwartym i ograniczonym oraz niech $\mathbf{\Phi}_t : H^1(\mathbb{R}^N) \to H^1(\mathbb{R}^N)$, $t > 0$, będzie operatorem przesunięcia wzdłuż trajektorii dla*

$$\dot{u}(t) = -\mathbf{A}u(t) + \mathbf{F}(u(t)),\ t > 0,$$

gdzie $\mathbf{A}u := -\Delta u$ dla $u \in D(\mathbf{A}) := H^2(\mathbb{R}^N)$, zaś $\mathbf{F} : H^1(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ jest operatorem Niemyckiego wyznaczonym przez odwzorowanie f, które spełnia warunki (2.39), (2.40) i (2.41). Wówczas, jeżeli $-\mathbf{A}\bar{u} + \mathbf{F}(\bar{u}) \neq 0$ dla wszystkich $\bar{u} \in \partial U$, to istnieje $\bar{t} > 0$ takie, że dla wszystkich $t \in (0, \bar{t}]$ i $u \in \partial U$, $\mathbf{\Phi}_t(\bar{u}) \neq \bar{u}$.

Uwaga 2.4.4. Z powyższego wniosku wynika, że można zdefiniować stopień topologiczny pary $(\mathbf{A}, \mathbf{F})$ (lub odwzorowania $-\mathbf{A} + \mathbf{F}$) kładąc

$$\mathrm{Deg}((\mathbf{A}, \mathbf{F}), U) = \mathrm{Deg}(-\mathbf{A} + \mathbf{F}, U) := \lim_{t \to 0^+} \mathrm{Ind}_{uc}(\mathbf{\Phi_t}, U). \tag{2.54}$$

Można wykazać, że liczba zdefiniowana wzorem (2.54) jest poprawnie określona (indeksy $\mathrm{Ind}_{uc}(\mathbf{\Phi_t}, U)$ stabilizują się dla małych t) oraz spełnia standardowe własności stopnia topologicznego (patrz [16], [17], [20]).

[1] Ponieważ w uwadze 2.3.1 V_0 i V_∞ są dowolne, a α_0 i α_∞ spełniają dokładnie te same założenia, możemy skorzystać z twierdzenia 2.3.4.

Rozdział 3

Rozwiązania okresowe - przypadek nierezonansowy

Rozdział ten poświęcowy jest istnieniu T-okresowych rozwiązań nieautonomicznych równań różniczkowych cząstkowych postaci

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(t, x, u),\ x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0,$$

gdzie f jest odwzorowaniem asymptotycznie liniowym i dysypatywnym. Stosując metodę oszacowań reszt rozwiązań oraz metodę uśredniania dowodzę, że z rozwiązań stacjonarnych zagadnienia $-\Delta u = \widehat{f}(x, u)$, $x \in \mathbb{R}^N$, emanują gałęzie rozwiązań λT-okresowych zagadnienia

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(t/\lambda, x, u),\ x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0,$$

gdzie $\lambda \in (0, 1]$ jest parametrem. Pozwala to na otrzymanie wzoru indeksowego wyrażającego indeks punktów stałych operatora przesunięcia wzdłuż trajektorii dla wyjściowego równania względem kul w przestrzeni $H^1(\mathbb{R}^N)$ o dostatecznie dużym promieniu przy pomocy indeksu punktów stałych operatora przesunięcia wzdłuż trajektorii stowarzyszonego z uśrednionym równaniem automomicznym. Moje rozważania dotyczą przypadku braku rezonansu w 0 i ∞. Z technicznego punktu widzenia założenie to pozwala na zastosowanie metody kontynuacji wzdłuż parametru λ i wyznaczenie indeksu punktów stałych operatora przesunięcia dla równania uśrednionego. Otrzymany wzór indeksowy stosuję do uzyskania rozwiązań T-okresowych.

3.1 Nierezonansowa zasada uśredniania dla indeksu

Rozważmy rodzinę nieautonomicznych równań parabolicznych postaci

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u(x,t) + f\left(\dfrac{t}{\lambda}, x, u(x,t)\right), \ t > 0, \ \lambda > 0, \ x \in \mathbb{R}^N, \\ u(\cdot,t) \in H^1(\mathbb{R}^N), \ t > 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

gdzie $\lambda > 0$ jest parametrem, zaś $f : [0,+\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest odwzorowaniem spełniającym założenia (1.17), (1.18), (1.19) i (1.20). Zajmiemy się teraz zależnością pomiędzy indeksami punktów stałych operatora przesunięcia wzdłuż trajektorii stowarzyszonego z (3.1) oraz operatora przesunięcia wzdłuż trajektorii związanego z autonomicznym równaniem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u(x,t) + \widehat{f}(x, u(x,t)), \ t > 0, \ x \in \mathbb{R}^N, \\ u(\cdot,t) \in H^1(\mathbb{R}^N), \ t \geq 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

gdzie $\widehat{f} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest odzworowaniem zdefiniowanym wzorem

$$\widehat{f}(x,u) := \frac{1}{T} \int_0^T f(t,x,u) \, \mathrm{d}t, \ x \in \mathbb{R}^N, \ u \in \mathbb{R}.$$

Twierdzenie 3.1.1. *Niech $U \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ będzie zbiorem otwartym i ograniczonym oraz niech $\mathbf{\Phi}_t^{(\lambda)} : H^1(\mathbb{R}^N) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ i $\widehat{\mathbf{\Phi}}_t : H^1(\mathbb{R}^N) \to H^1(\mathbb{R}^N)$, $t > 0$ będą operatorami przesunięcia wzdłuż trajektorii (o czas t) stowarzyszonymi z równaniami, odpowiednio* (3.1) *i* (3.2). *Załóżmy ponadto, że równanie*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \widehat{f}(x, u(x)), \ x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{3.3}$$

nie posiada rozwiązań w ∂U. Wówczas istnieje $\lambda_0 > 0$ taka, że dla wszystkich $\lambda \in (0, \lambda_0]$ i $\bar{u} \in \partial U$, $\mathbf{\Phi}_{\lambda T}^{(\lambda)}(\bar{u}) \neq \bar{u}$, $\widehat{\mathbf{\Phi}}_{\lambda T}(\bar{u}) \neq \bar{u}$ oraz

$$\mathrm{Ind}_{uc}(\mathbf{\Phi}_{\lambda T}^{(\lambda)}, U) = \mathrm{Ind}_{uc}(\widehat{\mathbf{\Phi}}_{\lambda T}, U).$$

Dowód. Określmy $h : [0,+\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$ wzorem

$$h(t,x,u,\mu) := (1-\mu) f(t,x,u) + \mu \widehat{f}(x,u), \ t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N, u \in \mathbb{R}, \mu \in [0,1].$$

Wówczas, dla $\mu \in [0,1]$, $h(\cdot,\cdot,\cdot,\mu)$ spełnia warunki (1.17), (1.18), (1.19) i (1.20) z m_0, l, a i b, niezależnymi od μ. Zdefiniujmy operator $\mathbf{A} : D(\mathbf{A}) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ kładąc $\mathbf{A}u := -\Delta u$ dla $u \in D(\mathbf{A}) := H^2(\mathbb{R}^N)$ i niech $\mathbf{H} : [0,+\infty) \times H^1(\mathbb{R}^N) \times [0,1] \to L^2(\mathbb{R}^N)$ będzie dane wzorem

$$[\mathbf{H}(t,u,\mu)](x) := h(t,x,u(x),\mu) \text{ dla p.w. } x \in \mathbb{R}^N$$

oraz dowolnych $t > 0$, $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ i $\mu \in [0,1]$. Dla parametru $\lambda > 0$ rozważmy

$$\dot{u}(t) = -\mathbf{A}u(t) + \mathbf{H}(t/\lambda, u(t), \mu),\ t > 0, \tag{3.4}$$

oraz niech $\mathbf{\Psi}_t^{(\lambda)} : H^1(\mathbb{R}^N) \times [0,1] \to H^1(\mathbb{R}^N)$ będzie, zależnym od parametru, operatorem przesunięcia wzdłuż trajektorii dla tego zagadnienia danym wzorem

$$\mathbf{\Psi}_t^{(\lambda)}(\bar{u}, \mu) := u(t),$$

gdzie $u : [0, +\infty) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ jest rozwiązaniem (3.4) z warunkiem początkowym $u(0) = \bar{u}$. Niech $\mathbf{F} : [0, +\infty) \times H^1(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ i $\widehat{\mathbf{F}} : H^1(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ będą operatorami Niemyckiego wyznaczonymi odpowiednio przez f i $\widehat{f}$. Zauważmy, że dla $\mu = 0$, (3.4) przyjmuje postać

$$\dot{u}(t) = -\mathbf{A}u(t) + \mathbf{F}(t/\lambda, u(t)),\ t > 0,$$

i mamy $\mathbf{\Phi}_t^{(\lambda)} = \mathbf{\Psi}_t^{(\lambda)}(\cdot, 0)$. Podobnie, dla $\mu = 1$ równanie (3.4) jest postaci

$$\dot{u}(t) = -\mathbf{A}u(t) + \widehat{\mathbf{F}}(u(t)),\ t > 0,$$

oraz operator $\widehat{\mathbf{\Phi}}_t = \mathbf{\Psi}_t^{(\lambda)}(\cdot, 1)$ nie zależy od parametru λ.
Pokażemy, że istnieje $\lambda_0 > 0$ taka, że dla wszystkich $\lambda \in (0, \lambda_0]$,

$$\mathbf{\Psi}_{\lambda T}^{(\lambda)}(\bar{u}, \mu) \neq \bar{u} \quad \text{dla} \quad \bar{u} \in \partial U,\ \mu \in [0,1]. \tag{3.5}$$

Przypuśćmy, że nie jest to prawdą. Wówczas istnieją ciągi $(\bar{u}_n)$ w ∂U, (μ_n) w $[0,1]$ i ciąg (λ_n) w $(0, +\infty)$ takie, że $\lambda_n \to 0^+$, gdy $n \to \infty$ oraz

$$\mathbf{\Psi}_{\lambda_n T}^{(\lambda_n)}(\bar{u}_n, \mu_n) = \bar{u}_n \quad \text{dla} \quad n \geq 1.$$

To oznacza, że dla każdego $n \geq 1$ istnieje $\lambda_n T$-okresowe rozwiązanie $u_n : [0, +\infty) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ problemu (3.4) z $\lambda := \lambda_n$, $\mu := \mu_n$ oraz warunkiem początkowym $u_n(0) := \bar{u}_n$. Korzystając ze stwierdzenia 2.4.2, bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy założyć, że $\bar{u}_n \to \bar{u}_0$ w $H^1(\mathbb{R}^N)$. Stąd $\bar{u}_0 \in \partial U \cap D(\mathbf{A})$ oraz $0 = -\mathbf{A}\bar{u}_0 + \widehat{\mathbf{F}}(\bar{u}_0)$, co przeczy założeniu. To dowodzi istnienia $\lambda_0 > 0$ takiej, że dla wszystkich $\lambda \in (0, \lambda_0]$, zachodzi (3.5).
Dalej, na mocy twierdzenia 2.2.4 (iii) wnioskujemy, że dla wszystkich $\lambda \in (0, \lambda_0]$, $\mathbf{\Psi}_{\lambda T}^{(\lambda)}$ jest dopuszczalną homotopią w sensie teorii indeksu punktów stałych dla klasy odzworowań ostatecznie zwartych. To pozwala na wykorzystanie własności homotopijnej niezmienniczości indeksu punktów stałych i w konsekwencji na stwierdzenie, że

$$\mathrm{Ind}_{uc}(\mathbf{\Phi}_{\lambda T}^{(\lambda)}, U) = \mathrm{Ind}_{uc}(\mathbf{\Psi}_{\lambda T}^{(\lambda)}(\cdot, 0), U) = \mathrm{Ind}_{uc}(\mathbf{\Psi}_{\lambda T}^{(\lambda)}(\cdot, 1), U) = \mathrm{Ind}_{uc}(\widehat{\mathbf{\Phi}}_{\lambda T}, U),$$

co kończy dowód. □

Bezpośrednio płynącym wnioskiem z powyższego twierdzenia jest następująca *zasada kontynuacji.*

Wniosek 3.1.2. *Niech $U \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ będzie zbiorem otwartym, ograniczonym i takim, że równanie* (3.3) *nie posiada rozwiązań w ∂U oraz załóżmy, że dla dowolnego $\lambda \in (0,1)$ zagadnienie*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \lambda \Delta u(x,t) + \lambda f(t,x,u(x,t)), x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0, \\ u(\cdot,t) \in H^1(\mathbb{R}^N),\ t \geq 0 \\ u(x,0) = u(x,T),\ x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{3.6}$$

nie posiada rozwiązań $u : [0,+\infty) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ zaczynających się w ∂U. Wówczas

$$\mathrm{Ind}_{uc}(\mathbf{\Phi}_T, U) = \lim_{t \to 0^+} \mathrm{Ind}_{uc}(\widehat{\mathbf{\Phi}}_t, U),$$

gdzie $\mathbf{\Phi}_T : H^1(\mathbb{R}^N) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ jest operatorem przesunięcia wzdłuż trajektorii związanym z równaniem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u(x,t) + f(t,x,u(x,t)),\ x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0, \\ u(\cdot,t) \in H^1(\mathbb{R}^N),\ t \geq 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Dowód. Niech $\lambda_0 > 0$ będzie takie, jak w tezie twierdzenia 3.1.1. Ponieważ równanie (3.6), nie posiada rozwiązań zaczynających się w ∂U wnosimy, że

$$\mathbf{\Phi}_{\lambda T}^{(\lambda)}(\bar{u}) \neq \bar{u} \text{ dla } \bar{u} \in \partial U,\ \lambda \in (0,1).$$

Co więcej, korzystając z twierdzenia 2.2.4 (iii) wnioskujemy, że $\mathbf{\Phi}_{\lambda T}^{(\lambda)}$ jest odwzorowaniem dopuszczalnym w teorii indeksu punktów stałych dla odwzorowań ostatecznie zwartych. Zatem na mocy własności homotopijnej niezmienniczości indeksu punktów stałych, dla dowolnego $\lambda \in (0,1]$, otrzymujemy

$$\mathrm{Ind}_{uc}(\mathbf{\Phi}_T, U) = \mathrm{Ind}_{uc}(\widetilde{\mathbf{\Phi}}_T^{(1)}, U) = \mathrm{Ind}_{uc}(\widetilde{\mathbf{\Phi}}_T^{(\lambda)}, U) = \mathrm{Ind}_{uc}(\mathbf{\Phi}_{\lambda T}^{(\lambda)}, U),$$

gdzie $\widetilde{\mathbf{\Phi}}_T^{(\lambda)}$ jest operatorem przesunięcia wzdłuż trajektorii dla równania parabolicznego (3.6) z parametrem λ[1]. Na mocy twierdzenia 3.1.1 otrzymujemy żądaną tezę. □

[1]Zauważmy, że dla dowolnego $\lambda > 0$, funkcja $u : [0,+\infty) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ jest rozwiązaniem równania (3.1) wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $v : [0,+\infty) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ dana wzorem $v(t) := u(\lambda t)$ jest rozwiązaniem (3.6). Zatem, dla dowolnego $\lambda > 0$, $\widetilde{\mathbf{\Phi}}_T^{(\lambda)} = \mathbf{\Phi}_{\lambda T}^{(\lambda)}$. Ciągłość odwzorowania $H^1(\mathbb{R}^N) \times [\lambda_0, 1] \ni (\bar{u}, \lambda) \mapsto \widetilde{\mathbf{\Phi}}_T^{(\lambda)}(\bar{u})$ wynika bezpośrednio z uwagi 2.2.3. Z twierdzenia 2.2.4 (iii) wynika, że odwzorowanie $H^1(\mathbb{R}^N) \times [\lambda_0, 1] \ni (\bar{u}, \lambda) \mapsto \mathbf{\Phi}_{\lambda T}^{(\lambda)}(\bar{u})$ jest ostatecznie zwarte, więc w konsekwencji $H^1(\mathbb{R}^N) \times [\lambda_0, 1] \ni (\bar{u}, \lambda) \mapsto \widetilde{\mathbf{\Phi}}_T^{(\lambda)}(\bar{u})$ jest ostatecznie zwarte.

3.2 Weryfikacja warunków *a priori*

Z twierdzenia 3.1.1 wynika, że z punktów równowagi równania uśrednionego (3.2) o nietrywialnym indeksie topologicznym emanują rozwiązania okresowe równań (3.1), zaś warunki typu *a priori* dają możliwość śledzenia gałęzi tych rozwiązań i pozwalają na uzyskanie T-okresowego rozwiązania dla równania (3.7). Zajmiemy się teraz, przy wykorzystaniu metody linearyzacji, weryfikacją wspomnianych warunków *a priori* dotyczących zagadnienia (3.6).

Twierdzenie 3.2.1. *Niech* $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *będzie odwzorowaniem spełniającym warunki* (1.17), (1.18), (1.19) *i* (1.20).

(i) *Załóżmy, że zachodzi* (8) (patrz str. 9), $\operatorname{Ker}(\Delta + \widehat{\omega}) = \{0\}$ *oraz że równanie liniowe*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \lambda \Delta u(x,t) + \lambda \omega(t,x) u(x,t), \ x \in \mathbb{R}^N, \ t > 0, \\ u(\cdot, t) \in H^1(\mathbb{R}^N), \ t \geq 0, \end{cases} \tag{3.8}$$

nie posiada niezerowych, T*-okresowych rozwiązań dla* $\lambda \in (0,1]$*. Wówczas istnieje stała* $R > 0$ *taka, że dla wszystkich* $\lambda \in (0,1]$ *zagadnienie* (3.6) *nie posiada* T*-okresowych rozwiązań* $u : [0, +\infty) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ *o tej własności, że* $\|u(0)\|_{H^1} \geq R$.

(ii) *Załóżmy, że zachodzi* (7) (patrz str. 9), $\operatorname{Ker}(\Delta + \widehat{\alpha}) = \{0\}$ *oraz że równanie liniowe*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \lambda \Delta u(x,t) + \lambda \alpha(t,x) u(x,t), \ x \in \mathbb{R}^N, \ t > 0, \\ u(\cdot, t) \in H^1(\mathbb{R}^N), \ t \geq 0, \end{cases} \tag{3.9}$$

nie posiada niezerowych, T*-okresowych rozwiązań. Wówczas istnieje stała* $r > 0$ *taka, że dla wszystkich* $\lambda \in (0,1]$ *zagadnienie* (3.6) *nie posiada* T*-okresowych rozwiązań* $u : [0, +\infty) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ *o tej własności, że* $0 < \|u(0)\|_{H^1} \leq r$.

Dowód. (i) Załóżmy, że teza nie jest prawdziwa. To oznacza, że istnieją ciąg (λ_n) w $(0,1)$ oraz T-okresowe rozwiązania $u_n : [0, +\infty) \to H^1(\mathbb{R}^N)$, $n \geq 1$, równania

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda_n \Delta u + \lambda_n f(t, x, u), \ x \in \mathbb{R}^N, \ t > 0,$$

o tej własności, że $\|u_n(0)\|_{H^1} \to +\infty$, gdy $n \to +\infty$. Połóżmy $\rho_n := 1 + \|u_n(0)\|_{H^1}$ oraz niech $z_n(t) := u_n(t)/\rho_n$. Wówczas, dla każdego $n \geq 1$, funkcja z_n jest T-okresowym rozwiązaniem

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \lambda_n \Delta z + \lambda_n \rho_n^{-1} f(t, x, \rho_n z), \ x \in \mathbb{R}^N, \ t > 0. \tag{3.10}$$

Co więcej, dla każdego $n \geq 1$, funkcja $v_n : [0, +\infty) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ dana wzorem $v_n(t) := z_n(t/\lambda_n)$ jest rozwiązaniem zagadnienia

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v + \rho_n^{-1} f(t/\lambda_n, x, \rho_n v),\ x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0. \tag{3.11}$$

Z definicji ciągu (ρ_n) widzimy, że $\rho_n \to +\infty$ gdy $n \to +\infty$ i zauważmy, że dla $n \geq 1$, $\|z_n(0)\|_{H^1} = \|v_n(0)\|_{H^1} \neq 0$ oraz $\|v_n(0)\|_{H^1} \to 1$, gdy $n \to +\infty$. Określmy $g_n : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kładąc $g_n(t, x, v) := \rho_n^{-1} f(t/\lambda_n, x, \rho_n v)$, $n \geq 1$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^N$, $v \in \mathbb{R}$. Ponieważ funkcje g_n, $n \geq 1$ spełniają założenia (1.18) ze wspólną funkcją m_0 i (1.19) ze wspólną funkcją l oraz $\{v_n(0)\}_{n \geq 1}$ jest ograniczony, korzystając z twierdzenia 1.4.4 i lematu 1.1.7, otrzymujemy istnienie stałej $R_0 > 0$ takiej, że $\|v_n(t)\|_{H^1} \leq R_0$ dla wszystkich $n \geq 1$ i $t \geq 0$. Niech $M > 0$ będzie dowolną, lecz ustaloną liczbą oraz, dla dowolnego $n \geq 1$, weźmy liczbę całkowitą $k_n \geq 1$ taką, że $k_n \lambda_n T > M$. Wówczas, na mocy lematu 2.1.2 wnosimy, że dla wszystkich $m \geq 1$ i $n \geq 1$,

$$\|(1 - \chi_m) v_n(0)\|_{L^2}^2 = \|(1 - \chi_m) v_n(k_n \lambda_n T)\|_{L^2}^2 \leq R_0^2 e^{-2a k_n \lambda_n T} + \alpha_m \leq R_0^2 e^{-2aM} + \alpha_m,$$

gdzie ciąg (α_m) jest zbieżny do 0, gdy $m \to +\infty$, zaś χ_m jest funkcją charakterystyczną kuli $B(0, m)$. Z dowolności $M > 0$ wnioskujemy, że $\|(1 - \chi_m) v_n(0)\|_{L^2} \leq \sqrt{\alpha_m}$ dla wszystkich $m, n \geq 1$. Dalej, z twiedzenia Rellicha-Kondraszowa wynika, że dla dowolnego $m \geq 1$, zbiór $\{\chi_m v_n(0)\}_{n \geq 1}$ jest relatywnie zwarty w $L^2(\mathbb{R}^N)$. W konsekwencji, łącząc powyższe fakty, $\{v_n(0)\}_{n \geq 1}$ jest relatywnie zwarty w $L^2(\mathbb{R}^N)$. Co wiecej, jako ciąg ograniczony w $H^1(\mathbb{R}^N)$, na mocy twierdzenia Eberleina-Šmuliana, $(v_n(0))$ posiada podciąg słabo zbieżny do pewnego $\bar{v}_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$. A zatem możemy założyć, że $v_n(0) \to \bar{v}_0$ w $L^2(\mathbb{R}^N)$, gdy $n \to +\infty$. Bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy założyć, że $\lambda_n \to \lambda_0$ gdy $n \to +\infty$ dla pewnego $\lambda_0 \in [0, 1]$.

Załóżmy najpierw, że $\lambda_0 \in (0, 1]$. Niech funkcje $f_n : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$ będą określone wzorem

$$f_n(t, x, z) := \rho_n^{-1} f(t, x, \rho_n z) \text{ dla wszystkich } t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^N,\ z \in \mathbb{R}.$$

Wówczas, z (8) i z (1.18) wynika, że

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(t, x, z) = \omega(t, x) z \text{ dla } t \geq 0,\ z \in \mathbb{R} \text{ i p.w. } x \in \mathbb{R}^N$$

oraz $\|f_n(t, \cdot, 0)\|_{L^2} = \rho_n^{-1} \|f(t, \cdot, 0)\|_{L^2} \leq \rho_n^{-1} \|m_0\|_{L^2} \to 0$, gdy $n \to +\infty$. To oznacza, że stosując twierdzenie 1.4.8 do (3.10), mamy $z_n(t) \to z_0(t)$ gdy $n \to +\infty$ w $H^1(\mathbb{R}^N)$, jednostajnie względem t ze zwartych podzbiorów $(0, +\infty)$, gdzie $z_0 : [0, +\infty) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ jest T-okresowym rozwiązaniem

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \lambda_0 \Delta z + \lambda_0 \omega(t, x) z.$$

W konsekwencji, $z_n(T) \to z_0(T)$ w $H^1(\mathbb{R}^N)$, gdy $n \to +\infty$. Oczywiście $z_n(0) = z_n(T)$ dla wszystkich $n \geq 0$ a ponieważ $\|z_n(0)\|_{H^1} = \|v_n(0)\|_{H^1} \to 1$ gdy $n \to +\infty$, więc stąd wnosimy, że $\|z_0(0)\|_{H^1} = 1$. Otrzymujemy zatem istnienie nietrywialnego, T-okresowego rozwiązania równania (3.8) z $\lambda := \lambda_0$. Otrzymana sprzeczność dowodzi tezy.

Załóżmy teraz, że $\lambda_0 = 0$. Wówczas, z twierdzenia 1.4.9 zastosowanego do zagadnienia

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v + f_n(t/\lambda_n, x, v),\ x \in \mathbb{R}^N, t > 0,$$

w którym funkcje f_n, $n \geq 1$, są określone jak w przypadku $\lambda_0 \in (0,1]$, wynika, że $v_n(t) \to \widehat{v}(t)$, gdy $n \to +\infty$ w $H^1(\mathbb{R}^N)$, przy czym zbieżność ta jest jednostajna względem t należących do zwartych podzbiorów $(0,+\infty)$, gdzie $\widehat{v} : [0,+\infty) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ jest nietrywialnym rozwiązaniem

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v + \widehat{\omega}(x)v,\ x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0.$$

Zauważmy, że dowolnego $t > 0$ oraz $k_n := [t/\lambda_n T]$, $n \geq 1$, mamy

$$v_n(0) = v_n(k_n\lambda_n T) \to \widehat{v}(t) \text{ w } H^1(\mathbb{R}^N),\ \text{gdy } n \to +\infty,$$

a więc w szczególności

$$v_n(0) \to \widehat{v}(T) \text{ w } H^1(\mathbb{R}^N),\ \text{gdy } n \to +\infty.$$

Ponieważ $\|v_n(0)\|_{H^1} \to 1$, gdy $n \to +\infty$, więc z powyższego rozumowania wynika, że $\widehat{v} \equiv \bar{v}_0$, $\|\bar{v}_0\|_{H^1} = 1$ oraz, w konsekwencji,

$$0 = \Delta\bar{v}_0(x) + \widehat{\omega}(x)\bar{v}_0(x),\ x \in \mathbb{R}^N.$$

Zatem $\mathrm{Ker}(\Delta + \widehat{\omega}) \neq \{0\}$, gdyż $\|\bar{v}_0\|_{H^1} \neq 0$. Otrzymana sprzeczność z założeniem kończy dowód (i).

(ii) Załóżmy, że teza nie jest prawdziwa. To oznacza, że istnieją ciąg (λ_n) w $(0,1)$ oraz T-okresowe rozwiązania $u_n : [0,+\infty) \to H^1(\mathbb{R}^N)$, $n \geq 1$, równania

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda_n\Delta u + \lambda_n f(t,x,u),\ x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0,$$

takie, że $\|u_n(0)\|_{H^1} > 0$, $n \geq 1$, oraz $\|u_n(0)\|_{H^1} \to 0^+$ gdy $n \to +\infty$. Połóżmy $\rho_n := \|u_n(0)\|_{H^1}$ oraz niech $z_n(t) := u_n(t)/\rho_n$. Wówczas, dla każdego $n \geq 1$, funkcja z_n jest T-okresowym rozwiązaniem

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \lambda_n\Delta z + \lambda_n\rho_n^{-1} f(t,x,\rho_n z),\ x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0. \tag{3.12}$$

Co więcej, dla każdego $n \geq 1$, funkcja $v_n : [0, +\infty) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ dana wzorem $v_n(t) := z_n(t/\lambda_n)$ jest rozwiązaniem zagadnienia

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v + \rho_n^{-1} f(t/\lambda_n, x, \rho_n v),\ x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0. \tag{3.13}$$

Oczywiście $\rho_n \to 0^+$, gdy $n \to +\infty$ i zauważmy, że dla $n \geq 1$, $\|z_n(0)\|_{H^1} = \|v_n(0)\|_{H^1} = 1$. Określmy $g_n : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kładąc $g_n(t, x, v) := \rho_n^{-1} f(t/\lambda_n, x, \rho_n v)$, $n \geq 1$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^N$, $v \in \mathbb{R}$. Ponieważ funkcje g_n, $n \geq 1$ spełniają założenia (1.18) ze wspólną funkcją m_0 i (1.19) ze wspólną funkcją l oraz $\{v_n(0)\}_{n \geq 1}$ jest ograniczony, korzystając z twierdzenia 1.4.4 i lematu 1.1.7, otrzymujemy istnienie stałej $R_0 > 0$ takiej, że $\|v_n(t)\|_{H^1} \leq R_0$ dla wszystkich $n \geq 1$ i $t \geq 0$. Niech $M > 0$ będzie dowolną, lecz ustaloną liczbą oraz, dla dowolnego $n \geq 1$, weźmy liczbę całkowitą $k_n \geq 1$ taką, że $k_n \lambda_n T > M$. Wówczas, na mocy lematu 2.1.2 wnosimy, że dla wszystkich $m \geq 1$ i $n \geq 1$,

$$\|(1 - \chi_m) v_n(0)\|_{L^2}^2 = \|(1 - \chi_m) v_n(k_n \lambda_n T)\|_{L^2}^2 \leq R_0^2 e^{-2a k_n \lambda_n T} + \alpha_m \leq R_0^2 e^{-2aM} + \alpha_m,$$

gdzie ciąg (α_m) jest zbieżny do 0, gdy $m \to +\infty$, zaś χ_m jest funkcją charakterystyczną kuli $B(0, m)$. Z dowolności $M > 0$ wnioskujemy, że $\|(1 - \chi_m) v_n(0)\|_{L^2} \leq \sqrt{\alpha_m}$ dla wszystkich $m, n \geq 1$. Dalej, z twiedzenia Rellicha-Kondraszowa wynika, że dla dowolnego $m \geq 1$, zbiór $\{\chi_m v_n(0)\}_{n \geq 1}$ jest relatywnie zwarty w $L^2(\mathbb{R}^N)$. W konsekwencji, łącząc powyższe fakty, $\{v_n(0)\}_{n \geq 1}$ jest relatywnie zwarty w $L^2(\mathbb{R}^N)$. Co wiecej, jako ciąg ograniczony w $H^1(\mathbb{R}^N)$, na mocy twierdzenia Eberleina- Šmuliana, $(v_n(0))$ posiada podciąg słabo zbieżny do pewnego $\bar{v}_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$. A zatem możemy założyć, że $v_n(0) \to \bar{v}_0$ w $L^2(\mathbb{R}^N)$, gdy $n \to +\infty$. Bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy założyć, że $\lambda_n \to \lambda_0$, gdy $n \to +\infty$ dla pewnego $\lambda_0 \in [0, 1]$.

Załóżmy najpierw, że $\lambda_0 \in (0, 1]$. Niech funkcje $f_n : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$ będą określone wzorem

$$f_n(t, x, z) := \rho_n^{-1} f(t, x, \rho_n z) \text{ dla wszystkich } t \geq 0,\ z \in \mathbb{R} \text{ i p.w. } x \in \mathbb{R}^N.$$

Wówczas, z (7) wynika, że

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(t, x, z) = \alpha(t, x) z \text{ dla } t \geq 0,\ z \in \mathbb{R} \text{ i p.w. } x \in \mathbb{R}^N$$

oraz $\|f_n(t, \cdot, 0)\|_{L^2} = 0$ dla $n \geq 1$ [1]. To oznacza, że stosując twierdzenie 1.4.8 do (3.12) mamy $z_n(t) \to z_0(t)$, gdy $n \to +\infty$ w $H^1(\mathbb{R}^N)$, jednostajnie względem t ze zwartych podzbiorów $(0, +\infty)$, gdzie $z_0 : [0, +\infty) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ jest T-okresowym rozwiązaniem

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \lambda_0 \Delta z + \lambda_0 \alpha(t, x) z.$$

[1] Zauważmy, że z założenia (7) wynika, że $f(t, x, 0) = 0$ dla wszystkich $t \geq 0$ i $x \in \mathbb{R}^N$.

W konsekwencji, $z_n(T) \to z_0(T)$ w $H^1(\mathbb{R}^N)$, gdy $n \to +\infty$. Oczywiście $z_n(0) = z_n(T)$ dla wszystkich $n \geq 0$ a ponieważ $\|z_n(0)\|_{H^1} = 1$ dla wszystkich $n \geq 1$ więc stąd wnosimy, że $\|z_0(0)\|_{H^1} = 1$. Otrzymujemy zatem istnienie nietrywialnego, T-okresowego rozwiązania równania (3.9) z $\lambda := \lambda_0$. Otrzymana sprzeczność dowodzi tezy.

Załóżmy teraz, że $\lambda_0 = 0$. Wówczas, z twierdzenia 1.4.9 zastosowanego do zagadnienia

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v + f_n(t/\lambda_n, x, v), \; x \in \mathbb{R}^N, t > 0,$$

w którym funkcje f_n, $n \geq 1$, są określone jak w przypadku $\lambda_0 \in (0,1]$, wynika, że $v_n(t) \to \widehat{v}(t)$, gdy $n \to +\infty$ w $H^1(\mathbb{R}^N)$, przy czym zbieżność ta jest jednostajna względem t należących do zwartych podzbiorów $(0,+\infty)$, gdzie $\widehat{v} : [0,+\infty) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ jest nietrywialnym rozwiązaniem

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v + \widehat{\alpha}(x) v, \; x \in \mathbb{R}^N, \; t > 0.$$

Zauważmy, że dowolnego $t > 0$ oraz $k_n := [t/\lambda_n T]$, $n \geq 1$, mamy

$$v_n(0) = v_n(k_n \lambda_n T) \to \widehat{v}(t) \text{ w } H^1(\mathbb{R}^N), \text{ gdy } n \to +\infty,$$

a więc

$$v_n(0) \to \widehat{v}(T) \text{ w } H^1(\mathbb{R}^N), \text{ gdy } n \to +\infty.$$

Ponieważ $\|v_n(0)\|_{H^1} = 1$, więc z powyższego rozumowania wynika, że $\widehat{v} \equiv \bar{v}_0$, $\|\bar{v}_0\|_{H^1} = 1$ oraz, w konsekwencji,

$$0 = \Delta \bar{v}_0(x) + \widehat{\alpha}(x) \bar{v}_0(x), \, x \in \mathbb{R}^N.$$

Zatem $\mathrm{Ker}(\Delta + \widehat{\alpha}) \neq \{0\}$, gdyż $\|\bar{v}_0\|_{H^1} \neq 0$. Otrzymana sprzeczność z założeniem kończy dowód. □

W przypadku, gdy funkcje ω oraz α nie zależą od czasu, to wówczas równania, odpowiednio (3.8) i (3.9), nie posiadają T-okresowych rozwiązań dla parametru $\lambda \in (0,1]$. W przypadku, gdy funkcje te zależą od czasu, założenie dotyczące nieistnienia T-okresowych rozwiązań można efektywnie zweryfikować przy pewnym dodatkowym warunku.

Twierdzenie 3.2.2. *Załóżmy, że*

$$\sup_{t \in [0,T]} \|\omega_0(t,\cdot)\|_{L^p} < \begin{cases} \frac{p^{1/2p} \bar{\omega}_\infty^{1-1/2p}}{2^{1/2p}}, & \text{gdy } N = 1, \; 2 < p < \infty, \\ \frac{p^{1/p} \bar{\omega}_\infty^{(1-1/p)}}{4^{1/p}}, & \text{gdy } N = 2, \; 2 < p < \infty, \\ \frac{\bar{\omega}_\infty^{1-N/2p}}{(N/2p)^{N/2p} C(N)^{N/p}}, & \text{gdy } N \geq 3, N \leq p < \infty, \end{cases} \tag{3.14}$$

gdzie $C(N) > 0$ *jest stałą z nierówności* $\|u\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}} \leq C(N) \|\nabla u\|_{L^2}$, $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ [1].

[1] patrz twierdzenie 5.3.3.

Wówczas, dla $\lambda \in (0,1]$, równanie (3.8) *nie posiada T-okresowych rozwiązań* [2].

Zanim przystąpimy do dowodu sformułujmy kilka faktów pomocniczych.

Lemat 3.2.3. *Dla dowolnej funkcji $u \in H^1(\mathbb{R})$ zachodzi nierówność*

$$\|u\|_{L^\infty}^2 \le 2\|u\|_{L^2}\|u'\|_{L^2}.$$

Dowód. Ponieważ $u \in H^1(\mathbb{R})$, więc u posiada ciągłego reprezentanta, tzn.istnieje $\tilde{u} \in C(\mathbb{R})$ taka, że $u = \tilde{u}$ p.w. na $\mathbb{R}$. Zatem, bez zmniejszenia ogólności rozważań, możemy założyć, że u jest funkcją ciągłą. Ponieważ $u \in H^1(\mathbb{R})$, więc dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje $x_0 \in \mathbb{R}$ takie, że $|u(x_0)|^2 \le \epsilon$. Dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$u(x)^2 - u(x_0)^2 = \int_{x_0}^{x} 2u(y)u'(y)\,\mathrm{d}y.$$

Stąd oraz z nierówności Cauchy'ego-Schwarza mamy

$$\|u\|_{L^\infty}^2 \le 2\|u\|_{L^2}\|u'\|_{L^2} + \epsilon,$$

co wobec dowolności $\epsilon > 0$ implikuje żądaną nierówność. □

Lemat 3.2.4. *Załóżmy, że $N \ge 2$. Wówczas dla dowolnej funkcji $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ oraz $m \ge 1$ zachodzi nierówność*

$$\|u\|_{L^{mN/(N-1)}}^m \le m\|u\|_{L^{(m-1)N/(N-1)}}^{m-1}\|\nabla u\|_{L^N}. \tag{3.15}$$

Dowód powyższego lematu zawarty jest w dowodzie twierdzenia 9.9 w [10].

Lemat 3.2.5. *Dla dowolnej funkcji $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ spełniona jest nierówność*

$$\|u\|_{L^4}^2 \le 2\|u\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2}. \tag{3.16}$$

Dowód. Aby się o tym przekonać weźmy dowolną funkcję $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$. Wówczas, z gęstości zbioru $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ w $H^1(\mathbb{R}^2)$ wynika, że istnieje ciąg (u_n) w $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ taki, że $u_n \to u$ w $H^1(\mathbb{R}^2)$, gdy $n \to +\infty$. Bez zmniejszenia ogólności możemy więc założyć, że $u_n \to u$ p.w., gdy $n \to +\infty$. Dalej, z lematu 3.2.4 (dla $m = 2$ i $N = 2$), mamy

$$\|u_n\|_{L^4}^2 \le 2\|u_n\|_{L^2}\|\nabla u_n\|_{L^2}.$$

Ponieważ $H^1(\mathbb{R}^2) \subset L^4(\mathbb{R}^2)$, więc (u_n) jest ciągiem Cauchy'ego w $L^4(\mathbb{R}^2)$. W konsekwencji, $u_n \to u$ w $L^4(\mathbb{R}^2)$, gdy $n \to +\infty$ oraz

$$\|u\|_{L^4}^2 \le 2\|u\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2} \text{ dla } u \in H^1(\mathbb{R}^2).$$

To kończy dowód. □

[2] Analogicznie można zweryfikować brak istnienia rozwiązań okresowych dla równania (3.9) zastępując w (3.14) funkcję ω_0 przez α_0 oraz $\bar{\omega}_\infty$ przez $\bar{\alpha}_\infty$.

Dowód twierdzenia 3.2.2. Przypuśćmy, że u jest nietrywialnym, T-okresowym rozwiązaniem równania (3.8). Wówczas dla wszystkich $t > 0$ mamy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2\lambda}\|u(t)\|_{L^2}^2 = -\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(t)|^2\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} \omega_\infty(t,x)|u(t)|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} \omega_0(t,x)|u(t)|^2\,\mathrm{d}x. \tag{3.17}$$

Załóżmy napierw, że $N = 1$ i $2 < p < \infty$. Z (3.17) oraz nierówności Höldera i nierówności interpolacyjnej wynika, że

$$\int_0^T \left(\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + \bar{\omega}_\infty\|u(t)\|_{L^2}^2\right)\,\mathrm{d}t \le \int_0^T \|\omega_0(t,\cdot)\|_{L^p}\|u(t)\|_{L^2}^{2-2/p}\|u(t)\|_{L^\infty}^{2/p}\,\mathrm{d}t,$$

co na mocy lematu 3.2.3 implikuje, że

$$\begin{aligned}\int_0^T &\left(\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + \bar{\omega}_\infty\|u(t)\|_{L^2}^2\right)\mathrm{d}t \\ &\le 2^{1/p}\int_0^T \|\omega_0(t,\cdot)\|_{L^p}\|\nabla u(t)\|_{L^2}^{1/p}\|u(t)\|_{L^2}^{2-1/p}\,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Z nierówności Younga (patrz Dodatek, twierdzenie 5.1.1) wynika, że dla dowolnego $\epsilon > 0$ i ustalonego $t \in [0,T]$,

$$\|\omega_0(t,\cdot)\|_{L^p}\|\nabla u(t)\|_{L^2}^{1/p}\|u(t)\|_{L^2}^{2-1/p} \le \frac{\|\omega_0(t,\cdot)\|_{L^p}^{2p}\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2}{2p\epsilon^{2p}} + \frac{\epsilon^{2p/(2p-1)}\|u(t)\|_{L^2}^2}{2p/(2p-1)} \tag{3.19}$$

Dobierzmy $\epsilon = \epsilon(t)$ tak, aby $2^{1/p}\frac{\|\omega_0(t,\cdot)\|_{L^p}^{2p}}{2p\epsilon^{2p}} = 1$, tzn. niech

$$\epsilon(t) := \left(\frac{2^{(1-p)/p}}{p}\right)^{1/2p}\|\omega_0(t,\cdot)\|_{L^p}.$$

Wówczas, z (3.18), (3.19) oraz założenia (3.14) wynika, że

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_\infty\int_0^T \|u(t)\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t &\le 2^{1/p}\frac{2p-1}{2p}\int_0^T \epsilon(t)^{2p/(2p-1)}\|u(t)\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t \\ &\le 2^{1/p}\left(\frac{2^{(1-p)/p}}{p}\right)^{1/(2p-1)}\sup_{t\in[0,T]}\|\omega_0(t,\cdot)\|_{L^p}^{2p/(2p-1)}\int_0^T \|u(t)\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t \\ &= \left(\frac{2}{p}\right)^{1/(2p-1)}\sup_{t\in[0,T]}\|\omega_0(t,\cdot)\|_{L^p}^{2p/(2p-1)}\int_0^T \|u(t)\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t \\ &< \bar{\omega}_\infty\int_0^T \|u(t)\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Otrzymana sprzeczność kończy dowód w przypadku, gdy $N = 1$.

Załóżmy teraz że $N = 2$ i $2 < p < \infty$. Wówczas z (3.17) oraz nierówności Höldera i nierówności interpolacyjnej wynika, że

$$\int_0^T\left(\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + \bar{\omega}_\infty\|u(t)\|_{L^2}^2\right)\,\mathrm{d}t \le \int_0^T \|\omega_0(t,\cdot)\|_{L^p}\|u(t)\|_{L^4}^{4/p}\|u(t)\|_{L^2}^{2-4/p}\,\mathrm{d}t,$$

co na mocy lematu 3.2.5 daje

$$\int_0^T \left(\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + \bar{\omega}_\infty \|u(t)\|_{L^2}^2\right) \mathrm{d}t \le 2^{2/p} \int_0^T \|\omega_0(t,\cdot)\|_{L^p} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^{2/p} \|u(t)\|_{L^2}^{2-2/p} \, \mathrm{d}t. \tag{3.20}$$

Korzystając z nierówności Younga, otrzymujemy dla dowolnego $\epsilon > 0$ i ustalonego $t \in [0, T]$

$$\|\omega_0(t,\cdot)\|_{L^p} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^{2/p} \|u(t)\|_{L^2}^{2-2/p} \le \frac{\|\omega_0(t,\cdot)\|_{L^p}^p \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2}{p\epsilon^p} + \frac{\epsilon^{p/(p-1)} \|u(t)\|_{L^2}^2}{p/(p-1)}. \tag{3.21}$$

Wybierzmy $\epsilon = \epsilon(t) > 0$ takie, że $\frac{2^{2/p}}{p\epsilon^p} \|\omega_0(\cdot, t)\|_{L^p}^p = 1$, tzn. niech

$$\epsilon(t) := \frac{2^{2/p^2}}{p^{1/p}} \|\omega_0(\cdot, t)\|_{L^p}.$$

Wówczas, z (3.20), (3.21) i założenia (3.14) mamy

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}_\infty \int_0^T \|u(t)\|_{L^2}^2 &\le 2^{2/p} \frac{(p-1)}{p} \int_0^T \epsilon(t)^{p/(p-1)} \|u(t)\|_{L^2}^2 \, \mathrm{d}t \\
&\le \left(\frac{4}{p}\right)^{1/(p-1)} \sup_{t \in [0,T]} \|\omega_0(t,\cdot)\|_{L^p}^{p/(p-1)} \int_0^T \|u(t)\|_{L^2}^2 \, \mathrm{d}t \\
&< \bar{\omega}_\infty \int_0^T \|u(t)\|_{L^2}^2 \, \mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

co jest sprzeczne.

Rozważmy teraz przypadek $N \ge 3$ i niech $N \le p < +\infty$. Wykorzystując nierówności Höldera, nierówność interpolacyjną i nierówność Sobolewa, z (3.17) dostajemy,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left(\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + \bar{\omega}_\infty \|u(t)\|_{L^2}^2\right) \mathrm{d}t &\le \int_0^T \|\omega_0(t,\cdot)\|_{L^p} \|u(t)\|_{L^{2N/(N-2)}}^{N/p} \|u(t)\|_{L^2}^{2-N/p} \, \mathrm{d}t \\
&\le C(N)^{N/p} \int_0^T \|\omega_0(\cdot, t)\|_{L^p} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^{N/p} \|u(t)\|_{L^2}^{2-N/p} \, \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Na mocy nierówności Younga mamy dla dowolnego $\epsilon > 0$ i ustalonego $t \in [0, T]$,

$$\|\omega_0(\cdot, t)\|_{L^p} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^{\frac{N}{p}} \|u(t)\|_{L^2}^{2-\frac{N}{p}} \le \frac{N/2p}{\epsilon^{\frac{2p}{N}}} \|\omega_0(\cdot, t)\|_{L^p}^{\frac{2p}{N}} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + \left(1 - \frac{N}{2p}\right) \epsilon^{\frac{2p}{2p-N}} \|u(t)\|_{L^2}^2.$$

Biorąc $\epsilon = \epsilon(t)$ takie, że $\frac{N}{2p} \cdot \frac{C(N)^{N/p}}{\epsilon(t)^{\frac{2p}{N}}} \|\omega_0(\cdot, t)\|_{L^p}^{\frac{2p}{N}} = 1$, tzn.

$$\epsilon(t) = (N/2p)^{N/2p} C(N)^{N^2/2p^2} \|\omega_0(\cdot, t)\|_{L^p}$$

i korzystając z (3.14), mamy

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}_\infty \int_0^T \|u(t)\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}t &\le C(N)^{N/p}\left(1-\frac{N}{2p}\right)\int_0^T \epsilon(t)^{\frac{2p}{2p-N}}\|u(t)\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}t \\
&\le (N/2p)^{N/(2p-N)}C(N)^{2N/(2p-N)}\int_0^T \|\omega_0(\cdot,t)\|_{L^p}^{\frac{2p}{2p-N}}\|u(t)\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}t \\
&\le (N/2p)^{N/(2p-N)}C(N)^{2N/(2p-N)}\sup_{t\in[0,T]}\|\omega_0(\cdot,t)\|_{L^p}^{\frac{2p}{2p-N}}\int_0^T \|u(t)\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}t \\
&< \bar{\omega}_\infty \int_0^T \|u(t)\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że (3.8) nie posiada nietrywialnych, T-okresowych rozwiązań. □

3.3 Rozwiązania okresowe

Przejdźmy teraz do omówienia głównych wyników, tj. do kryteriów stwierdzających istnienie T-okresowych rozwiązań równania (3.7).

Twierdzenie 3.3.1. *Niech* $f : [0,+\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *będzie odwzorowaniem spełniającym warunki* (1.17), (1.18), (1.19), (1.20) *oraz* (8). *Jeżeli równanie* (3.8) *nie posiada niezerowych, T-okresowych rozwiązań dla* $\lambda \in (0,1]$ *oraz* $\mathrm{Ker}\,(\Delta + \widehat{\omega}) = \{0\}$, *gdzie* $\widehat{\omega} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $\widehat{\omega}(x) := \frac{1}{T}\int_0^T \omega(t,x)\,\mathrm{d}t$, *to rówanie* (3.7) *posiada T-okresowe rozwiązanie*

$$u \in C([0,+\infty), H^2(\mathbb{R}^N)) \cap C^1([0,+\infty), L^2(\mathbb{R}^N)).$$

Dowód. Oznaczmy przez $\mathbf{\Phi}_t : H^1(\mathbb{R}^N) \to H^1(\mathbb{R}^N)$, $t > 0$, operator przesunięcia wzdłuż trajektorii stowarzyszony z równaniem (3.7). Z założenia (8) widzimy, że

$$\lim_{|u|\to+\infty} \frac{\widehat{f}(x,u)}{u} = \widehat{\omega}(x) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}^N.$$

Zatem na podstawie twierdzenia 2.4.1 (i) otrzymujemy istnienie stałej $R_0 > 0$ takiej, że równanie

$$\Delta u(x) + \widehat{f}(x,u(x)) = 0, \;\; x \in \mathbb{R}^N,$$

nie posiada rozwiązań w zbiorze $H^1(\mathbb{R}^N) \setminus B_{H^1}(0,R_0)$ oraz istnienie $t_0 > 0$ takiego, że dla wszystkich $t \in (0,t_0]$,

$$\mathrm{Ind}_{uc}(\widehat{\mathbf{\Phi}}_t, B_{H^1}(0,R_0)) = (-1)^{m(\infty)}. \tag{3.22}$$

Na mocy twierdzenia 3.2.1 oraz założenia, zwiększając R_0 w razie potrzeby, stwierdzamy, że (3.6) nie posiada T-okresowych rozwiązań zaczynających się w $H^1(\mathbb{R}^N) \setminus B_{H^1}(0, R_0)$. Przyjmując $U := B_{H^1}(0, R_0)$ oraz stosując wniosek 3.1.2 dostajemy

$$\mathrm{Ind}_{uc}(\mathbf{\Phi}_T, B_{H^1}(0, R_0)) = \lim_{t \to 0^+} \mathrm{Ind}_{uc}(\widehat{\mathbf{\Phi}}_t, B_{H^1}(0, R_0)),$$

co razem z (3.22) implikuje, że

$$\mathrm{Ind}_{uc}(\mathbf{\Phi}_T, B_{H^1}(0, R_0)) = (-1)^{m(\infty)}.$$

To, na mocy własności istnienia indeksu punktów stałych dla odwzorowań ostatecznie zwartych (patrz Dodatek, str. 123), oznacza, że istnieje $\bar{u} \in B_{H^1}(0, R_0)$ takie, że $\mathbf{\Phi}_T(\bar{u}) = \bar{u}$, a tym samym otrzymujemy istnienie T-okresowego rozwiązania rówania (3.7). □

Kolejne twierdzenie rozstrzyga kwestię istnienia T-okresowych rozwiązań równania (3.7) w sytuacji, gdy istnieje trywialne rozwiązanie $u \equiv 0$, a samo twierdzenie 3.3.1 nie implikuje istnienia nietrywialnych okresowych rozwiązań.

Twierdzenie 3.3.2. *Załóżmy, że spełnione są wszystkie założenia* twierdzenia 3.3.1 *oraz zachodzi* (7) *i* $\mathrm{Ker}\,(\Delta + \widehat{\alpha}) = \{0\}$. *Jeśli równanie* (3.9) *nie posiada T-okresowych rozwiązań dla $\lambda \in (0, 1]$ oraz $m(\infty) \not\equiv m(0)$ mod 2, gdzie $m(0)$ i $m(\infty)$ oznaczają liczbę dodatnich wartości własnych (wraz z krotnościami) operatorów, odpowiednio $\Delta + \widehat{\alpha}$ i $\Delta + \widehat{\omega}$, to równanie* (3.7) *posiada nietrywialne, T-okresowe rozwiązanie*

$$u \in C([0, +\infty), H^2(\mathbb{R}^N)) \cap C^1([0, +\infty), L^2(\mathbb{R}^N)).$$

Dowód. Na mocy twierdzenia 2.4.1 otrzymujemy istnienie $R_0, r_0 > 0$ takich, że

$$\lim_{t \to 0^+} \mathrm{Ind}_{uc}(\widehat{\mathbf{\Phi}}_t, B_{H^1}(0, R)) = (-1)^{m(\infty)}, \quad \text{gdy} \ \ R \geq R_0, \tag{3.23}$$

oraz

$$\lim_{t \to 0^+} \mathrm{Ind}_{uc}(\widehat{\mathbf{\Phi}}_t, B_{H^1}(0, r)) = (-1)^{m(0)}, \quad \text{gdy } 0 < r \leq r_0. \tag{3.24}$$

Dalej, z twierdzenia 3.2.1 wynika, że istnieją $R \geq R_0$ oraz $r \in (0, r_0]$ takie, że dla $\lambda \in (0, 1]$ zagadnienie (3.6) nie posiada rozwiązań o tej własności, że $u(0) \in B_{H^1}(0, r) \cup \big(H^1(\mathbb{R}^N) \setminus B_{H^1}(0, R)\big)$. Połóżmy więc $U := B_{H^1}(0, R) \setminus \overline{B_{H^1}(0, r)}$ i skorzystajmy z wniosku 3.1.2. Wówczas

$$\mathrm{Ind}_{uc}(\mathbf{\Phi}_T, U) = \lim_{t \to 0^+} \mathrm{Ind}_{uc}(\widehat{\mathbf{\Phi}}_t, U),$$

co razem z (3.23) i (3.24), na podstawie własności addytywności indeksu punktów stałych dla klasy odwzorowań ostatecznie zwartych (patrz Dodatek, str. 123), daje

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_{uc}(\mathbf{\Phi}_T, U) &= \lim_{t\to 0^+} \mathrm{Ind}_{uc}(\widehat{\mathbf{\Phi}}_t, B_{H^1}(0,R)) - \lim_{t\to 0^+} \mathrm{Ind}_{uc}(\widehat{\mathbf{\Phi}}_t, B_{H^1}(0,r)) \\ &= (-1)^{m(\infty)} - (-1)^{m(0)} \neq 0.\end{aligned}$$

Zatem istnieje punkt stały operatora $\mathbf{\Phi}_T$ w U. □

Rozdział 4

Rozwiązania okresowe równań parabolicznych w rezonansie

Rozdział ten poświęcowy jest omówieniu otrzymanych wyników dotyczących istnienia T-okresowych rozwiązań równań parabolicznych postaci

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + V(x)u + f(t, x, u),\ \ x \in \mathbb{R}^N, t > 0,$$

gdzie f jest odwzorowaniem ciągłym i ograniczonym przez funkcję z przestrzeni $L^2(\mathbb{R}^N)$, zaś liniowa część powyższego równania $\Delta + V$ ma nietrywialne jądro. Dowodzę w nim rezonansowej wersji zasady uśredniania, która pozwala wyrazić indeks punktów stałych (dla klasy odwzorowań ostatecznie zwartych) operatora przesunięcia wzdłuż trajektorii dla rodziny zagadnień

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + V(x)u + \epsilon f(t, x, u),\ \ x \in \mathbb{R}^N, t > 0,$$

gdzie $\epsilon \in [0, 1]$ jest parametrem, w terminach stopnia Brouwera odwzorowania $\widehat{f}$ obciętego do skończenie wymiarowej przestrzeni $\mathcal{N} := \mathrm{Ker}(\Delta + V)$. Następnie wykorzystując technikę uśredniania i kontynuacji wzdłuż parametru ϵ, dzięki odpowiednim warunkom typu Landesmana-Lazera nałożonym na nieliniowość f, dowodzę kryterium stwierdzające istnienie T-okresowych rozwiązań wyjściowego równania.

4.1 Wprowadzenie

W niniejszym rozdziale rozważać będziemy równanie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \Delta u(x, t) + V(x)u(x, t) + f(t, x, u(x, t)),\ \ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^N, \\ u(\cdot, t) \in H^1(\mathbb{R}^N),\ t \geq 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

w którym $V = V_0 - V_\infty$, $V_0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$, gdzie p jest jak w (3) (patrz str. 5) oraz $V_\infty(x) \geq \bar{v}_\infty$ dla p.w. $x \in \mathbb{R}^N$ i pewnej liczby rzeczywistej $\bar{v}_\infty > 0$, natomiast $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest odwzorowaniem ciągłym, T-okresowym względem pierwszej zmiennej, tzn.

$$f(t, x, u) = f(t + T, x, u) \text{ dla } t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N, u \in \mathbb{R}, \tag{4.2}$$

oraz spełniającym dla wszystkich $t, s \in [0, +\infty)$, $u, v \in \mathbb{R}$ i p.w. $x \in \mathbb{R}^N$ następujące warunki

$$|f(t, x, u)| \leq m_0(x), \tag{4.3}$$

$$|f(t, x, u) - f(s, x, v)| \leq \big(\tilde{k}(x) + k(x)|u|\big)|t - s|^\theta + l(x)|u - v| \tag{4.4}$$

dla pewnych $m_0, \tilde{k} \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $k, l \in L^p(\mathbb{R}^N)$ oraz stałej $\theta \in (0, 1)$.

Interesować nas będzie sytuacja, w której równanie (4.1) jest w rezonansie w nieskończoności, tzn. gdy linearyzacja w nieskończoności ma nietrywialne jądro. Zakładać będziemy również, że nieliniowość f spełnia jeden z warunków typu Landesmana-Lazera, tj. albo dla dowolnej funkcji $\phi \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$, gdzie $\mathcal{N} := \mathrm{Ker}(\Delta + V)$,

$$\int_0^T \left(\int_{\{\phi > 0\}} \check{f}_+(t, x)\phi(x)\, \mathrm{d}x + \int_{\{\phi < 0\}} \hat{f}_-(t, x)\phi(x)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t > 0, \tag{4.5}$$

gdzie $\check{f}_+(t, x) := \liminf_{s \to +\infty} f(t, x, s)$ oraz $\hat{f}_-(t, x) := \limsup_{s \to -\infty} f(t, x, s)$, albo

$$\int_0^T \left(\int_{\{\phi > 0\}} \hat{f}^+(t, x)\phi(x)\, \mathrm{d}x + \int_{\{\phi < 0\}} \check{f}^-(t, x)\phi(x)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t < 0, \tag{4.6}$$

gdzie $\hat{f}^+(t, x) := \limsup_{s \to +\infty} f(t, x, s)$ i $\check{f}^-(t, x) := \liminf_{s \to -\infty} f(t, x, s)$.

Uwaga 4.1.1. (i) Dzięki własności jednoznacznej kontynuacji (z ang. *unique continuation property*) można udowodnić (patrz [32], [38], [46], [62]), że przy powyższych założeniach dotyczących V, dla dowolnego $u \in \mathrm{Ker}(\Delta + V)$, miara zbioru $\{x \in \mathbb{R}^N \mid u(x) = 0\}$ jest równa 0.

(ii) Jeśli $\check{f}_+ \geq 0$, $\hat{f}_- \leq 0$ oraz obie funkcje nie są równe p.w. funkcji zerowej, to spełniony jest warunek (4.5). Istotnie, wówczas dla dowolnej funkcji $\phi \in \mathrm{Ker}(\Delta + V)$ i dowolnego $t \geq 0$ mamy

$$\int_{\{\phi > 0\}} \check{f}_+(t, x)\phi(x)\, \mathrm{d}x + \int_{\{\phi < 0\}} \hat{f}_-(t, x)\phi(x)\, \mathrm{d}x \geq 0.$$

Zauważmy (podobnie jak w [52] i [53]), że wspomniana w (i) własność jednoznacznej kontynuacji implikuje $\phi(x) \neq 0$ p.w. oraz $\mathbb{R}^N \setminus (\{\phi > 0\} \cup \{\phi < 0\})$ jest zbiorem miary 0 i dlatego

$$\int_{\{\phi>0\}} \check{f}_+(t,x)\phi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\{\phi<0\}} \hat{f}_-(t,x)\phi(x)\,\mathrm{d}x > 0,$$

co implikuje (4.5).

Jeżeli natomist $\hat{f}^+ \le 0$, $\check{f}^- \ge 0$ oraz obie funkcje nie są równe p.w. funkcji zerowej, to spełniony jest warunek (4.6). Istotnie, wówczas dla dowolnej funkcji $\phi \in \mathrm{Ker}(\Delta + V)$ i dowolnego $t \ge 0$ mamy

$$\int_{\{\phi>0\}} \hat{f}^+(t,x)\phi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\{\phi<0\}} \check{f}^-(t,x)\phi(x)\,\mathrm{d}x \le 0.$$

Wówczas (podobnie jak w [52] i [53]), własność jednoznacznej kontynuacji implikuje $\phi(x) \ne 0$ p.w. oraz $\mathbb{R}^N \setminus (\{\phi > 0\} \cup \{\phi < 0\})$ jest zbiorem miary 0 i dlatego

$$\int_{\{\phi>0\}} \hat{f}^+(t,x)\phi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\{\phi<0\}} \check{f}^-(t,x)\phi(x)\,\mathrm{d}x < 0,$$

co implikuje (4.6). □

W niniejszym rozdziale celem naszych rozważań jest stwierdzenie istnienia T-okresowego rozwiązania $u \in C([0,+\infty), H^2(\mathbb{R}^N)) \cap C^1([0,+\infty), L^2(\mathbb{R}^N))$ równania (4.1).

4.2 Rezonansowa zasada uśredniania

Niech $\mathbf{A}_0 : D(\mathbf{A}_0) \to X$ będzie liniowym operatorem na przestrzeni $X := L^2(\mathbb{R}^N)$ określonym następująco

$$\mathbf{A}_0 u := -\Delta u \text{ dla } u \in D(\mathbf{A}_0) := H^2(\mathbb{R}^N).$$

Zdefiniujmy operator $\mathbf{V}_0 : D(\mathbf{V}_0) \to L^2(\mathbb{R}^N)$, kładąc

$$[\mathbf{V}_0 u](x) := V_0(x)u(x) \text{ dla } u \in D(\mathbf{V}_0) := H^1(\mathbb{R}^N) \text{ i p.w. } x \in \mathbb{R}^N,$$

gdzie $V_0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$, p jest jak w (3) oraz niech $\mathbf{V}_\infty : L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ będzie operatorem określonym wzorem

$$[\mathbf{V}_\infty u](x) := V_\infty(x)u(x) \text{ dla } u \in L^2(\mathbb{R}^N) \text{ i p.w. } x \in \mathbb{R}^N,$$

gdzie $V_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ oraz $V_\infty(x) \ge \bar{v}_\infty$ dla p.w. $x \in \mathbb{R}^N$ i pewnej liczby rzeczywistej $\bar{v}_\infty > 0$. Połóżmy $\mathbf{A} := \mathbf{A}_0 - \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_\infty$. Załóżmy dalej, że odwzorowanie $\mathbf{F} : [0,+\infty) \times H^1(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ określone jest wzorem

$$[\mathbf{F}(t,u)](x) := f(t,x,u) \text{ dla } t \ge 0, u \in H^1(\mathbb{R}^N) \text{ i p.w. } x \in \mathbb{R}^N,$$

gdzie $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągłym odwzorowaniem spełniającym warunki (4.3) i (4.4). Zatem możemy zastosować wyniki podrozdziałów 2.1 i 2.2.

Twierdzenie 4.2.1. *Załóżmy, że* $\mathcal{N} := \mathrm{Ker}\mathbf{A} \neq \{0\}$ *i niech* $\overline{\mathbf{F}} : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ *będzie odwzorowaniem danym wzorem*

$$\overline{\mathbf{F}}(u) := \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{PF}(s, u)\, \mathrm{d}s,\ u \in \mathcal{N}, \tag{4.7}$$

gdzie $\mathbf{P} : L^2(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{N}$ *jest projekcją ortogonalną na* $\mathcal{N}$*. Załóżmy dalej, że otwarte, ograniczone zbiory* $U \subset \mathcal{N}$ *i* $W \subset \mathcal{N}^\perp$*, gdzie*

$$\mathcal{N}^\perp := \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \mid (u, v)_{L^2} = 0\ \forall\ v \in \mathcal{N}\}^1,$$

są takie, że $0 \notin \overline{\mathbf{F}}(\partial U)$ *i* $0 \in W$*. Oznaczmy przez* $\mathbf{\Phi}_T^{(\epsilon)} : H^1(\mathbb{R}^N) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ *operator przesunięcia wzdłuż trajektorii (o czas* T*) dla zagadnienia*

$$\dot{u}(t) = -\mathbf{A}u(t) + \epsilon\mathbf{F}(t, u),\ t > 0. \tag{4.8}$$

Wówczas istnieje $\epsilon_0 > 0$ *takie, że dla* $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$, $\mathbf{\Phi}_T^{(\epsilon)}(\bar{u}) \neq \bar{u}$ *dla* $\bar{u} \in \partial(U \oplus W)$ *oraz*

$$\mathrm{Ind}_{uc}(\mathbf{\Phi}_T^{(\epsilon)}, U \oplus W) = (-1)^{m(\infty)+\dim\mathcal{N}}\mathrm{Deg}_B(\overline{\mathbf{F}}, U),$$

gdzie $m(\infty)$ *oznacza liczbę dodatnich wartości własnych (liczoną wraz z krotnościami) operatora* $-\mathbf{A}$ *oraz* Deg_B *oznacza stopień topologiczny Brouwera.*

Uwaga 4.2.2. Korzystając z uwagi 2.3.3 widzimy, że zbiór $\sigma(\mathbf{A}) \cap (-\infty, \bar{v}_\infty)$ składa się z izolowanych wartości własnych operatora $\mathbf{A}$, którym odpowiadają skończenie wymiarowe przestrzenie własne. W szczególności $\dim\mathcal{N} < +\infty$.

Przejdźmy teraz do dowodu twierdzenia 4.2.1. Do jego przeprowadzenia potrzebne nam będą następujące fakty.

Lemat 4.2.3. *Przypuśćmy, że dany jest ciąg funkcji ciągłych* $w_n : [0, T] \to L^2(\mathbb{R}^N)$, $n \geq 1$*, taki, że dla wszystkich* $t \in [0, T]$ *i* $n \geq 1$, $\|w_n(t)\|_{L^2} \leq K$ *dla pewnej stałej* $K > 0$ *oraz* $(w_n(t))$ *zbiega do* 0 *w przestrzeni* $L^2(\mathbb{R}^N)$*, gdy* $n \to +\infty$*, jednostajnie względem* t *ze zwartych podzbiorów* $(0, T]$ *oraz niech* $v_n : [0, T] \to H^1(\mathbb{R}^N)$ *będzie ciągiem* T*-okresowych rozwiązań problemu*

$$\dot{v}(t) = -\mathbf{A}v(t) + w_n(t), \qquad t \in [0, T],$$

[1]Zauważmy, że $\mathcal{N}^\perp$ jest przestrzenią domkniętą w $H^1(\mathbb{R}^N)$ oraz $H^1(\mathbb{R}^N) = \mathcal{N} \oplus \mathcal{N}^\perp$.

takim, że $v_n(0) \to \bar{v}_0$ *w* $L^2(\mathbb{R}^N)$*, gdy* $n \to +\infty$*, dla pewnego* $\bar{v}_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$*. Wówczas* $v_n(t) \to v_0(t)$ *w* $H^1(\mathbb{R}^N)$*, gdy* $n \to +\infty$*, jednostajnie względem* t *ze zwartych podzbiorów* $(0, T]$*, gdzie* v_0 *jest rozwiązaniem zagadnienia*

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = -\mathbf{A}v(t), & t \in [0, T], \\ v(0) = \bar{v}_0. \end{cases} \tag{4.9}$$

Dowód. Ze wzoru Duhamela wynika, że dla $t \in [0, T]$,

$$v_n(t) - v_0(t) = e^{-t\mathbf{A}}(v_n(0) - \bar{v}_0) + \int_0^t e^{-(t-s)\mathbf{A}} w_n(s)\,\mathrm{d}s, \tag{4.10}$$

co implikuje, że

$$\|v_n(t) - v_0(t)\|_{H^1} \le C_{1/2} e^{\delta T} t^{-1/2} \|v_n(0) - \bar{v}_0\|_{L^2} + C_{1/2} e^{\delta T} \int_0^t (t-s)^{-1/2} \|w_n(s)\|_{L^2}\,\mathrm{d}s$$

dla pewnych stałych $C_{1/2} > 0$ i $\delta > 0$ (patrz uwaga 5.7.13)[1] Ustalmy $\eta \in (0, T)$ i niech $t \in (\eta, T]$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \int_0^t (t-s)^{-1/2} \|w_n(s)\|_{L^2}\,\mathrm{d}s &\le \left(\frac{2}{\eta}\right)^{1/2} \int_0^{t-\eta/2} \|w_n(s)\|_{L^2}\,\mathrm{d}s + \int_{t-\eta/2}^t (t-s)^{-1/2} \|w_n(s)\|_{L^2}\,\mathrm{d}s \\ &\le \left(\frac{2}{\eta}\right)^{1/2} \int_0^T \|w_n(s)\|_{L^2}\,\mathrm{d}s + (2\eta)^{1/2} \sup_{s \in [\eta/2, T]} \|w_n(s)\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Ponieważ $\|w_n(t)\|_{L^2} \to 0$, gdy $n \to +\infty$, jednostajnie względem t ze zwartych podzbiorów $(0, T]$ oraz funkcje w_n są ograniczone w $L^2(\mathbb{R}^N)$ jednostajnie względem n wnosimy, że $\|v_n(t) - v_0(t)\|_{H^1} \to 0$, gdy $n \to +\infty$, jednostajnie względem $t \in (\eta, T]$. □

Lemat 4.2.4. (patrz [51, Lemma 13.1]) *Niech* $\theta_T^{(\lambda)} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *będzie operatorem przesunięcia wzdłuż trajektorii stowarzyszonym z równaniem*

$$\dot{u}(t) = \lambda F(u(t)), \qquad t > 0,$$

w którym $\lambda \in [0, 1]$ *jest parametrem oraz* $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *jest odwzorowaniem ciągłym i ograniczonym. Jeżeli* $U \subset \mathbb{R}^N$ *jest zbiorem otwartym, ograniczonym i takim, że* $F(x) \neq 0$ *dla* $x \in \partial U$*, to istnieje* $\lambda_0 > 0$ *takie, że dla wszystkich* $\lambda \in (0, \lambda_0]$ *mamy* $\theta_T^{(\lambda)}(x) \neq x$ *oraz*

$$\mathrm{Ind}_{LS}(\theta_T^{(\lambda)}, U) = \mathrm{Deg}_B(-F, U).$$

Uwaga 4.2.5. Ponieważ $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}^\perp$ są domkniętymi podprzestrzeniami przestrzeni $H^1(\mathbb{R}^N)$, więc jeśli zbiory $U \subset \mathcal{N}$ i $W \subset \mathcal{N}^\perp$ są owarte w topologiach indukowanych z przestrzeni $H^1(\mathbb{R}^N)$, to zbiór $U \oplus W$ jest otwarty w $H^1(\mathbb{R}^N)$ oraz zachodzi równość

$$\partial(U \oplus W) = \partial U \oplus \overline{W}^{\mathcal{N}^\perp} \cup \overline{U}^{\mathcal{N}} \oplus \partial W.$$

[1] $\delta > 0$ jest liczbą rzeczywistą taką, że $\sigma(\mathbf{A} + \delta I) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$.

Dowód twierdzenia 4.2.1.

Krok 1. Oznaczmy przez $\mathbf{\Theta}_T^{(\epsilon)} : H^1(\mathbb{R}^N) \times [0,1] \to H^1(\mathbb{R}^N)$, $\epsilon \in [0,1]$, operator przesunięcia wzdłuż trajektorii dla równania

$$\dot{u}(t) = -\mathbf{A}u(t) + \epsilon\mathbf{G}(t,u,\mu), \qquad t > 0, \tag{4.11}$$

w którym $\mathbf{G} : [0,+\infty) \times H^1(\mathbb{R}^N) \times [0,1] \to L^2(\mathbb{R}^N)$ jest odwzorowaniem danym wzorem

$$\mathbf{G}(t,u,\mu) := (1-\mu)\mathbf{F}(t,(1-\mu)u + \mu\tilde{\mathbf{P}}u) + \frac{\mu}{T}\int_0^T \mathbf{P}\mathbf{F}(s,(1-\mu)u + \mu\tilde{\mathbf{P}}u)\,\mathrm{d}s,$$

gdzie $\tilde{\mathbf{P}} : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{N}$ jest obcięciem projekcji ortogonalnej na $\mathcal{N}$ w $L^2(\mathbb{R}^N)$. Zauważmy, że dla $t \in [0,T]$ i $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$,

$$\mathbf{G}(t,u,0) = \mathbf{F}(t,u) \qquad \text{oraz} \qquad \mathbf{G}(t,u,1) = \overline{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{P}}u).$$

Wykażemy najpierw, że operator $\mathbf{\Theta}_T^{(\epsilon)}$ jest poprawnie określonym odwzorowaniem ostatecznie zwartym. W tym celu zauważmy, wykorzystując twierdzenie 1.4.4, że dla wszystkich $t,s \geq 0$, $u,v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ i $\mu \in [0,1]$ mamy

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{G}(t,u,\mu) - \mathbf{G}(s,v,\mu)\|_{L^2} \leq D(1 + \|(1-\mu)u + \mu\tilde{\mathbf{P}}u\|_{H^1})|t-s|^\theta + \\
&\quad + L\|(1-\mu)(u-v) + \mu\tilde{\mathbf{P}}(u-v)\|_{H^1} + \mu L\|(1-\mu)(u-v) + \mu\tilde{\mathbf{P}}(u-v)\|_{H^1} \\
&\quad \leq \tilde{D}(1 + \|u\|_{H^1})|t-s|^\theta + \tilde{L}\|u-v\|_{H^1}
\end{aligned}$$

dla pewnych stałych $\tilde{D}, \tilde{L} > 0$ i $\theta \in (0,1)$. Co więcej, dla wszystkich $t \geq 0$, $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ i $\mu \in [0,1]$

$$|\mathbf{G}(t,u,\mu)(x)| \leq m_0(x) + k_0(x)\|m_0\|_{L^2}, \tag{4.12}$$

gdzie $k_0(x) := \sum_{k=1}^{\dim\mathcal{N}} |\varphi_k(x)|$ i $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\dim\mathcal{N}}$ jest bazą ortonormalną przestrzeni $\mathcal{N}$ z iloczynem skalarnym indukowanym z przestrzeni $L^2(\mathbb{R}^N)$. Stąd wnosimy, że istnieje stała $C > 0$ taka, że dla wszystkich $t \geq 0$, $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ i $\mu \in [0,1]$

$$\|\mathbf{G}(t,u,\mu)\|_{L^2} \leq C. \tag{4.13}$$

Dalej, widzimy, że dla $t \geq 0$, $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $\mu, \nu \in [0,1]$,

$$\|\mathbf{G}(t,u,\mu) - \mathbf{G}(t,u,\nu)\|_{L^2} \leq |\rho(\mu) - \rho(\nu)|,$$

gdzie $\rho \in C([0,1])$ jest funkcją daną wzorem $\rho(\mu) := 2\|m_0\|_{L^2} \cdot \mu$. Z powyższych rozważań wynika, że $\mathbf{G}$ spełnia warunki (2.12), (2.13) i (2.14) (ze str. 44). Z twierdzenia 1.1.4 wynika, że operator $\mathbf{\Theta}_T^{(\epsilon)}$ jest poprawnie określony, zaś z twierdzenia 2.2.4, że należy on do klasy odwzorowań ostatecznie zwartych (dla dowolnego $\epsilon \in (0,1]$).

Krok 2. Twierdzimy teraz, że istnieje $\epsilon_0 > 0$ takie, że dla $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$,

$$\mathbf{\Theta}_T^{(\epsilon)}(\bar{u}, \mu) \neq \bar{u} \qquad \text{dla} \;\; \bar{u} \in \partial(U \oplus W), \;\; \mu \in [0,1]. \tag{4.14}$$

W przeciwnym wypadku istnieją ciągi (ϵ_n) w $(0,+\infty)$, $(\bar{u}_n)$ w $\partial(U \oplus W)$ i (μ_n) w $[0,1]$ takie, że $\epsilon_n \to 0^+$ oraz

$$\mathbf{\Theta}_T^{(\epsilon_n)}(\bar{u}_n, \mu_n) = \bar{u}_n \;\; \text{dla wszystkich } n \geq 1. \tag{4.15}$$

Niech funkcje $u_n : [0, +\infty) \to H^1(\mathbb{R}^N)$, $n \geq 1$, będą rozwiązaniami (4.11) z $\epsilon = \epsilon_n$ i $\mu = \mu_n$, spełniającymi warunek początkowy $u_n(0) = \bar{u}_n$. Wówczas z równości (4.15), twierdzenia 1.1.6 oraz wzoru Duhamela wynika, że

$$\bar{u}_n = u_n(T) = e^{-T\mathbf{A}}\bar{u}_n + \epsilon_n \int_0^T e^{-(T-s)\mathbf{A}}\, \mathbf{G}(s, u_n(s), \mu_n)\; \mathrm{d}s.$$

Ponadto zauważmy, że dla dowolnej funkcji $\phi \in \mathcal{N}$ mamy

$$\begin{aligned}(\bar{u}_n, \phi)_{L^2} &= (e^{-T\mathbf{A}}\bar{u}_n, \phi)_{L^2} + \epsilon_n \int_0^T (e^{-(T-s)\mathbf{A}}\, \mathbf{G}(s, u_n(s), \mu_n), \phi)_{L^2}\; \mathrm{d}s \\ &= (\mathbf{P}e^{-T\mathbf{A}}\bar{u}_n, \phi)_{L^2} + \epsilon_n \int_0^T (\mathbf{P}e^{-(T-s)\mathbf{A}}\, \mathbf{G}(s, u_n(s), \mu_n), \phi)_{L^2}\; \mathrm{d}s,\end{aligned}$$

co implikuje (patrz Dodatek, wniosek 5.8.2), że

$$\int_0^T (\mathbf{G}(s, u_n(s), \mu_n), \phi)_{L^2}\; \mathrm{d}s = 0 \;\; \text{dla } \phi \in \mathcal{N}. \tag{4.16}$$

Bez straty ogólności rozumowania możemy założyć, że $\mu_n \to \mu_0$, gdy $n \to +\infty$, gdzie $\mu_0 \in [0,1]$. Z (4.13) oraz lematu 1.1.7 wynika, że istnieje $R > 0$ takie, że $\|u_n(t)\|_{H^1} \leq R$ dla wszystkich $t > 0$ i $n \geq 1$. Niech $M > 0$ będzie dowolną, lecz ustaloną liczbą oraz, dla dowolnego $n \geq 1$, weźmy liczbę całkowitą $k_n \geq 1$ taką, że $k_n T > M$. Na podstawie lematu 2.1.2 widzimy więc, że dla wszystkich $m, n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\|(1-\chi_m)\bar{u}_n\|_{L^2}^2 &= \|(1-\chi_m)u_n(0)\|_{L^2}^2 = \|(1-\chi_m)u_n(k_n T)\|_{L^2}^2 \\ &\leq R^2 e^{-2\bar{v}_\infty k_n T} + \alpha_m \leq R^2 e^{-2\bar{v}_\infty M} + \alpha_m,\end{aligned} \tag{4.17}$$

gdzie χ_m jest funkcją charakterystyczną kuli $B(0,m)$ i $\alpha_m \to 0^+$, gdy $m \to +\infty$. Z dowolności $M > 0$ wynika, że $\|(1-\chi_m)\bar{u}_n\|_{L^2} \leq \sqrt{\alpha_m}$ dla $n \geq 1$. Dalej, z twierdzenia Rellicha-Kondraszowa wynika, że $\{\chi_m \bar{u}_n\}_{n\geq 1}$ jest relatywnie zwarty w $L^2(\mathbb{R}^N)$. W konsekwencji wnioskujemy, że $\{\bar{u}_n\}_{n\geq 1}$ jest relatywnie zwarty w $L^2(\mathbb{R}^N)$. Ponieważ jest on ograniczony w $H^1(\mathbb{R}^N)$, wykorzystując twierdzenia Eberleina-Šmuliana wnosimy, że istnieje podciąg $(\bar{u}_{n_k})$ ciągu $(\bar{u}_n)$ taki, że $\bar{u}_{n_k} \to \bar{u}_0$ w $L^2(\mathbb{R}^N)$, gdy $k \to +\infty$, gdzie $\bar{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Na podstawie lematu 4.2.3[1] widzimy, że $(u_n(t))$ zbiega w $H^1(\mathbb{R}^N)$ do $u_0(t)$, jednostajnie względem $t \in (0, T]$, gdzie u_0 jest rozwiązaniem zagadnienia

$$\dot{u}(t) = -\mathbf{A}u(t),\ t \in (0, T], \quad u(0) = u(T) = \bar{u}_0.$$

Zatem $\bar{u}_0 \in \mathcal{N}$ (patrz Dodatek, wniosek 5.8.2) oraz $u_0(t) = \bar{u}_0$ dla wszystkich $t \in [0, +\infty)$. Przechodząc teraz w (4.16) do granicy z $n \to +\infty$, dostajemy $\overline{\mathbf{F}}(\bar{u}_0) = 0$, co przeczy założeniu, gdyż z uwagi 4.2.5 wynika, że $\bar{u}_0 \in \partial U$, jednocześnie dowodząc (4.14).

Krok 3. Z (4.14) wynika, że $\mathbf{\Theta}_T^{(\epsilon)}$ jest odwzorowaniem dopuszczalnym w teorii indeksu punktów stałych dla odwzorowań ostatecznie zwartych, a zatem z własności homotopijnej niezmienniczości indeksu punktów stałych otrzymujemy dla wszystkich $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ następującą równość

$$\mathrm{Ind}_{uc}(\mathbf{\Phi}_T^{(\epsilon)}, U \oplus W) = \mathrm{Ind}_{uc}(\mathbf{\Theta}_T^{(\epsilon)}(\cdot, 0), U \oplus W) = \mathrm{Ind}_{uc}(\mathbf{\Theta}_T^{(\epsilon)}(\cdot, 1), U \oplus W). \quad (4.18)$$

Niech $\mathbf{\Psi}_T^{(\epsilon)} : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ będzie operatorem przesunięcia wzdłuż trajektorii stowarzyszonym z równaniem

$$\dot{u}(t) = \epsilon\overline{\mathbf{F}}(u(t)),\ t > 0.$$

Wówczas z lematu 4.2.4 wynika, że zmniejszając ϵ_0 w razie potrzeby, dla wszystkich $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ mamy

$$\mathbf{\Psi}_T^{(\epsilon)}(u) \neq u \text{ dla } u \in \partial U. \quad (4.19)$$

Określmy operator $\mathbf{\Psi}_T : \mathcal{N}^\perp \to \mathcal{N}^\perp$ wzorem

$$\mathbf{\Psi}_T(v) := e^{-T\mathbf{A}}v,\ v \in \mathcal{N}^\perp.$$

Zauważmy, że zbiór $\sigma(\mathbf{A}) \cap (-\infty, 0)$ jest ograniczony i domknięty, co jest konsekwencją uwagi 4.2.2. Niech $\tilde{\mathbf{A}}$ będzie obcięciem operatora $\mathbf{A}$ w przestrzeni $\tilde{X}$ ortogonalnej do $\mathcal{N}$ w $L^2(\mathbb{R}^N)$. Wówczas wiadomo (patrz Dodatek, twierdzenie 5.8.4), że istnieją domknięte podprzestrzenie X_- i X_+ przestrzeni $\tilde{X}$ takie, że $X_- \oplus X_+ = \tilde{X}$, $\dim X_- < +\infty$, $\tilde{\mathbf{A}}(X_-) \subset X_-$, $\tilde{\mathbf{A}}(D(\tilde{\mathbf{A}}) \cap X_+) \subset X_+$, $\sigma(\tilde{\mathbf{A}}|_{X_-}) = \sigma(\mathbf{A}) \cap (-\infty, 0)$, $\sigma(\tilde{\mathbf{A}}|_{X_+}) = \sigma(\mathbf{A}) \cap (0, +\infty)$. Określmy $\mathbf{\Gamma} : \mathcal{N}^\perp \times [0, 1] \to \mathcal{N}^\perp$ wzorem

$$\mathbf{\Gamma}(\bar{v}, \mu) := (1 - \mu)\mathbf{\Psi}_T(\bar{v}) + \mu\mathbf{\Psi}_T(\mathbf{P}_-\bar{v}),$$

[1] Oczywiście z (4.13) wynika, że $\|\varepsilon_n \mathbf{G}(t, u_n(t), \mu_n)\|_{L^2} \leq C$ dla wszystkich $n \geq 1$ i $t \geq 0$.

gdzie $\mathbf{P}_- : \mathcal{N}^\perp \to X_-$ jest obcięciem rzutowania na X_- w $L^2(\mathbb{R}^N)$. Wówczas $\mathbf{\Gamma}$ jest odwzorowaniem ostatecznie zwartym i takim, że dla $\mu \in [0,1]$,

$$\operatorname{Ker}(I - \mathbf{\Gamma}(\cdot,\mu)) = \{0\}. \tag{4.20}$$

Istotnie, weźmy ograniczony zbiór $B \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ o tej własności, że $B = \overline{\operatorname{conv}}^{H^1}\Gamma(B\times [0,1])$. To oznacza, że $B \subset \overline{\operatorname{conv}}^{H^1} e^{-T\mathbf{A}}(B \cup \mathbf{P}_- B)$. Ponieważ zbiór $B \cup \mathbf{P}_- B$ jest ograniczony, twierdzenie 2.2.4 (iii) implikuje, że B jest relatywnie zwarty w $H^1(\mathbb{R}^N)$, co dowodzi ostatecznej zwartości $\mathbf{\Gamma}$. Dalej przypuśćmy, że

$$e^{-T\mathbf{A}}((1-\mu)\bar{v} + \mu\mathbf{P}_-\bar{v}) = \bar{v} \tag{4.21}$$

dla pewnego $\mu \in [0,1]$ oraz $\bar{v} \in \mathcal{N}^\perp$. Ponieważ $\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$ dla pewnych $\bar{v}_1 \in \mathcal{N}^\perp \cap X_-$ i $\bar{v}_2 \in \mathcal{N}^\perp \cap X_+$ oraz $\mathbf{P}_-\bar{v} = \bar{v}_1$, więc równość (4.21) implikuje, że

$$e^{-T\mathbf{A}}\bar{v}_1 + (1-\mu)e^{-T\mathbf{A}}\bar{v}_2 = \bar{v}_1 + \bar{v}_2.$$

Korzystając z faktu, że $e^{-T\mathbf{A}}\bar{v}_1 \subset X_-$ oraz $(1-\mu)e^{-T\mathbf{A}}\bar{v}_2 \subset X_+$ oraz jednoznaczności rozkładu wnosimy, że $e^{-T\mathbf{A}}\bar{v}_1 = \bar{v}_1$ oraz $(1-\mu)e^{-T\mathbf{A}}\bar{v}_2 = \bar{v}_2$. Z pierwszej równości wynika natychmiast, że $\bar{v}_1 = 0$. W przypadku, gdy $\mu = 0$ lub $\mu = 1$, druga równość implikuje natychmiast $\bar{v}_2 = 0$. Jeżeli natomiast $\mu \in (0,1)$, to $\bar{v}_2 \in \operatorname{Ker}(e^{-T\mathbf{A}} - \frac{1}{1-\mu}I)$. Wiadomo jednak (patrz Dodatek, twierdzenie 5.8.1), że $\operatorname{Ker}(e^{-T\mathbf{A}} - \frac{1}{1-\mu}I) = \operatorname{Ker}(\frac{1}{T}\ln\frac{1}{1-\mu}I + \mathbf{A})$, a stąd wynika, że istnieje $\lambda < 0$ taka, że $\mathbf{A}\bar{v}_2 = \lambda\bar{v}_2$. Ponieważ $\mathbf{A}\bar{v}_2 = \tilde{\mathbf{A}}\bar{v}_2$ oraz $\sigma(\tilde{\mathbf{A}}|_{X_+}) = \sigma(\mathbf{A}) \cap (0,+\infty)$, więc $\bar{v}_2 = 0$, co dowodzi (4.20).

Krok 4. Zdefiniujmy odwzorowanie $\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{(\epsilon)} : H^1(\mathbb{R}^N) \times [0,1] \to H^1(\mathbb{R}^N)$ wzorem

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{(\epsilon)}(u,\mu) := \mathbf{\Psi}_T^{(\epsilon)}(\tilde{\mathbf{P}}u) + \mathbf{\Gamma}((I-\tilde{\mathbf{P}})u,\mu),\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \mu \in [0,1]. \tag{4.22}$$

Wówczas dla $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$,

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{(\epsilon)}(u,0) = \mathbf{\Theta}_T^{(\epsilon)}(u,1). \tag{4.23}$$

Istotnie, zauważmy że dla dowolnego $t > 0$, $\mathbf{\Theta}_t^{(\epsilon)}(\cdot,1)$ jest operatorem przesunięcia wzdłuż trajektorii dla

$$\dot{u}(t) = -\mathbf{A}u(t) + \epsilon\overline{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{P}}u(t)),\ t > 0,$$

tzn. $\mathbf{\Theta}_t^{(\epsilon)}(\bar{u},1) = u(t)$, gdzie u jest rozwiązaniem powyższego równania z warunkiem początkowym $u(0) = \bar{u}$. Oczywiście, dla dowolnego $t > 0$, $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$, gdzie

$u_1(t) := \tilde{\mathbf{P}}u(t)$ i $u_2(t) := (I - \tilde{\mathbf{P}})u(t)$ oraz zachodzą następujące równości

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1(t) &= (\tilde{\mathbf{P}}u(t))' = (\mathbf{P}u(t))' = \mathbf{P}\dot{u}(t) = \mathbf{P}\big(- \mathbf{A}u(t) + \epsilon\overline{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{P}}u(t)\big) = \epsilon\overline{\mathbf{F}}(u_1(t)),\\
u_1(0) &= \tilde{\mathbf{P}}\bar{u},\\
\dot{u}_2(t) &= ((I - \tilde{\mathbf{P}})u(t))' = ((I - \mathbf{P})u(t))' = (I - \mathbf{P})\dot{u}(t) = -\mathbf{A}u_2(t),\\
u_2(0) &= (I - \tilde{\mathbf{P}})\bar{u}.
\end{aligned}$$

Stąd wynika, że

$$\tilde{\mathbf{P}}u(T) = u_1(T) = \mathbf{\Psi}_T^{(\epsilon)}(\tilde{\mathbf{P}}\bar{u})$$

oraz

$$\begin{aligned}
(I - \tilde{\mathbf{P}})u(T) &= u_2(T) = e^{-T\mathbf{A}}u_2(0) = e^{-T\mathbf{A}}(I - \tilde{\mathbf{P}})\bar{u} = \mathbf{\Psi}_T((I - \tilde{\mathbf{P}})\bar{u})\\
&= \mathbf{\Gamma}((I - \tilde{\mathbf{P}})\bar{u}, 0).
\end{aligned}$$

W konsekwencji

$$\mathbf{\Theta}_T^{(\epsilon)}(\bar{u}, 1) = u(T) = \mathbf{\Psi}_T^{(\epsilon)}(\tilde{\mathbf{P}}\bar{u}) + \mathbf{\Gamma}((I - \tilde{\mathbf{P}})\bar{u}, 0) = \tilde{\mathbf{\Lambda}}^{(\epsilon)}(\bar{u}, 0),$$

co dowodzi (4.23).

Wówczas, z (4.19) i (4.20) wynika, że dla $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$,

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{(\epsilon)}(\bar{u}, \mu) \neq \bar{u} \text{ dla wszystkich } \bar{u} \in \partial(U \oplus W),\ \mu \in [0, 1]$$

i widzimy, że $\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{(\epsilon)}$ jest dopuszczalną homotopią w klasie odwzorowań ostatecznie zwartych. Korzystając z własności homotopijnej niezmienniczości oraz uwagi 5.9.3, dla wszystkich $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ otrzymujemy

$$\mathrm{Ind}_{uc}(\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{(\epsilon)}(\cdot, 0), U\oplus W) = \mathrm{Ind}_{uc}(\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{(\epsilon)}(\cdot, 1), U\oplus W) = \mathrm{Ind}_{LS}(\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{(\epsilon)}(\cdot, 1), U\oplus W). \quad (4.24)$$

Zauważmy, że odwzorowanie $\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{(\epsilon)}(\cdot, 1)$ jest topologicznie sprzężone z odwzorowaniem $\mathbf{\Lambda}^{(\epsilon)} : \mathcal{N} \times \mathcal{N}^\perp \times [0, 1] \to \mathcal{N} \times \mathcal{N}^\perp$ danym wzorem

$$\mathbf{\Lambda}^{(\epsilon)}(u, v) := (\mathbf{\Psi}_T^{(\epsilon)}(u), e^{-T\mathbf{A}}\mathbf{P}_-v),\ u \in \mathcal{N}, v \in \mathcal{N}^\perp.$$

Zatem, z własności topologicznej niezmienniczości indeksu puktów stałych Leray-Schaudera (patrz str. 121), dla $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$,

$$\mathrm{Ind}_{LS}(\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{(\epsilon)}(\cdot, 1), U \oplus W) = \mathrm{Ind}_{LS}((\mathbf{\Psi}_T^{(\epsilon)}, e^{-T\mathbf{A}}\mathbf{P}_-), U \times W). \quad (4.25)$$

Krok 5. Korzystając z własności multiplikatywności indeksu punktów stałych Leray-Schaudera (patrz Dodatek, str. 121), dla $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ mamy

$$\mathrm{Ind}_{LS}((\mathbf{\Psi}_T^{(\epsilon)}, e^{-T\mathbf{A}}\mathbf{P}_-), U \times W) = \mathrm{Ind}_{LS}(\mathbf{\Psi}_T^{(\epsilon)}, U) \cdot \mathrm{Ind}_{LS}(e^{-T\mathbf{A}}\mathbf{P}_-, W). \quad (4.26)$$

Na mocy lematu 4.2.4 otrzymujemy równość

$$\mathrm{Ind}_{LS}(\mathbf{\Psi}_T^{(\epsilon)}, U) = \mathrm{Deg}_B(-\overline{\mathbf{F}}, U) = (-1)^{\dim \mathcal{N}} \mathrm{Deg}_B(\overline{\mathbf{F}}, U) \text{ dla } \epsilon \in (0, \epsilon_0]. \tag{4.27}$$

Dla zakończenia dowodu należy wyznaczyć $\mathrm{Ind}_{LS}(e^{-T\mathbf{A}}\mathbf{P}_-, W)$. W tym celu zauważmy najpierw, że na mocy własności obcinania w teorii indeksu punktów stałych Leray-Schaudera, otrzymujemy

$$\mathrm{Ind}_{LS}(e^{-T\mathbf{A}}\mathbf{P}_-, W) = \mathrm{Ind}_{LS}(e^{-T\mathbf{A}|_{X_-}}, W \cap X_-). \tag{4.28}$$

Ponieważ zbiór $\sigma(\mathbf{A}|_{X_-}) \subset (-\infty, 0)$ składa się z izolowanych wartości własnych o skończonej krotności mamy

$$\mathrm{Ind}_{LS}(e^{-T\mathbf{A}|_{X_-}}, W \cap X_-) = (-1)^{m(\infty)},$$

co razem z (4.28) daje

$$\mathrm{Ind}_{LS}(e^{-T\mathbf{A}}\mathbf{P}_-, W) \quad = \quad (-1)^{m(\infty)}. \tag{4.29}$$

Łącząc (4.18), (4.23), (4.24), (4.25), (4.26), (4.27) i (4.29) kończymy dowód. □

Natychmiastową konsekwencją twierdzenia 4.2.1 oraz własności istnienia indeksu punktów stałych jest następujący wniosek.

Wniosek 4.2.6. *Przypuśćmy, że spełnione są wszystkie założenia* twierdzenia 4.2.1. *Jeśli* $\mathrm{Deg}_B(\overline{\mathbf{F}}, U) \neq 0$, *to dla dostatecznie małych* $\epsilon > 0$, *równanie* (4.8) *posiada* T*-okresowe rozwiązanie.*

Ważnym, z punktu widzenia dalszych rozważań, zastosowaniem twierdzenia 4.2.1 jest następująca *zasada kontynuacji.*

Twierdzenie 4.2.7. *Przypuśćmy, że spełnione są wszystkie założenia* twierdzenia 4.2.1. *Jeśli dla pewnego* $R_0 > 0$ *spełnione są następujące warunki:*

(i) $\mathrm{Deg}_B(\overline{\mathbf{F}}, B_{\mathcal{N}}(0, R_0)) \neq 0$

oraz

(ii) dla dowolnego $\epsilon \in (0,1)$, *problem* (4.8) *nie posiada* T*- okresowych rozwiązań o tej własności, że* $\|u(0)\|_{H^1} \geq R_0$,

to wówczas równanie

$$\dot{u}(t) = -\mathbf{A}u(t) + \mathbf{F}(t, u(t)), \qquad t > 0, \tag{4.30}$$

posiada T*-okresowe rozwiązanie.*

Dowód. Niech $U := B_{\mathcal{N}}(0, QR_0)$ oraz $W := B_{\mathcal{N}^\perp}(0, QR_0)$, gdzie liczba $Q > 0$ jest taka, że $\|u\|_\sim \leq Q\|u\|_{H^1}$ dla wszystkich $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, zaś norma $\|\cdot\|_\sim$ określona jest wzorem

$$\|\bar{u}_1 + \bar{u}_2\|_\sim^2 := \|\bar{u}_1\|_{L^2}^2 + \|\bar{u}_2\|_{H^1}^2 \text{ dla } \bar{u}_1 \in \mathcal{N} \text{ i } \bar{u}_2 \in \mathcal{N}^\perp.$$

Z twierdzenia 4.2.1 wynika, że istnieje $\epsilon_0 > 0$ takie, że dla $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$

$$\mathrm{Ind}_{uc}(\mathbf{\Phi}_T^{(\epsilon)}, U \oplus W) = (-1)^{m(\infty)+\dim \mathcal{N}} \mathrm{Deg}_B(\overline{\mathbf{F}}, U).$$

Zauważmy, że wtedy $\partial(U \oplus W) \subset H^1(\mathbb{R}^N) \setminus B_{H^1}(0, R_0)$, więc korzystając z założenia (ii) wnioskujemy, że dla $\epsilon \in (0, 1)$ oraz $\bar{u} \in \partial(U \oplus W)$, $\mathbf{\Phi}_T^{(\epsilon)}(\bar{u}) \neq \bar{u}$. Zatem możliwe są dwie sytuacje: albo operator przesunięcia wzdłuż trajektorii $\mathbf{\Phi}_T^{(1)}$, stowarzyszony z równaniem (4.30), posiada punkt stały $\bar{u} \in \partial(U \oplus W)$, co oczywiście implikuje istnienie T-okresowego rozwiązania (4.30), albo na mocy homotopijnej niezmienniczości indeksu punktów stałych mamy równość

$$\mathrm{Ind}_{uc}(\mathbf{\Phi}_T^{(1)}, U \oplus W) = \mathrm{Ind}_{uc}(\mathbf{\Phi}_T^{(\epsilon_0)}, U \oplus W) = (-1)^{m(\infty)+\dim \mathcal{N}} \mathrm{Deg}_B(\overline{\mathbf{F}}, U),$$

z której wobec założenia (i) wynika, że

$$\mathrm{Ind}_{uc}(\mathbf{\Phi}_T^{(1)}, U \oplus W) \neq 0.$$

To oznacza, że również w tej sytuacji istnieje punkt stały operatora $\mathbf{\Phi}_T^{(1)}$ w $U \oplus W$. Tym samym kończymy dowód. □

4.3 Rozwiązania okresowe w problemach z warunkami Landesmana-Lazera

W niniejszym rozdziale wykażemy istnienie T-okresowego rozwiązania ($T > 0$) równania (4.1). Narzędziem, które posłuży nam do tego celu, jest twierdzenie 4.2.7. Mianowicie, zapisując wyjściowy problem w abstrakcyjnej postaci, zanurzymy go w rodzinie problemów z parametrem $\epsilon \in [0, 1]$

$$\dot{u}(t) = -\mathbf{A}u(t) + \epsilon\mathbf{F}(t, u(t)), \ t > 0,$$

gdzie liniowy operator $\mathbf{A} : D(\mathbf{A}) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ jest jak w poprzednim podrozdziale, zaś $\mathbf{F} : [0, +\infty) \times H^1(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ jest operatorem Niemyckiego wyznaczonym przez funkcję f. Następnie wykorzystamy metody uśredniania dla małych wartości parametru ϵ oraz kontynuacji - w celu uzyskania rozwiązań okresowych dla $\epsilon = 1$.

Dokładniej rzecz ujmując pokażemy, że przy pewnych warunkach typu *a priori*, indeks punktów stałych operatora $\mathbf{\Phi}_T$ związanego z problemem (4.1) względem kul w przestrzeni $H^1(\mathbb{R}^N)$ o dostatecznie dużym promieniu, jest równy (z dokładnością do znaku), stopniowi topologicznemu Brouwera odwzorowania $\overline{\mathbf{F}} : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, zadanego wzorem (4.7). Na wykazanie nietrywialności stopnia Brouwera oraz na weryfikację wspomnianych warunków *a priori* pozwolą warunki typu Landesmana-Lazera nałożone na nieliniowość f.

W dowodzie kryterium stwierdzającego istnienie T-okresowych rozwiązań równania (4.1), pomocny nam będzie następujący lemat.

Lemat 4.3.1. (i) *Jeżeli spełniony jest warunek* (4.5)*, to istnieje* $R_0 > 0$ *takie, że*

$$(\overline{\mathbf{F}}(u), u)_{L^2} > 0 \text{ dla } u \in \mathcal{N} \setminus B_{\mathcal{N}}(0, R_0). \tag{4.31}$$

(ii) *Jeżeli spełniony jest warunek* (4.6)*, to istnieje* $R_0 > 0$ *takie, że*

$$(\overline{\mathbf{F}}(u), u)_{L^2} < 0 \text{ dla } u \in \mathcal{N} \setminus B_{\mathcal{N}}(0, R_0). \tag{4.32}$$

Dowód. (i) Załóżmy przez sprzeczność, że istnieje ciąg $(\bar{u}_n)$ w $\mathcal{N}$ taki, że $\|\bar{u}_n\|_{H^1} \to +\infty$, gdy $n \to +\infty$ oraz $(\overline{\mathbf{F}}(\bar{u}_n), \bar{u}_n)_{L^2} \le 0$. Zdefiniujmy $\mu_n := \|\bar{u}_n\|_{H^1}$ oraz $\bar{v}_n := \bar{u}_n/\mu_n$. Oczywiście ciąg $(\bar{v}_n)$ jest ograniczony w $H^1(\mathbb{R}^N)$. Ponieważ $\dim \mathcal{N} < +\infty$, więc $(\bar{v}_n)$ posiada podciąg, który ponownie oznaczamy przez $(\bar{v}_n)$, zbieżny w $H^1(\mathbb{R}^N)$ do pewnego $\bar{v}_0 \in \mathcal{N}$. W konsekwencji, $\bar{v}_n \to \bar{v}_0$ w $L^2(\mathbb{R}^N)$, gdy $n \to +\infty$. Z drugiej strony,

$$\begin{aligned} 0 \ge (\overline{\mathbf{F}}(\bar{u}_n), \bar{u}_n)_{L^2} &= \frac{1}{T}\int_0^T (\mathbf{PF}(t, \bar{u}_n), \bar{u}_n)_{L^2} \,\mathrm{d}t \\ = \frac{1}{T}\int_0^T (\mathbf{F}(t, \bar{u}_n), \bar{u}_n)_{L^2} \,\mathrm{d}t &= \frac{\mu_n}{T}\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} f(t, x, \mu_n \bar{v}_n(x))\bar{v}_n(x) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Przechodząc ponownie do podciągu, bez zmniejszenia ogólności rozważań, możemy założyć (patrz Dodatek, twierdzenie 5.4.1), że $\bar{v}_n(x) \to \bar{v}_0(x)$ dla p.w. $x \in \mathbb{R}^N$ oraz istnieje funkcja $k \in L^1(\mathbb{R}^N)$ taka że, dla wszystkich $n \ge 1$ i p.w. $x \in \mathbb{R}^N$, $|\bar{v}_n(x)|^2 \le k(x)$[1]. Wykorzystując twierdzenie Fatou-Lebesgue'a (patrz Dodatek, twierdzenie 5.2.1) otrzymujemy

$$\begin{aligned} 0 &\ge \liminf_{n \to +\infty} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} f(t, x, \mu_n \bar{v}_n(x))\bar{v}_n(x) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &\ge \int_0^T \left(\int_{\{\bar{v}_0 > 0\}} \check{f}_+(t, x)\bar{v}_0(x) \,\mathrm{d}x + \int_{\{\bar{v}_0 < 0\}} \hat{f}_-(t, x)\bar{v}_0(x) \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

[1] Z twierdzenia 5.4.1 wiadomo, że istnieje $h \in L^2(\mathbb{R}^N)$ taka, że $|\bar{v}_n(x)| \le h(x)$ dla p.w. $x \in \mathbb{R}^N$. Wystarczy więc wziąć $k := h^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

co przeczy założeniu (4.5), tym samym kończąc dowód (i).

W dowodzie punktu (ii) będziemy rozumować w sposób analogiczny do dowodu pierwszej części lematu. A więc załóżmy przez sprzeczność, że istnieje ciąg $(\bar{u}_n)$ w $\mathcal{N}$ taki, że $\|\bar{u}_n\|_{H^1} \to +\infty$, gdy $n \to +\infty$ oraz $(\overline{\mathbf{F}}(\bar{u}_n), \bar{u}_n)_{L^2} \geq 0$. Zdefiniujmy $\mu_n := \|\bar{u}_n\|_{H^1}$ oraz $\bar{v}_n := \bar{u}_n/\mu_n$. Wówczas ciąg $(\bar{v}_n)$ jest ograniczony w $H^1(\mathbb{R}^N)$. Ponieważ $\dim \mathcal{N} < +\infty$, więc $(\bar{v}_n)$ posiada podciąg, który ponownie oznaczamy przez $(\bar{v}_n)$, zbieżny w $H^1(\mathbb{R}^N)$ do pewnego $\bar{v}_0 \in \mathcal{N}$. W konsekwencji, $\bar{v}_n \to \bar{v}_0$ w $L^2(\mathbb{R}^N)$, gdy $n \to +\infty$. Z drugiej strony,

$$\begin{aligned}
0 &\leq (\overline{\mathbf{F}}(\bar{u}_n), \bar{u}_n)_{L^2} = \frac{1}{T}\int_0^T (\mathbf{PF}(t, \bar{u}_n), \bar{u}_n)_{L^2}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T (\mathbf{F}(t, \bar{u}_n), \bar{u}_n)_{L^2}\ \mathrm{d}t = \frac{\mu_n}{T}\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} f(t, x, \mu_n \bar{v}_n(x))\bar{v}_n(x)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Przechodząc ponownie do podciągu, bez zmniejszenia ogólności rozważań, możemy założyć (patrz Dodatek, twierdzenie 5.4.1), że $\bar{v}_n(x) \to \bar{v}_0(x)$ dla p.w. $x \in \mathbb{R}^N$ oraz istnieje funkcja $k \in L^1(\mathbb{R}^N)$ o tej własności że, dla wszystkich $n \geq 1$ i p.w. $x \in \mathbb{R}^N$, $|\bar{v}_n(x)|^2 \leq k(x)$. Stosując twierdzenie Fatou-Lebesgue'a (patrz Dodatek, twierdzenie 5.2.1) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
0 &\leq \limsup_{n\to+\infty} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} f(t, x, \mu_n \bar{v}_n(x))\bar{v}_n(x)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^T \left(\int_{\{\bar{v}_0>0\}} \hat{f}^+(t, x)\bar{v}_0(x)\ \mathrm{d}x + \int_{\{\bar{v}_0<0\}} \check{f}^-(t, x)\bar{v}_0(x)\ \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

co przeczy założeniu (4.6). To kończy dowód lematu. □

Poniższe twierdzenie stanowi główny rezultat tego rozdziału.

Twierdzenie 4.3.2. *Załóżmy, że* $\mathcal{N} := \mathrm{Ker}(\Delta + V) \neq \{0\}$, *gdzie* $V = V_0 - V_\infty$, $V_0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *(p jest jak w* (3) *- patrz str.* 5*)*, $V_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *oraz* $V_\infty(x) \geq \bar{v}_\infty$ *dla p.w.* $x \in \mathbb{R}^N$ *i pewnej liczby rzeczywistej* $\bar{v}_\infty > 0$. *Niech* $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *będzie odwzorowaniem ciągłym, spełniającym założenia* (4.2), (4.3) *i* (4.4). *Dodatkowo przypuśćmy, że f spełnia jeden z warunków typu Landesmana-Lazera* (4.5) *lub* (4.6). *Wówczas równanie* (4.1) *posiada T- okresowe rozwiązanie*

$$u \in C([0, +\infty), H^2(\mathbb{R}^N)) \cap C^1([0, +\infty), L^2(\mathbb{R}^N)).$$

Dowód. Wykażemy najpierw, że jeżeli stała $R_0 > 0$ jest taka jak w lemacie 4.3.1, to dla wszystkich $R > R_0$ zachodzi następująca równość

$$\mathrm{Deg}_B(\overline{\mathbf{F}}, B_{\mathcal{N}}(0, R)) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli zachodzi (4.5)}, \\ (-1)^{\dim \mathcal{N}}, & \text{jeżeli zachodzi (4.6)}. \end{cases}$$

Aby tego dowieść załóżmy najpierw, że spełniony jest warunek (4.5) i zdefiniujmy homotopię $\mathbf{H} : D_{\mathcal{N}}(0,R) \times [0,1] \to \mathcal{N}$ wzorem

$$\mathbf{H}(u,\gamma) := \gamma\overline{\mathbf{F}}(u) + (1-\gamma)u, \; u \in D_{\mathcal{N}}(0,R), \; \gamma \in [0,1].$$

Nietrudno dostrzec, że dla dowolnego $\gamma \in [0,1]$ odwzorowanie $\mathbf{H}(\cdot,\gamma)$ nie ma zer na brzegu zbioru $\partial D_{\mathcal{N}}(0,R)$. W przeciwnym wypadku

$$\mathbf{H}(u,\gamma) = 0 \tag{4.33}$$

dla pewnych $\gamma \in [0,1]$ i $u \in \mathcal{N}$ takiego, że $\|u\|_{L^2} = R$. Wówczas, jeżeli $\gamma = 0$, to z (4.33) wynika, że $0 = \|u\|_{L^2}^2 = R^2$, co jest sprzeczne z założeniem. Jeżeli natomiast $\gamma \in (0,1]$, to $(\overline{\mathbf{F}}(u), u)_{L^2} \le 0$, co przeczy (4.31). Wykorzystując własność homotopijnej niezmienniczości stopnia topologicznego, dostajemy

$$\mathrm{Deg}_B(\overline{\mathbf{F}}, B_{\mathcal{N}}(0,R)) = 1.$$

Załóżmy teraz, że spełniony jest warunek (4.6) i określmy odwzorowanie $\mathbf{H} : D_{\mathcal{N}}(0,R) \times [0,1] \to \mathcal{N}$ wzorem

$$\mathbf{H}(u,\gamma) := \gamma\overline{\mathbf{F}}(u) - (1-\gamma)u, \; u \in D_{\mathcal{N}}(0,R), \; \gamma \in [0,1].$$

Rozumując analogicznie jak powyżej, łatwo widać, że dla $\gamma \in [0,1]$, $\mathbf{H}(\cdot,\gamma)$ nie posiada zer na $\partial D_{\mathcal{N}}(0,R)$, co ponownie dzięki własności homotopijnej niezmienniczości stopnia topologicznego implikuje, że

$$\mathrm{Deg}_B(\overline{\mathbf{F}}, B_{\mathcal{N}}(0,R)) = (-1)^{\dim \mathcal{N}}.$$

Wykażemy teraz, że istnieje $R_0 > 0$ takie, że problem

$$\dot{u}(t) = -\mathbf{A}u(t) + \epsilon\mathbf{F}(t,u), \; t > 0, \tag{4.34}$$

nie posiada T-okresowych rozwiązań dla $\epsilon \in (0,1)$ takich, że $\|u(0)\|_{H^1} \ge R_0$. W przeciwnym wypadku istnieją ciąg (ϵ_n) w $(0,1)$ oraz ciąg T-okresowych rozwiązań $u_n : [0,T] \to H^1(\mathbb{R}^N)$ równania (4.34) z $\epsilon := \epsilon_n$, $n \ge 1$, o tej własności, że $\|u_n(0)\|_{H^1} \to +\infty$, gdy $n \to +\infty$. Połóżmy $\mu_n := \sup_{t\ge 0} \|u_n(t)\|_{H^1}$ oraz niech $v_n := \mu_n^{-1} u_n$. Łatwo widać, że wówczas dla każdego $n \ge 1$, v_n jest T-okresowym rozwiązaniem problemu

$$\dot{v}(t) = -\mathbf{A}v(t) + \mathbf{F}_n(t, v(t)), \quad t \in [0,T], \tag{4.35}$$

gdzie $\mathbf{F}_n(t,u) := \epsilon_n\mu_n^{-1}\mathbf{F}(t,\mu_n u)$, $t \geq 0$, $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Korzystając z twierdzenia 1.4.4 widać natychmiast, że dla dostatecznie dużych n oraz wszystkich $t,s \geq 0$ i $u,v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, mamy

$$\begin{aligned}\|\mathbf{F}_n(t,u) - \mathbf{F}_n(s,v)\|_{L^2} &\leq \epsilon_n\mu_n^{-1}D(1+\|\mu_n u\|_{H^1})|t-s|^\theta + \epsilon_n\mu_n^{-1}L\|\mu_n u - \mu_n v\|_{H^1}\\ &\leq D(1+\|u\|_{H^1})|t-s|^\theta + L\|u-v\|_{H^1}\end{aligned}$$

dla pewnych stałych $D, L > 0$ i $\theta \in (0,1)$ oraz

$$|\mathbf{F}_n(t,u)(x)| \leq \epsilon_n\mu_n^{-1}m_0(x) \leq m_0(x) \text{ dla p.w. } x \in \mathbb{R}^N, \tag{4.36}$$

co oczywiście implikuje, że

$$\|\mathbf{F}_n(t,u)\|_{L^2} \leq C \tag{4.37}$$

dla pewnej stałej $C > 0$. Co więcej, z (4.36) wynika, że

$$\big([\mathbf{V}u](x) + \mathbf{F}_n(t,u)(x)\big)u(x) \leq -\bar{v}_\infty|u(x)|^2 + V_0(x)|u(x)|^2 + m_0(x)|u(x)|.$$

Niech $M > 0$ będzie dowolną, lecz ustaloną liczbą oraz, dla dowolnego $n \geq 1$, weźmy liczbę całkowitą $k_n \geq 1$ taką, że $k_nT > M$. Na podstawie lematu 2.1.2, dla wszystkich $m,n \geq 1$,

$$\|(1-\chi_m)v_n(0)\|_{L^2}^2 = \|(1-\chi_m)v_n(k_nT)\|_{L^2}^2 \leq \tilde{R}^2e^{-2\bar{v}_\infty k_nT} + \alpha_m \leq \tilde{R}^2e^{-2\bar{v}_\infty M} + \alpha_m,$$

gdzie χ_m jest funkcją charakterystyczną kuli $B(0,m)$, $\tilde{R} > 0$ jest stałą taką, że $\|v_n(t)\|_{H^1} \leq \tilde{R}$ dla $t \geq 0$ i $n \geq 1$, $\alpha_m \to 0^+$, gdy $m \to +\infty$ (α_m zależy tylko od V oraz m_0, która jest wspólna dla wszystkich $\mathbf{F}_n$). Z dowolności $M > 0$ wynika, że $\|(1-\chi_m)v_n(0)\|_{L^2} \leq \sqrt{\alpha_m}$ dla $m,n \geq 1$. Co więcej, na mocy twierdzenia Rellicha-Kondraszowa wnosimy, że $\{\chi_m v_n(0)\}_{n\geq 1}$ jest relatywnie zwarty w $L^2(\mathbb{R}^N)$. W konsekwencji stwierdzamy, że $\{v_n(0)\}_{n\geq 1}$ jest relatywnie zwarty w $L^2(\mathbb{R}^N)$ a ponieważ jest on ograniczony w $H^1(\mathbb{R}^N)$, więc zawiera podciąg zbieżny w $L^2(\mathbb{R}^N)$ do pewnego $\bar{v}_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Zatem bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy założyć, że $v_n(0) \to \bar{v}_0$ w $L^2(\mathbb{R}^N)$, gdy $n \to +\infty$.

Dalej zauważmy, że dla wszystkich $t \geq 0$,

$$\|\mathbf{F}_n(t,v_n(t))\|_{L^2} \leq \varepsilon_n\mu_n^{-1}\|m_0\|_{L^2} \leq \mu_n^{-1}\|m_0\|_{L^2}.$$

Ponieważ $\mu_n^{-1} \to 0$, gdy $n \to +\infty$, więc wnioskujemy, że

$$\max_{t\geq 0}\|\mathbf{F}_n(t,v_n(t))\|_{L^2} \to 0, \text{ gdy } n \to +\infty.$$

Zatem, korzystając z lematu 4.2.3[1] wnosimy, że (v_n) jest ciągiem zbieżnym w przestrzeni $C([0,T], H^1(\mathbb{R}^N))$ do pewnego $v_0 : [0,T] \to H^1(\mathbb{R}^N)$ będącego T-okresowym rozwiązaniem zagadnienia

$$\dot{v}(t) = -\mathbf{A}v(t), \ v(0) = \bar{v}_0.$$

To oznacza, że $\bar{v}_0 = e^{-T\mathbf{A}}\bar{v}_0$, tzn. $\bar{v}_0 \in \mathcal{N}$ (patrz wniosek 5.8.2) i $v_0(t) = \bar{v}_0$ dla $t \geq 0$, a ponieważ $\max_{t\geq 0} \|v_n(t)\|_{H^1} = 1$ dla $n \geq 1$ widzimy, że $\bar{v}_0 \neq 0$.
Z drugiej strony, z T-okresowości funkcji v_n oraz wzoru Duhamela wynika, że

$$(v_n(0), \bar{v}_0)_{L^2} = (e^{-T\mathbf{A}}v_n(0), \bar{v}_0)_{L^2} + \epsilon_n\mu_n^{-1} \int_0^T (e^{-(T-t)\mathbf{A}}\,\mathbf{F}(t, \mu_n v_n(t)), \bar{v}_0)_{L^2}\ \mathrm{d}t,$$

oraz, wobec faktu, że operator $e^{-T\mathbf{A}}$ jest samosprzężony (patrz Dodatek, uwaga 5.6.6),

$$(v_n(0), \bar{v}_0)_{L^2} = (v_n(0), e^{-T\mathbf{A}}\bar{v}_0)_{L^2} + \epsilon_n\mu_n^{-1} \int_0^T (\mathbf{F}(t, \mu_n v_n(t)), e^{-(T-t)\mathbf{A}}\bar{v}_0)_{L^2}\ \mathrm{d}t,$$

co oznacza, że dla $n \geq 1$,

$$\int_0^T (\mathbf{F}(s, \mu_n v_n(t)), \bar{v}_0)_{L^2}\, \mathrm{d}t = 0.$$

Załóżmy najpierw, że zachodzi warunek (4.5). Wówczas, korzystając z twierdzenia Fatou-Lebesgue'a[2], dostajemy

$$0 = \liminf_{n\to+\infty} \int_0^T (\mathbf{F}(t, \mu_n v_n(t)), \bar{v}_0)_{L^2}\, \mathrm{d}t \geq \int_0^T \liminf_{n\to+\infty} (\mathbf{F}(t, \mu_n v_n(t)), \bar{v}_0)_{L^2}\, \mathrm{d}t. \tag{4.38}$$

Ustalmy $t \in [0,T]$ i niech (n_k) będzie rosnącym ciągiem dodatnich liczb całkowitych takim, że

$$\liminf_{n\to+\infty} (\mathbf{F}(t, \mu_n v_n(t)), \bar{v}_0)_{L^2} = \lim_{k\to+\infty} (\mathbf{F}(t, \mu_{n_k} v_{n_k}(t)), \bar{v}_0)_{L^2} \tag{4.39}$$

oraz $(v_{n_k}(t))$ zbiega do $\bar{v}_0$ prawie wszędzie (zbiór, na którym zachodzi zbieżność może zależeć od t). Stosując ponownie twierdzenie Fatou-Lebesgue'a[3] otrzymujemy

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty} (\mathbf{F}(t, \mu_{n_k} v_{n_k}(t)), \bar{v}_0)_{L^2} &\geq \int_{\mathbb{R}^N} \liminf_{k\to+\infty} f(t, x, \mu_{n_k} v_{n_k}(t)(x)) \bar{v}_0(x)\ \mathrm{d}x \\ &\geq \int_{\{\bar{v}_0>0\}} \check{f}_+(t,x)\bar{v}_0(x)\ \mathrm{d}x + \int_{\{\bar{v}_0<0\}} \hat{f}_-(t,x)\bar{v}_0(x)\ \mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{4.40}$$

[1]Oczywiście istnieje stała $K > 0$ taka, że $\|\mu_n^{-1}\mathbf{F}_n(t, v_n(t))\|_{L^2} \leq K$ dla wszystich $n \geq 1$ i $t \geq 0$, co wynika z (4.37).

[2]Funkcja majoryzująca $\phi : [0,T] \to \mathbb{R}$ dana jest wzorem $\phi(t) := \|m_0\|_{L^2}\|\bar{v}_0\|_{L^2}$.

[3]Funkcja majoryzująca $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dana jest wzorem $\phi(x) := m_0(x)\,|\bar{v}_0(x)|$.

gdyż dla prawie wszystkich $x \in \{\bar{v}_0 > 0\}$,

$$\liminf_{k\to+\infty} f(t,x,\mu_{n_k} v_{n_k}(t)(x)) \geq \check{f}_+(t,x)$$

i dla prawie wszystkich $x \in \{\bar{v}_0 < 0\}$,

$$\limsup_{k\to+\infty} f(t,x,\mu_{n_k} v_{n_k}(t)(x)) \leq \hat{f}_-(t,x).$$

Podsumowując, z (4.39) i (4.40) mamy dla $t \in [0,T]$,

$$\liminf_{k\to+\infty} (\mathbf{F}(t,\mu_n v_n(t)),\bar{v}_0)_{L^2} \geq \int_{\{\bar{v}_0>0\}} \check{f}_+(t,x)\bar{v}_0(x)\ \mathrm{d}x + \int_{\{\bar{v}_0<0\}} \hat{f}_-(t,x)\bar{v}_0(x)\ \mathrm{d}x,$$

co razem z (4.38) implikuje, że

$$\begin{aligned} 0 &= \liminf_{k\to+\infty} \int_0^T (\mathbf{F}(t,\mu_n v_n(t)),\bar{v}_0)_{L^2}\ \mathrm{d}t \\ &\geq \int_0^T \int_{\{\bar{v}_0>0\}} \check{f}_+(t,x)\bar{v}_0(x)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^T \int_{\{\bar{v}_0<0\}} \hat{f}_-(t,x)\bar{v}_0(x)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t > 0. \end{aligned}$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że przy założeniu (4.5), zachodzi warunek (ii) w twierdzeniu 4.2.7.

Przypuśćmy teraz, że spełniony jest warunek (4.6). Na podstawie twierdzenia Fatou-Lebesgue'a[1] mamy

$$0 = \limsup_{n\to+\infty} \int_0^T (\mathbf{F}(t,\mu_n v_n(t),\bar{v}_0)_{L^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^T \left(\limsup_{n\to+\infty} (\mathbf{F}(t,\mu_n v_n(t)),\bar{v}_0)_{L^2} \right) \mathrm{d}t. \tag{4.41}$$

Ustalmy $t \in [0,T]$ i niech (n_k) będzie rosnącym ciągiem liczb dodatnich takim, że

$$\limsup_{n\to+\infty} (\mathbf{F}(t,\mu_n v_n(t),\bar{v}_0)_{L^2} = \lim_{k\to+\infty} (\mathbf{F}(t,\mu_{n_k} v_{n_k}(t),\bar{v}_0)_{L^2} \tag{4.42}$$

oraz $(v_{n_k}(t))$ zbiega do $\bar{v}_0$ prawie wszędzie (zbiór, na którym zachodzi zbieżność może zależeć od t). Ponownie korzystając z twierdzenia Fatou-Lebesgue'a[2]

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{k\to+\infty} (\mathbf{F}(t,\mu_{n_k} v_{n_k}(t)),\bar{v}_0)_{L^2} &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \limsup_{k\to+\infty} f(t,x,\mu_{n_k} v_{n_k}(t)(x))\bar{v}_0(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_{\{\bar{v}_0>0\}} \hat{f}^+(t,x)\bar{v}_0(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\{\bar{v}_0<0\}} \check{f}^-(t,x)\bar{v}_0(x)\,\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{4.43}$$

[1]Funkcja majoryzująca $\phi : [0,T] \to \mathbb{R}$ dana jest wzorem $\phi(t) := \|m_0\|_{L^2}\|\bar{v}_0\|_{L^2}$.

[2]Funkcja majoryzująca $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dana jest wzorem $\phi(x) := m_0(x)\,|\bar{v}_0(x)|$.

gdyż dla prawie wszystkich $x \in \{\bar{v}_0 > 0\}$,

$$\limsup_{k\to+\infty} f(t,x,\mu_{n_k} v_{n_k}(t)(x)) \le \hat{f}^+(t,x)$$

oraz dla prawie wszystkich $x \in \{\bar{v}_0 < 0\}$,

$$\liminf_{k\to+\infty} f(t,x,\mu_{n_k} v_{n_k}(t)(x)) \ge \check{f}^-(t,x).$$

Podsumowując, z (4.42) i (4.43) mamy dla $t \in [0,T]$

$$\limsup_{k\to+\infty} (\mathbf{F}(t,\mu_n v_n(t),\bar{v}_0)_{L^2} \le \int_{\{\bar{v}_0>0\}} \hat{f}^+(t,x)\bar{v}_0(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\{\bar{v}_0<0\}} \check{f}^-(t,x)\bar{v}_0(x)\,\mathrm{d}x,$$

co razem z (4.41) implikuje, że

$$\begin{aligned}
0 &= \limsup_{k\to+\infty} \int_0^T (\mathbf{F}(t,\mu_n v_n(t)),\bar{v}_0)_{L^2}\,\mathrm{d}t \\
&\le \int_0^T \int_{\{\bar{v}_0>0\}} \hat{f}^+(t,x)\bar{v}_0(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^T \int_{\{\bar{v}_0<0\}} \check{f}^-(t,x)\bar{v}_0(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t < 0.
\end{aligned}$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że przy założeniu (4.6) również zachodzi warunek (ii) w twierdzeniu 4.2.7.

Zastosowanie twierdzenia 4.2.7 dowodzi tezy, tym samym kończąc dowód twierdzenia. □

Bezpośrednio płynącym wnioskiem z uwagi 4.1.1 oraz twierdzenia 4.3.2 jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.3.3. *Załóżmy, że* $\mathcal{N} := \mathrm{Ker}(\Delta + V) \ne \{0\}$, *gdzie* $V = V_0 - V_\infty$, $V_0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *(p jest jak w* (3) *- patrz str.* 5*),* $V_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *oraz* $V_\infty(x) \ge \bar{v}_\infty$ *dla p.w.* $x \in \mathbb{R}^N$ *i pewnej liczby rzeczywistej* $\bar{v}_\infty > 0$. *Niech* $f : [0,+\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *będzie odwzorowaniem ciągłym, ograniczonym, spełniającym założenia* (4.2), (4.3) *i* (4.4). *Jeśli* $\check{f}_+ \ge 0$, $\hat{f}_- \le 0$ *oraz obie funkcje nie są równe p.w. funkcji zerowej lub* $\hat{f}^+ \le 0$, $\check{f}^- \ge 0$ *oraz obie funkcje nie są równe p.w. funkcji zerowej, to równanie* (4.1) *posiada* T*- okresowe rozwiązanie*

$$u \in C([0,+\infty), H^2(\mathbb{R}^N)) \cap C^1([0,+\infty), L^2(\mathbb{R}^N)).$$

Rozdział 5

Dodatek

5.1 Nierówności

Twierdzenie 5.1.1. (**Nierówność Younga**, patrz [30, Dodatek B.2]) *Niech* $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Wówczas dla dowolnych* $a, b > 0$ *oraz* $\epsilon > 0$

$$ab \leq \frac{a^p}{\epsilon^p p} + \frac{b^q \epsilon^q}{q}.$$

Twierdzenie 5.1.2. (**Nierówność Höldera**, patrz [30, Dodatek B.2]) *Załóżmy, że* $1 \leq p, q \leq \infty$ *i* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Jeśli* $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *i* $v \in L^q(\mathbb{R}^N)$, *to*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |uv| \,\mathrm{d}x \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}.$$

Twierdzenie 5.1.3. (**Nierówność interpolacyjna**, patrz [10, Ch.4]) *Jeżeli* $f \in L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$, *gdzie* $1 \leq p \leq q \leq \infty$, *to wówczas* $f \in L^r(\mathbb{R}^N)$ *dla wszystkich* $r \in [p, q]$. *Co więcej, zachodzi nierówność*

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^{\theta} \|f\|_{L^q}^{(1-\theta)},$$

gdzie $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$, $0 \leq \theta \leq 1$.

Twierdzenie 5.1.4. (**Nierówność Jensena**, patrz [30, Dodatek B.1]) *Załóżmy, że funkcja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest wypukła* [1] *oraz* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *jest zbiorem o mierze dodatniej i skończonej. Niech* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją całkowalną. Wówczas*

$$f\left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u \,\mathrm{d}x\right) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(u) \,\mathrm{d}x.$$

[1] Mówimy, że funkcja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ jest *wypukła*, jeśli

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}^N$ i $t \in [0, 1]$.

Lemat 5.1.5. (**Nierówność Volterry**, patrz [14, Lemma 1.2.9]) *Niech* $\alpha, \beta \in [0,1)$, $a \geq 0$, $b > 0$ *oraz niech* $y : [0,T) \to [0,+\infty)$ *będzie ciągłą funkcją taką, że*

$$y(t) \leq \frac{a}{t^\alpha} + b\int_0^t \frac{1}{(t-s)^\beta} y(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in (0,T).$$

Wówczas istnieje stała $\tilde{C} = \tilde{C}(b,\alpha,\beta,T) > 0$

$$\sup_{t\in[0,T)} t^\alpha y(t) \leq a\tilde{C}.$$

Lemat 5.1.6. (patrz [42, Lemma 7.1.1]) *Niech* $a : [0,T) \to [0,+\infty)$ *będzie funkcją lokalnie całkowalną na* $[0,T)$, *gdzie* $T \leq +\infty$ *oraz niech* $b \geq 0$ *i* $\beta > 0$. *Załóżmy ponadto, że* $y : [0,T) \to [0,+\infty)$ *jest funkcją lokalnie całkowalną na* $[0,T)$ *taką, że*

$$y(t) \leq a(t) + b\int_0^t (t-s)^{\beta-1} y(s)\,\mathrm{d}s \text{ dla } t \in [0,T).$$

Wówczas

$$y(t) \leq a(t) + \theta\int_0^t E_\beta^{'}(\theta(t-s))a(s)\,\mathrm{d}s, \quad 0 \leq t < T,$$

gdzie $\theta := (b\Gamma(\beta))^{1/\beta}$, $E_\beta(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^{n\beta}/\Gamma(n\beta+1)$, $E_\beta^{'}(z) \simeq z^{\beta-1}/\Gamma(\beta)$ *gdy* $z \to 0^+$ *oraz* $E_\beta^{'}(z) \simeq \frac{1}{\beta}e^z$ *gdy* $z \to +\infty$ [1].

5.2 Przejścia graniczne pod znakiem całki

Poniżej przypomnijmy klasyczne twierdzenia dotyczące zbieżności funkcji mierzalnych - do ich dowodu odsyłamy do [39].

Przez $\overline{\mathbb{R}}$ oznaczmy rozszerzoną prostą euklidesową oraz oznaczmy $\overline{R}_+ := \{x \in \bar{\mathbb{R}} \mid x \geq 0\}$. Załóżmy, że dana jest trójka $(X, \mathcal{M}, \mu)$, gdzie $\mathcal{M}$ jest σ-ciałem podzbiorów zbioru X oraz $\mu : \mathcal{M} \to \bar{\mathbb{R}}_+$. Niech $C \in \mathcal{M}$.

Twierdzenie 5.2.1. (**Fatou-Lebesgue'a**) *Jeśli* $f_n : C \to \mathbb{R}$, *gdzie* $n \geq 1$, *jest ciągiem funkcji mierzalnych, dla którego istnieje funkcja* $\phi : C \to \mathbb{R}$ *taka, że* $\int_C \phi\,\mathrm{d}\mu < \infty$ *oraz* $|f_n| \leq \phi$ *dla wszystkich* $n \geq 1$, *to*

$$\int_C \liminf_{n\to+\infty} f_n\,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to+\infty}\int_C f_n\,\mathrm{d}\mu \leq \limsup_{n\to+\infty}\int_C f_n\,\mathrm{d}\mu \leq \int_C \limsup_{n\to+\infty} f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

[1] symbolem $\simeq$ oznaczamy asymptotyczną równość dwóch funkcji, tzn. piszemy

$$f(x) \simeq g(x) \text{ gdy } x \to x_0,$$

jeżeli $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = 1$.

Twierdzenie 5.2.2. (**Lebesgue'a o zmajoryzowanym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki**) *Jeżeli $f_n : C \to \mathbb{R}$ jest ciągiem funkcji mierzalnych zbieżnym punktowo do funkcji $f : C \to \mathbb{R}$ oraz dla każdego n i p.w. $x \in C$ zachodzi $|f_n(x)| \le \phi(x)$, gdzie $\phi : C \to \mathbb{R}$ jest funkcją całkowalną, to*

$$\lim_{n\to\infty} \int_C f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_C (\lim_{n\to\infty} f_n) \, \mathrm{d}\mu.$$

Twierdzenie 5.2.3. (**o jednostajnym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki**) *Jeżeli $f_n : C \to \mathbb{R}$ jest ciągiem funkcji całkowalnych, jednostajnie zbieżnym do funkcji $f : C \to \mathbb{R}$ oraz jeżeli $\mu(C) < +\infty$, to*

$$\int_C (\lim_{n\to\infty} f_n)(x) \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_C f_n(x) \, \mathrm{d}\mu.$$

5.3 Przestrzenie Sobolewa

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ będzie zbiorem otwartym. Mówimy, że $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ ma słabą pochodną cząstkową względem i-tej zmiennej, o ile istnieje $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ taka, że

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega v(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x \text{ dla wszystkich } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Wówczas v nazywamy *słabą pochodną* funkcji u względem i-tej zmiennej i oznaczamy

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} := v.$$

Uwaga 5.3.1. Jeżeli $u \in C(\overline{\Omega})$, to słaba pochodna funkcji u pokrywa się z funkcją i-tej pochodnej cząstkowej (rozważanej jako element przestrzeni $L^1_{loc}(\Omega)$).

Wielowskaźnikiem nazywamy wektor $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ o współrzędnych będących nieujemnymi liczbami całkowitymi, zaś przez długość wielowskaźnika $|\alpha|$ rozumieć będziemy liczbę

$$|\alpha| := \alpha_1 + \ldots \alpha_N.$$

Dla wielowskaźnika α piszemy

$$D^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Powiemy, że $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ posiada *słabą pochodną cząstkową* $D^\alpha u$, o ile istnieje $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ taka, że

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi \, \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\varphi \, \mathrm{d}x \text{ dla wszystkich } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Wówczas $D^\alpha u := v$.

Dla $p \geq 1$ definiujemy *przestrzeń Sobolewa* $W^{1,p}(\Omega)$ następująco:

$$W^{1,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \text{ dla } i \in \{1,\dots,N\} \text{ istnieje słaba pochodna } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \right\}.$$

Nieco ogólniej, dla $m \geq 1$, $m \in \mathbb{Z}$ i $p \geq 1$ definiujemy przestrzenie Sobolewa $W^{m,p}(\Omega)$ jako

$$W^{m,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \forall_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N, |\alpha| \leq m} \text{ istnieje słaba pochodna } D^\alpha u \in L^p(\Omega) \right\}.$$

W przestrzeni $W^{m,p}$ zadajemy normę $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$ kładąc

$$\|u\|_{W^{m,p}} := \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p} \text{ dla } u \in W^{m,p}(\Omega).$$

Wówczas nie jest trudno dowieść (patrz [30, Twierdzenie 5.3.2] lub [1, Theorem 3.2]), że dla $m \geq 1$, $m \in \mathbb{Z}$ i $p \geq 1$, przestrzeń $W^{m,p}(\Omega)$ z normą $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$ jest przestrzenią Banacha.

W przypadku gdy $p = 2$, przez $H^m(\Omega)$ oznaczać będziemy przestrzeń $W^{m,2}(\Omega)$ dla wszystkich $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 1$. W przestrzeni $H^m(\Omega)$ można wprowadzić iloczyn skalarny $(\cdot,\cdot)_{H^m}$, kładąc

$$(u,v)_{H^m} := \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N,\ |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N,\ |\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v \, \mathrm{d}x, \qquad u, v \in H^m(\Omega).$$

Stwierdzenie 5.3.2. (patrz [10, Proposition 8.1]) *Przestrzeń $H^1(\Omega)$ jest przestrzenią Hilberta.*

Przejdziemy teraz do omówienia wyników na temat zanurzeń przestrzeni Sobolewa - ich dowody znaleźć można w [10].

Twierdzenie 5.3.3 (Nierówność Sobolewa-Gagliardo-Nirenberga). *Niech $1 \leq p < N$. Wówczas*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \text{ gdzie } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$$

oraz istnieje stała $C = C(p,N) > 0$ taka, że

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C\|\nabla u\|_{L^p} \text{ dla wszystkich } u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Twierdzenie 5.3.4. *Niech $m \geq 1$ będzie liczbą całkowitą oraz niech $p \in [1,+\infty)$. Wówczas następujące włożenia są ciągłe*

$$\begin{aligned}
&W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), && \text{gdzie } \tfrac{1}{q} = \tfrac{1}{p} - \tfrac{m}{N}, && \text{jeżeli } \tfrac{1}{p} - \tfrac{m}{N} > 0,\\
&W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), && \forall q \in [p,+\infty), && \text{jeżeli } \tfrac{1}{p} - \tfrac{m}{N} = 0,\\
&W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N), && && \text{jeżeli } \tfrac{1}{p} - \tfrac{m}{N} < 0.
\end{aligned}$$

5.4 Zwartość i zbieżność w przestrzeniach Banacha

W tej sekcji przypomnijmy fundamentalne twierdzenie charakteryzujące zwartość i zbieżność w przestrzeniach Banacha.

Twierdzenie 5.4.1. (patrz [10, Theorem 4.9]) *Niech Ω będzie mierzalnym w sensie Lebesgue'a podzbiorem $\mathbb{R}^N$. Załóżmy, że $1 < p < +\infty$ oraz niech (u_n) w $L^p(\Omega)$ będzie ciągiem takim, że*

$$\int_\Omega |u_n(x) - u_0(x)|^p \, \mathrm{d}x \to 0, \qquad \text{gdy } n \to +\infty,$$

dla pewnego $u_0 \in L^p(\Omega)$. Wówczas istnieją podciąg (u_{n_k}) ciągu (u_n) oraz $h \in L^p(\Omega)$ takie, że $|u_{n_k}(x)| \leq h(x)$ dla wszystkich $k \geq 1$ i prawie wszystkich $x \in \Omega$ oraz

$$u_{n_k}(x) \to u_0(x), \qquad \text{gdy } k \to +\infty,$$

dla prawie wszystkich $x \in \Omega$.

Twierdzenie 5.4.2. (**Arzeli-Ascoliego**, patrz [39, Twierdzenie 22.7]) *Niech (f_n) będzie ciągiem funkcji rzeczywistych określonych na $\mathbb{R}^N$, wspólnie ograniczonych oraz jednakowo ciągłych* [1]. *Wówczas istnieje podciąg (f_{n_k}) ciągu (f_n) i funkcja ciągła f taka, że $f_{n_k} \to f$, jednostajnie na zwartych podzbiorach $\mathbb{R}^N$.*

Przypomnijmy teraz fundamentalne twierdzenie (patrz np. [10], [30], [65]) dotyczące zwartych zanurzeń przestrzeni Sobolewa.

Twierdzenie 5.4.3. (**Rellicha-Kondraszowa**) *Załóżmy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ jest zbiorem otwartym i ograniczonym z brzegiem $\partial\Omega$ klasy C^1. Wówczas następujące włożenia są zwarte*

$$\begin{array}{lll} W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) & \forall q \in [1, p^*), & \textit{jeżeli } p < N, \\ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) & \forall q \in [p, +\infty), & \textit{jeżeli } p = N, \\ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}), & & \textit{jeżeli } p > N. \end{array}$$

Miary niezwartości

Niech X będzie nieskończenie wymiarową przestrzenią Banacha wyposażoną w normę $\|\cdot\|$. Przez $\mathcal{B}(X)$ oznaczmy rodzinę ograniczonych podzbiorów przestrzeni X. *Miarą niezwarości Hausdorffa* nazywamy odwzorowanie $\beta : \mathcal{B}(X) \to [0, +\infty)$ zdefiniowane następująco

$$\beta(\Omega) := \inf\{\epsilon > 0 \mid \Omega \text{ można pokryć skończoną liczbą kul o promieniu } \leq \epsilon\}.$$

[1] Funkcje (f_n) są *jednakowo ciągłe*, jeżeli dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że z nierówności $|x - y| < \delta$ wynika, że $|f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon$ dla $x, y \in \mathbb{R}^N$ i dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie 5.4.4. *Nich $\beta : \mathcal{B}(X) \to [0, +\infty)$ będzie miarą niezwartości Hausdorffa. Wówczas*

(i) $\beta(\Omega) = 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\Omega \in \mathcal{B}(X)$ *jest zbiorem relatywnie zwartym;*

(ii) $\beta(\Omega) = \beta(\bar{\Omega})$ *oraz* $\beta(\Omega) = \beta(\mathrm{conv}(\Omega))$ *dla dowolnego* $\Omega \in \mathcal{B}(X)$*;*

(iii) β *jest półnormą, tzn.* $\beta(\lambda\Omega) = |\lambda|\beta(\Omega)$ *oraz* $\beta(\Omega_1 + \Omega_2) \leq \beta(\Omega_1) + \beta(\Omega_2)$ *dla dowolnych* $\lambda \in \mathbb{R}$ *i* $\Omega, \Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{B}(X)$;

(iv) *(monotoniczność) Dla dowolnych zbiorów* $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{B}(X)$ *takich, że* $\Omega_1 \subset \Omega_2$

$$\beta(\Omega_1) \leq \beta(\Omega_2);$$

(iv) *(semi-addytywność)* $\beta(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \max\{\beta(\Omega_1), \beta(\Omega_2)\}$ *dla dowolnych* $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{B}(X)$*;*

(v) $\beta(B(x_0, r)) = r$*, gdzie* $x_0 \in X$ *i* $r > 0$.

Powyższe własności (wraz z dowodami) można znaleźć m.in. w [2], [5], [26] oraz [27].

5.5 Operatory liniowe w przestrzeniach Banacha

Przypomnimy teraz, w oparciu o [28], [39], [60] oraz [70], podstawowe pojęcia oraz twierdzenia dotyczące operatorów liniowych określonych w przestrzeniach Banacha.

Niech X będzie rzeczywistą lub zespoloną przestrzenią Banacha, na której zadana jest norma $\|\cdot\|$ i niech $A : X \supset D(A) \to X$ będzie operatorem liniowym w przestrzeni X . Mówimy, że operator $A : X \supset D(A) \to X$ jest *gęsto określony*, jeżeli jego dziedzina $D(A)$ jest gęstym podzbiorem przestrzeni X, tzn. $\overline{D(A)} = X$.

Wykresem operatora $A : X \supset D(A) \to X$ nazywamy podzbiór $\mathrm{Gr}(A)$ iloczynu kartezjańskiego $X \times X$ określony następująco

$$\mathrm{Gr}(A) := \{(x, y) \in X \times X \mid y = Ax, x \in D(A)\}.$$

Mówimy, że operator A jest *domknięty*, jeżeli jego wykres $\mathrm{Gr}(A)$ jest domkniętym podzbiorem przestrzeni $X \times X$ wyposażonej w normę produktową. Na przestrzeni liniowej $D(A)$ zadajemy normę wykresową $\|\cdot\|_{D(A)}$ wzorem

$$\|x\|_{D(A)} := \|x\| + \|Ax\| \qquad \text{dla } x \in D(A).$$

Wówczas nietrudno dowieść, że operator liniowy $A : D(A) \to X$ jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń liniowa $(D(A), \|\cdot\|_{D(A)})$ jest przestrzenią Banacha.

Operator liniowy $A : X \to Y$, gdzie X, Y są przestrzeniami Banacha z normami odpowiednio $\|\cdot\|_X$ oraz $\|\cdot\|_Y$, nazywamy *ograniczonym*, jeżeli

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X)} = \|A\| := \sup\{\|Au\|_Y \mid u \in D(A),\ \|u\|_X \leq 1\} < +\infty.$$

Jeżeli $\|A\| = +\infty$, to operator A nazywamy *nieograniczonym*.

Twierdzenie 5.5.1. (**O domkniętym wykresie**, patrz [60, Twierdzenie 2.15] lub [39, Twierdzenie 53.6]) *Niech X, Y będą przestrzeniami Banacha. Jeżeli operator liniowy $A : X \to Y$ jest domknięty, to jest ciągły.*

Jądrem operatora $A : X \supset D(A) \to X$ nazywamy zbiór

$$\text{Ker } A := \{u \in D(A) \mid Au = 0\},$$

zaś *obrazem* nazywamy zbiór

$$\text{Im } A := \{Au \mid u \in D(A)\}.$$

Załóżmy, że liniowy operator $A : X \supset D(A) \to X$ jest różnowartościowy. Możemy wówczas zdefiniować *operator odwrotny* $A^{-1} : D(A^{-1}) \to X$ do A kładąc $D(A^{-1}) := \text{Im } A$ oraz

$$A^{-1}v := u,$$

gdzie $Au = v$ dla $v \in D(A^{-1})$.

Niech teraz H będzie rzeczywistą bądź zespoloną przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oraz niech $A : H \supset D(A) \to H$ będzie operatorem liniowym. Operatorem *sprzężonym* do A nazywamy operator $A^* : H \supset D(A^*) \to H$ określony następująco

$$\begin{aligned} D(A^*) &:= \{v \in H \mid \text{ istnieje } w \in H \text{ takie, że } \langle Au, v\rangle = \langle u, w\rangle \text{ dla } u \in D(A)\}, \\ A^*v &:= w \text{ dla } v \in D(A^*),\ \text{gdzie } \langle Au, v\rangle = \langle u, w\rangle \text{ dla } u \in D(A). \end{aligned}$$

Dowodzi się, że jeżeli H jest przestrzenią Hilberta, to wówczas dla każdego operatora $A \in \mathcal{L}(H)$ istnieje dokładnie jeden operator sprzężony A^* (patrz [60, Twierdzenie 4.10]). Ponadto zachodzi równość $\|A\| = \|A^*\|$.

Mówimy, że operator $A : H \supset D(A) \to H$ jest *symetryczny*, jeśli $A \subset A^*$. Wiadomo, że operator A jest symetryczny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle \text{ dla } x, y \in D(A).$$

Jeżeli zachodzi równość $A = A^*$, to wówczas mówimy, że A jest operatorem *samosprzężonym*. Można pokazać, że jeżeli operator A jest samosprzężony, to jest domknięty.

Twierdzenie 5.5.2. (**Laxa-Milgrama**, patrz [30, Twierdzenie 6.2.1]) *Załóżmy, że $B : H \times H \to \mathbb{R}$ jest odwzorowaniem dwuliniowym określonym na rzeczywistej przestrzeni Hilberta H i takim, że dla pewnych stałych $\alpha, \beta > 0$ zachodzą nierówności*

$$|B(u,v)| \leq \alpha \|u\|_H \|v\|_H \quad \text{dla } u, v \in H$$

oraz

$$\beta \|u\|_H^2 \leq B(u,u) \quad \text{dla } u \in H.$$

Niech $F : H \to \mathbb{R}$ będzie ograniczonym funkcjonałem liniowym na przestrzeni H. Istnieje wówczas dokładnie jeden element $u \in H$ taki, że

$$B(u,v) = F(v).$$

Niech teraz X będzie przestrzenią Banacha nad ciałem liczb zespolonych i niech $A : X \supset D(A) \to X$ będzie operatorem liniowym. Zbiór

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Ker}(\lambda I - A) = \{0\},\ \mathrm{Im}(\lambda I - A) = X \text{ oraz } (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}$$

nazywamy *zbiorem rezolwenty* operatora $A : X \supset D(A) \to X$, natomiast przez *spektrum* (lub widmo) rozumieć będziemy zbiór

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

Zatem $\lambda \in \sigma(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
(a) $\mathrm{Im}(\lambda I - A) \subsetneq X$
lub
(b) $\mathrm{Ker}(\lambda I - A) \neq 0$ (tzn. istnieje wektor $x \in X$, $x \neq 0$ taki, że $Ax = \lambda x$).

Gdy zachodzi punkt (b) z powyższej definicji, to mówimy, że λ jest *wartością własną* operatora A, zaś przestrzeń $\mathrm{Ker}(\lambda I - A)$ nazywamy *przestrzenią własną* odpowiadającą wartości własnej λ. *Geometryczną krotnością* wartości własnej λ nazywać będziemy wymiar $\mathrm{Ker}(\lambda I - A)$, natomiast przez *krotność algebraiczną* wartości własnej λ rozumieć będziemy wymiar $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Ker}(\lambda I - A)^n$. Na ogół krotności algebraiczna i geometryczna nie są równe. Można jednak udowodnić (patrz np. [33, Theorem 2.4]), że jeżeli $A : H \supset D(A) \to H$ jest samosprzężonym operatorem liniowym w przestrzeni Hilberta H, to wówczas krotność geometryczna dowolnej wartości własnej operatora A jest równa krotności algebraicznej tej wartości własnej.

W przypadku, gdy $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha nad ciałem liczb rzeczywistych, można również rozpatrywać zespolone zbiór rezolwenty i spektrum liniowego operatora $A : X \supset D(A) \to X$. W tym celu dokonuje się *kompleksyfikacji przestrzeni* X, tzn. określa się przestrzeń liniową $X_{\mathbb{C}}$ nad ciałem liczb zespolonych kładąc $X_{\mathbb{C}} := X \times X$ wraz z działaniami $+ : X_{\mathbb{C}} \times X_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ oraz $\cdot : \mathbb{C} \times X_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ określonymi następująco

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \text{ dla } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X_{\mathbb{C}},$$
$$(\alpha + \beta i) \cdot (x, y) := (\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x) \text{ dla } \alpha + \beta i \in \mathbb{C}\ ,\ (x, y) \in X_{\mathbb{C}}.$$

Oznaczając dowolny element $(x, y) \in X_{\mathbb{C}}$ przez $x + iy$, na przestrzeni $X_{\mathbb{C}}$ zadaje się normę kładąc

$$\|x + iy\|_{\mathbb{C}} := \sup_{\varphi \in [0, 2\pi]} \|(\sin\varphi)x + (\cos\varphi)y\| \qquad \text{dla } x + iy \in X_{\mathbb{C}}. \tag{5.1}$$

Dowodzi się, że $(X_{\mathbb{C}}, \|\cdot\|_{\mathbb{C}})$ jest również przestrzenią Banacha.

W sytuacji, gdy H jest rzeczywistą przestrzenią Hilberta, z iloczynem skalarnym $(\cdot, \cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$, to wówczas

$$(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)_{\mathbb{C}} := (x_1, x_2) + (y_1, y_2) - i(x_1, y_2) + i(y_1, x_2)$$

jest iloczynem skalarnym na kompleksyfikacji $H_{\mathbb{C}}$ przestrzeni H dla dowolnych $x_1 + iy_1,\ x_2 + iy_2 \in H_{\mathbb{C}}$, zaś

$$\|x + iy\|_{\mathbb{C}} := \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2} \qquad \text{dla } x + iy \in H_{\mathbb{C}} \tag{5.2}$$

jest normą wyznaczoną przez ten iloczyn skalarny. Można pokazać, że normy określone wzorami (5.1) i (5.2) są równoważne [1].

Dla liniowego operatora $A : X \supset D(A) \to X$, określonego w rzeczywistej przestrzeni Banacha X, możemy zdefiniować operator $A_{\mathbb{C}} : X_{\mathbb{C}} \supset D(A_{\mathbb{C}}) \to X_{\mathbb{C}}$ następująco:

$$D(A_{\mathbb{C}}) := \{x + iy \in X_{\mathbb{C}} \mid x, y \in D(A)\},$$
$$A_{\mathbb{C}}(x + iy) := Ax + iAy.$$

[1] Zauważmy, że w przypadku dowolnej przestrzeni Banacha (5.2) nie zadaje normy.

Wówczas operator $A_{\mathbb{C}}$ nazywamy *kompleksyfikacją operatora* A . Łatwo widać, że $A_{\mathbb{C}}$ jest operatorem liniowym na $X_{\mathbb{C}}$. Wówczas, przez *zespolony zbiór rezolwenty* operatora A rozumiemy $\rho(A) := \rho(A_{\mathbb{C}})$, zaś przez *spektrum zespolone* - zbiór $\sigma(A) := \sigma(A_{\mathbb{C}})$.

Mówimy, że liniowy operator $A : X \to Y$, gdzie X i Y są przestrzeniami Banacha jest *zwarty*, jeżeli dla dowolnego zbioru ograniczonego $U \subset X$, zbiór $A(U)$ jest relatywnie zwarty w Y. Łatwo zauważyć, że każdy operator zwarty jest operatorem ograniczonym.

Niech $A : X \supset D(A) \to X$ będzie operatorem samosprzężonym. Powiemy, że operator $C : X \supset D(C) \to X$ taki, że $D(A) \subset D(C)$ jest *relatywnie zwarty względem operatora* A wtedy i tylko wtedy, gdy operator $C(A+iI)^{-1}$ jest zwarty.

Można udowodnić (patrz [59]), że jeżeli A i C są domkniętymi operatorami określonymi w przestrzeni Banacha X takimi, że $D(C) \supset D(A)$, to wówczas operator $C(A-zI)^{-1}$ jest zwarty dla pewnego $z \in \rho(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest on zwarty dla wszystkich $z \in \rho(A)$.

Niech H będzie przestrzenią Hilberta i niech $A : H \supset D(A) \to H$ będzie gęsto określonym i samosprzężonym operatorem liniowym. Wówczas *spektrum istotnym operatora* A, które oznaczać będziemy przez $\sigma_{ess}(A)$, nazywamy zbiór

$$\sigma_{ess}(A) = \{\lambda \in \sigma(A) \mid \lambda \text{ nie jest izolowaną wartością własną o skończonej krotności}\}^2.$$

Poniższe twierdzenie dostarcza informacji na temat spektrum istotnego relatywnie zwartych zaburzeń operatorów samosprzężonych.

Twierdzenie 5.5.3. (**Weyl'a**, patrz [59, str.113]) *Niech* $A : X \supset D(A) \to X$ *będzie operatorem samosprzężonym oraz niech* $C : X \subset D(C) \to X$ *będzie operatorem relatywnie zwartym względem* A. *Wówczas*

$$\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A+C).$$

[2] Informacje na temat spektrum istotnego gęsto określonych, domkniętych operatorów liniowych w przestrzeniach Banacha (niekoniecznie Hilberta) można znaleźć w [31] oraz [61].

5.6 Półgrupy operatorów liniowych

W oparciu o [14], [37], [56] i [66] omówimy teraz podstawowe fakty z teorii C_0-półgrup operatorów liniowych i ich generatorów.

Niech X będzie przestrzenią Banacha. *Półgrupą operatorów* nazywamy rodzinę $\{S(t) : X \to X\}_{t\geq 0}$ ograniczonych operatorów liniowych taką, że

(i) $S(0) = I$,

(ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$ dla wszystkich $t, s \geq 0$.

Jeżeli dodatkowo

(iii) dla dowolnego $x \in X$, odwzorowanie $[0, +\infty) \ni t \to S(t)x \in X$ jest ciągłe, to mówimy o *silnie ciągłej półgrupie* lub o C_0*-półgrupie.*

Uwaga 5.6.1. Warunek (iii) w powyższej definicji jest równoważny następującemu

(iii)' $\lim_{t\to 0^+} S(t)x = x$ dla dowolnego $x \in X$.

Wiadomo, że jeżeli $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ jest C_0-półgrupą operatorów liniowych na przestrzeni Banacha X, to wówczas istnieją stałe $M \geq 1$ oraz $\omega \in \mathbb{R}$ takie, że

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t} \qquad \text{dla } t \geq 0.$$

Infinitezymalnym generatorem C_0-półgrupy $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ nazywamy operator liniowy $A : X \supset D(A) \to X$ dany wzorem

$$D(A) := \left\{ x \in X \mid \text{ istnieje granica } \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \right\},$$
$$Ax := \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \qquad \text{dla } x \in D(A).$$

Zauważmy, że $D(A)$ jest przestrzenią liniową, co wynika z liniowości operatorów $S(h)$, $h \geq 0$, zaś A jest operatorem liniowym, na ogół nieograniczonym[1].

W dalszych rozważaniach C_0-półgrupę generowaną przez operator A będziemy oznaczać przez $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$.

Następujące twierdzenie określa warunki konieczne i wystarczające na to, aby operator liniowy był generatorem C_0-półgrupy.

[1]Zauważmy, że $D(A)$ wraz z normą odziedziczoną z X jest przestrzenią unormowaną.

Twierdzenie 5.6.2. (patrz [56, Theorem 1.5.2]) *Operator liniowy* $A : X \supset D(A) \to X$ *jest generatorem* C_0*-półgrupy* $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ *takiej, że* $\|e^{tA}\| \leq Me^{\omega t}$ *dla pewnych stałych* $M \geq 1$ *i* $\omega \in \mathbb{R}$*, wtedy i tylko wtedy gdy*

(i) A *jest operatorem domkniętym i* $D(A)$ *jest gęstym podzbiorem przestrzeni* X*,*

(ii) zbiór rezolwenty $\rho(A)$ *operatora* A *zawiera przedział* $(\omega, +\infty)$ *oraz*

$$\|(\lambda I - A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda-\omega)^n} \quad \text{dla } \lambda > \omega,\ n \geq 1.$$

Poniższe twierdzenie podaje warunki dostateczne, ale nie konieczne na to, aby operator był generatorem C_0-półgrupy.

Twierdzenie 5.6.3. (patrz [56, Theorem 1.7.7]) *Niech* $A : X \supset D(A) \to X$ *będzie gęsto określonym operatorem w przestrzeni Banacha* X *spełniającym następujące warunki*

(i) dla pewnego $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$\rho(A) \supset \Sigma_\delta := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\arg\lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\} \cup \{0\};$$

(ii) istnieje $M > 0$ *takie, że*

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda|} \text{ dla } \lambda \in \Sigma_\delta, \lambda \neq 0.$$

Wówczas A *jest infinitezymalnym generatorem jednostajnie ograniczonej*[1] C_0*-półgrupy operatorów liniowych* $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$.

Twierdzenie 5.6.4. (patrz [56, Theorem 1.4.2]) *Niech* $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ *będzie* C_0*-półgrupą generowaną przez operator* $A : X \supset D(A) \to X$*. Wówczas*

(i) jeśli $x \in X$*, to* $\int_0^t e^{sA}x\,\mathrm{d}s \in D(A)$ *dla* $t > 0$ *oraz*

$$A\bigg(\int_0^t e^{sA}x\,\mathrm{d}s\bigg) = e^{tA}x - x,$$

(ii) jeśli $x \in D(A)$*, to* $e^{tA}x \in D(A)$ *dla* $t \geq 0$ *oraz*

$$\frac{d}{dt}e^{tA}x = Ae^{tA}x = e^{tA}Ax,$$

[1]Mówimy, że C_0-półgrupa operatorów liniowych $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ jest *jednostajnie ograniczona*, jeżeli istnieje $C > 0$ takie, że

$$\|e^{tA}\| \leq C \quad \text{dla } t \geq 0.$$

(iii) jeśli $x \in D(A)$ oraz $t > s \geq 0$, to

$$e^{tA}x - e^{sA}x = \int_s^t e^{\tau A}Ax\,\mathrm{d}\tau = \int_s^t Ae^{\tau A}x\,\mathrm{d}\tau.$$

Uwaga 5.6.5. Niech $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ będzie C_0-półgrupą operatorów liniowych na przestrzeni Banacha X o generatorze $A : X \supset D(A) \to X$ taką, że $\|e^{tA}\| \leq Me^{\omega t}$ dla pewnych stałych $M \geq 1$ i $\omega \in \mathbb{R}$. Wówczas nietrudo dowieść, że $\{e^{-\omega t}e^{tA}\}_{t\geq 0}$ jest C_0-półgrupą generowaną przez operator $A - \omega I$ i taką, że $\|e^{-\omega t}e^{tA}\| \leq M$ dla $t \geq 0$.

Uwaga 5.6.6. Niech X będzie refleksywną przestrzenią Banacha oraz niech $A : X \supset D(A) \to X$ będzie samosprzężonym i gęsto określonym operatorem liniowym takim, że $-A$ generuje C_0-półgrupę $\{e^{-tA} : X \to X\}_{t\geq 0}$ operatorów liniowych. Wówczas można pokazać (patrz [56, Corollary 1.10.6]), że operator e^{-tA} jest samosprzężony dla dowolnego $t \geq 0$.

Niech $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid \varphi_1 < \arg z < \varphi_2,\ \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}$ oraz dla $z \in \Delta$, niech $S(z)$ będzie ograniczonym operatorem liniowym. Rodzina $\{S(z)\}_{z\in\Delta}$ jest *półgrupą analityczną w* Δ jeżeli

(i) odwzorowanie $\Delta \ni z \to S(z)$ jest analityczne w Δ,

(ii) $S(0) = I$ oraz $\lim_{z\to 0, z\in\Delta} S(z)x = x$ dla wszystkich $x \in X$,

(iii) $S(z_1 + z_2) = S(z_1)S(z_2)$ dla wszystkich $z_1, z_2 \in \Delta$.

Mówimy, że C_0-półgrupa $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ jest *analityczna*, jeżeli jest analityczna w pewnym sektorze Δ zawierającym półprostą $[0, +\infty)$.

Twierdzenie 5.6.7. (patrz [56, Theorem 2.5.2]) *Niech $\{e^{tA} : X \to X\}_{t\geq 0}$ będzie jednostajnie ograniczoną C_0-półgrupą operatorów liniowych w przestrzeni Banacha X o generatorze $A : X \supset D(A) \to X$. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ można rozszerzyć do analitycznej C_0-półgrupy w sektorze $\Delta_\delta := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\arg\lambda| < \delta\}$;

(ii) Istnieje stała $C > 0$ taka, że dla $\nu > 0$ i $\tau \neq 0$

$$\|(\nu I + i\tau I - A)^{-1}\| \leq \frac{C}{|\tau|};$$

(iii) Istnieją $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ oraz $M > 0$ takie, że

$$\rho(A) \supset \Sigma = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\arg\lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\} \cup \{0\}$$

oraz

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{\lambda} \ \text{ dla } \lambda \in \Sigma, \lambda \neq 0;$$

(iv) odwzorowanie $(0,+\infty) \ni t \mapsto e^{tA}$ *jest różniczkowalne oraz istnieje* $C > 0$ *takie, że dla* $t > 0$
$$\|Ae^{tA}\| \leq \frac{C}{t}.$$

5.7 Operatory sektorialne

Niech $A : D(A) \to X$, $D(A) \subset X$ będzie domkniętym, gęsto określonym operatorem w przestrzeni Banacha X. Operator A nazywamy *operatorem sektorialnym*, jeśli istnieją stałe $a \in \mathbb{R}$, $M > 0$ oraz $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ takie, że:

(i) zbiór rezolwenty operatora A zawiera sektor $\Sigma_{a,\varphi}$, gdzie
$$\Sigma_{a,\varphi} := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \neq a, \varphi < |\mathrm{Arg}(\lambda - a)| \leq \pi\};$$

(ii)
$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - a|} \text{ dla } \lambda \in \Sigma_{a,\varphi}. \tag{5.3}$$

Uwaga 5.7.1. Wybierzmy dowolną liczbę $\omega \in \mathbb{R}$. Wówczas operator $A : D(A) \to X$ jest operatorem sektorialnym wtedy i tylko wtedy gdy operator $A_\omega : D(A) \to X$ dany wzorem $A_\omega := A + \omega I$ jest operatorem sektorialnym.
Istotnie, dokonując translacji łatwo widać, że $\Sigma_{a,\varphi} \subset \rho(A)$ oraz zachodzi nierówność (5.7), wtedy i tylko wtedy gdy
$$\Sigma_{a+\omega,\varphi} = \{\lambda \in C \mid \lambda \neq a, \varphi < |\mathrm{Arg}(\lambda - (a+\omega))| \leq \pi\} \subset \rho(A_\omega)$$
oraz
$$\|(\lambda I - A_\omega)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - (a+\omega)|} \quad \text{dla } \lambda \in \Sigma_{a+\omega,\varphi}.$$

Stwierdzenie 5.7.2. (patrz [14, Proposition 1.3.1]) *Niech* $A : X \supset D(A) \to X$ *będzie liniowym, domkniętym i gęsto określonym operatorem w przestrzeni Banacha* X*. Rozważmy operatory* $A_\omega := A + \omega I$ *z* $\omega \in \mathbb{R}$*. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) A_ω *jest operatorem sektorialnym w* X *dla pewnego* $\omega \in \mathbb{R}$,

(ii) A_ω *jest operatorem sektorialnym w* X *dla każdego* $\omega \in \mathbb{R}$,

(iii) Istnieją $k, \omega \in R$ *takie, że zbiór rezolwenty* $\rho(A_\omega)$ *operatora* A_ω *zawiera półpłaszczyznę* $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\ \lambda \leq k\}$ *oraz*
$$\|\lambda(\lambda I - A_\omega)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M \quad \text{dla Re } \lambda \leq k.$$

Mówimy, że operator sektorialny $A : D(A) \to X$ jest *dodatni*, jeśli $\mathrm{Re}\ \sigma(A) > 0$[1],

[1] $\mathrm{Re}\ \sigma(A) := \inf\{\mathrm{Re}\ \lambda \mid \lambda \in \sigma(A)\}$.

tzn. Re $z > 0$ dla dowolnego $z \in \sigma(A)$. Zauważmy, że

$$\text{Re } \sigma(A_\omega) \geq a + \omega.$$

To oznacza, że wybierając $\omega > 0$, dla której Re $\sigma(A_\omega) > 0$ możemy rozważać dodatni operator A_ω.

Następujące twierdzenie charakteryzuje generatory analitycznych C_0-półgrup.

Twierdzenie 5.7.3. (patrz [14, Theorem 1.3.1]) *Niech X będzie przestrzenią Banacha i niech $A : X \supset D(A) \to X$ będzie liniowym, gęsto określonym operatorem. Wówczas A jest sektorialny wtedy i tylko wtedy gdy operator $-A$ generuje analityczną C_0-półgrupę $\{e^{-tA} : X \to X\}_{t\geq 0}$ ograniczonych, liniowych operatorów.*

Twierdzenie 5.7.4. (patrz [14, Theorem 1.3.2]) *Niech $A : D(A) \to X$ będzie operatorem sektorialnym takim, że* Re $\sigma(A) > a > 0$. *Wówczas istnieją stałe $M_0, M_1 > 0$ takie, że*

$$\|e^{-tA}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_0 e^{-at}, \qquad t \geq 0, \tag{5.4}$$

$$\|Ae^{-tA}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M_1}{t} e^{-at}, \qquad t > 0. \tag{5.5}$$

Kolejne fakty dostarczają przykładów operatorów sektorialnych.

Twierdzenie 5.7.5. (patrz [56, Corollary 3.2.2]) *Jeśli $A : D(A) \to X$ jest operatorem sektorialnym w przestrzeni Banacha X oraz operator B jest operatorem ograniczonym w X, to operator $A + B : D(A + B) \to X$ z dziedziną $D(A + B) = D(A)$ jest sektorialny.*

Twierdzenie 5.7.6. (patrz [14, Proposition 1.3.3] oraz [60, Tw.13.31] *Niech $A : H \supset D(A) \to H$ będzie liniowym, gęsto określonym, samosprzężonym operatorem w przestrzeni Hilberta H z iloczynem skalarnym $(\cdot, \cdot)$. Wówczas*

(i) $\forall x \in D(A) \quad (Ax, x) \geq 0$ *wtedy i tylko wtedy gdy* $\sigma(A) \subset [0, +\infty)$*;*

(ii) jeżeli A jest ograniczony z dołu [1]*, to jest operatorem sektorialnym.*

[1] Mówimy, że operator $A : H \supset D(A) \to H$ określony w przestrzeni Hilberta H z iloczynem skalarnym $(\cdot, \cdot)$ oraz normą $\|\cdot\|$ jest *ograniczony z dołu*, jeżeli

$$\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D(A) \quad (Ax, x) \geq m\|x\|^2.$$

Przejdźmy teraz do omówienia potęg ułamkowych operatorów sektorialnych oraz przestrzeni ułamkowych wyznaczonych przez te operatory.

Niech X będzie przestrzenią Banacha z zadaną normą $\|\cdot\|$ oraz niech $A : X \supset D(A) \to X$ będzie dodatnim operatorem sektorialnym. Dla $\alpha \in (0, +\infty)$ definiujemy operatory $A^{-\alpha} : X \to X$ następująco:

$$A^{-\alpha}x := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-At} x \, \mathrm{d}t, \tag{5.6}$$

gdzie $\Gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ jest *funkcją Eulera* daną wzorem

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t, \qquad x > 0.$$

Zauważmy, że dla każdego $\alpha > 0$, $A^{-\alpha}$ jest poprawnie określonym operatorem. Istotnie, z nierówności (5.4) w twierdzeniu 5.7.4 wynika, że całka niewłaściwa we wzorze (5.6) jest zbieżna w topologii jednostajnej operatorów, gdyż

$$\|t^{\alpha-1} e^{-At}\| \leq \begin{cases} M_0 e^{-at}, \ t > 1, \\ M_0 t^{\alpha-1}, \ t \in (0, 1]. \end{cases}$$

Stąd wniosek, że $A^{-\alpha} \in \mathcal{L}(X)$.

Lemat 5.7.7. *Dla każdego $\alpha > 0$ operator $A^{-\alpha} : X \to X$, określony wzorem* (5.6), *jest różnowartościowy.*

Dowód. Jest jasne, że dla $\alpha = 1$, operator A^{-1} jest różnowartościowy. Zatem dla każdego $n \in \mathbb{N}$, A^{-n} jest operatorem różnowartościowym. Załóżmy teraz, że $A^{-\alpha}x = 0$ dla pewnego $x \in X$. Wówczas, dla $n \geq \alpha$,

$$A^{-n}x = A^{-n+\alpha} A^{-\alpha} x = 0,$$

co implikuje, że $x = 0$. To kończy dowód. $\square$

Z powyższych rozważań wynika możliwość zdefiniowania dodatnich potęg ułamkowych operatora A w następujący sposób.

Dla $\alpha > 0$, określmy operator $A^{\alpha} : D(A^{\alpha}) \to X$ kładąc

$$D(A^{\alpha}) := \mathrm{Im}(A^{-\alpha}), \qquad A^{\alpha}x := (A^{-\alpha})^{-1}x \text{ dla } x \in D(A^{\alpha}).$$

Dodatkowo, dla $\alpha = 0$, połóżmy

$$D(A^{\alpha}) := X, \qquad A^0 := I,$$

gdzie $I : X \to X$, $I(x) := x$ dla wszystkich $x \in X$.

Dla dowolnego $\alpha \geq 0$, *przestrzenią ułamkową* wyznaczoną przez dodatni operator sektorialny $A : X \supset D(A) \to X$ nazywamy przestrzeń unormowaną $(X^\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$, gdzie

$$X^\alpha := D(A^\alpha) \qquad \text{oraz} \qquad \|x\|_\alpha := \|A^\alpha x\| \text{ dla } x \in X^\alpha.$$

Uwaga 5.7.8. Przestrzeń $(X^\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ jest przestrzenią Banacha. Wynika to z faktu, że dla każdego $\alpha \geq 0$, operator A^α jest operatorem domkniętym (jako operator odwrotny do operatora domkniętego).

Twierdzenie 5.7.9. (patrz [63, Ch.3.6] lub [14, Proposition 1.3.5]) *Niech $A : X \supset D(A) \to X$ będzie dodatnim operatorem sektorialnym w przestrzeni Banacha X. Wówczas*

(i) Dla każdego $\alpha \geq 0$, operator $A^\alpha : X^\alpha \to X$ jest domkniętym i gęsto określonym operatorem.

(ii) Jeżeli $\alpha > \beta \geq 0$, to włożenie $X^\alpha \subset X^\beta$ jest gęste i ciągłe. Dodatkowo, jeśli operator A ma zwarte rezolwenty, to powyższe włożenie jest zwarte.

(iii) Dla dowolnych $\alpha, \beta \geq 0$

$$A^\alpha A^\beta = A^\beta A^\alpha = A^{\alpha+\beta}.$$

Twierdzenie 5.7.10. (patrz [56, Corollary 3.2.4]) *Niech $A : D(A) \to X$ będzie operatorem sektorialnym w przestrzeni Banacha X. Załóżmy, że $B : D(B) \to X$ jest operatorem domkniętym i przypuśćmy, że dla pewnego $\alpha \in (0,1)$, $X^\alpha \subset D(B)$, gdzie X^α jest przestrzenią ułamkową wyznaczoną przez A. Wówczas $A + B$ jest operatorem sektorialnym.*

Uwaga 5.7.11. Niech $A : D(A) \to X$ będzie operatorem sektorialnym, niekoniecznie dodatnim. Wówczas z definicji operatora sektorialnego wynika, że istnieje $\omega > 0$ taka, że operator $A_\omega := A + \omega I$ jest dodatni. Można zatem rozważać przestrzeń ułamkową $X^\alpha_\omega := D((A + \omega I)^\alpha)$ z normą

$$\|x\|_{\alpha,\omega} := \|(A + \omega I)^\alpha x\| \text{ dla } x \in X^\alpha.$$

Można pokazać (patrz np. [49, Lemat 1.4.10]), że przestrzeń ułamkowa X^α_ω nie zależy od wyboru ω oraz co więcej, że dla dowolonych $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ takich, że operatory $A + \omega_1 I$ i $A + \omega_2 I$ są dodatnie i $D(A + \omega_1 I) = D(A + \omega_2 I)$, normy $\|\cdot\|_{\alpha,\omega_1}$ i $\|\cdot\|_{\alpha,\omega_2}$ są równoważne.

Nietrudno również dowieść, że jeżeli $A : X \subset D(A) \to X$ jest dodatnim operatorem sektorialnym, to wówczas rodzina ograniczonych operatorów liniowych $\{e^{-tA}_{|X^\alpha} : X^\alpha \to X^\alpha\}_{t\geq 0}$ jest C_0-półgrupą na przestrzeni ułamkowej X^α.

Poniższe twierdzenie stanowi zestawienie najistotniejszych własności potęg ułamkowych operatorów sektorialnych i analitycznych C_0-półgrup generowanych przez te operatory.

Twierdzenie 5.7.12. (patrz [56, Theorem 2.6.13]) *Niech $A : X \supset D(A) \to X$ będzie dodatnim operatorem sektorialnym oraz niech $\{e^{-tA} : X \to X\}_{t\geq 0}$ będzie C_0-półgrupą generowaną przez $-A$. Wówczas*

(i) $e^{-tA}(X) \subset X^\alpha$ dla wszystkich $\alpha \geq 0$ i $t > 0$;

(ii) Dla wszystkich $\alpha \geq 0$ oraz $x \in D(A^\alpha)$

$$e^{-tA}A^\alpha x = A^\alpha e^{-tA}x \text{ dla } t \geq 0;$$

(iii) Jeśli $\alpha \geq 0$, to $A^\alpha e^{-tA} \in \mathcal{L}(X)$ oraz istnieją stałe $C_\alpha > 0$ i $c > 0$ takie, że dla $t > 0$

$$\|e^{-tA}x\|_\alpha \leq C_\alpha t^{-\alpha} e^{-ct}\|x\|.$$

Uwaga 5.7.13. Niech $A : X \supset D(A) \to X$ będzie operatorem sektorialnym w przestrzeni Banacha X oraz niech $\delta > 0$ będzie liczbą rzeczywistą taką, że

$$\sigma(A + \delta I) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}.$$

Wówczas, z twierdzenia 5.7.12 (iii) wynika, że istnieją stałe $C_0 > 0$ i $C_\alpha > 0$ takie, że dla wszystkich $t > 0$,

$$\|e^{-tA}x\|_\alpha \leq C_0 e^{\delta t}\|x\|_\alpha \quad \text{dla } x \in X^\alpha$$

oraz

$$\|e^{-tA}x\|_\alpha \leq C_\alpha t^{-\alpha} e^{\delta t}\|x\| \quad \text{dla } x \in X.$$

5.8 Rozkłady spektralne

Poniższe twierdzenie mówi o własnościach spektralnych generatorów C_0-półgrup.

Twierdzenie 5.8.1. (patrz [44, Thm. 16.7.2]) *Jeśli* $A : X \supset D(A) \to X$ *jest generatorem* C_0*-półgrupy* $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ *ograniczonych liniowych operatorów w zespolonej przestrzeni Banacha* X*, to*

$$\sigma_p(e^{tA}) \setminus \{0\} = e^{-\sigma_p(A)} \text{ dla } t > 0.$$

Ponadto, jeśli $\lambda \in \sigma_p(A)$*, to dla dowolnego* $t > 0$

$$\mathrm{Ker}(e^{-\lambda t}I - e^{tA}) = \overline{\mathrm{span}}\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Ker}(\lambda_{k,t}I - A)\Big),$$

gdzie $\lambda_{k,t} := \lambda + (2k\pi/t)i$ *dla* $k \in \mathbb{Z}$*.*

Wniosek 5.8.2. *Jeżeli* $A : D(A) \to X$ *jest samosprzężonym operatorem takim, że* $-A$ *generuje analityczną* C_0*-półgrupę* $\{e^{-tA}\}_{t\geq 0}$ *ograniczonych operatorów liniowych oraz* $\sigma(A) \subset (-c, +\infty)$ *dla pewnego* $c > 0$*, to dla dowolnego* $t > 0$ *zachodzi równość*

$$\mathrm{Ker}\ A = \mathrm{Ker}(e^{-tA} - I).$$

Niech X będzie przestrzenią Banacha oraz niech $A : X \supset D(A) \to X$ będzie operatorem liniowym. Zbiór $\sigma \subset \hat{\sigma}(A)$, gdzie $\hat{\sigma}(A) := \sigma(A) \cup \{\infty\}$ nazywamy *zbiorem spektralnym*, jeżeli zbiory σ i $\hat{\sigma}(A) \setminus \sigma$ są zbiorami domkniętymi w rozszerzonej płaszczyźnie $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Przykład 5.8.3.

(i) Skończony zbiór punktów ze spektrum $\sigma(A)$ liniowego operatora A tworzy zbiór spektralny;

(ii) Dopełnienie zbioru spektralnego jest zbiorem spektralnym.

Twierdzenie 5.8.4. *Niech* $A : X \supset D(A) \to X$*, gdzie* X *jest przestrzenią Banacha, będzie domkniętym operatorem liniowym. Niech* σ_1 *będzie ograniczonym zbiorem spektralnym i oznaczmy* $\sigma_2 := \sigma(A) \setminus \sigma_1$*, tzn.* $\sigma_2 \cup \{\infty\}$ *jest innym zbiorem spektralnym. Przez* P_1, P_2 *oznaczmy projekcje odpowiednio, na przestrzenie własne wyznaczone przez* σ_1 *i* σ_2 *oraz niech* $X_j := P_j(X)$*,* $j = 1, 2$*. Wówczas* $X = X_1 \oplus X_2$*, przestrzenie* X_j *są niezmiennicze względem* A *(tzn.* $A(X_j) \subset X_j$*,* $j = 1, 2$*) oraz jeśli oznaczymy* $A_j := A_{|X_j}$*,* $j = 1, 2$*, to wówczas* $A_1 : X_1 \to X_1$ *jest operatorem ograniczonym oraz* $\sigma(A_1) = \sigma_1$*. Co więcej,* $D(A_2) = D(A) \cap X_2$ *oraz* $\sigma(A_2) = \sigma_2$*.*

Dowód powyższego twierdzenia można znaleźć w [28, v.1, Ch.7] oraz w [67, Thm. 5.7, A, B].

5.9 Indeks punktów stałych

5.9.1 Indeks Leray-Schaudera dla odwzorowań zwartych

Poniżej przypomnimy krótko klasyczną teorię indeksu punktów stałych dla klasy odwzorowań zwartych. Wszystkie poniżej przytoczone definicje i fakty można znaleźć w [40].

Niech X będzie przestrzenią Banacha oraz niech $U \subset X$ będzie zbiorem otwartym i ograniczonym. Zwarte odwzorowanie $\Phi : \overline{U} \to X$ nazywamy *dopuszczalnym* (w sensie teorii indeksu punktów stałych dla odwzorowań zwartych), jeśli $\Phi(\bar{u}) \neq \bar{u}$ dla $\bar{u} \in \partial U$. Powiemy, że zwarte odwzorowanie $\Psi : \overline{W} \times [0,1] \to X$ określone na otwartym i ograniczonym zbiorze $W \subset X \times [0,1]$, jest *dopuszczalną homotopią* (w sensie teorii indeksu punktów stałych dla odwzorowań zwartych), jeżeli $\Psi(\bar{u},\mu) \neq \bar{u}$ dla $(\bar{u},\mu) \in \overline{W}$.

Indeksem punktów stałych Leray-Schaudera dla klasy odwzorowań zwartych nazywamy przekształcenie, które każdemu dopuszczalnemu odwzorowaniu $\Phi : \overline{U} \to X$ przyporządkowuje liczbę całkowitą $\mathrm{Ind}_{LS}(\Phi, U)$ posiadającą następujące własności:

(1) (Istnienie) Jeśli $\mathrm{Ind}_{LS}(\Phi, U) \neq 0$, to istnieje $u \in U$ takie, że $\Phi(u) = u$;

(2) (Addytywność) Jeśli $U_1, U_2 \subset U$ są zbiorami otwartymi, rozłącznymi i takimi, że $\Phi(u) \neq u$ dla $u \in \overline{U \setminus (U_1 \cup U_2)}$, to

$$\mathrm{Ind}_{LS}(\Phi, U) = \mathrm{Ind}_{LS}(\Phi_{|\overline{U}_1}, U_1) + \mathrm{Ind}_{LS}(\Phi_{|\overline{U}_2}, U_2);$$

(3) (Homotopijna niezmienniczość) Jeśli odwzorowanie $\Psi : \overline{U} \times [0,1] \to X$ jest dopuszczalną homotopią, to

$$\mathrm{Ind}_{LS}(\Psi(\cdot,0), U) = \mathrm{Ind}_{LS}(\Psi(\cdot,1), U);$$

(4) (Normalizacja) Niech $u_0 \in X$ i niech $\Phi_{u_0} : \overline{U} \to X$ będzie zdefiniowane wzorem $\Phi_{u_0}(u) := u_0$ dla $u \in \overline{U}$. Wówczas

$$\mathrm{Ind}_{LS}(\Phi_{u_0}, U) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } u_0 \notin U, \\ 1, & \text{jeśli } u_0 \in U; \end{cases}$$

(5) (Obcinanie) Niech X_0 będzie podprzestrzenią X taką, że $\Phi(\overline{U}) \subset X_0$. Wówczas

$$\mathrm{Ind}_{LS}(\Phi, U) = \mathrm{Ind}_{LS}(\Phi_{|U \cap X_0}, U \cap X_0);$$

(6) (Multiplikatywność) Jeśli $\Phi_1 : \overline{U_1} \to X_1$ i $\Phi_2 : \overline{U_2} \to X_2$, gdzie X_1, X_2 są przestrzeniami Banacha, są odwzorowaniami dopuszczalnymi, to $\Phi_1 \times \Phi_2 : \overline{U_1 \times U_2} \to X_1 \times X_2$ jest odwzorowaniem dopuszczalnym oraz

$$\mathrm{Ind}_{LS}(\Phi_1 \times \Phi_2, U_1 \times U_2) = \mathrm{Ind}_{LS}(\Phi_1, U_1) \cdot \mathrm{Ind}_{LS}(\Phi_2, U_2);$$

(7) (Topologiczna niezmienniczość) Niech X_1 i X_2 będą przestrzeniami Banacha oraz niech $Q : X_1 \to X_2$ będzie liniowym homeomorfizmem. Załóżmy, że $U \subset X_1$ jest otwarty, ograniczony oraz niech $\Phi_1 : U \to X_1$ będzie odwzorowaniem zwartym takim, że $\Phi_1(\bar{u}) \neq \bar{u}$ dla $\bar{u} \in \partial U$. Wówczas odwzorowanie $\Phi_2 : \overline{Q(U)} \to X_2$ zadane wzorem $\Phi_2(\bar{u}) := Q(\Phi_1(Q^{-1}(\bar{u})))$ jest także zwarte, $\Phi_2(\bar{u}) \neq \bar{u}$ dla $\bar{u} \in \partial(Q(U))$ oraz

$$\mathrm{Ind}_{LS}(\Phi_1, U) = \mathrm{Ind}_{LS}(\Phi_2, Q(U)).$$

5.9.2 Indeks punktów stałych dla odwzorowań ostatecznie zwartych

Niech X będzie przestrzenią Banacha i niech $M \subset X$. Mówimy, że odwzorowanie $f : M \to X$ jest *ostatecznie zwarte* (z ang. *ultimately compact*), o ile ma tę własność, że dla dowolnego zbioru $Z \subset X$, jeżeli zachodzi równość

$$\overline{\mathrm{conv}} f(M \cap Z) = Z,$$

to Z jest zbiorem zwartym.

Przechodzimy teraz do omówienia konstrukcyjnej definicji odwzorowań ostatecznie zwartych oraz własności tej klasy odwzorowań. Dowody przytoczonych w dalszym ciągu faktów przeprowadzone są w [2].

Niech M będzie podzbiorem przestrzeni Banacha X oraz niech $f : M \to X$ będzie danym odwzorowaniem. Definiujemy następujący tranzytywny ciąg zbiorów $\{T_\alpha\}$ indeksowany liczbami porządkowymi

$$T_0 := \overline{\mathrm{conv}} f(M),$$
$$T_\alpha := \begin{cases} \overline{\mathrm{conv}} f(M \cap T_{\alpha-1}), & \text{jeśli } \alpha - 1 \text{ istnieje} \\ \bigcap_{\beta<\alpha} T_\beta, & \text{jeśli } \alpha - 1 \text{ nie istnieje.} \end{cases}$$

Wówczas ciąg zbiorów $\{T_\alpha\}$ posiada następujące własności

Lemat 5.9.1. *(i) Każdy zbiór T_α jest domknięty i ograniczony;*

(ii) Jeśli $\eta < \alpha$, to $T_\alpha \subset T_\eta$;

(iii) $f(M \cap T_\alpha) \subset T_\alpha$ dla każdej liczby porządkowej α;

(iv) Istnieje liczba porządkowa δ taka, że $T_\alpha = T_\delta$ dla wszystkich $\alpha \geq \delta$.

Oznaczmy $f^\infty(M) := T_\delta$, gdzie δ jest jak w powyższym lemacie. Wówczas można udowodnić, że odwzorowanie $f : M \to X$ jest ostatecznie zwarte wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $f(M \cap f^\infty(M))$ jest relatywnie zwarty.

Następujący lemat stanowi zestawienie podstawowych własności odwzorowań ostatecznie zwartych.

Lemat 5.9.2. *(i) $f^\infty(M) = \overline{\text{conv}} f(M \cap f^\infty(M))$;*

(ii) Jeśli $M_1 \subset M$, to $f^\infty(M_1) \subset f^\infty(M)$;

(iii) Jeśli $f : M \to X$ jest ostatecznie zwarte oraz $M_1 \subset M$, to $\tilde{f} := f_{|M_1}$ jest ostatecznie zwarte;

(vi) Odwzorowanie $f : M \to X$ jest ostatecznie zwarte wtedy i tylko wtedy, gdy $f^\infty(M)$ jest zbiorem zwartym;

(v) Jeśli $f(M)$ jest zbiorem relatywnie zwartym, to $f : M \to X$ jest ostatecznie zwarte.

Odnotujmy teraz podstawowe definicje oraz fakty teorii punktów stałych dla klasy odwzorowań ostatecznie zwartych, których dowody można znaleźć w [2, Ch.3].

Niech X będzie przestrzenią Banacha. Ostatecznie zwarte odwzorowanie $\Phi : \overline{U} \to X$, określone na domknięciu otwartego i ograniczonego zbioru U nazywamy *dopuszczalnym*, jeśli $\Phi(\bar{u}) \neq \bar{u}$ dla $\bar{u} \in \partial U$. Mówimy, że ciągłe odwzorowanie $\Psi : \overline{U} \times [0,1] \to X$ jest *dopuszczalną homotopią* pomiędzy dwoma dopuszczalnymi odwzorowaniami $\Phi_0, \Phi_1 : \overline{U} \to X$, jeżeli $\Psi(\cdot, 0) = \Phi_0$, $\Psi(\cdot, 1) = \Phi_1$, $\Psi(\bar{u}, \mu) \neq u$ dla wszystkich $\bar{u} \in \partial U$ i $\mu \in [0,1]$ oraz Ψ jest takie, że dla dowolnego zbioru $V \subset X$, jeżeli $\overline{\text{conv}}\, \Psi((V \cap \overline{U}) \times [0,1]) = V$, to V jest relatywnie zwarty.

Indeksem punktów stałych w klasie odwzorowań ostatecznie zwartych nazywamy przekształcenie Ind_{uc}, które każdemu dopuszczalnemu odwzorowaniu $\Phi : \overline{U} \to X$ przyporządkowuje liczbę całkowitą $\text{Ind}_{uc}(\Phi, U)$ posiadającą następujące własności:

(1) (Istnienie) Jeśli $\mathrm{Ind}_{uc}(\Phi, U) \neq 0$, to istnieje $u \in U$ takie, że $\Phi(u) = u$;

(2) (Addytywność) Jeśli $U_1, U_2 \subset U$ są zbiorami otwartymi, rozłącznymi i takimi, że $\Phi(u) \neq u$ dla $u \in \overline{U \setminus (U_1 \cup U_2)}$, to

$$\mathrm{Ind}_{uc}(\Phi, U) = \mathrm{Ind}_{uc}(\Phi_{|\overline{U}_1}, U_1) + \mathrm{Ind}_{uc}(\Phi_{|\overline{U}_2}, U_2);$$

(3) (Homotopijna niezmienniczość) Jeśli odwzorowanie $\Psi : \overline{U} \times [0,1] \to X$ jest dopuszczalną homotopią, to

$$\mathrm{Ind}_{uc}(\Psi(\cdot, 0), U) = \mathrm{Ind}_{uc}(\Psi(\cdot, 1), U);$$

(4) (Normalizacja) Niech $u_0 \in X$ i niech $\Phi_{u_0} : \overline{U} \to X$ będzie zdefiniowane wzorem $\Phi_{u_0}(u) := u_0$ dla $u \in \overline{U}$. Wówczas

$$\mathrm{Ind}_{uc}(\Phi_{u_0}, U) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } u_0 \notin U, \\ 1, & \text{jeśli } u_0 \in U. \end{cases}$$

Uwaga 5.9.3. Jeżeli $\Phi : \overline{U} \to X$ jest odwzorowaniem zwartym, to indeks $\mathrm{Ind}_{uc}(\Phi, U)$ jest równy indeksowi Leray-Schaudera $\mathrm{Ind}_{LS}(\Phi, U)$.

Bibliografia

[1] R. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York 1975. [cytowane na str. 104]

[2] R. R. Akhmerov, M. I. Kamenskii, A. S. Potapov, A. E. Rodkina, B. N. Sadovskii, *Measures of Noncompactness and Condensing Operators*, Birkhäuser 1992. [cytowane na str. 39, 106, 121, 122]

[3] H. Amman, E. Zehnder, *Nontrivial solutions for a class of nonresonance problems and applications to nonlinear differential equations*, Annali della Scuola Superiore di Pisa, t. 7 (4), 1980, 539–603. [cytowane na str. 8]

[4] F. Antoci, M. Prizzi, *Attractors and global averaging of non-autonomous reaction-diffusion equations in* $\mathbb{R}^N$, Topol. Methods Nonlinear Anal. 20 (2002), no. 2, 229–259. [cytowane na str. 7, 27]

[5] J. M. Ayerbe, T. Dominguez Benavides, G. Lopez Acedo, *Measures of noncompactness in metric fixed point theory*, Birkhauser, 1997. [cytowane na str. 106]

[6] R. Bader, W. Kryszewski, *On the solutions of differential inclusions and the periodic problem in Banach spaces*, Nonlinear An. 54 (2003), 707–754. [cytowane na str. 6]

[7] R.R. Becker, *Periodic solutions of semilinear equations of evolution of compact type*, J. Math. Anal. Appl. 82 (1981) 33–48. [cytowane na str. 6]

[8] N. N. Bogoliubov, Yu. A. Mitropolsky, *Asymptotic methods in the Theory of Non-Linear Oscillations*, Gordon and Breach, New York 1962. [cytowane na str. 7]

[9] D. Bothe, *Periodic solutions of a nonlinear evolution problem from heterogeneous catalysis*, Diff. Int. Eq., vol. 16, no. 6 (2001), 641-670. [cytowane na str. 6]

[10] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, 2010. [cytowane na str. 74, 101, 104, 105]

[11] H. Brezis, L. Nirenberg, *Characterizations of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 5 (1978), no. 2, 225–326. [cytowane na str. 11]

[12] F.E. Browder, *Existence of periodic solutions for nonlinear equations of evolution*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1965. [cytowane na str. 6]

[13] L. Cesari, R. Kannan, *Periodic solutions of nonlinear wave equations with damping*, Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser. 31, 421-432 (1982). [cytowane na str. 8]

[14] J. Cholewa, T. Dłotko, *Global Attractors in Abstract Parabolic Problems*, Cambridge University Press, 2000. [cytowane na str. 19, 20, 21, 102, 111, 114, 115, 117]

[15] J.F. Couchouron, M. Kamenski, *An abstract topological point of view and a general averaging pronciple in the theory of differential inclusions*, Nonlinear Analysis 42 (2000), 1101-1129. [cytowane na str. 8]

[16] A. Ćwiszewski, *Topological degree methods for perturbation of operators generating compact C_0 semigroups*, J. Differential Equations 220, (2006), no. 2, 434–477. [cytowane na str. 7, 8, 63]

[17] A. Ćwiszewski, *Degree theory for perturbations of m-accretive operators generating compact semigroups with constraints*, J. Evol. Equ. 7, (2007), no. 1, 1–33. [cytowane na str. 7, 8, 63]

[18] A. Ćwiszewski, P. Kokocki, *Krasnosel'skii type formula and translation along trajectories method for evolution equations*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 22, (2008), no. 3, 605–628. [cytowane na str. 7, 9]

[19] A. Ćwiszewski, P. Kokocki, *Periodic solutions of nonlinear hyperbolic evolution systems*, J. Evol. Equ. 10, (2010), no. 3, 677–710. [cytowane na str. 7, 9]

[20] A. Ćwiszewski, *Positive periodic solutions of parabolic evolution problems: a translation along trajectories approach*, Centr. Eur. J. Math., vol. 9, no. 2 (2011), 244–268. [cytowane na str. 7, 9, 63]

[21] A. Ćwiszewski, *Periodic solutions of damped hyperbolic equations at resonance: a translation alogn trajectories approach*, J. Differential and Integral Equations, vol. 24, no. 7-8 (2011), 767-786. [cytowane na str. 7, 11]

[22] A. Ćwiszewski, *Averaging principle and hyperbolic evolution equations*, Nonlinear Analysis 75 (2012) 2362–2375. [cytowane na str. 7]

[23] A. Ćwiszewski, *Periodic oscillations for strongly damped hyperbolic beam equation*, Topological Methods in Nonlinear Analysis, vol. 37, no. 2, (2011), 259–282. [cytowane na str. 9]

[24] A. Ćwiszewski, R. Łukasiak, *Forced periodic solutions for nonresonant parabolic equations on* $\mathbb{R}^N$, http://arxiv.org/pdf/1404.0256v2.pdf. [cytowane na str. 13]

[25] A. Ćwiszewski, R. Łukasiak, *A Landesman-Lazer type result for periodic parabolic problems on* $\mathbb{R}^N$ *at resonance*, Nonlinear An. TMA 125 (2015), 608–625. [cytowane na str. 13]

[26] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer 1985. [cytowane na str. 106]

[27] K. Deimling, *Multivalued Differential Equations*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1992. [cytowane na str. 106]

[28] N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear Operators*, Parts I and II, Wiley-Interscience, New York 1966. [cytowane na str. 106, 119]

[29] Y. Eidelman, V. Milman, A. Tsolomitis, *Functional analysis. An introduction*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004. [cytowane na str. 49]

[30] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. [cytowane na str. 101, 104, 105, 108]

[31] D. E. Edmunds, W. D. Evans, *Spectral theory and differential operators*, Oxford University Press, Oxford, 1987. [cytowane na str. 110]

[32] D. G. de Figueiredo, J.-P. Gossez, *Strict monotonicity of eigenvalues and unique continuation*, Comm. PDE 17 (1992), 339–346. [cytowane na str. 82]

[33] S. Fu, Z. Wang, *Relationships among Three Multiplicities of a Differential Operator's Eigenvalue*, Applied Mathematics, 5, 2185-2194 (2014). [cytowane na str. 109]

[34] M. Furi, M.P. Pera, *A continuation principle for forced oscillations on differentiable manifolds*, Pacific J. Math. 121 (1986), no. 2, 321-338. [cytowane na str. 7]

[35] M. Furi, M.P. Pera, *Global bifurcation of fixed points and the Poincaré translation operator on manifolds*, Ann. Mat. Pur. Appl. 173 (1997), 313-331. [cytowane na str. 9]

[36] M. Furi, M.P. Pera, M. Spadini, *The fixed point index of the Poincaré translation operator on differentiable manifolds*, Handbook of topological fixed point theory, Brown R.F., Furi M., Górniewicz L., Jiang B. (Eds.), Springer, 2005. [cytowane na str. 9]

[37] D.Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, 1997. [cytowane na str. 111]

[38] J.-P. Gossez, A. Loulit, *A note on two notions of unique continuation*, Bull. Soc. Math. Belg., 45 (1993), pp. 257–267. [cytowane na str. 82]

[39] L. Górniewicz, R. Ingarden, *Analiza matematyczna dla fizyków, Tomy 1 i 2*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1985. [cytowane na str. 102, 106, 107]

[40] A. Granas, J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer-Verlag, New York 2003. [cytowane na str. 120]

[41] J.K. Hale, S.M. Verduyn Lunel, *Averaging in infinite dimensions*, J. Integral Equations Applications 2 (1990), no. 4, 463–494. [cytowane na str. 7]

[42] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Springer Verlag, 1981. [cytowane na str. 7, 19, 21, 22, 22, 27, 102]

[43] P. Hess, *Periodic-parabolic boundary value problems and positivity*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, 247, Longman Scientific & Technical, John Wiley & Sons, 1991. [cytowane na str. 6]

[44] E. Hille, R. Phillips, *Functional Analysis and Semi-Groups*, Colloquium Publications 31, American Mathematical Society, Providence, RI, 1957. [cytowane na str. 119]

[45] S. Hu, N. S. Papageorgiou, *On the existence of periodic solutions for a class of nonlinear evolution inclusions*, Boll. Unione Mat. Ital., 7B, 1993, 591–605. [cytowane na str. 6]

[46] D. Jerison, C. Kenig, *Unique continuation and absence of positive eigenvalues for Schrödinger operators*, Ann. of Math., 121 (1985), pp. 463–488. [cytowane na str. 82]

[47] M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca, *Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces*, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications 7, Walter de Gruyter, 2001. [cytowane na str. 8]

[48] P. Kokocki, *Periodic solutions for nonlinear evolution equations at resonance*, J. Math. Anal. Appl., Vol. 392 no. 1, (2012), 55-74. [cytowane na str. 7, 11]

[49] P. Kokocki, *Dynamika nieliniowych równań ewolucyjnych w rezonansie*, rozprawa doktorska, Toruń 2012. [cytowane na str. 117]

[50] P. Kokocki, *The averaging principle and periodic solutions for nonlinear evolution equations at resonance*, Nonlinear Anal., Vol. 85, (2013), 253-278. [cytowane na str. 7, 11]

[51] M.A. Krasnosel'skii, P.P. Zabreiko, *Geometrical methods of nonlinear analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1984. [cytowane na str. 85]

[52] W. Kryszewski, A. Szulkin, *Bifurcation from infinity for an asymptotically linear Schrödinger equation*, J. Fixed Point Theory Appl., 1-2 (2014), 411–435. [cytowane na str. 83, **??**]

[53] Z. Liu, J. Su, T.Weth, *Compactness results for Schrödinger equations with asymptotically linear terms*, J. Differential Equations 231 (2006), 501-512. [cytowane na str. 83, **??**]

[54] J. Mawhin, *Periodic solutions of nonlinear telegraph equations*, Bednarek, Cesari (Eds.), Dynamical Systems, Academic Press (1977) pp. 193-210. [cytowane na str. 8]

[55] R. Ortega, *Stability and index of periodic solutions of a nonlinear telegraph equation*, Commun. Pure Appl. Anal. 4 (2005), no. 4, 823–837. [cytowane na str. 6, 8]

[56] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer Verlag 1983. [cytowane na str. 19, 30, 111, 112, 113, 115, 118]

[57] M. Prizzi, *On admissibility of parabolic equations in* $\mathbb{R}^N$, Fund. Math. 176 (2003), 261–275. [cytowane na str. 7, 34]

[58] M. Prizzi, *Averaging, Conley index continuation and recurrent dynamics in almost-periodic parabolic equations*, J. Differential Equations 210, no. 2 (2005), 429–451. [cytowane na str. 7, 27, 50]

[59] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol.IV. Analysis of Operators* , Academic Press, New York, 1978. [cytowane na str. 110]

[60] W. Rudin, *Analiza Funkcjonalna*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 2009. [cytowane na str. 106, 107, 115]

[61] M. Schechter, *Spectra of partial differential operators*, North-Holland 1986. [cytowane na str. 110]

[62] M. Schechter, B. Simon, *Unique continuation for Schrödinger operators with unbounded potentials*, J. Math. Anal. Appl., 77(2), 482–492, 1980. [cytowane na str. 82]

[63] G. Sell, Y. You, *Dynamics of Evolutionary Equations*, Springer Verlag, 2002. [cytowane na str. 117]

[64] N. Shioji, *Existence of periodic solutions for nonlinear evolution equations with nonmonotonic perturbations*, Proc. Amer. Math. Soc., 125 (1997), 2921–2929. [cytowane na str. 6]

[65] P. Strzelecki, *Krótkie wprowadzenie do równań różniczkowych cząstkowych*, Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, 2006. [cytowane na str. 105]

[66] H. Tanabe, *Equations of evolution*, Monographs and Studies in Mathematis no. 6, Pitman 1979. [cytowane na str. 19, 111]

[67] A. E. Taylor, *Introduction to Functional Analysis*, Wiley, New York 1961. [cytowane na str. 119]

[68] I. I. Vrabie, *Periodic solutions for nonlinear evolution equations in a Banach space*, Proc. Amer. Math. Soc. 109 (1990), no. 3, 653–661. [cytowane na str. 8]

[69] B. Wang, *Attractors for reaction-diffusion equations in unbounded domains*, Phys. D 128 (1999), 41–52. [cytowane na str. 7]

[70] K. Yosida, *Functional Analysis, 4th edition*, Springer, Berlin-New York, 1974. [cytowane na str. 49, 106]

Skorowidz

C_0-półgrupa
operatorów liniowych, 111
jednostajnie ograniczona, 112
analityczna, 113

funkcja
Eulera, 116
próbna, 16
wypukła, 101
funkcje jednakowo ciągłe, 105

generator C_0-półgrupy, 111

Indeks punktów stałych, 49
dla odwzorowań ostatecznie zwartych, 122
Leray-Schaudera, 120

jądro operatora, 107

kompleksyfikacja operatora, 110
kompleksyfikacja przestrzeni, 109
krotność
algebraiczna, 109
geometryczna, 108

miara niezwarości, 105
Hausdorffa, 105

nierówność
Höldera, 101
interpolacyjna, 101
Jensena, 101
Sobolewa-Gagliardo-Nirenberga, 104
Volterry, 102
Younga, 101
norma wykresowa, 106

obraz operatora, 107
odwzorowanie
dopuszczalne, 122
ostatecznie zwarte, 121
operator
dodatni, 114
liniowy
domknięty, 106
gęsto określony, 106
nieograniczony, 107
odwrotny, 107
ograniczony, 107
ograniczony z dołu, 115
samosprzężony, 108
sprzężony, 107
symetryczny, 108
zwarty, 110
relatywnie zwarty, 110
przesunięcia wzdłuż trajektorii, 47
sektorialny, 114
oszacowania *a priori*, 69

przestrzeń
własna, 108
Sobolewa, 104
ułamkowa, 117

rozwiązanie

łagodne, 21
rozwiązanie , 20

słaba pochodna, 103
spektrum, 108

twierdzenie
Arzeli-Ascoliego, 105
Eberleina- Šmuliana, 49
Fatou-Lebesgue'a, 102
Laxa-Milgrama, 108
Lebesgue'a o zmajoryzowanym przechodzeniu do granicy, 103
o domkniętym wykresie, 107
o jednostajnym przechodzeniu do granicy, 103
Rellicha-Kondraszowa, 105
Weyl'a, 110

wartość własna, 108
warunek eliptyczności, 28
warunki Landesmana-Lazera, 82
wielowskaźnik, 103
wykres operatora, 106
wzór indeksowy, 66

zbiór
rezolwenty, 108
spektralny, 119