

Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
Wydział Matematyki i Informatyki

Grzegorz Marczak

Rozprawa doktorska
pt. „**Konstrukcje algorytmiczne nieujemnych grafów
krawędziowo-dwudzielnych oraz kongruencji macierzy Grama**”

Promotor: prof. dr hab. Daniel Simson
Zakład Kombinatoryki i Obliczeń Symbolicznych

Oświadczenie autora rozprawy:
oświadczam, że niniejsza rozprawa została napisana przeze mnie samodzielnie.

.....
data *autor*

Oświadczenie promotora rozprawy:
niniejsza rozprawa jest gotowa do oceny przez recenzentów:

Toruń, maj 2016 roku

Spis treści

1. Wstęp	5
2. Podstawowe informacje o funkcjonalach kwadratowych	9
2.1. Jednorodne funkcjonały kwadratowe i ich macierze	9
2.2. Kryterium Sylwestera	11
2.3. Algorytm Sylwestera i jego uogólnienie	12
2.4. Postaci kanoniczne Lagrange'a	12
2.5. Pierwiastki funkcjonałów całkowitych	17
2.6. Całkowite funkcjonały nieujemne. Opisy jądra	19
2.7. Całkowite funkcjonały nieujemne ustalonej korangi. Funkcjonały główne	21
3. Całkowite funkcjonały P -krytyczne	26
3.1. Podstawowe twierdzenie redukcyjne	27
3.2. Dowód twierdzenia 3.5	31
4. Grafy krawędziowo-dwudzielne bez pętli	35
4.1. Podstawowe informacje o grafach krawędziowo-dwudzielnych bez pętli	35
4.2. Algorytm inflacyjny dla grafów krawędziowo-dwudzielnych bez pętli	42
4.3. Krawędziowo-dwudzielne grafy P -krytyczne bez pętli	44
5. Konstrukcja krawędziowo-dwudzielnych grafów głównych	47
5.1. Podstawowa konstrukcja	49
5.2. Obliczenia algorytmiczne bigrafów głównych o małej liczbie wierzchołków	56
5.3. Konstrukcja algorytmiczna bigrafów dodatnich	58
6. Algorytmiczna konstrukcja oczkowych kołczanów pierwiastków oraz \mathbb{Z} -kongruencji bigrafów	63
6.1. Graficzne przedstawianie Φ_Δ -orbit pierwiastków	63
6.2. Idea algorytmu konstruującego kołczan Φ_Δ -orbit pierwiastków	65
6.3. Konstrukcja algorytmu oraz przykłady jego zastosowań	69
7. Dodatek	74
7.1. Kryterium Sylwestera	74
7.2. Uogólnione kryterium Sylwestera	74
7.3. Algorytm Lagrange'a	75
7.4. Algorytm ograniczonego zliczania	76
7.5. Algorytm obliczający zredukowaną liczbę Coxetera oraz liczbę Coxetera	77
7.6. Algorytm inflacyjny	77
7.7. Algorytm „dodatnie”	79
7.8. Algorytm „główne”	80

1. Wstęp

Rozprawa jest poświęcona wybranym problemom algorytmicznym i obliczeniowym występujących w klasyfikacji Grama dodatnio określonych oraz dodatnio półokreślonych głównych (zobacz Definicja 2.27 w rozdziale 2) całkowitych jednorodnych funkcyj kwadratowych $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, a także klasyfikacji Coxetera-Grama dodatnich oraz głównych grafów krawędziowo-dwudzielnych $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ bez pętli (zdefiniowanych w pracy [41] oraz rozdziale 4.1) o skończonym zbiorze wierzchołków $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$ oraz skończonym zbiorze krawędzi Δ_1 oznakowanych symbolami z dwuelementowego zbioru $\{+, -\}$.

Jednym z głównych celów tej pracy jest zbudowanie narzędzi algorytmicznych do rozwiązywania wybranych problemów spektralnej klasyfikacji Coxetera nieujemnych grafów krawędziowo-dwudzielnych $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ bez pętli sformułowanych na seminariach doktoranckich prowadzonych przez promotora w latach 2010-2015, a także w jego publikacjach [38], [39] oraz [41]-[44]. W rozprawie przedstawiamy m.in. konstrukcje klasy algorytmów kombinatorycznych i numerycznych pozwalających rozwiązywać sformułowane w pracach [38, 39, 41] główne problemy spektralnej klasyfikacji Coxetera grafów krawędziowo-dwudzielnych bez pętli.

Główną inspiracją badania niezmienników spektralnych klasy grafów krawędziowo-dwudzielnych (omówioną szeroko w artykułach [38], [39], [41]) były problemy spektralnej klasyfikacji Coxetera algebr skończonego wymiaru nad ciałem K i ich związków z tzw. pochodną równoważnością algebr badaną w ostatnim czasie m.in. w pracach Lenzing-Peña [25] oraz Mróz-Peña [30].

Przypomnijmy, że K -algebry R i S są pochodnie równoważne, gdy kategorie pochodne $\mathcal{D}^b(\text{mod } R)$ oraz $\mathcal{D}^b(\text{mod } S)$ ich kategorii prawych modułów $\text{mod } R$ oraz $\text{mod } S$ są trójkątnie równoważne, zobacz [25] oraz [46, Chapter XX].

Inną ważną inspiracją były problemy bliskie X Problemowi Hilberta budowania prostych algorytmów (najlepiej graficznych) opisujących geometrycznie zbiór wszystkich rozwiązań całkowitych $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^n$ równań diofantycznych $q(x_1, \dots, x_n) = d$, gdzie $d \in \mathbb{Z}$ jest liczbą całkowitą oraz $q(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ jest jednorodną całkowitą formą kwadratową, zobacz [38, 39] oraz monografia [7, Chapter II]. Problemy te są intensywnie badane przez wielu autorów, zobacz m.in. monografie [1], [10] oraz [45, 46], a także artykuły [4, 5, 8], [9, 14, 15], [19, 21, 22, 24], [30, 32, 47].

W całej rozprawie symbolami $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ oznaczamy zbiory: liczb naturalnych, liczb całkowitych, liczb wymiernych oraz liczb rzeczywistych. Produkt kartezjański \mathbb{Z}^n , gdzie $n \geq 1$, rozważamy jako grupę przemienną, zaś \mathbb{Q}^n oraz \mathbb{R}^n rozważamy jako przestrzenie liniowe, odpowiednio nad ciałem \mathbb{Q} oraz \mathbb{R} . Dla ustalonej liczby naturalnej $m \geq 1$, symbolami $\mathbb{M}_m(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_m(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ oznaczamy algebry macierzy kwadratowych $A = [a_{ij}]_{i,j \leq n}$ wymiaru $m \times m$ o współczynnikach, odpowiednio, w \mathbb{Z} , \mathbb{Q} oraz \mathbb{R} . Dla danej macierzy $A \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ oznaczamy przez $A^{tr} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ macierz transponowaną do A .

Jeśli b_1, \dots, b_n są skalarami z ciała \mathbb{R} , to symbolem

$$\text{diag}(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$$

oznaczamy macierz diagonalną $B = [b_{ij}] \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$, w której współczynnikami na głównej przekątnej są liczby $b_{11} = b_1, b_{22} = b_2, \dots, b_{nn} = b_n$, natomiast pozostałe współczynniki są zerami, tzn. $b_{ij} = 0$, jeśli $i \neq j$.

Przypomnijmy z rozdziału 4, że grafem krawędziowo-dwudzielnym (w skrócie: bigrafem) nazywamy czwórkę $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \Delta_1^-, \Delta_1^+)$, gdzie $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ jest skończonym grafem, natomiast Δ_1^-, Δ_1^+ są rozłącznymi podzbiorem zbioru krawędzi Δ_1 takimi, że $\Delta_1 = \Delta_1^+ \cup \Delta_1^-$ oraz $\Delta_1(a, b) = \Delta_1^+(a, b)$ lub $\Delta_1(a, b) = \Delta_1^-(a, b)$, dla dowolnych wierzchołków $a \neq b$. Taki graf krawędziowo-dwudzielny będziemy traktować jako graf oznakowany w sensie [48] następująco:

- krawędzie ze zbioru $\Delta_1^-(a, b)$ będą oznakowane znakiem „-” i realizowane geometrycznie jako krawędzie ciągłe $a \text{---} b$,
- krawędzie ze zbioru $\Delta_1^+(a, b)$ będą oznakowane znakiem „+” i realizowane geometrycznie jako krawędzie przerywane $a - - - b$.

Dowolny graf $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ będziemy traktować jako krawędziowo-dwudzielny $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \Delta_1^-, \Delta_1^+)$ przyjmując, że $\Delta_1(a, b) = \Delta_1^-(a, b)$ oraz $\Delta_1^+(a, b)$ jest zbiorem pustym, dla dowolnych wierzchołków $a \neq b$, tzn. każda krawędź w Δ jest ciągła.

Graf krawędziowo-dwudzielny Δ z ustaloną numeracją wierzchołków a_1, \dots, a_n , $n \geq 1$, jest jednoznacznie zdefiniowany przez jego niesymetryczną macierz Grama $\check{G}_\Delta \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ (zobacz definicja 4.2). Jeśli Δ nie ma pętli, to stowarzysza się z nim macierz Coxetera $\text{Cox}_\Delta = -\check{G}_\Delta \cdot \check{G}_\Delta^{-tr} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, jej wielomian charakterystyczny $\text{cox}_\Delta(t) := \det(tE - \text{Cox}_\Delta) \in \mathbb{Z}[t]$, (zwany wielomianem Coxetera bigrafu Δ) oraz spektrum Coxetera $\text{specc}_\Delta \subseteq \mathbb{C}$ składające się ze wszystkich zespolonych n wartości własnych macierzy Coxetera Cox_Δ ; równoważnie zbiór wszystkich zespolonych n pierwiastków (wraz z krotnościami) wielomianu Coxetera $\text{cox}_\Delta(t)$ bigrafu Δ .

Grafy krawędziowo-dwudzielne Δ o $n \geq 1$ wierzchołkach bada się z dokładnością do silnej \mathbb{Z} -kongruencji Grama $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ zdefiniowanej w [41] następująco:

$$\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta' \Leftrightarrow \check{G}_\Delta = B \cdot \check{G}_{\Delta'} \cdot B^{tr}, \text{ dla pewnej macierzy } B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}) \text{ takiej, że } \det B = \pm 1.$$

W pracach [40], [41] dowodzi się, że jeśli $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$, to $\text{cox}_\Delta(t) = \text{cox}_{\Delta'}(t)$ oraz $\text{specc}_\Delta = \text{specc}_{\Delta'}$. Jednymi z głównych problemów spektralnej klasyfikacji Coxetera nieujemnych grafów krawędziowo-dwudzielnych są następujące dwa problemy sformułowane w [40], [41].

Problem 1.1. *Znaleźć szeroką klasę bigrafów bez pętli dla których równość spektrów Coxetera $\text{specc}_\Delta = \text{specc}_{\Delta'}$ implikuje silną \mathbb{Z} -kongruencję $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$.*

Problem 1.2. *Zbudować algorytmy pozwalające, dla danej pary bigrafów Δ, Δ' bez pętli spełniających relację $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$, obliczyć pewną macierz $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ definiującą tę silną \mathbb{Z} -kongruencję Grama $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$, tzn. taką, że $\det B = \pm 1$ oraz $\check{G}_\Delta = B \cdot \check{G}_{\Delta'} \cdot B^{tr}$.*

Częściowe rozwiązanie tych problemów można znaleźć w publikacjach [9], [12], [13], [14], [15], [19], [21], [22], [23], [24], [28], [32], [41], [42], [47].

Zasadnicza część naszej rozprawy poświęcona jest badaniu problemów 1.1-1.2 dla bigrafów dodatnich oraz bigrafów głównych bez pętli w sensie pracy [41]; tzn. takich Δ bez pętli, że symetryczna wymierna macierz Grama $G_\Delta := \frac{1}{2}[\check{G}_\Delta + \check{G}_\Delta^{tr}]$ jest dodatnio półokreślona oraz podgrupa

$$\text{Ker } q_\Delta := \{v \in \mathbb{Z}^n; v \cdot G_\Delta \cdot v^{tr} = 0\}$$

grupy abelowej \mathbb{Z}^n jest cykliczna nieskończona.

Głównymi wynikami tej rozprawy są następujące twierdzenia i ich konsekwencje.

1° Wyniki rozdziału 4.3 zawierające pełną charakteryzację P -krytycznych grafów krawędziowo-dwudzielnych Δ bez pętli; w szczególności twierdzenie 4.30 opisujące m.in. ograniczenia współrzędnych wektora generującego grupę $\text{Ker } q_\Delta$.

2° Pełna charakteryzacja P -krytycznych funkcjonałów całkowitych $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ podana w rozdziale 3, lemat 3.7, a także ich ważne konsekwencje podane w twierdzeniu 3.9 oraz we wnioskach 3.8, 3.10 i 3.11; część z nich uogólnia znane wyniki Ovsienki [26]. Pewna część z tych wyników została już opublikowana w pracy [27].

3° Twierdzenie 5.2 opisujące strukturę dowolnego głównego grafu krawędziowo-dwudzielnego Δ bez pętli oraz konstrukcja 5.4 pozwalająca w prosty sposób skonstruować dowolny główny graf krawędziowo-dwudzielny Δ bez pętli o $n + 1 \geq 3$ wierzchołkach z pewnego spójnego

bigrafu dodatniego Δ' o n wierzchołkach oraz jego pierwiastka (tzn. wektora $v \in \mathbb{Z}^n$ takiego, że $v \cdot G_{\Delta} \cdot v^{tr} = 1$).

4° Efektywność konstrukcji omówionej w 3° i zbudowanego na jej podstawie algorytmu symboliczno-graficznego 5.12 pozwalającego dość łatwo opisać wszystkie bigrafy główne o najwyżej pięciu wierzchołkach zilustrowana w paragrafie 5.2.

5° Dowód twierdzenia 5.9, z którego wynika wniosek 5.11 orzekający, że dowolny bigraf główny o $n + 1 \geq 3$ wierzchołkach otrzymuje się przy pomocy konstrukcji zrealizowanej w algorytmie 5.12.

6° Lemat 5.1 o strukturze jądra $\text{Ker } q_{\Delta}$ bigrafu głównego Δ o co najmniej trzech wierzchołkach, a także wniosek 5.12 o ograniczeniach współrzędnych pierwiastków $v \in \mathbb{Z}^n$ bigrafów dodatnich bez pętli (analogiczny do wyniku Ovsienki [26], ale udowodniony inaczej niż w pracy [26]).

7° Opisane w rozdziale 6 algorytmiczne rozwiązania Problemu 1.2 dla dość szerokiej klasy dodatnich grafów krawędziowo-dwudzielnych bez pętli.

8° Uzupełniony algorytm Lagrange'a oparty na wniosku 2.29 (omówiony w uwagach 2.30-2.31) oraz jego implementacja pozwalająca w prosty macierzowy sposób opisać \mathbb{Z} -bazę jądra $\text{Ker } q_{\Delta}$ dla nieujemnego bigrafu Δ .

W omawianej tu spektralnej klasyfikacji Coxetera grafów krawędziowo-dwudzielnych ważną rolę będą odgrywały następujące dwie klasy grafów: diagramy Dynkina oraz diagramy Euklidesa (zwane też rozszerzonymi diagramami Dynkina) przedstawione w następujących dwóch tabelach.

Tabela 1.1. Diagramy Dynkina

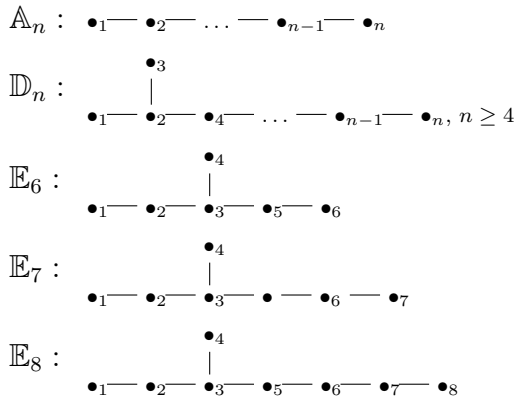
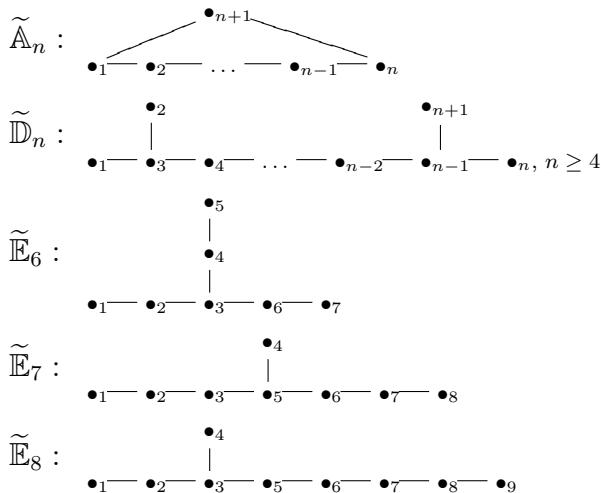


Tabela 1.2. Diagramy Euklidesa



Zauważmy, że $\tilde{\mathbb{A}}_1$ jest grafem Kroneckera .

Przypomnijmy z rozdziału VII monografii [1], że jeśli $D = (D_0, D_1)$ jest jednym z diagramów Dynkina lub jednym z diagramów Euklidesa o $n = |D_0|$ wierzchołkach, to funkcjonal kwadratowy $q_D : \mathbb{Z}^{D_0} \rightarrow \mathbb{Z}$ grafu $D = (D_0, D_1)$ jest zdefiniowany wzorem

$$(1.3) \quad q_D(x) = \sum_{a_i \in D_0} x_i^2 + \sum_{i < j} d_{ij}^D x_i x_j,$$

gdzie $x = (x_j)_{a_j \in D_0} \in \mathbb{Z}^{D_0} \equiv \mathbb{Z}^{|D_0|}$, $d_{ij}^D = -|D_1(a_i, a_j)|$, oraz $|D_1(a_i, a_j)|$ jest liczbą krawędzi łączących wierzchołek $a_i \in D_0$ z wierzchołkiem $a_j \in D_0$.

Jeśli D jest jednym z diagramów Dynkina, to funkcjonal $q_D : \mathbb{Z}^{D_0} \rightarrow \mathbb{Z}$ jest dodatnio określony, tzn. przyjmuje wartość dodatnią $q_D(v)$ na dowolnym niezerowym wektorze $v \in \mathbb{Z}^n$.

Jeśli zaś D jest jednym z diagramów Euklidesa, to funkcjonal $q_D : \mathbb{Z}^{D_0} \rightarrow \mathbb{Z}$ nie jest dodatnio określony, ale jest dodatnio półokreślony, tzn. przyjmuje wartość nieujemną $q_D(v)$ na dowolnym wektorze $v \in \mathbb{Z}^n$, zobacz twierdzenie 2.20 w rozdziale 2.

2. Podstawowe informacje o funkcjonalach kwadratowych

Ponieważ jednym z głównych celów pierwszej części tej rozprawy jest podanie w rozdziale 3 pełnej charakteryzacji P -krytycznych jednorodnych funkcjonalów kwadratowych $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, więc rozprawę rozpoczynamy od wprowadzenia podstawowych pojęć i oznaczeń wykorzystywanych w całej rozprawie. Przypominamy także fakty znane z wykładu monograficznego promotora [35] oraz z literatury naukowej przedmiotu (zobacz [37]-[44]).

Aby ułatwić czytanie rozprawy niektóre z twierdzeń przedstawimy wraz z dowodami lub szkicami dowodów. Przedstawimy też implementacje kilku algorytmów symbolicznych i ich implementacji stosowanych w dalszej części rozprawy.

2.1. Jednorodne funkcjonały kwadratowe i ich macierze

W tym paragrafie przypominamy z wykładu algebry liniowej potrzebne w dalszej części tej pracy definicje i fakty dotyczące funkcjonalów kwadratowych i form kwadratowych.

Definicja 2.1. Niech $n \geq 1$ będzie liczbą naturalną.

(a) **Jednorodnym funkcjonałem kwadratowym** (rzeczywistym) nazywamy funkcję $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$(2.2) \quad q(x) = q(x_1, \dots, x_n) = q_{11}x_1^2 + \dots + q_{nn}x_n^2 + \sum_{i < j} q_{ij}x_i x_j,$$

gdzie q_{ij} są liczbami rzeczywistymi. **Polaryzacją** funkcjonału $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy funkcjonał \mathbb{R} -dwuliniowy symetryczny $b_q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowany wzorem

$$(2.3) \quad b_q(u, w) = \frac{1}{2}[q(u + w) - q(u) - q(w)],$$

dla dowolnych wektorów $u, w \in \mathbb{R}^n$.

(b) Jeśli $q_{ij} \in \mathbb{Z}$, dla dowolnych $i, j \in \{1, \dots, n\}$, to funkcjonał q nazywamy **całkowitym** i piszemy $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$. W tym wypadku, zbiór

$$(2.4) \quad \text{Ker } q := \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 0\}$$

nazywamy **jądrem** funkcjonału całkowitego $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$.

(c) Jeśli $q_{11} = \dots = q_{nn} = 1$, to $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ nazywamy **funkcjonałem kwadratowym jednolitym** (w terminologii angielsko-języcznej: unit form).

(d) Zbiór wszystkich jednolitych całkowitych funkcjonalów kwadratowych $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ będziemy oznaczać symbolem $\mathcal{U}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$.

Umowa. W tej rozprawie badamy tylko jednorodne funkcjonały jednolite. W związku z tym nazwa **całkowity funkcjonał kwadratowy** $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ będzie oznaczać całkowity funkcjonał kwadratowy, który jest jednorodny i jednolity.

Definicja 2.5. (a) Funkcjonał kwadratowy $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy

(a1) **dodatnio określonym**, jeśli $q(v) > 0$, dla dowolnego niezerowego wektora $v \in \mathbb{R}^n$,

(a2) **dodatnio półokreślonym**, jeśli $q(v) \geq 0$, dla dowolnego wektora $v \in \mathbb{R}^n$,

(a3) **nieokreślonym**, jeśli $q(v) < 0$, dla pewnego wektora $v \in \mathbb{R}^n$.

(b) Całkowity funkcjonał kwadratowy $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ nazywamy

(b1) **dodatnim**, jeśli $q(v) > 0$, dla dowolnego niezerowego wektora $v \in \mathbb{Z}^n$,

(b2) **słabo dodatnim**, jeśli $q(v) > 0$, dla dowolnego niezerowego wektora $v \in \mathbb{N}^n$,

(b3) **nieujemnym**, jeśli $q(v) \geq 0$, dla dowolnego wektora $v \in \mathbb{Z}^n$,

(b4) **słabo nieujemnym**, jeśli $q(v) \geq 0$, dla dowolnego wektora $v \in \mathbb{N}^n$.

W badaniu funkcjonałów nieujemnych $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ często wykorzystuje się następujący prosty lemat (zobacz [33], str. 2 oraz rozdział 1 skryptu [35]).

Lemat 2.6. (a) Polaryzacja $b_q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (2.3) dowolnego funkcjonału jednorodnego kwadratowego $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcjonałem symetrycznym, tzn. $b_q(u, w) = b_q(w, u)$, dla dowolnych $u, w \in \mathbb{R}^n$. Ponadto $q(u) = b_q(u, u)$, dla dowolnego $u \in \mathbb{R}^n$.

(b) Jeśli $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest całkowitym nieujemnym funkcjonałem jednorodnym kwadratowym, to jądro $\text{Ker } q$ jest podgrupą grupy \mathbb{Z}^n .

(c) Jeśli $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest dodatnio określony, to $\text{Ker } q = 0$.

Dowód. (a) Własność (a) jest znana z wykładu algebry liniowej.

(b) Załóżmy, że $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest nieujemnym oraz $u, v \in \text{Ker } q$. Zatem $q(u) = 0$, $q(v) = 0$ i na podstawie definicji polaryzacji $b_q : \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q}$ (2.3) otrzymujemy równości

$$\begin{aligned} q(u+v) &= q(u) + q(v) + 2b_q(u, v) = 2b_q(u, v), \\ q(u-v) &= q(u) + q(-v) + 2b_q(u, -v) = q(u) + q(v) - 2b_q(u, v) = -2b_q(u, v) \end{aligned}$$

tzn.

$$\begin{cases} q(u+v) = 2b_q(u, v) \\ q(u-v) = -2b_q(u, v). \end{cases}$$

Dodając powyższe równości stronami otrzymujemy równość $q(u+v) + q(u-v) = 0$. Ponieważ q jest nieujemny, więc $q(u+v) \geq 0$ oraz $q(u-v) \geq 0$, gdyż $u+v, u-v \in \mathbb{Z}^n$. Zatem z równości $q(u+v) + q(u-v) = 0$ wynikają równości $q(u+v) = 0$ oraz $q(u-v) = 0$. Wykazaliśmy więc, że $u+v, u-v \in \text{Ker } q$, o ile $u, v \in \text{Ker } q$, co kończy dowód (b). Ponieważ własność (c) oczywista, więc dowód lematu jest zakończony. \square

Przykład 2.7. (a) Jednorodny funkcjonal kwadratowy $q_{\mathbb{A}_3} : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}$ (1.3) diagramu Dynkina $\mathbb{A}_3 : a_1 \text{---} a_2 \text{---} a_3$ jest dodatnio określony, gdyż

$$q_{\mathbb{A}_3}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 = \frac{1}{2}[x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2].$$

(b) Jednorodny funkcjonal kwadratowy $q_{\tilde{\mathbb{A}}_1} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ (1.3) grafu Kroneckera $a_1 \text{====} a_2$ jest dodatnio półokreślony, gdyż $q_{\tilde{\mathbb{A}}_1}(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 - x_2)^2$. Zauważmy również, że $\text{Ker } q_{\tilde{\mathbb{A}}_1} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie $\mathbf{h} = (1, 1) \in \mathbb{Z}^2$, tzn. $\text{Ker } q_{\tilde{\mathbb{A}}_1}$ jest podgrupą cykliczną grupy \mathbb{Z}^2 generowaną przez wektor $\mathbf{h} = (1, 1) \in \mathbb{Z}^2$.

(c) Funkcjonał kwadratowy $q : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ zdefiniowany wzorem $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$ w sposób oczywisty jest słabo dodatni, natomiast nie jest on nieujemny, gdyż $q(1, -1) = -2$,

W badaniu jednorodnych funkcjonałów kwadratowych używa się często ich macierzy Grama w następującym sensie.

Definicja 2.8. (a) **Symetryczną macierzą Grama** funkcjonału $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (2.2) nazywamy macierz kwadratową

$$(2.9) \quad G_q = \begin{bmatrix} \hat{q}_{11} & \cdots & \hat{q}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{q}_{n1} & \cdots & \hat{q}_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2} \cdot \mathbb{Z}),$$

gdzie $\hat{q}_{ii} = q_{ii}$, dla $i \in \{1, \dots, n\}$, oraz $\hat{q}_{ij} = \hat{q}_{ji} = \frac{1}{2}q_{ij}$, o ile $i < j$.

(b) **Niesymetryczną macierzą Grama** jednorodnego funkcjonału całkowitego $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ nazywamy macierz kwadratową

$$(2.10) \quad \check{G}_q = \begin{bmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$$

Często będziemy wykorzystywali następujący prosty lemat udowodniony w rozdziale 1 skryptu [35].

Lemat 2.11. (a) *Jeśli $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcjonalem jednorodnym kwadratowym zdefiniowanym wzorem (2.2), to $q(u) = u \cdot G_q \cdot u^{tr} = u \cdot \check{G}_q \cdot u^{tr}$, dla dowolnego wektora $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$,*

$$\text{gdzie } u^{tr} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}.$$

(b) *Dla dowolnej macierzy $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ funkcja $q_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem*

$$q_A(v) = v \cdot A \cdot v^{tr} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1^2 + \dots + a_{nn} x_n^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{ij} + a_{ji}) x_i x_j$$

jest jednorodnym funkcjonalem kwadratowym. Symetryczną macierzą Grama tego funkcjonału q_A jest macierz $G_{q_A} = \frac{1}{2}(A + A^{tr})$. Jeśli $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, to tak zdefiniowany funkcjonal jest całkowity, tzn. $q_A : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$.

Dowód. Stwierdzenia (a) oraz (b) otrzymuje się przez nietrudne przeliczenie, zobacz rozdział 1 skryptu [35]. \square

2.2. Kryterium Sylwestera

W algorytmicznym badaniu funkcjonałów kwadratowych z użyciem komputera często stosuje się następujące dwa kryteria znane z wykładu algebry liniowej. Pozwalają one stwierdzić czy dany funkcjonal kwadratowy $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest dodatnio określony lub dodatnio półokreślony.

Twierdzenie 2.12 (kryterium Sylwestera). *Niech $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcjonalem kwadratowym jednorodnym, natomiast $G_q = [q_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ będzie jego symetryczną macierzą Grama. Funkcjonal q jest dodatnio określony wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujący warunek Sylwestera*

$$\det \begin{bmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{s1} & \cdots & q_{ss} \end{bmatrix} > 0$$

dla dowolnego $s \in \{1, \dots, n\}$.

Dowód. Zobacz [29] oraz rozdział 1.1 w skrypcie [35]. \square

Twierdzenie 2.13 (uogólnione kryterium Sylwestera). *Niech $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcjonalem kwadratowym jednorodnym, natomiast $G_q = [q_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ będzie jego symetryczną macierzą Grama. Funkcjonal q jest dodatnio półokreślony wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujący uogólniony warunek Sylwestera*

$$\det \begin{bmatrix} q_{j_1 j_1} & \cdots & q_{j_1 j_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{j_s j_1} & \cdots & q_{j_s j_s} \end{bmatrix} \geq 0$$

dla dowolnego ciągu $1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq n$.

Dowód. Zobacz [17], Theorem 7.2.5. \square

2.3. Algorytm Sylwestera i jego uogólnienie

Twierdzenia 2.12 oraz 2.13 mogą być bezpośrednio zastosowane do konstrukcji odpowiednich algorytmów symbolicznych. Poniżej zamieszczone zostały pseudokody tych algorytmów. Pełne implementacje znajdują się Dodatku (7.1 i 7.2) oraz na załączonej do pracy płycie pod nazwami Algorytm Sylwestera oraz Uogólniony algorytm Sylwestera.

Wejście: Macierz Grama funkcjonału kwadratowego $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

Wyjście: Komunikat informujący, czy funkcjonał q jest dodatnio określony.

```

1. AlgorytmSylwestera:=proc(m)
2.   n:=liczba kolumn macierzy m
3.   dodatni:=true
4.   for i from 1 to n do
5.     minor:=i-ty wiodący minor główny macierzy m
6.     if minor <= 0 then
7.       dodatni:=false
8.     end if
9.   end do
10.  if dodatni = true then
11.    print "Funkcjonał jest dodatnio określony"
12.  else
13.    print "Funkcjonał nie jest dodatnio określony"
14.  end if
15. end proc

```

Wejście: Macierz Grama funkcjonału kwadratowego $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

Wyjście: Komunikat informujący, czy funkcjonał q jest dodatnio określony, dodatnio półokreślony czy nieokreślony.

```

1. UogolnionyAlgorytmSylwestera:=proc(m)
2.   n:=liczba kolumn macierzy m
3.   dodatni:=true
4.   dodatniopolokreslony:=true
5.   for i from 1 to n-1 do
6.     minory:=zbiór wszystkich minorów wymiaru n-i macierzy m
7.     for minor from minory do
8.       if minor <= 0 then
9.         dodatni:=false
10.      end if
11.      if minor < 0 then
12.        dodatniopolokreslony:=false
13.      end if
14.    end do
15.  end do
16.  if dodatni = true then
17.    print "Funkcjonał jest dodatnio określony"
18.  else if dodatniopolokreslony = true then
19.    print "Funkcjonał jest dodatnio polokreślony"
20.  else
21.    print "Funkcjonał jest nieokreślony"
22.  end if
23. end proc

```

2.4. Postaci kanoniczne Lagrange'a

Przypomnimy teraz konstrukcję równoważności dowolnego jednorodnego funkcjonału kwadratowego $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ z funkcjonałem zdefiniowanym formą kwadratową o postaci kanonicznej. Redukcja ta jest znana jako redukcja Lagrange'a uzupełniania do pełnych kwadratów. Będzie ona często wykorzystywana w dalszej części tej rozprawy w dowodach dodatniej określoności funkcjonałów, w opisie pierwiastków jednorodnych funkcjonałów kwadratowych oraz w opisie jądra funkcjonałów dodatnio półokreślonych.

W rozdziale 7 o nazwie Dodatek opiszemy algorytm redukcyjny Lagrange'a oparty na następującej wersji twierdzenia Lagrange'a oraz na konstrukcjach zastosowanych w jego dowodzie.

Twierdzenie 2.14 (Lagrange'a). *Założmy, że $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest niezerowym jednorodnym funkcjonalem kwadratowym zdefiniowanym wzorem $q(v) = \sum_{i=1}^n q_{ii}v_i^2 + \sum_{i < j} q_{ij}v_iv_j$, gdzie $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, $q_{ij} \in \mathbb{R}$ oraz co najmniej jedna z liczb q_{ij} jest różna od zera.*

(a) *Istnieją liczby rzeczywiste $q'_i, s_{ij} \in \mathbb{R}$, gdzie $i, j \in \{1, \dots, n\}$, o następujących własnościach:*

(a1) *Co najmniej jedna z liczb q'_1, \dots, q'_n jest różna od zera;*

(a2) *Macierz $S = [s_{ij}] = \begin{bmatrix} s_{11} & \dots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \dots & s_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ jest nieosobliwa;*

(a3) *Forma kwadratowa $q(x) := \sum_{i=1}^n q_{ii}x_i^2 + \sum_{i < j} q_{ij}x_ix_j$ ma postać*

$$q(x) = q'_1 \cdot (s_{11}x_1 + \dots + s_{1n}x_n)^2 + q'_2 \cdot (s_{21}x_1 + \dots + s_{2n}x_n)^2 + \dots + q'_n \cdot (s_{n1}x_1 + \dots + s_{nn}x_n)^2 = \\ = q'_1 \cdot z_1^2 + q'_2 \cdot z_2^2 + \dots + q'_n \cdot z_n^2,$$

gdzie $[z_1, \dots, z_n] = [x_1, \dots, x_n] \cdot S^{tr}$, tzn.

$$z_1 = s_{11}x_1 + \dots + s_{1n}x_n,$$

$$z_2 = s_{21}x_1 + \dots + s_{2n}x_n,$$

.....

.....

$$z_n = s_{n1}x_1 + \dots + s_{nn}x_n;$$

(a4) *Jeśli każda z liczb q_{ij} jest wymierna, to również każda z liczb s_{ij} oraz q'_1, \dots, q'_n jest wymierna.*

(b) *Przekształcenie \mathbb{R} -liniowe $f_S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ określone wzorem $f_S(v) = v \cdot S^{tr}$, dla $v \in \mathbb{R}^n$, jest izomorfizmem \mathbb{R} -przestrzeni liniowych definiującym \mathbb{R} -równoważność funkcjonału $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ z funkcjonalem $q' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ o postaci kanonicznej zdefiniowanej wzorem*

$$q'(v) = q'_1v_1^2 + q'_2v_2^2 + \dots + q'_nv_n^2,$$

dla dowolnego wektora $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Innymi słowy przemienny jest diagram

$$(2.15) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{q} & \mathbb{R} \\ f_S \downarrow \cong & \nearrow q' & \\ \mathbb{R}^n & & \end{array}$$

Ponadto, S jest macierzą przekształcenia $f_S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ oraz zachodzi równość $G_q = S^{tr} \cdot G_{q'} \cdot S$.

Dowód. Dowód przeprowadza się metodą indukcji względem liczby $n \geq 1$ wykorzystując dowód twierdzenia 3 w paragrafie XII.3 książki Mostowskiego i Starka [29]. Szczegóły można znaleźć w rozdziale 1 skryptu [35]. Dla funkcjonałów dodatnio określonych dowód można znaleźć w artykule [13, Theorem 5.3]. \square

Wniosek 2.16. (a) *W oznaczeniach twierdzenia 2.14, rzeczywisty funkcjonal kwadratowy $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest dodatnio określony (odp. dodatnio półokreślony) wtedy i tylko wtedy, gdy $q'_1 > 0, q'_2 > 0, \dots, q'_n > 0$ (odp. gdy $q'_1 \geq 0, q'_2 \geq 0, \dots, q'_n \geq 0$).*

(b) Jeśli rzeczywisty funkcjonal kwadratowy $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowity, to funkcjonal $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest nieujemny (odp. dodatni) wtedy i tylko wtedy, gdy $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcjonalem dodatnio półokreślonym (odp. dodatnio określonym).

(c) Jeśli $n = 2$ oraz $q : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ jest jednorodnym funkcjonalem kwadratowym zdefiniowanym wzorem $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + q_{12}x_1x_2$, gdzie $q_{12} \in \mathbb{Z}$, to $q : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ jest nieujemny wtedy i tylko wtedy, gdy $-2 \leq q_{12} \leq 2$.

(d) Jeśli $n \geq 2$ oraz $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest nieujemnym jednorodnym funkcjonalem kwadratowym zdefiniowanym wzorem $q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i < j} q_{ij}x_ix_j$, gdzie $q_{ij} \in \mathbb{Z}$, to $-2 \leq q_{ij} \leq 2$, dla dowolnych $i < j \leq n$.

Dowód. (a) Zastosować twierdzenie 2.14, a w szczególności nieosobliwość macierzy S .

(b) Implikacja „ \Leftarrow ” jest oczywista. Aby udowodnić implikację „ \Rightarrow ” założmy, że $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest nieujemny (odp. dodatni). Stąd łatwo wynika, że funkcjonal wymierny $q : \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q}$ jest nieujemny (odp. dodatni). Jeśli $q(x) = q'_1z_1^2 + q'_2z_2^2 + \dots + q'_nz_n^2$ jest postacią kanoniczną taką jak w twierdzeniu 2.14, to liczby q'_1, \dots, q'_n są wymierne, na podstawie twierdzeniu 2.14 (a4). Stosując (a) do funkcjonala wymiernego $q : \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q}$ otrzymujemy $q'_1 \geq 0, q'_2 \geq 0, \dots, q'_n \geq 0$ (odp. $q'_1 > 0, \dots, q'_n > 0$). Na podstawie (a) zastosowanego do funkcjonala rzeczywistego $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, funkcjonal ten jest dodatnio półokreślony (odp. dodatnio określony).

(c) Na podstawie (b), $q : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ jest nieujemny wtedy i tylko wtedy, gdy $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest dodatnio półokreślony. Ponieważ

$$q(x_1, x_2) = (x_1 + \frac{1}{2}q_{12}x_2)^2 + (1 - \frac{1}{4}q_{12}^2)x_2^2,$$

więc $q : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ jest nieujemny wtedy i tylko wtedy, gdy $(1 - \frac{1}{4}q_{12}^2) \geq 0$, co kończy dowód równoważności (c).

(d) Założmy, że $n \geq 2$ oraz $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest nieujemny. Aby udowodnić, że $-2 \leq q_{ij} \leq 2$, dla dowolnych $i < j \leq n$, ustalmy parę indeksów $i, j \leq n$ takich, że $1 \leq i < j$. Dla prostoty zapisu założmy, że $i = 1$ oraz $j = 2$. Udowodnimy najpierw, że funkcjonal ograniczony $q_{[1,2]} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ zdefiniowany wzorem $q_{[1,2]}(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + q_{12}x_1x_2$ jest nieujemny. W tym celu weźmy dowolny wektor (u_1, u_2) i rozważmy wektor $\hat{u} := (u_1, u_2, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^n$. Ponieważ $q(\hat{u}) = q_{[1,2]}(u_1, u_2)$ oraz q jest nieujemny, więc $q(\hat{u}) \geq 0$ i otrzymujemy nierówność $q_{[1,2]}(u_1, u_2) \geq 0$, tzn. funkcjonal $q_{[1,2]} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ jest nieujemny. Stąd wynikają nierówności $-2 \leq q_{ij} \leq 2$, na podstawie (c), co kończy dowód. \square

Przykład 2.17. Pokażemy, że funkcjonal kwadratowy $q_C : \mathbb{Z}^8 \rightarrow \mathbb{Z}$ zdefiniowany wzorem $q_A(v) = v \cdot C \cdot v^{tr}$, gdzie C jest macierzą

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_8(\mathbb{Z}),$$

nie jest nieujemny. Istotnie, stosując twierdzenie Lagrange'a (a dokładniej implementację 7.3 algorytmu Lagrange'a) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
q_C(x) &= x \cdot C \cdot x^{tr} \\
&= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 \\
&\quad - x_2x_4 - x_2x_5 + x_2x_6 + x_2x_7 - x_3x_4 - x_3x_5 + x_3x_6 + x_3x_7 - x_4x_5 \\
&\quad - x_4x_6 + x_4x_7 + x_4x_8 - x_5x_6 - x_5x_7 + x_5x_8 - x_6x_8 - x_7x_8 \\
&= (x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5)^2 + \frac{3}{4}(x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 + \frac{2}{3}x_6 + \frac{2}{3}x_7)^2 \\
&\quad + \frac{2}{3}(x_3 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 + x_6 + x_7)^2 + \frac{1}{2}(x_4 - 2x_5 + 2x_7 + x_8)^2 - \frac{3}{2}(x_5 - \frac{4}{3}x_7 - x_8)^2 \\
&\quad - \frac{3}{2}(x_6 - \frac{7}{6}x_8)^2 + \frac{2}{3}(-\frac{3}{2}x_6 + x_7 + \frac{3}{4}x_8)^2 + \frac{5}{3}x_8^2.
\end{aligned}$$

Na podstawie wniosku 2.16, funkcjonal $q_C : \mathbb{Z}^8 \rightarrow \mathbb{Z}$ nie jest dodatnio półokreślony.

2.4.1. Algorytm Lagrange'a

W tym paragrafie zamieszczamy schemat algorytmu Lagrange'a podanego w skrypcie [35] i obliczającego postać kanoniczną Lagrange'a dowolnego rzeczywistego funkcjonału $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, zobacz również [39, Remark 3.8] oraz [13, Algorithm 5.5].

Algorytm Lagrange'a. Wejście: Liczba naturalna $n \geq 1$, liczby rzeczywiste $q_{ij} \in \mathbb{R}$, gdzie $1 \leq i \leq j \leq n$, oraz niezerowy jednorodny funkcjonal kwadratowy $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowany przez formę kwadratową wzorem $q(x) = \sum_{i=1}^n q_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j} q_{ij}x_ix_j$.

Wyjście: Liczby rzeczywiste $q'_1, \dots, q'_n \in \mathbb{R}$, gdzie $i, j \in \{1, \dots, n\}$, oraz macierz nieosobliwa $S = [s_{ij}] = \begin{bmatrix} s_{11} & \dots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \dots & s_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ o następujących własnościach:

(a1) co najmniej jedna z liczb q'_1, \dots, q'_n jest różna od zera;

(a2) forma kwadratowa $q(x)$ ma postać $q(x) = q'_1 \cdot z_1^2 + q'_2 \cdot z_2^2 + \dots + q'_n \cdot z_n^2$, gdzie $[z_1, \dots, z_n] = [x_1, \dots, x_n] \cdot S^{tr}$.

Kod źródłowy algorytmu oraz implementacja w Maple 17 znajdują się na płycie, zobacz Dodatek 7.3. Poszczególne etapy algorytmu realizują poszczególne kroki dowodu twierdzenia Lagrange'a podanego w książce [29] oraz w skrypcie [35]. \square

Stosując twierdzenie Lagrange'a, przedstawiony powyżej algorytm Lagrange'a (wraz z implementacją podaną w Dodatku 7.3 na płycie) oraz wniosek 2.16 udowodnimy teraz następujące dwa ważne twierdzenia.

Twierdzenie 2.19. *Jeśli D jest jednym z grafów Dynkina przedstawionych w Tabeli 1.1 oraz $n = |D_0|$ jest liczbą wierzchołków grafu D , to jego funkcjonal kwadratowy $q_D : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ (1.3) jest dodatnio określony.*

Dowód. Stosując metodę Lagrange'a uzupełniania do pełnych kwadratów łatwo pokazuje się, że formy kwadratowe $q_D(x)$ grafów Dynkina \mathbb{A}_n , \mathbb{D}_n , \mathbb{E}_6 , \mathbb{E}_7 oraz \mathbb{E}_8 można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned}
q_{\mathbb{A}_n}(x) &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - \dots - x_{n-1}x_n = \\
&= \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - x_3)^2 + \dots + \frac{1}{2}(x_{n-1} - x_n)^2 + \frac{1}{2}x_n^2. \\
q_{\mathbb{D}_n}(x) &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - x_1x_3 - x_2x_3 - x_3x_4 - x_4x_5 - \dots - x_{n-1}x_n = \\
&= (x_1 - \frac{1}{2}x_3)^2 + (x_2 - \frac{1}{2}x_3)^2 + \frac{1}{2}(x_3 - x_4)^2 + \frac{1}{2}(x_4 - x_5)^2 + \dots + \\
&\quad + \frac{1}{2}(x_{n-1} - x_n)^2 + \frac{1}{2}x_n^2. \\
q_{\mathbb{E}_6}(x) &= (x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{3}{4}(x_2 - \frac{2}{3}x_3)^2 + \frac{2}{3}(x_3 - \frac{3}{4}x_4 - \frac{3}{4}x_5)^2 + \\
&\quad + \frac{5}{8}(x_4 - \frac{3}{5}x_5)^2 + \frac{2}{5}(x_5 - \frac{5}{4}x_6)^2 + \frac{3}{8}x_6^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{\mathbb{E}_7}(x) &= (x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{3}{4}(x_2 - \frac{2}{3}x_3)^2 + \frac{2}{3}(x_3 - \frac{3}{4}x_4 - \frac{3}{4}x_5)^2 + \\
&\quad + \frac{5}{8}(x_4 - \frac{3}{5}x_5)^2 + \frac{2}{5}(x_5 - \frac{5}{4}x_6)^2 + \frac{3}{8}(x_6 - \frac{4}{3}x_7)^2 + \frac{1}{3}x_7^2. \\
q_{\mathbb{E}_8}(x) &= (x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{3}{4}(x_2 - \frac{2}{3}x_3)^2 + \frac{2}{3}(x_3 - \frac{3}{4}x_4 - \frac{3}{4}x_5)^2 + \frac{5}{8}(x_4 - \frac{3}{5}x_5)^2 + \\
&\quad + \frac{2}{5}(x_5 - \frac{5}{4}x_6)^2 + \frac{3}{8}(x_6 - \frac{4}{3}x_7)^2 + \frac{1}{3}(x_7 - \frac{3}{2}x_8)^2 + \frac{1}{4}x_8^2.
\end{aligned}$$

Stąd łatwo wynika teza twierdzenia. \square

Twierdzenie 2.20. *Jeśli D jest jednym z grafów Euklidesa przedstawionych w Tabeli 1.2 oraz $n+1 = |D_0|$ jest liczbą wierzchołków grafu D , to jego funkcjonal kwadratowy $q_D : \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ (1.3) jest dodatnio półokreślony oraz $\text{Ker } q_D = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}_D$, gdzie*

$$\begin{aligned}
(i) \quad \mathbf{h}_D &= {}_{11} \overset{1}{.} \dots {}_{11}, \quad \text{jeśli } D = \widetilde{\mathbb{A}}_n, \quad n \geq 1, \\
(ii) \quad \mathbf{h}_D &= {}_{12} \overset{1}{2} \dots {}_{22} \overset{1}{2} 1, \quad \text{jeśli } D = \widetilde{\mathbb{D}}_n, \quad n \geq 4, \\
(iii) \quad \mathbf{h}_D &= {}_{12} \overset{1}{3} \overset{2}{3} 2 1, \quad \text{jeśli } D = \widetilde{\mathbb{E}}_6, \\
(iv) \quad \mathbf{h}_D &= {}_{12} \overset{1}{3} \overset{2}{4} \overset{3}{2} 1, \quad \text{jeśli } D = \widetilde{\mathbb{E}}_7, \\
(v) \quad \mathbf{h}_D &= {}_{24} \overset{3}{6} \overset{5}{4} \overset{3}{2} 1, \quad \text{jeśli } D = \widetilde{\mathbb{E}}_8.
\end{aligned}$$

Dowód. Dla grafu $D = \widetilde{\mathbb{A}}_n$, funkcjonal kwadratowy $q_D : \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ jest zdefiniowany wzorem

$$\begin{aligned}
q_{\widetilde{\mathbb{A}}_n}(x) &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - \dots - x_nx_{n+1} - x_{n+1}x_1 \\
&= \frac{1}{2}[(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_n - x_{n+1})^2 + (x_1 - x_{n+1})^2].
\end{aligned}$$

Analogicznie, stosując metodę Lagrange'a uzupełniania do pełnych kwadratów łatwo pokazuje się, że formy kwadratowe $q_D(x)$ grafów Euklidesa $\widetilde{\mathbb{D}}_n$, gdzie $n \geq 4$, $\widetilde{\mathbb{E}}_6$, $\widetilde{\mathbb{E}}_7$, $\widetilde{\mathbb{E}}_8$ można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned}
4q_{\widetilde{\mathbb{D}}_n}(x) &= 4\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_4x_5 - \dots - x_{n-1}x_n - x_{n-1}x_{n+1}\right) = \\
&= (2x_1 - x_3)^2 + (2x_2 - x_3)^2 + (x_{n-1} - 2x_n)^2 + (x_{n-1} - 2x_{n+1})^2 + \\
&\quad + 2\sum_{i=3}^{n-2} (x_i - x_{i+1})^2, \\
q_{\widetilde{\mathbb{E}}_6}(x) &= \sum_{i=1}^7 x_i^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_4 - x_4x_5 - x_3x_6 - x_6x_7 = \\
&= (x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{3}{4}(x_2 - \frac{2}{3}x_3)^2 + \frac{2}{3}(x_3 - \frac{3}{4}x_4 - \frac{3}{4}x_6)^2 + \\
&\quad + \frac{5}{8}(x_4 - \frac{4}{5}x_5 - \frac{3}{5}x_6)^2 + \frac{3}{5}(x_5 - \frac{1}{2}x_6)^2 + \frac{1}{4}(x_6 - 2x_7)^2, \\
q_{\widetilde{\mathbb{E}}_7}(x) &= \sum_{i=1}^8 x_i^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_4 - x_4x_5 - x_4x_6 - x_6x_7 - x_7x_8 = \\
&= (x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{3}{4}(x_2 - \frac{2}{3}x_3)^2 + \frac{2}{3}(x_3 - \frac{3}{4}x_4)^2 + \\
&\quad + \frac{5}{8}(x_4 - \frac{4}{5}x_5 - \frac{4}{5}x_6)^2 + \frac{3}{5}(x_5 - \frac{2}{3}x_6)^2 + \frac{1}{3}(x_6 - \frac{3}{2}x_7)^2 + \frac{1}{4}(x_7 - 2x_8)^2, \\
q_{\widetilde{\mathbb{E}}_8}(x) &= \sum_{i=1}^9 x_i^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_4 - x_3x_5 - x_5x_6 - x_6x_7 - x_7x_8 - x_8x_9 = \\
&= (x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{3}{4}(x_2 - \frac{2}{3}x_3)^2 + \frac{2}{3}(x_3 - \frac{3}{4}x_4 - \frac{3}{4}x_5)^2 + \frac{5}{8}(x_4 - \frac{3}{5}x_5)^2 + \\
&\quad + \frac{2}{5}(x_5 - \frac{5}{4}x_6)^2 + \frac{3}{8}(x_6 - \frac{4}{3}x_7)^2 + \frac{1}{3}(x_7 - \frac{3}{2}x_8)^2 + \frac{1}{4}(x_8 - 2x_9)^2.
\end{aligned}$$

Stąd łatwo wynika teza twierdzenia. \square

2.5. Pierwiastki funkcjonałów całkowitych

Druga część rozprawy (rozdziały 4 oraz 5) poświęcona będzie klasyfikacji szerokiej klasy grafów oznakowanych w sensie Zaslavskiego [48], a w szczególności opisowi struktury oraz spektralnej klasyfikacji Coxetera głównych grafów krawędziowo-dwudzielnych w sensie [41]. W badaniu tej klasy grafów ważnymi narzędziami są całkowite funkcjonały kwadratowe $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ oraz ich pierwiastki w sensie następującej definicji podanej przez Ovsienkę w pracy [26].

Definicja 2.21. (a) Wektor $v \in \mathbb{Z}^n$ nazywamy **pierwiastkiem** (z jedyńki) funkcjonału całkowitego $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, jeśli $q(v) = 1$. Pierwiastek $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^n$ nazywamy **dodatnim**, jeśli $v \neq 0$ oraz każda z jego współrzędnych v_1, \dots, v_n jest nieujemna.

(b) Symbolami $\mathcal{R}_q = \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 1\} \supset \mathcal{R}_q^+ = \{v \in \mathbb{N}^n; q(v) = 1\}$ oznaczamy odpowiednio zbiór wszystkich pierwiastków oraz zbiór wszystkich pierwiastków dodatnich funkcjonału q , zobacz [1, Section VII.3].

(c) Wektor $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^n$ nazywamy **wiernym**, jeśli $v_1 \neq 0, \dots, v_n \neq 0$. Mówimy, że v jest **dodatni**, gdy $v \neq 0$ oraz $v_1 \geq 0, \dots, v_n \geq 0$.

2.5.1. Skończoność zbioru pierwiastków

W artykułach [39] oraz [41] dotyczących zastosowań funkcjonałów kwadratowych w teorii reprezentacji algebr sformułowano następujący problem.

PROBLEM. *Dla danego dodatnio określonego funkcjonału całkowitego $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, zbudować algorytmy numeryczne i symboliczne opisujące wszystkie wektory zbioru \mathcal{R}_q jego pierwiastków.*

Następujące twierdzenie (zwane w pracy [38] twierdzeniem ograniczonego zliczania) zawiera w miarę satysfakcjonujące rozwiązanie tego problemu. Stwierdza ono, że zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_q = \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 1\}$ jest skończony, gdy $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest dodatni. Ponadto, w dowodzie podaje się algorytmiczną metodę opisu zbioru \mathcal{R}_q dla dodatnich funkcjonałów $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$.

Twierdzenie 2.22. *Niech $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ będzie funkcjonałem kwadratowym jednorodnym określonym wzorem (2.2). Jeśli q jest dodatni, to*

(a) *zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_q = \{v \in \mathbb{Z}^n; q(x) = 1\}$ jest skończony,*

(b) *jeśli $v \in \mathcal{R}_q(d)$, to bezwzględna wartość $|v_j|$ każdej współrzędnej v_j wektora v jest ograniczona przez część całkowitą liczby rzeczywistej $\widehat{M}_q = \frac{\sqrt{d}}{M_q}$, gdzie $M_q = \sqrt{\inf q(\mathcal{S}^{n-1})} > 0$ oraz $\mathcal{S}^{n-1} = \{w \in \mathbb{R}^n; \|w\| = 1\}$ jest sferą jednostkową w przestrzeni Euklidesa \mathbb{R}^n .*

Dowód. Szkic dowodu można znaleźć w [33, str. 3]. Pełny dowód podany jest na stronie 19 artykułu [38]. W dowodach tych stosuje się metodę Drozda [8] zmodyfikowaną w dowodzie twierdzenia 11.94 książki [34]. \square

W następnym podrozdziale zamieszczamy implementację algorytmu ograniczonego zliczania podanego w [38, Algorithm 4.2] i obliczającego wszystkie wektory zbioru \mathcal{R}_q pierwiastków dowolnego dodatniego funkcjonału $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$.

Wykorzystując ten algorytm oraz kanoniczne postaci form kwadratowych opisujących funkcjonały diagramów Dynkina otrzymuje się następujący ważny wniosek.

Wniosek 2.23. *Niech D będzie jednym z diagramów Dynkina przedstawionych w Tabeli 1.1 oraz niech $q_D : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ będzie jego funkcjonałem kwadratowym jednorodnym określonym wzorem (1.3).*

(a) *Zbiór pierwiastków \mathcal{R}_{q_D} jest skończony.*

(b) Liczby pierwiastków funkcjonału $q_D : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, dla poszczególnych diagramów D , zamieszczone są w następującej tabeli:

D	A_n	$D_n, n \geq 4$	E_6	E_7	E_8
$ \mathcal{R}_{q_D} $	$n(n+1)$	$2n(n-1)$	72	126	240
$ \mathcal{R}_{q_D}^+ $	$\frac{1}{2}n(n+1)$	$n(n-1)$	36	63	120

Dowód. (a) Na podstawie twierdzenia 2.19, funkcjonał $q_D : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest dodatnio określony. Zatem (a) jest konsekwencją twierdzenia 2.22.

(b) Dla grafów E_6, E_7 oraz E_8 , liczby pierwiastków wskazane w tabeli otrzymuje się przez zastosowanie algorytmu ograniczonego zliczania. Dla grafów A_n oraz D_n , liczby te oblicza się standardowym rachunkiem wykorzystując postaci kanoniczne form kwadratowych podane w dowodzie twierdzenia 2.19. Szczegóły dowodu można znaleźć w rozdziale 2 skryptu [35]. \square

2.5.2. Algorytm ograniczonego zliczania

W tym podrozdziale zamieszczamy pseudokod algorytmu ograniczonego zliczania podanego w [38, Algorithm 4.2] i obliczającego wszystkie wektory zbioru \mathcal{R}_q pierwiastków dowolnego dodatniego funkcjonału $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$. W algorytmie wykorzystano algorytm Lagrange'a do wyznaczania ograniczeń poszczególnych współrzędnych pierwiastków z d . Pełna implementacja tego algorytmu w programie Maple znajduje się na dołączonej do pracy płycie oraz w Dodatku 7.4.

Wejście: (a) Macierz Grama m dodatnio określonego funkcjonału $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$.

(b) Liczba naturalna $d \geq 0$, z której będą liczone pierwiastki.

Wyjście: Lista wszystkich pierwiastków z d .

```

1.   ograniczoneZliczanie := proc (m, d)
2.       n := liczba kolumn macierzy m
3.       q := x*m*transpose(x)
4.       dziedzina := []
5.       wynik := []
6.       for i to n do
7.           max := 0
8.           postac_kanoniczna := postać kanoniczna q z zamienionymi x[i] i x[n]
9.           lista := rozwiązania całkowite równania postać_kanoniczna(x) <= d
10.          max := największa wartość z listy
11.          dziedzina[i] := [-max,..,max]
12.       end do
13.       T := produkt kartezjański elementów dziedziny
14.       for (każdy wektor z T) do
15.           if (wektor jest rozwiązaniem q(wektor)=d) then
16.               wynik := [wynik, wektor]
17.           end if
18.       end do
19.       return wynik
20.   end proc

```


dla dowolnego wektora $w \in \mathbb{Z}^n$, gdzie e_1, \dots, e_n jest standardową \mathbb{Z} -bazą grupy wolnej \mathbb{Z}^n . Stąd łatwo wynikają równości

$$\text{Ker } \frac{\partial}{\partial x_j} q = \text{Ker } 2b_q(e_j, -) = \text{Ker } b_q(e_j, -),$$

dla $j = 1, \dots, n$. Dla ustalonego wektora $w \in \mathbb{Z}^n$, równości $b_q(e_1, w) = 0, \dots, b_q(e_n, w) = 0$ implikują równość $b_q(u, w) = 0$, dla dowolnego wektora $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{Z}^n$, gdyż $b_q(u, w) = b_q(u_1 e_1 + \dots + u_n e_n, w) = u_1 b_q(e_1, w) + \dots + u_n b_q(e_n, w) = 0$. Stąd wynikają równości

$$\text{rad } q = \bigcap_{u \in \mathbb{R}^n} \text{Ker } b_q(u, -) = \bigcap_{j=1}^n \text{Ker } b_q(e_j, -),$$

które implikują lewą równość żadaną w stwierdzeniu (a). Ponieważ równość $\text{Ker } Dq = \bigcap_{j=1}^n \text{Ker } (\frac{\partial}{\partial x_j} q)$ wynika wprost z definicji homomorfizmu $Dq : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$, więc dowód stwierdzenia (a) został zakończony.

(b) Ponieważ funkcjonal $b_q : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \mathbb{Z}$ jest \mathbb{Z} -dwuliniowy, więc $b_q(e_j, -) : \mathbb{Z}^n \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \mathbb{Z}$ jest homomorfizmem grup oraz zachodzi równość $(**_q)$. Zatem $\text{Ker } \frac{\partial}{\partial x_j} q = \text{Ker } b_q(e_j, -)$ jest podgrupą grupy \mathbb{Z}^n i na podstawie części (a) naszego twierdzenia, $\text{rad } q = \bigcap_{j=1}^n \text{Ker } b_q(e_j, -)$ jest również podgrupą grupy \mathbb{Z}^n .

Aby uzasadnić inkluzję $\text{rad } q \subseteq \text{Ker } q$, weźmy dowolny wektor $w = (w_1, \dots, w_n) \in \text{rad}(q)$. Zatem równość $(**_q)$ implikuje ciąg równości $b_q(e_1, w) = 0, \dots, b_q(e_n, w) = 0$. Stąd otrzymujemy równość

$$q(w) = b_q(w, w) = b_q(w_1 e_1 + \dots + w_n e_n, w) = w_1 b_q(e_1, w) + \dots + w_n b_q(e_n, w) = 0,$$

tzn. $w \in \text{Ker } q$, co kończy dowód pierwszej części stwierdzenia (b).

Aby udowodnić drugą część (b) wystarczy udowodnić inkluzję $\text{rad } q \supseteq \text{Ker } q$. Załóżmy, że całkowity funkcjonal kwadratowy $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest nieujemny. Na podstawie Wniosku 2.16 (b), funkcjonal kwadratowy rzeczywisty $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest dodatnio półokreślony.

Niech $w \in \text{Ker } q$ będzie dowolnym wektorem, tzn. $w \in \mathbb{Z}^n$ oraz $q(w) = 0$. Ponieważ funkcja rzeczywista $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka oraz $q(v) \geq 0$, dla dowolnego wektora $v \in \mathbb{R}^n$, więc punkt $w \in \mathbb{R}^n$ jest minimum lokalnym funkcji $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Na podstawie znanej z wykładu analizy matematycznej własności funkcji gładkich gradient (traktowany jako endomorfizm przestrzeni \mathbb{R} -liniowej \mathbb{R}^n)

$$\text{Grad}(q) = \left(\frac{\partial q}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial q}{\partial x_n} \right) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

rzeczywistej funkcji $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ przyjmuje wartość zero w punkcie w . Ponieważ $w \in \mathbb{Z}^n$, więc $0 = \text{Grad}(q)(w) = (Dq)(w)$, tzn. $w \in \text{Ker } Dq = \text{rad } q$ (na podstawie równości (a)), co kończy dowód stwierdzenia (b) (patrz również dowód lematu 3.3 w książce [1] na stronie 261).

(c)-(d) Ponieważ funkcjonal q jest kwadratowy jednorodny, więc $\frac{\partial}{\partial x_j} q(x_1, \dots, x_n)$ jest wielomianem liniowym oraz $\frac{\partial}{\partial x_j} q(x_1, \dots, x_n) = 0$ jest równaniem liniowym zmiennych x_1, \dots, x_n o współczynnikach całkowitych, dla $j = 1, 2, \dots, n$. Zatem $(*_q)$ jest układem równań liniowych o współczynnikach w $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ identycznym z układem $2G_q \cdot x^{tr} = 0$, gdyż zachodzi równość $(\frac{\partial}{\partial x_j} q)(y) = e_j \cdot (2G_q) \cdot y^{tr}$, dla $j = 1, \dots, n$, na podstawie $(**_q)$. Stąd wynika (d).

Stosując równość (a), otrzymujemy równość $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(*) = \text{rad } q$, co kończy dowód stwierdzeń (c) oraz (d).

(e) Rozważmy zbiór $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(*_q) \subseteq \mathbb{Q}^n$ wszystkich rozwiązań wymiernych $v \in \mathbb{Q}^n$ układu równań liniowych $2G_q \cdot x^{tr} = 0$ o współczynnikach w $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. Oczywiście \mathbb{Q} -podprzestrzeń liniowa

$\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(*_q)$ zawiera grupę $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(*_q)$. Wiadomo, że wymiar przestrzeni $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(*_q) \subseteq \mathbb{Q}^n$ jest równy liczbie $\hat{r} := n - r$, gdzie r jest rzędem macierzy Grama $G_q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$ o współczynnikach w ciele \mathbb{Q} liczb wymiernych.

Założmy, że wektory $w^{(1)}, \dots, w^{(r)} \in \mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(*_q) \subseteq \mathbb{Q}^n$ tworzą \mathbb{Q} -bazę przestrzeni liniowej $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(*_q)$ wymiaru r . Ponieważ współrzędne wektorów $w^{(1)}, \dots, w^{(r)}$ są liczbami wymiernymi, więc istnieje niezerowa liczba całkowita $\lambda \in \mathbb{Z}$ (największy wspólny dzielnik mianowników tych współrzędnych) taka, że współczynniki każdego z wektorów

$$\bar{w}^{(1)} := \lambda \cdot w^{(1)}, \dots, \bar{w}^{(r)} := \lambda \cdot w^{(r)}.$$

są liczbami całkowitymi. Ponieważ $w^{(1)}, \dots, w^{(r)} \in \mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(*_q)$, więc $\bar{w}^{(1)}, \dots, \bar{w}^{(r)} \in \mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(*_q) \subseteq \mathbb{Z}^n$. Łatwo sprawdzić, że wektory $\bar{w}^{(1)}, \dots, \bar{w}^{(r)}$ są \mathbb{Z} -liniowo niezależne, a także \mathbb{Q} -liniowo niezależne. Stąd wynika, że ranga r' grupy $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(*_q)$ nie jest większa od r , tzn. $r' \leq r$. Aby zakończyć dowód stwierdzenia (e) należy udowodnić, że $r' = r$.

Przypuśćmy „przez sprzeczność”, że $r' \leq r - 1$. Założmy, że wektory $u^{(1)}, \dots, u^{(r')} \in \mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(*_q) \subseteq \mathbb{Z}^n$ tworzą \mathbb{Z} -bazę grupy $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(*_q)$ rangi $r' \leq r - 1$. Zatem

$$\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(*_q) = \mathbb{Z} \cdot u^{(1)} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \cdot u^{(r')};$$

w szczególności wektory $u^{(1)}, \dots, u^{(r')} \in \mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(*_q) \subseteq \mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(*_q)$ są \mathbb{Q} -liniowo niezależne.

Rozważmy \mathbb{Q} -podprzestrzeń liniową $U := \mathbb{Q} \cdot u^{(1)} + \dots + \mathbb{Q} \cdot u^{(r')}$ przestrzeni $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(*_q)$ generowaną przez \mathbb{Q} -liniowo niezależne wektory $u^{(1)}, \dots, u^{(r')} \in \mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(*_q)$. Ponieważ wektory $u^{(1)}, \dots, u^{(r')}$ są \mathbb{Q} -liniowo niezależne, więc $\dim_{\mathbb{Q}} U = r'$. Ponadto, ponieważ wektory $\bar{w}^{(1)}, \dots, \bar{w}^{(r)}$ należą do $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(*_q) = \mathbb{Z} \cdot u^{(1)} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \cdot u^{(r')} \subseteq U$, więc $\bar{w}^{(1)}, \dots, \bar{w}^{(r)} \in U$. Z faktu, że wektory $\bar{w}^{(1)}, \dots, \bar{w}^{(r)}$ są \mathbb{Q} -liniowo niezależne wynikają nierówności $r \leq \dim_{\mathbb{Q}} U = r' \leq r - 1$. Otrzymaliśmy więc sprzeczność $r < r - 1$ z założeniem $r' \leq r - 1$. Stąd wynika, że prawdziwa jest równość $r' = r$, co kończy dowód stwierdzenia (e) oraz dowód twierdzenia. \square

2.7. Całkowite funkcjonały nieujemne ustalonej korangi. Funkcjonały główne

Wyniki poprzedniego paragrafu były inspiracją do wprowadzenia w [38, 39] oraz artykułach [14, 15], [28], [47] następujących definicji korangi oraz funkcjonału głównego.

Definicja 2.27. Niech $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ będzie nieujemnym całkowitym funkcjonałem kwadratowym, który jest jednolity oraz jednorodny.

(a) **Korangą** funkcjonału q nazywamy rangę $\hat{r} \leq n$ przemiennej podgrupy wolnej $\text{Ker } q$ grupy \mathbb{Z}^n , tzn. liczbę $\hat{r} \geq 0$ wektorów stanowiących \mathbb{Z} -bazę grupy $\text{Ker } q$. Przyjmujemy $s = 0$, gdy $\text{Ker } q = 0$.

(b) $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ nazywamy **funkcjonałem głównym**, jeśli jest nieujemny korangi 1, lub równoważnie, q jest nieujemny oraz istnieje niezerowy wektor $\mathbf{h} \in \text{Ker } q \subseteq \mathbb{Z}^n$ taki, że $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, tzn. grupa $\text{Ker } q$ jest cykliczna nieskończona.

W drugiej części rozprawy będziemy zajmować się opisem struktury krawędziowo-dwudzielnych grafów głównych (bez pętli) zdefiniowanych w [41]. W opisie ich struktury wykorzystuje się podstawowe własności funkcjonałów głównych, które są jednym z narzędzi kombinatorycznej analizy krawędziowo-dwudzielnych grafów głównych.

Funkcjonały nieujemne $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ skończonej korangi bada się m.in. w artykułach [38, 39], gdzie tworzy się metody algorytmiczno-graficznego opisu zbioru wszystkich rozwiązań całkowitych diofantycznego równania $q(x_1, \dots, x_n) = d$, dla dowolnej liczby całkowitej $d \geq 0$.

Jednym z etapów rozwiązywania tego problemu jest redukcja do algorytmicznej konstrukcji specjalnej \mathbb{Z} -bazy grupy $\text{Ker } q$. Baza ta służy m.in. do stowarzyszenia (w pracy [14]) z dowolnym funkcjonałem nieujemnym $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ skończonej korangi jednego z grafów Dynkina, zwanego typem Dynkina funkcjonału q . Jest on niezmiennikiem \mathbb{Z} -równoważności funkcjonałów kwadratowych.

W budowaniu algorytmów konstruujących specjalne \mathbb{Z} -bazy grupy $\text{Ker } q$ używa się następującego twierdzenia.

Twierdzenie 2.28. *Niech $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ będzie nieujemnym całkowitym funkcjonałem kwadratowym, który jest jednolity oraz jednorodny. Niech \hat{r} będzie korangą funkcjonału q .*

(a) $0 \leq \hat{r} \leq n - 1$.

(b) $\hat{r} = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest dodatni, lub równoważnie, gdy funkcjonał rzeczywisty $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest dodatnio określony.

(c) Załóżmy, że $q(x) = q'_1 z_1^2 + q'_2 z_2^2 + \dots + q'_n z_n^2$ jest postacią kanoniczną formy $q(x)$ oraz $S = [s_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$ jest macierzą nieosobliwą taką jak w twierdzeniu 2.14, tzn. spełnia warunek $[x_1, \dots, x_n] \cdot S^{tr} = [z_1, \dots, z_n]$.

(c1) Koranga $\hat{r} \geq 0$ jest liczbą tych wszystkich współczynników spośród q'_1, q'_2, \dots, q'_n , które są zerami.

(c2) Z dokładnością do permutacji zmiennych x_1, \dots, x_n , istnieje postać kanoniczna $q(x) = q'_1 z_1^2 + q'_2 z_2^2 + \dots + q'_\ell z_\ell^2$ formy $q(x)$, w której $q'_{\ell+1} = \dots = q'_n = 0$, każdy ze współczynników $q'_1, q'_2, \dots, q'_\ell$ jest różny od zera, oraz istnieje górnotrójkątna nieosobliwa macierz $S = [s_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$ o własnościach sformułowanych w twierdzeniu 2.14.

(c3) W wypadku opisanym w (c2), jądro $\text{Ker } q$ jest identyczne ze zbiorem (grupa) $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(*_S)$ wszystkich całkowitych rozwiązań $v \in \mathbb{Z}^n$ górnotrójkątnego układu $\ell \geq 1$ równań liniowych

$$\begin{array}{rcl}
 s_{11}x_1 + & s_{12}x_1 + \dots + & s_{1\ell}x_\ell + \dots + s_{1n}x_n = 0 \\
 & s_{22}x_1 + \dots + & s_{2\ell}x_\ell + \dots + s_{2n}x_n = 0 \\
 (*_S) & \dots & \dots \\
 & & \dots \\
 & & s_{\ell\ell}x_\ell + \dots + s_{\ell n}x_n = 0
 \end{array}$$

o współczynnikach wymiernych, gdzie $s_{11} \neq 0, \dots, s_{\ell\ell} \neq 0$.

(d) Funkcjonał $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest główny wtedy i tylko wtedy, gdy dokładnie jeden współczynnik spośród q'_1, q'_2, \dots, q'_n jest zerowy. Ponadto, w wypadku opisanym w (c2) dla funkcjonału głównego q mamy: $\ell = 1$, układ $(*_S)$ zawiera $n - 1$ równań oraz $\text{Ker } q = \mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(*_S)$ jest grupą cykliczną nieskończoną generowaną przez wektor $\mathbf{h} \in \mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(*_S)$. W szczególności \mathbf{h} jest niezerowym całkowitym rozwiązaniem układu $(*_S)$, którego norma $\|\mathbf{h}\|$ jest minimalna.

Dowód. (a) Ponieważ funkcjonał q jest jednolity, więc $q(e_1) = \dots = q(e_n) = 1$, z czego wynika nierówność $\text{Ker } q \neq \mathbb{Z}^n$. Zatem $\ell < n$, gdyż w przeciwnym wypadku $\text{Ker } q = \mathbb{Z}^n$, ponieważ $\text{Ker } q = \text{Ker } (Dq : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n)$ (na podstawie twierdzenia 2.26 (a)-(b)), a stąd wynika, że $\text{Ker } q$ jest składnikiem prostym grupy \mathbb{Z}^n .

(b) Ponieważ q jest nieujemny, więc jest dodatnio półokreślony, na podstawie wniosku 2.16 (b). Zatem $\hat{r} = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{Ker } q = 0$, co implikuje dodatnią określoność funkcjonału q i kończy dowód (b).

(c) Ponieważ q jest nieujemny, więc $q'_1 \geq 0, \dots, q'_n \geq 0$, na podstawie wniosku 2.16(a).

Udowodnimy najpierw (c2). W tym celu zauważmy, że jeśli $q' : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest dowolnym niezerowym jednorodnym funkcjonałem nieujemnym zadany wzorem (2.2), to jeden z jego współczynników q'_{jj} jest dodatni. Istotnie; gdyby $q'_{jj} < 0$, to $q(e_j) = q'_{jj} < 0$ i otrzymujemy

sprzeczność. Zatem $q'_{11} \geq 0, \dots, q'_{nn} \geq 0$. Gdyby $q_{11} = 0, \dots, q'_{nn} = 0$, to $q(e_i \pm e_j) = \pm q_{ij}$, dla dowolnych $i < j$. Stąd otrzymujemy sprzeczność z nieujemnością funkcjonału q .

Stosując tę uwagę otrzymamy tezę (c2) przez prostą modyfikację dowodu twierdzenia Lagrange'a w wersji podanej w artykule [13, Theorem 5.3].

(c3) Niech $\ell \geq 1$ oraz S będą takie jak w (c2). Jeśli $v \in \mathbb{Z}^n$, to z równości $q(x) = q'_1 z_1^2 + q'_2 z_2^2 + \dots + q'_\ell z_\ell^2$ wynika, że $v \in \text{Ker } q$ wtedy i tylko wtedy, gdy v jest rozwiązaniem układu $(*_S)$, gdyż $q'_1 > 0, q'_2 > 0, \dots, q'_\ell > 0$. Innymi słowy, zachodzi równość $\text{Ker } q = \mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(*_S)$. Oczywiście grupa $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(*_S)$ jest podgrupą \mathbb{Q} -przestrzeni liniowej $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(*_S) \subseteq \mathbb{Q}^n$ wszystkich wymiernych rozwiązań $w \in \mathbb{Z}^n$ górnotrójkątnego układu równań liniowych $(*_S)$. Ponieważ rząd macierzy układu $(*_S)$ jest równy $n - \ell$, więc $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(*_S) = n - \ell$ i stosując argumenty używane w dowodzie części (e) twierdzenia 2.26 udowodnimy, że ranga grupy $\text{Ker } q = \mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(*_S)$ jest równa $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(*_S) = n - \ell$. Z drugiej strony, koranga \hat{r} funkcjonału q jest równa randze grupy $\text{Ker } q$. Zatem $\hat{r} = n - \ell$, co kończy dowód stwierdzeń (c3) oraz (c1), gdyż (c1) wynika z (c2) oraz (c3). \square

Wniosek 2.29. *Niech $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ będzie nieujemnym całkowitym funkcjonałem kwadratowym, który jest jednolity oraz jednorodny. Niech \hat{r} będzie korangą funkcjonału q oraz niech $\ell \geq 1$ i $S \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$ będą takie jak w twierdzeniu 2.28 (c2).*

(a) $\hat{r} = n - \ell$ oraz wektory $\hat{e}_{\ell+1} = e_{\ell+1} \cdot S^{-tr}, \dots, \hat{e}_n = e_n \cdot S^{-tr}$ przestrzeni liniowej \mathbb{Q}^n są \mathbb{Q} -liniowo niezależne oraz spełniają równości

$$q(\hat{e}_{\ell+1}) = 0, \dots, q(\hat{e}_n) = 0.$$

(b) *Istnieją liczby $\lambda_{\ell+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Z}$ takie, że wektory $e'_{\ell+1} := \lambda_{\ell+1} \hat{e}_{\ell+1}, \dots, e'_n := \lambda_n \hat{e}_n$ tworzą \mathbb{Z} -bazę grupy $\text{Ker } q$.*

Dowód. Ponieważ $q(x) = q'_1 z_1^2 + q'_2 z_2^2 + \dots + q'_n z_n^2$ jest postacią kanoniczną formy $q(x)$ oraz $S = [s_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$ jest macierzą nieosobliwą taką jak w twierdzeniu 2.14, tzn. spełniającą warunek $[x_1, \dots, x_n] \cdot S^{tr} = [z_1, \dots, z_n]$, to $[x_1, \dots, x_n] = [z_1, \dots, z_n] \cdot S^{-tr}$. Stąd łatwo wynika, że wektory $\hat{e}_{\ell+1}, \dots, \hat{e}_n$ tworzą \mathbb{Q} -bazę przestrzeni liniowej $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(*_S) \subseteq \mathbb{Q}^n$ nad ciałem \mathbb{Q} . Ponieważ $q(x) = q'_1 z_1^2 + q'_2 z_2^2 + \dots + q'_\ell z_\ell^2$, więc $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(*_S) = \{w \in \mathbb{Q}^n; q(w) = 0\}$. Zatem grupa $\text{Ker } q$ rangi $\hat{r} = n - \ell$ jest podgrupą \mathbb{Q} -przestrzeni liniowej $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(*_S) \subseteq \mathbb{Q}^n$ wymiaru $\hat{r} = n - \ell$ o \mathbb{Q} -bazie $\hat{e}_{\ell+1}, \dots, \hat{e}_n$ (na podstawie twierdzenia 2.28), co kończy dowód stwierdzenia (a).

Stwierdzenie (b) udowodnimy stosując argumenty używane w dowodzie części (e) twierdzenia 2.26. \square

Uwaga 2.30. Wykorzystując algorytm Lagrange'a, wniosek 2.16, twierdzenie 2.28, wniosek 2.29 oraz ich dowody łatwo zbudować algorytm symboliczny stwierdzający, czy dany jednolity funkcjonal kwadratowy $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest nieujemny (lub dodatni) oraz obliczający jego korangę oraz pewną \mathbb{Z} -bazę grupy $\text{Ker } q$ w wypadku, gdy $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest nieujemny.

Jego prostota wynika z faktu, że wektory $\hat{e}_{\ell+1}^{tr}, \dots, \hat{e}_n^{tr}$ są kolumnami macierzy S^{-1} o numerach $\ell + 1, \dots, n$. W wypadku, gdy $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest główny, mamy $\ell = n - 1$ i generator grupy cyklicznej $\text{Ker } q$ „otrzymuje się” z ostatniej kolumny $w^{(n)} := S^{-1} \cdot e_n^{tr} \in \mathbb{Q}^n$ macierzy S^{-1} mnożąc wektor $w^{(n)}$ przez najmniejszy wspólny mianownik jego współrzędnych (które są liczbami wymiernymi).

Kod źródłowy takiego algorytmu podany jest w załączonej płycie.

Uwaga 2.31. Można zmodyfikować macierz S w algorytmie Lagrange'a dla nieujemnych funkcjonałów $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ tak, by wektory $\hat{e}_{\ell+1} = e_{\ell+1} \cdot S^{-tr}, \dots, \hat{e}_n = e_n \cdot S^{-tr}$ należały do jądra $\text{Ker } q$ i tworzyły jego \mathbb{Z} -bazę. Wtedy wektory tej bazy uzyska się jako kolumny macierzy

Wektory $\mathbf{h} = (0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0)$, $\mathbf{h}' = (0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1) \in \mathbb{Z}^{10}$ są wektorami $\widehat{e}_{\ell+1} = e_{\ell+1} \cdot S^{-tr}$, $\widehat{e}_{10} = e_{10} \cdot S^{-tr}$ zdefiniowanymi we wniosku 2.29 (dla $n = 10$) i są dwiema ostatnimi kolumnami macierzy S^{-1} , zobacz uwaga 2.31. Ponadto wektory \mathbf{h} , \mathbf{h}' należą do grupy $\text{Ker } q$ oraz tworzą jej \mathbb{Z} -bazę, zgodnie z uwagą 2.31.

3. Całkowite funkcjonały P -krytyczne

Załóżmy, że $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, jest jednolitym jednorodnym funkcjonałem kwadratowym całkowitym (2.2) zdefiniowanym wzorem

$$q(x) = q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2 + \sum_{i < j} q_{ij} x_i x_j, \text{ gdzie } q_{ij} \in \mathbb{Z}, \text{ dla } i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Dla ustalonej liczby $j \in \{1, \dots, n\}$, rozważamy funkcjonał $q^{(j)} : \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$, zwany j -tym ograniczeniem q , zdefiniowanym wzorem

$$(3.1) \quad q^{(j)}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) = q(x)|_{x_j=0} = q(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_n).$$

Przypomnijmy z artykułu Ovsienki [26], że całkowity funkcjonał kwadratowy $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ nazywa się **krytycznym**, jeśli q nie jest słabo dodatni, natomiast każde z jego ograniczeń $q^{(1)}, \dots, q^{(n)} : \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$ jest funkcjonałem słabo dodatnim. Funkcjonały takie bada się szczególnie i stosuje w teorii reprezentacji algebr, zobacz [45, Section XIV.1].

Wykorzystując pewne idee Bondarenki oraz Polishchuka z artykułu [3], w artykułach [39, Definition 2.2] oraz [27] wprowadza się następującą definicję funkcjonału P -krytycznego (ang. P -critical unit form).

Definicja 3.2. Całkowity funkcjonał kwadratowy $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, (2.2) nazywamy **funkcjonałem P -krytycznym**, jeśli spełnia następujące dwa warunki:

- q nie jest dodatni,
- każde z jego ograniczeń $q^{(1)}, \dots, q^{(n)} : \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$ do \mathbb{Z}^{n-1} jest funkcjonałem dodatnim.

Z twierdzenia 3.5 oraz wniosku 3.10 udowodnionych w paragrafie 3.3 wynika, że każdy funkcjonał krytyczny $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest P -krytyczny. Punkt (b) przykładu 3.3 pokazuje, że dla $n = 2$ implikacja przeciwna nie jest prawdziwa.

Przykład 3.3. (a) Jednorodny funkcjonał kwadratowy $q_{\tilde{\mathbb{A}}_1} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ (1.3) grafu Kroneckera $a_1 \equiv a_2$ jest P -krytyczny, gdyż $q_{\tilde{\mathbb{A}}_1}(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 - x_2)^2$, $\text{Ker } q_{\tilde{\mathbb{A}}_1} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie $\mathbf{h} = (1, 1) \in \mathbb{Z}^2$, oraz $q_{\tilde{\mathbb{A}}_1}^{(1)}(x_1) = x_1^2$, $q_{\tilde{\mathbb{A}}_1}^{(2)}(x_2) = x_2^2$.

(b) Funkcjonał kwadratowy $q : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ zdefiniowany wzorem $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$ nie jest krytyczny, gdyż $q^{(1)}(x_1) = x_1^2$, $q^{(2)}(x_2) = x_2^2$ oraz w sposób oczywisty q jest słabo dodatni. Funkcjonał q jest P -krytyczny, gdyż $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2$. Zatem q jest nieujemny i nie jest dodatni, gdyż $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}'$, gdzie $\mathbf{h}' = (1, -1) \in \mathbb{Z}^2$.

(c) Jednorodny funkcjonał kwadratowy $q_{\tilde{\mathbb{A}}_2} : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}$ (1.3) grafu Euklidesa $\tilde{\mathbb{A}}_2$ jest P -krytyczny, gdyż

- $q_{\tilde{\mathbb{A}}_2}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 = \frac{1}{2}[(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2]$,
- $\text{Ker } q_{\tilde{\mathbb{A}}_2} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie $\mathbf{h} = (1, 1, 1)$,
- ograniczenia $q_{\tilde{\mathbb{A}}_2}^{(1)}, q_{\tilde{\mathbb{A}}_2}^{(2)}, q_{\tilde{\mathbb{A}}_2}^{(3)} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ (3.1) są funkcjonałami dodatnimi, zobacz przykład 2.7 (a).

Głównym celem tego rozdziału jest przedstawienie (wraz z dowodem) podanej w naszym artykule [27] pełnej charakteryzacji funkcjonałów P -krytycznych $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$.

Dla $n = 2$, funkcjonały P -krytyczne $q : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ opisane są w następującym lemacie.

Lemat 3.4. Niech $q : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ będzie jednorodnym funkcjonałem kwadratowym zdefinio-

wanym wzorem $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + q_{12}x_1x_2$, gdzie $q_{12} \in \mathbb{Z}$. Funkcjonał $q : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ jest P -krytyczny wtedy i tylko wtedy, gdy $|q_{12}| \geq 2$.

Dowód. „ \Leftarrow ” Załóżmy, że $q : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ jest P -krytyczny. Oczywiście $q_{12} \neq 0$, gdyż w przeciwnym wypadku $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ i q byłby dodatnio określony. Zauważmy również, że $q_{12} \neq \pm 1$. Istotnie; gdyby $q_{12} = \pm 1$, to funkcyjonał q byłby również dodatnio określony, gdyż $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \pm x_1x_2 = \frac{1}{2}[x_1^2 + (x_1 \pm x_2)^2 + x_2^2]$. Stąd wynika, że $|q_{12}| \geq 2$.

„ \Rightarrow ” Załóżmy, że $|q_{12}| \geq 2$. Ponieważ $q^{(1)}(x_1) = x_1^2$ oraz $q^{(2)}(x_2) = x_2^2$, więc wystarczy udowodnić, że q nie jest dodatni. W tym celu zauważmy, że $q(1, 1) = 2 + q_{12} \leq -2$, gdy $q_{12} < 0$, oraz $q(1, -1) = 2 - q_{12} \leq 0$, gdy $q_{12} > 2$. \square

Dla $n \geq 3$, charakteryzacja funkcyjonałów P -krytycznych $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ przedstawiona jest w następującym twierdzeniu udowodnionym w pracy współautorskiej [27]. Jest ono jednym z głównych osiągnięć tej rozprawy.

Twierdzenie 3.5. Niech $n \geq 3$ oraz niech $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ będzie jednorodnym funkcyjonałem kwadratowym zdefiniowanym wzorem $q(x) = q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2 + \sum_{i < j} q_{ij}x_ix_j$, gdzie $q_{ij} \in \mathbb{Z}$, dla $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Następujące warunki są równoważne

- (a) q jest P -krytyczny.
- (b) q jest dodatnio półokreślony główny oraz podgrupa $\text{Ker } q = \{v \in \mathbb{Z}^n, q(v) = 0\}$ grupy \mathbb{Z}^n jest cykliczna nieskończona generowana przez wektor wierny.
- (c) q jest nieujemny oraz istnieje wektor wierny $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{Z}^n$ taki, że
 - (c1) $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$
 - (c2) $1 \leq |h_j| \leq 6$, dla dowolnego $j \in \{1, \dots, n\}$,
 - (c3) $|h_s| = 1$, dla pewnego $s \in \{1, \dots, n\}$.
- (d) Zbiór $\mathcal{R}_q = \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ pierwiastków funkcyjonału q jest nieskończony, natomiast każdy z funkcyjonałów ograniczonych $q^{(1)}, \dots, q^{(n)} : \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$ ma tylko skończenie wiele pierwiastków.

Twierdzenie 3.5 zostało w sposób istotny wykorzystane w pracy [32], gdzie podano pełną klasyfikację jednopikowych posetów TP -krytycznych, a także prawie TP -krytycznych.

W dowodzie tego twierdzenia przedstawionego w paragrafie 3.3 wykorzystujemy idee Ovsienko z pracy [26] oraz idee von Höhne z pracy [16] stosowane w badaniu funkcyjonałów krytycznych i ich zastosowań w teorii reprezentacji algebr, zobacz również monografia [45, Section XIV.1]. Dowód twierdzenia poprzedzimy dowodami pewnych faktów pomocniczych.

3.1. Podstawowe twierdzenie redukcyjne

Głównym etapem dowodu twierdzenia 3.5 będzie udowodnienie następującego twierdzenia redukcyjnego, które jest przeredagowaniem lematu 2.2 z naszej pracy [27] zawierającej dowód pewnej wersji twierdzenia 3.5.

Twierdzenie 3.6. Niech $n \geq 3$ będzie liczbą naturalną. Załóżmy, że $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest jednorodnym jednolitym funkcyjonałem kwadratowym. Ponadto niech $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{Z}^n$ będzie niezerowym wektorem spełniającym następujące dwa warunki:

- (i) $q(\mathbf{h}) \leq 0$,
 - (ii) norma $\|\mathbf{h}\| := |h_1| + \dots + |h_n|$ jest minimalna.
- (a) Jeśli q jest P -krytyczny lub q jest krytyczny i wektor \mathbf{h} jest dodatni, to q jest nieujemny, $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ oraz wektor \mathbf{h} jest wierny.

(b) Jeśli q jest P -krytyczny, to q jest nieujemny oraz istnieje wierny wektor $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^n$ taki, że $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$.

(c) Jeśli q jest krytyczny, to q jest nieujemny oraz istnieje dodatni wierny wektor $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^n$ taki, że $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$.

(d) Jeśli q jest P -krytyczny, to następujące trzy warunki są równoważne:

(d1) funkcjonał q jest słabo dodatni;

(d2) żaden z wiernych wektorów \mathbf{h} oraz $-\mathbf{h}$ nie jest dodatni;

(d3) funkcjonał q nie jest krytyczny.

Dowód. W dowodzie wykorzystamy pewne idee Ovsienki [26] (zobacz także [33, str. 30] oraz [45, Theorem 1.3]) stosowane w dowodzie analogicznego twierdzenia charakteryzującego funkcjonały krytyczne.

Założmy, że $n \geq 3$ oraz $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest jednorodnym jednolitym funkcjonałem kwadratowym oraz niech $b_q : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \mathbb{Z}$ będzie \mathbb{Z} -dwuliniową polaryzacją funkcjonału q zdefiniowaną wzorem (2.3).

Jeśli $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^n$ jest dowolnym wektorem, to dla dowolnej liczby $j \in \{1, \dots, n\}$, oznaczamy symbolem $v^{(j)}$ wektor

$$v^{(j)} := (v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^{n-1}.$$

(a) Niech $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{Z}^n$ będzie niezerowym wektorem takim, że $q(\mathbf{h}) \leq 0$ oraz norma $\|\mathbf{h}\|$ jest minimalna. Ponieważ q jest funkcjonałem kwadratowym, więc $q(\mathbf{h}) = q(-\mathbf{h})$. Dla uproszczenia zapisu założmy, że istnieje $s \in \{1, \dots, n\}$ takie, że $h_1 \geq 0, \dots, h_s \geq 0, h_{s+1} \leq 0, \dots, h_n \leq 0$. Ustalmy taką liczbę $s \geq 1$.

1° Pokażemy najpierw, że wektor \mathbf{h} jest wierny, tzn. $h_1 \neq 0, \dots, h_n \neq 0$. Założmy przez sprzeczność, że $h_j = 0$ dla pewnego $j \leq n$.

Jeśli q jest P -krytyczny, to jego ograniczenia $q^{(1)}, \dots, q^{(n)} : \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$, $n-1 \geq 2$, są funkcjonałami dodatnimi oraz $0 < q^{(j)}(\mathbf{h}^{(j)}) = q(\mathbf{h}) \leq 0$, dla dowolnego $j \geq 1$. Otrzymujemy więc sprzeczność.

W wypadku, gdy q jest krytyczny i wektor \mathbf{h} jest dodatni, ograniczenia $q^{(1)}, \dots, q^{(n)}$ są funkcjonałami słabo dodatnimi, $s = n$ oraz $0 < q^{(j)}(\mathbf{h}^{(j)}) = q(\mathbf{h}) \leq 0$, dla dowolnego $j \geq 1$, i otrzymujemy również sprzeczność.

Udowodniliśmy więc, że wektor \mathbf{h} jest wierny oraz

$$h_1 \geq 1, \dots, h_s \geq 1, h_{s+1} \leq -1, \dots, h_n \leq -1, \|\mathbf{h}\| = h_1 + \dots + h_s - (h_{s+1} + \dots + h_n).$$

Ponadto, jeśli wektor \mathbf{h} jest dodatni, to $s = n$.

2° Udowodnimy teraz, że $q(\mathbf{h} - e_i) \geq 1$ i $q(\mathbf{h} + e_j) \geq 1$ dla dowolnego $i \in \{1, \dots, s\}$, $j \in \{s+1, \dots, n\}$.

Założmy, że q jest P -krytyczny. Jeśli $h_i = 1$ lub $h_j = -1$, to $\mathbf{h} - e_i \neq 0, \mathbf{h} + e_j \neq 0$, $q(\mathbf{h} - e_i) = q^{(i)}(\mathbf{h}^{(i)}) > 0$ oraz $q(\mathbf{h} + e_j) = q^{(j)}(\mathbf{h}^{(j)}) > 0$, gdyż $q^{(1)}, \dots, q^{(n)}$ są dodatnie.

Jeśli $h_i > 1$ lub $h_j < -1$, to $\|\mathbf{h} - e_i\| < \|\mathbf{h}\|, \|\mathbf{h} + e_j\| < \|\mathbf{h}\|$ i $q(\mathbf{h} - e_i) > 0, q(\mathbf{h} + e_j) > 0$, gdyż w przeciwnym wypadku otrzymalibyśmy sprzeczność z założeniem o minimalności normy $\|\mathbf{h}\|$.

Założmy teraz, że q jest krytyczny oraz wektor \mathbf{h} jest dodatni. Wtedy $s = n$ i jeśli $h_i = 1$, to $q(\mathbf{h} - e_i) = q^{(i)}(\mathbf{h}^{(i)}) > 0$, gdyż wektor $\mathbf{h}^{(i)}$ jest dodatni. Ponadto $q^{(i)}$ jest słabo dodatni. Jeśli $h_i > 1$, to $\|\mathbf{h} - e_i\| < \|\mathbf{h}\|$ i $q(\mathbf{h} - e_i) > 0$, gdyż w przeciwnym wypadku otrzymalibyśmy sprzeczność z założeniem o minimalności normy $\|\mathbf{h}\|$.

3° Korzystając z części 2° dowodu pokażemy, że $\mathbf{h} \in \text{Ker } q$. Na podstawie 2° prawdziwe są następujące nierówności:

$$1 \leq q(\mathbf{h} - e_j) = q(\mathbf{h}) + q(e_j) - 2b_q(\mathbf{h}, e_j) \text{ dla dowolnego } j \in \{1, \dots, s\},$$

$$1 \leq q(\mathbf{h} + e_j) = q(\mathbf{h}) + q(e_j) + 2b_q(\mathbf{h}, e_j) \text{ dla dowolnego } j \in \{s+1, \dots, n\}.$$

Ponieważ funkcjonał kwadratowy $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest jednolity, więc wektory e_1, \dots, e_n standardowej \mathbb{Z} -bazy grupy \mathbb{Z}^n są pierwiastkami funkcjonału q (tzn. $q(e_1) = 1, \dots, q(e_n) = 1$) oraz liczby $2b_q(\mathbf{h}, e_1), \dots, 2b_q(\mathbf{h}, e_n), q(\mathbf{h})$ są całkowite. Otrzymujemy więc następujące nierówności:

$2b_q(\mathbf{h}, e_i) < q(\mathbf{h}) + 1$, dla $i \leq s$, oraz $-2b_q(\mathbf{h}, e_j) < q(\mathbf{h}) + 1$, dla $j \geq s+1$,
które implikują nierówności:

$$(*) \quad 2b_q(\mathbf{h}, e_i) \leq q(\mathbf{h}) \leq 0, \text{ jeśli } h_i \geq 1 \text{ oraz } -2b_q(\mathbf{h}, e_j) \leq q(\mathbf{h}) \leq 0, \text{ jeśli } h_j \leq -1.$$

Nierówności $h_1 \geq 1, \dots, h_s \geq 1, h_{s+1} \leq -1, \dots, h_n \leq -1$ oraz nierówności: (*) implikują

$$(**) \quad 2h_j \cdot b_q(\mathbf{h}, e_j) \leq h_j \cdot q(\mathbf{h}), \text{ jeśli } h_j > 0, \text{ oraz } 2h_j \cdot b_q(\mathbf{h}, e_j) \leq -h_j \cdot q(\mathbf{h}), \text{ jeśli } h_j < 0.$$

Uwzględniając (**) otrzymujemy następujące nierówności:

$$\begin{aligned} 2q(\mathbf{h}) &= 2b_q(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = 2b_q(\mathbf{h}, \sum_{j=1}^n h_j \cdot e_j) = \sum_{j=1}^n 2h_j \cdot b_q(\mathbf{h}, e_j) \leq \\ &\leq h_1 \cdot q(\mathbf{h}) + \dots + h_s \cdot q(\mathbf{h}) - h_{s+1} \cdot q(\mathbf{h}) - \dots - h_n \cdot q(\mathbf{h}) = \\ &= (h_1 + \dots + h_s - h_{s+1} - \dots - h_n) \cdot q(\mathbf{h}) = \|\mathbf{h}\| \cdot q(\mathbf{h}), \end{aligned}$$

tzn. otrzymujemy nierówność $2q(\mathbf{h}) \leq \|\mathbf{h}\| \cdot q(\mathbf{h})$. Ponadto, na podstawie założenia, zachodzi nierówność $q(\mathbf{h}) \leq 0$.

Pokażemy teraz, że $q(\mathbf{h}) = 0$. Załóżmy przez sprzeczność, że $q(\mathbf{h}) < 0$. Dzieląc obie strony nierówności $2q(\mathbf{h}) \leq \|\mathbf{h}\| \cdot q(\mathbf{h})$ przez liczbę $q(\mathbf{h}) < 0$ otrzymujemy $2 \geq \|\mathbf{h}\| \geq n \geq 3$, tzn. otrzymujemy sprzeczność $2 \geq 3$ będącą konsekwencją założenia $q(\mathbf{h}) < 0$. Zatem $q(\mathbf{h}) = 0$, tzn. wektor \mathbf{h} należy do jądra $\text{Ker } q$, co kończy dowód stwierdzenia 3°.

4° Pokażemy teraz, że $b_q(\mathbf{h}, -) = 0$. Przypomnijmy, że $q(\mathbf{h}) = 0$, na podstawie stwierdzenia 3°. Uwzględniając nierówności: (*) otrzymujemy

$$(***) \quad 0 = q(\mathbf{h}) = b_q(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = h_1 \cdot b_q(\mathbf{h}, e_1) + \dots + h_n \cdot b_q(\mathbf{h}, e_n) \leq 0,$$

co po zastosowaniu nierówności: (**) oraz równości: $q(\mathbf{h}) = 0$ implikuje następującą nierówność:

$$h_r \cdot b_q(\mathbf{h}, e_r) \leq 0, \text{ dla dowolnej liczby } r \in \{1, \dots, n\},$$

Zatem (***) implikuje ciąg równości $h_1 \cdot b_q(\mathbf{h}, e_1) = 0, \dots, h_n \cdot b_q(\mathbf{h}, e_n) = 0$. Stąd wynikają równości $b_q(\mathbf{h}, e_1) = 0, \dots, b_q(\mathbf{h}, e_n) = 0$, gdyż wektor \mathbf{h} jest wierny (na podstawie 1°), tzn. $h_1 \neq 0, \dots, h_n \neq 0$.

Jeśli teraz $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{Z}^n$ jest dowolnym wektorem, to $w = w_1 e_1 + \dots + w_n e_n$ oraz stosując \mathbb{Z} -dwuliniowość funkcjonału polaryzacji b_q otrzymujemy $b_q(\mathbf{h}, w) = w_1 b_q(\mathbf{h}, e_1) + \dots + w_n b_q(\mathbf{h}, e_n) = 0$, tzn. $b_q(\mathbf{h}, -) = 0$, co kończy dowód stwierdzenia 4°.

5° Udowodnimy w końcu, że funkcjonał q jest nieujemny oraz $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie \mathbf{h} jest wiernym wektorem (na podstawie 1°).

Niech $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{Z}^n$ będzie dowolnym wektorem takim, że $q(w) \leq 0$. Pokażemy, że wektor w należy do jądra $\text{Ker } q$, tzn. $q(w) = 0$.

Rozważmy najpierw sytuację kiedy q jest P -krytyczny. Stąd wynika, że funkcjonał ograniczony $q^{(1)}$ jest dodatni. Rozważmy wektor

$$v := h_1 w - w_1 \mathbf{h} \in \mathbb{Z}^n,$$

którego pierwsza współrzędna jest zerowa, tzn. $v_1 = 0$. Dodatniość funkcjonału $q^{(1)}$, wybór wektora w , stwierdzenie 4° oraz definicja (2.3) polaryzacji b_q implikują następujące nierówności:

$$\begin{aligned} 0 &\leq q^{(1)}(v^{(1)}) = q(v) = q(h_1 \cdot w - w_1 \cdot \mathbf{h}) = \\ &= q(h_1 \cdot w) + q(w_1 \cdot \mathbf{h}) - 2 \cdot h_1 \cdot w_1 \cdot b_q(w, \mathbf{h}) = \\ &= h_1^2 \cdot q(w) + w_1^2 \cdot q(\mathbf{h}) - 2 \cdot h_1 \cdot w_1 \cdot b_q(w, \mathbf{h}) = \\ &= h_1^2 \cdot q(w) \leq 0 \end{aligned}$$

Ponieważ wektor \mathbf{h} jest wierny (na podstawie 1°), więc $h_1^2 \geq 1$ i w rezultacie otrzymujemy równości $q(w) = 0$ oraz $q^{(1)}(v^{(1)}) = 0$, dla dowolnego wektora $w \in \mathbb{Z}^n$ takiego, że $q(w) \leq 0$. Stąd wynika, że funkcjonał q jest nieujemny.

Udowodnimy teraz, że $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$. Ponieważ $q(\mathbf{h}) = 0$, na podstawie stwierdzenia 3°, więc $\text{Ker } q \supseteq \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$. Aby udowodnić inkluzję przeciwną zauważmy, że ponieważ $q^{(1)}$ jest dodatni oraz $b_q(\mathbf{h}, -) = 0$ (na podstawie punktu 4°), więc otrzymujemy $v^{(1)} = 0$ oraz $v = 0$, gdyż $v_1 = 0$. Stąd wynika, że wektor w ma postać:

$$(+) \quad w = \frac{w_1}{h_1} \cdot \mathbf{h}.$$

Aby udowodnić inkluzję $\text{Ker } q \subseteq \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, wystarczy uzasadnić, że ułamek $\frac{w_1}{h_1}$ jest liczbą całkowitą. W tym celu przedstawmy ten ułamek $\frac{w_1}{h_1}$ w nieskracalnej postaci, tzn. $\frac{w_1}{h_1} = \frac{p}{m}$, gdzie liczby $p, m \in \mathbb{Z}$ są względnie pierwsze oraz $m \geq 1$. Równość (+) implikuje równość $w \cdot m = p \cdot \mathbf{h}$. Ponieważ liczby p oraz m są względnie pierwsze, więc wszystkie współrzędne wektora $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^n$ są podzielne przez m . Zatem istnieje wektor $h' \in \mathbb{Z}^n$ taki, że $\mathbf{h} = m \cdot h'$. Wówczas zachodzą następujące równości: $0 = q(\mathbf{h}) = q(m \cdot h') = m^2 \cdot q(h')$ oraz $\|\mathbf{h}\| = m \cdot \|h'\|$. Stąd wynika, że $m = 1$, gdyż w przeciwnym wypadku $\|\mathbf{h}\| > \|h'\|$, co przeczy minimalności wyboru wektora $\mathbf{h} \in \text{Ker } q$.

W przypadku, gdy q jest krytyczny oraz \mathbf{h} jest dodatni, dowód punktu 5° jest analogiczny do dowodu w poprzednim przypadku. Dowód części (a) twierdzenia został więc zakończony.

(b) Załóżmy, że q jest P -krytyczny. Wprost z definicji wynika, że istnieje niezerowy wektor $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^n$ spełniający warunki (i) oraz (ii). Zatem (b) jest konsekwencją (a).

(c) Załóżmy, że q jest krytyczny. Wprost z definicji funkcjonału krytycznego wynika, że istnieje niezerowy wektor $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^n$ spełniający warunki (i)-(ii) oraz dodatni, tzn. $h_i \geq 0$, dla dowolnego $1 \leq i \leq n$. Zatem (c) jest konsekwencją (a).

(d) Udowodnimy najpierw implikację (d3) \Rightarrow (d2). Ponieważ zakładamy, że $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest P -krytyczny, to na podstawie (b), $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest nieujemny oraz istnieje wektor wierny $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^n$ taki, że $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$.

Z założenia, że q nie jest krytyczny wynika, że każdy z wektorów \mathbf{h} oraz $-\mathbf{h}$ jest wierny, ale nie jest dodatni. Aby to uzasadnić załóżmy, że wierny wektor $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{Z}^n$ jest dodatni. Pokażemy, że funkcjonały $q^{(1)}, \dots, q^{(n)} : \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$ są słabo dodatnie. W tym celu ustalmy $j \leq n$ i weźmy niezerowy wektor $(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n) \in \mathbb{N}^{n-1}$ taki, że $q^{(j)}(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n) = 0$. Wtedy $0 = q^{(j)}(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n) = q(\hat{v})$ (tzn. $\hat{v} \in \text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$), gdzie $\hat{v} = (v_1, \dots, v_{j-1}, 0, v_{j+1}, \dots, v_n) \in \mathbb{N}^n$ jest wektorem różnym od zera. Stąd wynika, że $\hat{v} = 0$ oraz $(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n) = 0$, gdyż wektor \mathbf{h} jest wierny. Sprzeczność ta kończy dowód słabej dodatniości funkcjonałów $q^{(1)}, \dots, q^{(n)}$. Stąd wynika, że q jest krytyczny (gdyż $q(\mathbf{h}) = 0$ i w konsekwencji q nie jest słabo dodatni), co jest sprzeczne z założeniem w (d3), co kończy dowód implikacji (d3) \Rightarrow (d2).

(d2) \Rightarrow (d1) Ponieważ $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest P -krytyczny, więc na podstawie punktu (b) funkcjonał q jest nieujemny oraz $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^n$ jest pewnym wektorem wiernym. Jeśli ponadto

wektory $\mathbf{h}, -\mathbf{h}$ nie są dodatnie, to tak jak w dowodzie implikacji (d3) \Rightarrow (d2) pokazuje się, że q nie jest krytyczny.

Ponieważ implikacja (d1) \Rightarrow (d3) jest oczywista (wynika z definicji krytyczności q), więc dowód warunku (d) i całego twierdzenia został zakończony. \square

3.2. Dowód twierdzenia 3.5

Założmy, że $n \geq 3$. Udowodnimy najpierw równoważność (a) \Leftrightarrow (b). Ponieważ implikacja (a) \Rightarrow (b) jest konsekwencją twierdzenia 3.6(b). Aby udowodnić implikację przeciwną (b) \Rightarrow (a) założmy, że $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest nieujemny oraz istnieje wektor wierny $\mathbf{h} \in \text{Ker } q$ taki, że $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$. Stąd wynika, że q nie jest dodatni, gdyż $q(\mathbf{h}) = 0$ oraz $\mathbf{h} \neq 0$. Aby udowodnić, że q jest P -krytyczny należy wykazać dodatniość funkcjonałów $q^{(1)}, \dots, q^{(n)} : \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$.

W tym celu ustalmy $j \leq n$ i weźmy niezerowy wektor $(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^{n-1}$ taki, że $q^{(j)}(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n) = 0$. Wtedy $0 = q^{(j)}(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n) = q(\hat{v})$, gdzie $\hat{v} = (v_1, \dots, v_{j-1}, 0, v_{j+1}, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^n$ jest niezerowy, tzn. $\hat{v} \in \text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$. Stąd wynika, że $\hat{v} = 0$ oraz $(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n) = 0$, gdyż wektor \mathbf{h} jest wierny. Sprzeczność ta kończy dowód słabej nieujemności funkcjonałów $q^{(1)}, \dots, q^{(n)}$ oraz równoważności (a) \Leftrightarrow (b).

(b) \Rightarrow (c) Oznaczmy symbolem $\Delta(q)$ bigraf funkcjonału q zdefiniowany w [26, 39] następująco:

- wierzchołkami bigrafu $\Delta(q)$ są liczby $1, \dots, n$,
- dwa wierzchołki $i \neq j$ są połączone $-q_{ij}$ ciągłych krawędzi postaci $\bullet_i \text{---} \bullet_j$, jeśli $q_{ij} < 0$, oraz są połączone q_{ij} przerywanych krawędzi postaci $\bullet_i - - \bullet_j$, jeśli $q_{ij} > 0$.
- nie ma krawędzi pomiędzy i oraz j , gdy $q_{ij} = 0$ lub $i = j$.

Łatwo widać, że bigraf $\Delta(q)$ jest spójny, gdy funkcjonał q jest P -krytyczny. Ponieważ zakładamy (b), więc do bigrafu $\Delta(q)$ oraz funkcjonału $q_{\Delta(q)} = q$ możemy stosować Proposition 6.7(a) z artykułu [23] oraz twierdzenie 4.30 udowodnione w następnym rozdziale, z których to twierdzeń wynikają własności (c2) oraz (c3). Ponieważ (c1) wynika z (b), a implikacja (c) \Rightarrow (b) jest oczywista, więc dowód równoważności (b) \Leftrightarrow (c) został zakończony.

(b) \Rightarrow (d) Założmy, że $n \geq 3$, $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest nieujemny oraz istnieje wektor wierny $\mathbf{h} \in \text{Ker } q$ taki, że $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$. Na podstawie twierdzenia 2.26, funkcjonał \mathbb{Z} -liniowy $b_q(\mathbf{h}, -)$ jest zerowy. Zatem, dla dowolnej liczby $\lambda \in \mathbb{Z}$, mamy

$$\begin{aligned} q(e_1 + \lambda \cdot \mathbf{h}) &= b_q(e_1 + \lambda \cdot \mathbf{h}, e_1 + \lambda \cdot \mathbf{h}) \\ &= b_q(e_1, e_1) + 2\lambda \cdot b_q(e_1, \mathbf{h}_q) + \lambda^2 \cdot b_q(\mathbf{h}_q, \mathbf{h}_q) \\ &= b_q(e_1, e_1) = q(e_1) = 1. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że zbiór \mathcal{R}_q pierwiastków funkcjonału q jest nieskończony. Ponieważ udowodniliśmy już równoważność (b) \Leftrightarrow (a), więc (b) implikuje, że funkcjonały ograniczone $q^{(1)}, \dots, q^{(n)} : \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$ są dodatnie. Zatem, na podstawie twierdzenia 2.22, każdy z nich ma tylko skończenie wiele pierwiastków, co kończy dowód implikacji (b) \Rightarrow (d).

(d) \Rightarrow (a) Założmy, że $n \geq 3$ oraz $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest funkcjonałem jednolitym takim, że zbiór \mathcal{R}_q jego pierwiastków jest nieskończony, natomiast zbiory $\mathcal{R}_{q^{(1)}}, \dots, \mathcal{R}_{q^{(n)}}$ pierwiastków funkcjonałów ograniczonych $q^{(1)}, \dots, q^{(n)} : \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$ są skończone.

1° Na podstawie twierdzenia 2.22, funkcjonał $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ nie jest dodatni, gdyż zbiór \mathcal{R}_q jego pierwiastków jest nieskończony.

2° Udowodnimy teraz że $-1 \leq q_{ij} \leq 1$, o ile $i \leq j$. Założmy, przez sprzeczność, że $|q_{ij}| \geq 2$, dla pewnej pary i, j takiej, że $i < j$. Dla prostoty zapisu założmy, że $i = 1$ oraz $j = 2$, tzn. $|q_{12}| \geq 2$. Zauważmy, że funkcjonał ograniczony $q_{[1,2]} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ zdefiniowany wzorem $q_{[1,2]}(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + q_{12}x_1x_2$ ma tylko skończenie wiele pierwiastków. Istotnie, ponieważ

$n \geq 3$, to dla dowolnego pierwiastka (u_1, u_2) funkcjonału $q_{[1,2]}$, wektor $\hat{u} := (u_1, u_2, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^{n-1}$ należy do skończonego zbioru $\mathcal{R}_{q^{(n)}}$, gdyż $q^{(n)}(\hat{u}) = q_{[1,2]}(u_1, u_2) = 1$.

Z drugiej strony, założenie $|q_{12}| \geq 2$ implikuje, że funkcjonał ograniczony $q_{[1,2]} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ ma nieskończenie wiele pierwiastków $w^{(0)}, w^{(1)}, w^{(2)}, \dots, w^{(m)}, \dots$ zdefiniowanych następująco:

$$w^{(m)} = \begin{cases} (1, 0), & \text{dla } m = 0, \\ (q_{12}, -1), & \text{dla } m = 1, \\ q_{12} \cdot w^{(m-1)} - w^{(m-2)}, & \text{dla } m \geq 2. \end{cases}$$

Bezpośrednim rachunkiem sprawdza się bowiem, że $q_{[1,2]}(w^{(0)}) = q_{[1,2]}(1, 0) = 1$, $q_{[1,2]}(w^{(1)}) = q_{[1,2]}(q_{12}, -1) = 1$ oraz $q_{[1,2]}(w^{(2)}) = 1$, gdzie $w^{(2)} = (q_{12}^2 - 1, -q_{12})$. Równość $q_{[1,2]}(w^{(m)}) = 1$, dla $m \geq 3$, udowodnimy łatwo przez indukcję.

Ponieważ wektory $w^{(0)}, w^{(1)}, w^{(2)}, \dots, w^{(m)}, \dots$ są parami różne, zbiór $\mathcal{R}_{q_{[1,2]}}$ jest nieskończony. Otrzymaliśmy więc sprzeczność z założeniem $|q_{12}| \geq 2$ i w konsekwencji udowodniliśmy, że $-1 \leq q_{ij} \leq 1$, dla $i = 1$ oraz $j = 2$. Dowód tych nierówności dla dowolnych $i < j$ jest analogiczny, co kończy dowód części 1°.

3° Na podstawie 1°, aby zakończyć dowód implikacji (d) \Rightarrow (a), wystarczy udowodnić, że każdy z funkcjonałów ograniczonych $q^{(1)}, \dots, q^{(n)} : \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$ jest dodatni, gdy zbiory pierwiastków $\mathcal{R}_{q^{(1)}}, \dots, \mathcal{R}_{q^{(n)}}$ są skończone. Implikacja ta jest konsekwencją następującego lematu, który jest analogiczny do [1, Proposition VII.3.4].

Lemat 3.7. *Jeśli $n \geq 2$ oraz $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest dowolnym jednolitym funkcjonałem kwadratowym takim, że zbiór jego pierwiastków \mathcal{R}_q jest skończony, to q jest dodatni.*

Dowód. Jeśli $n = 2$, to $q_{12} \in \{-1, 0, 1\}$, na podstawie części 2° dowodu implikacji (d) \Rightarrow (a) (przedstawionego przed lematem 3.7). Jeśli $q_{12} = 0$, funkcjonał q jest dodatni. Jeśli $q_{12} = \pm 1$, to $q(x_1, x_2) = \frac{1}{2}[(x_1^2 + (x_1 \pm x_2)^2 + x_2^2)]$. Stąd wynika, że $q : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ jest również dodatni, co kończy dowód w wypadku $n = 2$.

Załóżmy, że $n \geq 3$, $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest taki, że zbiór \mathcal{R}_q jest skończony oraz lemat jest prawdziwy dla dowolnych funkcjonałów kwadratowych $\mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$. Pokażemy, że zbiory $\mathcal{R}_{q^{(1)}}, \dots, \mathcal{R}_{q^{(n)}}$ są również skończone. W tym celu ustalmy $j \leq n$ i weźmy niezerowy wektor $(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n) \in \mathbb{N}^{n-1} \in \mathcal{R}_{q^{(j)}}$, tzn. $q^{(j)}(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n) = 1$. Wtedy $1 = q^{(j)}(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n) = q(\hat{v})$, gdzie $\hat{v} = (v_1, \dots, v_{j-1}, 0, v_{j+1}, \dots, v_n) \in \mathbb{N}^n$, tzn. $\hat{v} \in \mathcal{R}_q$. Stąd wynika, że zbiór $\mathcal{R}_{q^{(j)}}$ jest skończony, gdyż zbiór \mathcal{R}_q jest skończony.

Na podstawie założenia indukcyjnego, funkcjonały $q^{(1)}, \dots, q^{(n)}$ są dodatnie. Stąd wynika, że q jest dodatni, gdyż w przeciwnym wypadku q jest P -krytyczny i w konsekwencji zbiór \mathcal{R}_q jest nieskończony, na podstawie implikacji (a) \Rightarrow (d) twierdzenia 3.5 (udowodnionej wcześniej bez użycia lematu 3.7). Otrzymana sprzeczność kończy dowód lematu, a tym samym dowód twierdzenia 3.5. \square

Wniosek 3.8. *Jeśli $n \geq 3$ oraz $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest P -krytycznym jednolitym funkcjonałem kwadratowym, to $-1 \leq q_{ij} \leq 1$, dla dowolnej pary indeksów i, j takich, że $1 \leq i < j \leq n$.*

Dowód. Ponieważ $n \geq 3$ oraz $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest P -krytyczny, to na podstawie twierdzenia 3.5, zbiór \mathcal{R}_q jest nieskończony, natomiast zbiory $\mathcal{R}_{q^{(1)}}, \dots, \mathcal{R}_{q^{(n)}}$ są skończone. Na podstawie

części 2° dowodu implikacji (d) \Rightarrow (a) (przedstawionego przed lematem 3.7) zachodzi nierówność $-1 \leq q_{ij} \leq 1$, dla dowolnej pary indeksów i, j takich, że $i < j$. \square

Używając metod zastosowanych w dowodzie twierdzenia 3.5 udowodniliśmy w pracy [27] następujące twierdzenie, które jest ogólniejsze od twierdzenia 3.5, zobacz [27, Theorem 2.3].

Twierdzenie 3.9. *Niech $n \geq 3$ oraz niech $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ będzie jednolitym funkcjonałem kwadratowym (2.2). Następujące warunki są równoważne.*

- (a) *Funkcjonał q jest P -krytyczny.*
 - (b) *Funkcjonał q jest albo krytyczny, albo jest P -krytyczny oraz słabo dodatni.*
 - (c) *Istnieje wektor $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ o współrzędnych $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ taki, że funkcjonał $q * \varepsilon : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ określony wzorem $(q * \varepsilon)(v_1, \dots, v_n) = q(\varepsilon_1 v_1, \dots, \varepsilon_n v_n)$, jest krytyczny.*
 - (d) *Zachodzi jeden z następujących dwóch wykluczających się warunków:*
 - (d1) *q nie jest słabo dodatni, zbiór \mathcal{R}_q^+ jego dodatnich pierwiastków jest nieskończony, natomiast zbiory $\mathcal{R}_{q^{(1)}}^+, \dots, \mathcal{R}_{q^{(n)}}^+$ są skończone,*
 - (d2) *q jest słabo dodatni, zbiór \mathcal{R}_q jest nieskończony, natomiast zbiory $\mathcal{R}_{q^{(1)}}, \dots, \mathcal{R}_{q^{(n)}}$ są skończone.*
 - (e) *Funkcjonał q jest nieujemny oraz grupa $\text{Ker } q$ jest cykliczna nieskończona generowana przez pewien wektor wierny.*
 - (e') *Funkcjonał q jest główny oraz istnieją wektor wierny $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{Z}^n$ i liczba $s \in \{1, \dots, n\}$ takie, że $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, $h_s \in \{-1, 1\}$ oraz $-6 \leq h_j \leq 6$, dla dowolnego $j \in \{1, \dots, n\}$.*
 - (e'') *Funkcjonał q jest nieujemny oraz istnieje wektor wierny $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^n$ taki, że $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, $h_1 \geq 1$, oraz*
 - *q nie jest słabo dodatni (t.j. q jest krytyczny) wtedy i tylko wtedy, gdy wektor \mathbf{h} jest dodatni, lub*
 - *q słabo dodatni (t.j. q nie jest krytyczny) wtedy i tylko wtedy, gdy wektor \mathbf{h} nie jest dodatni.*
 - (f) *Istnieje diagram Euklidesa $D \in \{\tilde{\mathbb{A}}_n, \tilde{\mathbb{D}}_n, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8\}$ oraz izomorfizm grup $T : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ taki, że funkcjonał $q \circ T$ jest identyczny z funkcjonałem $q_D : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ (1.3), gdzie $n = |D_0|$, grafu D oraz T przeprowadza wierny wektor $\mathbf{h}' \in \text{Ker } q$ na wektor wierny $T(\mathbf{h}) \in \text{Ker } q_D$.*
- Jeśli q jest nieujemny oraz $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$ jest takim wektorem wiernym, że $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, to $1 \leq |h_j| \leq 6$, dla dowolnego $j \in \{1, \dots, n\}$, oraz $h_s \in \{-1, 1\}$, dla pewnego $s \in \{1, \dots, n\}$.*

Wnioskiem z twierdzenia 3.9 jest następujące rozszerzenie twierdzenia Ovsienki [26, Teorema] przedstawione w [27] jako Corollary 2.7.

Wniosek 3.10. *Niech $n \geq 2$ oraz niech $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ będzie jednolitym funkcjonałem kwadratowym (2.2).*

1° *Jeśli $n = 2$, to q jest krytyczny wtedy i tylko wtedy, gdy $q_{12} \leq -2$, lub równoważnie, wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór \mathcal{R}_q^+ jego pierwiastków dodatnich jest nieskończony.*

2° *Jeśli $n \geq 3$, to następujące warunki są równoważne.*

- (a) *Funkcjonał q jest krytyczny.*
 - (a') *Funkcjonał q nie jest słabo dodatni oraz funkcjonały $q^{(1)}, \dots, q^{(n)} : \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$ są dodatnie.*
- (b) *Funkcjonał q nie jest nieujemny oraz istnieje dodatni wektor wierny $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^n$ taki, że $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$.*
- (c) *Funkcjonał q jest główny oraz istnieją wektor wierny $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{Z}^n$ i indeks $s \in \{1, \dots, n\}$ takie, że $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, $h_s = 1$ oraz $1 \leq h_j \leq 6$, dla dowolnego $j \in \{1, \dots, n\}$.*

(d) Zbiór \mathcal{R}_q^+ jest nieskończony oraz zbiory $\mathcal{R}_{q(1)}^+, \dots, \mathcal{R}_{q(n)}^+$ są skończone. \square

Wniosek 3.11. Jeśli $n \geq 2$, $D \in \{\tilde{\mathbb{A}}_n, \tilde{\mathbb{D}}_n, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8\}$ jest jednym z diagramów Euklidesa oraz $q_D : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest jego funkcjonałem kwadratowym (1.3), to q_D jest P -krytyczny oraz jest krytyczny.

Dowód. Jeśli $n = 2$, to $q_{12} = -2$ i teza jest konsekwencją lematu 3.4 oraz wniosku 3.10. Jeśli $n \geq 3$, to q_D jest główny oraz $\text{Ker } q_D$ jest nieskończoną grupą cykliczną generowaną przez dodatni wektor wierny \mathbf{h}_D zdefiniowany w twierdzeniu 2.20. Zatem teza jest konsekwencją twierdzenia 3.5. \square

Przykład 3.12. Pokażemy, że funkcjonał kwadratowy $q : \mathbb{Z}^7 \rightarrow \mathbb{Z}$ zdefiniowany wzorem $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 - x_1x_2 - x_1x_6 - x_1x_7 - x_2x_3 - x_3x_4 - x_4x_5 + 2x_6x_7$ jest główny, ale nie jest P -krytyczny (a tym samym nie jest krytyczny).

Istotnie, stosując twierdzenie Lagrange'a (a dokładniej implementację algorytmu Lagrange'a, którą znajduje się na załączonej płycie) otrzymujemy postać kanoniczną

$q(x) = (x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_6 - \frac{1}{2}x_7)^2 + \frac{3}{4}(x_2 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6 - \frac{1}{3}x_7)^2 + \frac{2}{3}(x_3 - \frac{3}{4}x_4 - \frac{1}{4}x_6 - \frac{1}{4}x_7)^2 + \frac{5}{8}(x_4 - \frac{4}{5}x_5 - \frac{1}{5}x_6 - \frac{1}{5}x_7)^2 + \frac{3}{5}(x_5 - \frac{1}{6}x_6 - \frac{1}{6}x_7)^2 + \frac{7}{12}(x_6 + x_7)^2$ oraz macierz

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Stąd łatwo wynika, że funkcjonał $q : \mathbb{Z}^7 \rightarrow \mathbb{Z}$ jest nieujemny korangi 1, tzn. q jest główny. Ponieważ macierz odwrotna do S ma postać

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{5}{12} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

i jej ostatnia kolumna jest wektorem $\mathbf{h} = [0, 0, 0, 0, 0, -1, 1]$ spełniającym równość $q(\mathbf{h}) = 0$, więc $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$. Na podstawie twierdzenia 3.5, funkcjonał $q : \mathbb{Z}^7 \rightarrow \mathbb{Z}$ nie jest P -krytyczny, gdyż wektor \mathbf{h} nie jest wierny.

4. Grafy krawędziowo-dwudzielne bez pętli

Ten rozdział oraz cała druga część rozprawy poświęcone będą badaniu nieujemnych krawędziowo-dwudzielnych grafów $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ (zdefiniowanych w pracy [41]) o skończonym zbiorze $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$ ponumerowanych wierzchołków oraz skończonym zbiorze krawędzi Δ_1 oznakowanych symbolami z dwuelementowego zbioru $\{+, -\}$. Głównym obiektem badań będą główne (a także dodatnie) grafy krawędziowo-dwudzielne bez pętli, a w szczególności ich klasyfikacja Grama, klasyfikacja spektralna Coxetera, a także algorytmiczne opisy ich struktury.

4.1. Podstawowe informacje o grafach krawędziowo-dwudzielnych bez pętli

W dalszym ciągu będziemy stosować terminologię i oznaczenia wprowadzone na wykładzie monograficznym [35] oraz w artykułach [41],[39],[42].

Przez graf będziemy rozumieli skończony multigraf $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ o skończonym niepustym zbiorze wierzchołków Δ_0 oraz skończonym zbiorze krawędzi Δ_1 . Dla pary wierzchołków $a, b \in \Delta_0$, symbolem $\Delta_1(a, b)$ oznaczamy zbiór wszystkich krawędzi grafu Δ incydentnych z wierzchołkami a oraz b . Jeśli $a = b$, to krawędzie należące do zbioru $\Delta_1(a, a)$ nazywamy pętlami incydentnymi z a .

Mówimy, że $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ jest grafem **bez pętli**, jeśli $\Delta_1(a, a)$ jest zbiorem pustym, dla dowolnego wierzchołka $a \in \Delta_0$.

Graf $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ nazywamy **prostym**, gdy nie ma pętli oraz zbiór $\Delta_1(a, b)$ zawiera co najwyżej jedną krawędź, dla dowolnych wierzchołków $a \neq b$.

Przypomnijmy, że **grafem oznakowanym** nazywamy parę (Δ, sgn) , gdzie $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ jest skończonym grafem natomiast $\text{sgn} : \Delta_1 \rightarrow \{+1, -1\}$ jest funkcją przyporządkowującą dowolnej krawędzi $\beta \in \Delta_1(a, b)$ jej znak $\text{sgn}(\beta) \in \{+1, -1\}$.

W artykule [41] definiuje się i bada ważną klasę grafów oznakowanych zwanych grafami krawędziowo-dwudzielnymi w sensie następującej definicji.

Definicja 4.1.(a) Grafem krawędziowo-dwudzielnym (w skrócie: **bigrafem**), nazywamy czwórkę $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \Delta_1^-, \Delta_1^+)$, gdzie $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ jest skończonym grafem, natomiast Δ_1^-, Δ_1^+ są rozłącznymi podzbiorami zbioru krawędzi Δ_1 takimi, że $\Delta_1 = \Delta_1^+ \cup \Delta_1^-$ oraz $\Delta_1(a, b) = \Delta_1^+(a, b)$ lub $\Delta_1(a, b) = \Delta_1^-(a, b)$, dla dowolnych wierzchołków $a \neq b$.

(b) Dla ustalonej liczby naturalnej $n \geq 1$, symbolem \mathcal{Bigr}_n będziemy oznaczać zbiór wszystkich grafów krawędziowo-dwudzielnych $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ o zbiorze $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$ n wierzchołków a_1, \dots, a_n ponumerowanych liczbami naturalnymi $1, \dots, n$.

(c) Symbolem \mathcal{UBigr}_n będziemy oznaczać podzbiór zbioru \mathcal{Bigr}_n składający się z wszystkich bigrafów $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{Bigr}_n$ bez pętli.

Umowa.(i) Dowolny graf krawędziowo-dwudzielny $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \Delta_1^-, \Delta_1^+)$ będziemy traktować jako graf oznakowany następująco:

- krawędzie ze zbioru $\Delta_1^-(a, b)$ będą oznakowane znakiem "–" i realizowane geometrycznie jako krawędzie ciągłe $a \text{---} b$,

- krawędzie ze zbioru $\Delta_1^+(a, b)$ będą oznakowane znakiem "+" i realizowane geometrycznie jako krawędzie przerywane $a \text{- - -} b$.

Dla prostoty zapisu graf krawędziowo-dwudzielny $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \Delta_1^-, \Delta_1^+)$ będziemy oznaczać symbolem $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$, o ile nie będzie prowadziło to do nieporozumienia.

(ii) Dowolny graf $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ będziemy traktować jako krawędziowo-dwudzielny $\Delta =$

$(\Delta_0, \Delta_1, \Delta_1^-, \Delta_1^+)$ przyjmując, że $\Delta_1(a, b) = \Delta_1^-(a, b)$ oraz $\Delta_1^+(a, b)$ jest zbiorem pustym, dla dowolnych wierzchołków $a \neq b$, tzn. każda krawędź w Δ jest ciągła.

Przypomnijmy z artykułu [41] następujące definicje.

Definicja 4.2. Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{Bigr}_n$ będzie grafem krawędziowo-dwudzielnym oraz $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$ jego zbiorem wierzchołków ponumerowanych liczbami naturalnymi $1, \dots, n$, gdzie $n \geq 1$.

(a) **Niesymetryczną macierzą sąsiedztwa** \check{D}_Δ bigrafu Δ oraz **niesymetryczną macierzą Grama** \check{G}_Δ bigrafu Δ nazywamy macierze zdefiniowane odpowiednio

$$\check{D}_\Delta = \begin{bmatrix} d_{11}^\Delta & d_{12}^\Delta & \cdots & d_{1n}^\Delta \\ 0 & d_{22}^\Delta & \cdots & d_{2n}^\Delta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn}^\Delta \end{bmatrix} \text{ oraz } \check{G}_\Delta = E + \check{D}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 + d_{11}^\Delta & d_{12}^\Delta & \cdots & d_{1n}^\Delta \\ 0 & 1 + d_{22}^\Delta & \cdots & d_{2n}^\Delta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 + d_{nn}^\Delta \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$$

gdzie

$$d_{ij}^\Delta = \begin{cases} -|\Delta_1^-(a_i, a_j)|, & \text{jeśli } i < j \text{ oraz istnieje krawędź ciągła } a_i \text{---} a_j, \\ |\Delta_1^+(a_i, a_j)|, & \text{jeśli } i < j \text{ oraz istnieje krawędź przerywana } a_i \text{- - -} a_j. \end{cases}$$

Ponadto przyjmujemy $d_{ij}^\Delta = 0$, jeśli $\Delta_1(a_i, a_j)$ jest zbiorem pustym lub $i > j$.

(b) Macierz symetryczną $G_\Delta = \frac{1}{2}(\check{G}_\Delta + \check{G}_\Delta^{tr}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$ nazywamy **symetryczną macierzą Grama** bigrafu Δ .

Zauważmy, że $d_{11}^\Delta = \dots = d_{nn}^\Delta = 1$, gdy Δ nie ma pętli. Ponieważ każda z macierzy Grama G_Δ oraz \check{G}_Δ jednoznacznie wyznacza bigraf Δ (z ponumerowanymi wierzchołkami), więc często krawędziowo-dwudzielny graf $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{Bigr}_n$ będziemy definiować przez podanie jego macierzy Grama $\check{G}_\Delta \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$.

Zauważmy też, że macierze Grama G_Δ oraz \check{G}_Δ bigrafu Δ zależą od numeracji jego wierzchołków. Dla przykładu rozważmy następujące dwa bigrafy:

$$\Delta : a_1 \text{---} a_2 \text{- - -} a_3 \quad \text{oraz} \quad \Delta' : a'_3 \text{---} a'_1 \text{- - -} a'_2,$$

z których drugi otrzymuje się z pierwszego przez permutację wierzchołków. Oczywiście

$$\check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, G_\Delta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \check{G}_{\Delta'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, G_{\Delta'} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Definicja 4.3. Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$ będzie bigrafem bez pętli, gdzie $n \geq 1$, oraz niech $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$ będzie zbiorem wierzchołków bigrafu Δ ponumerowanych liczbami naturalnymi $1, \dots, n$.

(a) Funkcjonałem Grama bigrafu Δ nazywamy funkcjonal całkowity $q_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ zdefiniowany wzorem

$$(4.4) \quad \begin{aligned} q_\Delta(x) = q_\Delta(x_1, \dots, x_n) &= x_1^2 + \cdots + x_n^2 + \sum_{i < j} d_{ij}^\Delta x_i x_j \\ &= x \cdot \check{G}_\Delta \cdot x^{tr} = x \cdot G_\Delta \cdot x^{tr}, \end{aligned}$$

gdzie G_Δ oraz \check{G}_Δ są macierzami Grama bigrafu Δ .

(b) Dla danej liczby $d \in \mathbb{Z}$, zbiór $\mathcal{R}_\Delta(d) = \mathcal{R}_{q_\Delta}(d) = \{v \in \mathbb{Z}^n; q_\Delta(v) = d\}$ nazywamy zbiorem q_Δ -pierwiastków z liczby d . Zbiór

$$(4.5) \quad \mathcal{R}_\Delta = \mathcal{R}_{q_\Delta} = \mathcal{R}_\Delta(d=1)$$

nazywamy **zbiorem pierwiastków bigrafu** Δ (lub funkcjonału $q_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$).

(c) Bigraf $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ nazywamy **dodatnim** (odp. **nieujemnym**), jeśli funkcjonal całkowity $q_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest dodatni (odp. nieujemny), lub równoważnie, jeśli symetryczna macierz

Gramy $G_\Delta \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$ bigrafu Δ spełnia warunki Sylwestera (odp. uogólnione warunki Sylwestera), zobacz twierdzenia 2.12 i 2.13.

(d) Bigraf $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ nazywamy **głównym**, jeśli funkcjonal całkowity $q_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest główny, tzn. q_Δ jest nieujemny oraz grupa $\text{Ker } q_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest cykliczna nieskończona.

Lemat 4.6. *Definicje bigrafu dodatniego, nieujemnego oraz głównego są poprawne, tzn. są niezależne od numeracji wierzchołków bigrafu.*

Dowód. Załóżmy, że $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$ jest bigrafem bez pętli, gdzie $n \geq 1$, oraz $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$ jest jego zbiorem wierzchołków ponumerowanych liczbami naturalnymi $1, \dots, n$. $\Delta' = (\Delta'_0, \Delta'_1) \in \mathcal{UBigr}_n$ będzie bigrafem otrzymanym z Δ przez permutację $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$, tzn. $\Delta_0 = \{a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}\}$. Oznaczmy przez $M_\sigma = [e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ macierz permutacji σ otrzymaną z macierzy jednostkowej $E = [e_1, \dots, e_n] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ przez σ -permutację jej wierszy e_1, \dots, e_n . Pokazuje się, że zachodzi równość $G_{\Delta'} = M_\sigma^{-1} \cdot G_\Delta \cdot M_\sigma$. Stąd wynikają równości

$$q_{\Delta'}(x_1, \dots, x_n) = x \cdot G_{\Delta'} \cdot x^{tr} = x \cdot M_\sigma^{-1} \cdot G_\Delta \cdot M_\sigma \cdot x^{tr} = q_\Delta(x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)}).$$

Zatem formę kwadratową $q_{\Delta'}(x_1, \dots, x_n)$ bigrafu Δ' otrzymuje się z formy kwadratowej $q_\Delta(x_1, \dots, x_n)$ bigrafu Δ przez σ^{-1} -permutację zmiennych x_1, \dots, x_n .

Stąd łatwo wynika, że funkcjonal $q_{\Delta'}$ bigrafu Δ' jest dodatni (odp. nieujemny) wtedy i tylko wtedy, gdy funkcjonal q_Δ bigrafu Δ jest dodatni (odp. nieujemny).

Łatwo również pokazać, że jeśli q_Δ nieujemny, to endomorfizm

$$\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)}),$$

definiuje izomorfizm grupy $\text{Ker } q_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$ z grupą $\text{Ker } q_{\Delta'} \subseteq \mathbb{Z}^n$. Stąd łatwo wynika, że funkcjonal $q_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest główny wtedy i tylko wtedy, gdy funkcjonal $q_{\Delta'} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest główny, co kończy dowód lematu. \square

Następujące twierdzenie odgrywa ważną rolę w klasyfikacji Grama bigrafów dodatnich oraz bigrafów nieujemnych.

Twierdzenie 4.7. *Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$, $n \geq 1$, będzie spójnym krawędziowo-dwudzielnym grafem bez pętli, w którym nie ma krawędzi przerywanych, tzn. zbiór Δ_1^+ jest pusty, lub równoważnie, $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ jest multigrafem spójnym.*

(a) *Jeśli Δ jest dodatni, to jest on jednym z grafów Dynkina \mathbb{A}_n , $n \geq 1$, \mathbb{D}_n , $n \geq 4$, \mathbb{E}_6 , \mathbb{E}_7 , \mathbb{E}_8 przedstawionych w Tabeli 1.1.*

(b) *Jeśli $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$ jest nieujemny oraz $n \geq 1$, to jest on jednym z grafów Euklidesa $\tilde{\mathbb{A}}_n$, $n \geq 1$, $\tilde{\mathbb{D}}_n$, $n \geq 4$, $\tilde{\mathbb{E}}_6$, $\tilde{\mathbb{E}}_7$, $\tilde{\mathbb{E}}_8$ przedstawionych w Tabeli 1.2.*

Dowód. Ponieważ zakładamy, że w krawędziowo-dwudzielnym grafie Δ nie ma krawędzi przerywanych, więc $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ jest multigrafem spójnym oraz jego funkcjonal kwadratowy Grama q_Δ jest zdefiniowany formą kwadratową (1.3) grafu Δ .

(a) Jeśli bigraf Δ jest dodatni, to rzeczywisty funkcjonal kwadratowy Grama $q_\Delta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowany formą kwadratową (1.3) jest dodatnio określony, na podstawie wniosku 2.16(a). Stąd wynika, że graf Δ jest jednym z grafów Dynkina \mathbb{A}_n , $n \geq 1$, \mathbb{D}_n , $n \geq 4$, \mathbb{E}_6 , \mathbb{E}_7 , \mathbb{E}_8 , zobacz [1, Proposition VII.4.5]. Kombinatoryczny dowód tego faktu można znaleźć w [35, Rozdział 2].

(b) Jeśli $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$ jest nieujemny oraz $n \geq 1$, to rzeczywisty funkcjonal kwadratowy Grama $q_\Delta : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowany formą kwadratową (1.3) jest dodatnio półokreślony, na podstawie wniosku 2.16(b). Stąd wynika, że Δ jest jednym z grafów Euklidesa $\tilde{\mathbb{A}}_n$, $n \geq 1$, $\tilde{\mathbb{D}}_n$,

$n \geq 4$, $\tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8$, zobacz [1, Proposition VII.4.5]. Kombinatoryczny dowód tego faktu można również znaleźć również w [35, Rozdział 2]. \square

Następujące definicje wprowadzone w artykule [41] są podstawowymi narzędziami używanymi w klasyfikacji Grama oraz w spektralnej klasyfikacji Coxetera grafów krawędziowo-dwudzielnych.

Definicja 4.8. Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$ będzie grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli, $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$ jego zbiorem wierzchołków ponumerowanych liczbami naturalnymi $1, \dots, n$, gdzie $n \geq 1$, oraz niech

$$(4.9) \quad \check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & d_{12}^\Delta & \cdots & d_{1n}^\Delta \\ 0 & 1 & \cdots & d_{2n}^\Delta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$$

będzie niesymetryczną macierzą Grama bigrafu Δ , zobacz definicja 4.2.

(a) **Macierzą Coxetera bigrafu** Δ nazywamy macierz \mathbb{Z} -odwracalną

$$\text{Cox}_\Delta = -\check{G}_\Delta \cdot \check{G}_\Delta^{-tr} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}).$$

(b) **Wielomianem Coxetera bigrafu** Δ nazywamy wielomian charakterystyczny

$$\text{cox}_\Delta(t) := \det(tE - \text{Cox}_\Delta) \in \mathbb{Z}[t]$$

macierzy Coxetera Cox_Δ bigrafu Δ .

(c) **Spektrum Coxetera** bigrafu Δ nazywamy zbiór $\text{specc}_\Delta \subseteq \mathbb{C}$ wszystkich zespolonych n wartości własnych macierzy Coxetera Cox_Δ ; równoważnie zbiór wszystkich zespolonych n pierwiastków (wraz z krotnościami) wielomianu Coxetera $\text{cox}_\Delta(t)$ bigrafu Δ .

(d) **Liczbą Coxetera** \mathbf{c}_Δ bigrafu Δ nazywamy minimalną liczbę naturalną $r \geq 1$ taką, że $\text{Cox}_\Delta^r = E$. Jeśli taka liczba nie istnieje, to przyjmujemy $\mathbf{c}_\Delta = \infty$.

Przykład 4.10. (a) Jeśli Δ jest krawędziowo-dwudzielnym grafem liniowym

$$\mathbb{A}'_n : \bullet_1 - - \bullet_2 - \bullet_3 - \dots - \bullet_{n-1} - - \bullet_n$$

typu Dynkina \mathbb{A}_n , to

$$\check{G}_{\mathbb{A}'_n} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Cox}_{\mathbb{A}'_n} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}),$$

jednorodny funkcjonal kwadratowy Grama $q_{\mathbb{A}'_n} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ (4.4) bigrafu \mathbb{A}'_n jest zdefiniowany formą kwadratową

$$q_{\mathbb{A}'_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_4 + \cdots - x_{n-2}x_{n-1} + x_{n-1}x_n.$$

Łatwo sprawdzić, że bigraf \mathbb{A}'_n jest dodatni oraz jego wielomian Coxetera ma postać: $\text{cox}_{\mathbb{A}'_n}(t) = t^n + t^{n-1} + \cdots + t^2 + t + 1 = \frac{t^{n+1}}{t-1} \in \mathbb{Z}[t]$. Stąd wynika, że spektrum Coxetera $\text{specc}_{\mathbb{A}'_n}$ bigrafu \mathbb{A}'_n leży na okręgu jednostkowym płaszczyzny zespolonej oraz składa się z wszystkich zespolonych pierwiastków stopnia $n+1$ z liczby 1, które są różne od 1.

(b) Niech Δ będzie bigrafem

$$\mathbb{D}_{13} : \begin{array}{c} \bullet_2 \\ | \\ \bullet_1 - - \bullet_3 - \bullet_4 - \bullet_5 - \bullet_6 - \bullet_7 - \bullet_8 - \bullet_9 - \bullet_{10} - \bullet_{11} - \bullet_{12} - - \bullet_{13} \end{array}$$

typu Dynkina \mathbb{D}_{13} . Niesymetryczna macierz Grama oraz macierz Coxetera tego bigrafu mają postaci:

$$\check{G}_{\mathbb{D}'_{13}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

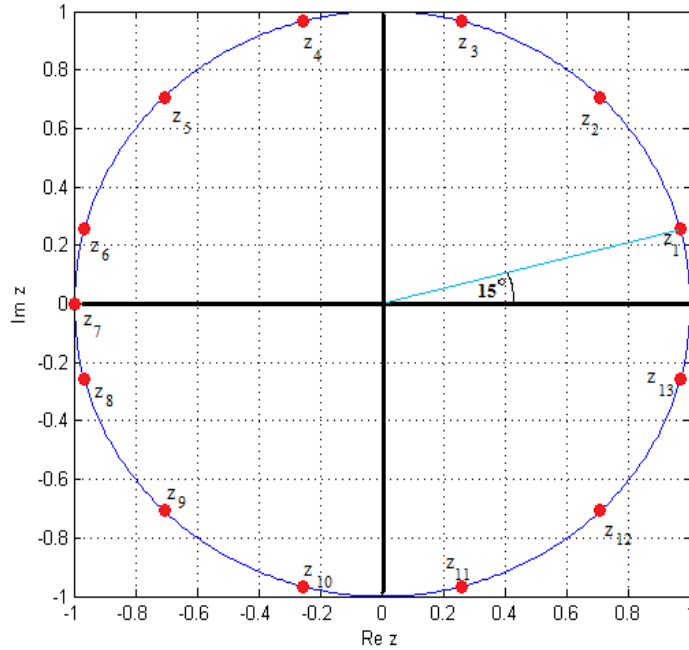
$$\text{Cox}_{\mathbb{D}'_{13}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}),$$

Jednorodny funkcjonal kwadratowy Grama $q_{\mathbb{D}'_{13}} : \mathbb{Z}^{13} \rightarrow \mathbb{Z}$ (4.4) bigrafu \mathbb{D}'_{13} jest zdefiniowany formą kwadratową

$q_{\mathbb{D}'_{13}}(x_1, x_2, \dots, x_{13}) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{13}^2 + x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_4 + \dots - x_{10}x_{11} + x_{11}x_{12} + x_{12}x_{13}$. Łatwo sprawdzić, że bigraf \mathbb{D}'_{13} jest dodatni oraz jego wielomian Coxetera ma postać: $\text{cox}_{\mathbb{D}'_{13}}(t) = t^{13} + t^{12} + t + 1 \in \mathbb{Z}[t]$. Stąd wynika, że liczba Coxetera $\mathbf{c}_{\mathbb{D}'_{13}}$ jest równa 24, spektrum Coxetera $\text{specc}_{\mathbb{D}'_{13}}$ bigrafu \mathbb{D}'_{13} leży na okręgu jednostkowym płaszczyzny zespolonej oraz składa się z następujących zespolonych pierwiastków stopnia $\mathbf{c}_{\mathbb{D}'_{13}} = 24$ z liczby 1, które są różne od 1.

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right), \\ z_2 &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \\ z_3 &= \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right), \\ z_4 &= \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right), \\ z_5 &= \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right), \\ z_6 &= \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right), \\ z_7 &= -1, \\ z_8 &= \cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{13\pi}{12}\right), \\ z_9 &= \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right), \\ z_{10} &= \cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{17\pi}{12}\right), \\ z_{11} &= \cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{19\pi}{12}\right), \\ z_{12} &= \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right), \\ z_{13} &= \cos\left(\frac{23\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{23\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

Rozmieszczenie pierwiastków z_1, \dots, z_{13} na sferze jednostkowej przedstawione zostało na poniższym rysunku.



W zbiorze \mathcal{UBigr}_n krawędziowo-dwudzielnych grafów Δ definiuje się w pracy [41] dwie \mathbb{Z} -kongruencje Grama $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$ oraz $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ następująco.

Definicja 4.11. (a) Krawędziowo-dwudzielne grafy $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$ nazywa się **silnie (lub dwuliniowo) \mathbb{Z} -kongruentnymi** (i oznacza $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$), jeśli istnieje macierz $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ taka, że $\check{G}_{\Delta'} = B \cdot \check{G}_{\Delta} \cdot B^{tr}$, gdzie

$$(4.12) \quad \text{Gl}(n, \mathbb{Z}) := \{B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}); \det B = \pm 1\}$$

jest pełną grupą \mathbb{Z} -liniową.

(b) Bigrafy $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$ nazywa się **słabo \mathbb{Z} -kongruentnymi** (i oznacza $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$), jeśli istnieje macierz $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ taka, że $G_{\Delta'} = B \cdot G_{\Delta} \cdot B^{tr}$. W tym wypadku mówimy, że $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$ jest słabą \mathbb{Z} -kongruencją Grama zdefiniowaną przez macierz $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$.

W artykule [41] oraz na wykładzie monograficznym [35] udowodniono następujący lemat oraz następujące dwa twierdzenia.

Lemat 4.13. (a) Jeśli bigrafy $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$ są \mathbb{Z} -kongruentne oraz macierz $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ jest taka, że $G_{\Delta'} = B \cdot G_{\Delta} \cdot B^{tr}$, to przemienny jest diagram

$$(4.14) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{q_{\Delta'}} & \mathbb{Z} \\ h_B \downarrow \cong & \nearrow q_{\Delta} & \\ \mathbb{Z}^n & & \end{array}$$

gdzie $h_B : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ jest izomorfizmem grup zdefiniowanym wzorem $h_B(v) = v \cdot B$, dla $v \in \mathbb{Z}^n$.

(b) Odwrotnie, jeśli macierz $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ jest taka, że przemienny jest diagram (4.14), to $G_{\Delta'} = B \cdot G_{\Delta} \cdot B^{tr}$ oraz $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$.

Dowód. Zobacz [37, (2.7)] oraz [35]. □

Twierdzenie 4.15. (a) Jeśli $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$ jest nieujemny, to jego spektrum Coxetera specc_{Δ} jest podzbiorem okręgu jednostkowego $\mathcal{S}^1 := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ na płaszczyźnie zespolonej \mathbb{C} . Ponadto, Δ jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy $1 \notin \text{specc}_{\Delta}$.

(b) Jeśli bigrafy $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$ są silnie \mathbb{Z} -kongruentne, to macierze Cox_Δ i $\text{Cox}_{\Delta'}$ są sprzężone, $\text{specc}_\Delta = \text{specc}_{\Delta'}$, $\text{cox}_\Delta(t) = \text{cox}_{\Delta'}(t)$ oraz $\mathbf{c}_\Delta = \mathbf{c}_{\Delta'}$. Implikacja przeciwna nie jest prawdziwa.

(c) Wielomian Coxetera $\text{cox}_\Delta(t)$, spektrum Coxetera specc_Δ oraz liczba Coxetera \mathbf{c}_Δ bigrafu $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$ zależą od numeracji a_1, \dots, a_n wierzchołków bigrafu Δ .

(d) Jeśli $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$ jest drzewem, to $\text{cox}_\Delta(t)$, specc_Δ oraz liczba Coxetera \mathbf{c}_Δ bigrafu $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$ nie zależą od numeracji a_1, \dots, a_n wierzchołków bigrafu Δ . W szczególności, jeśli Δ jest jednym z diagramów Dynkina przedstawionych w Tabeli 1.1, to jego wielomian Coxetera $\text{cox}_\Delta(t)$ oraz liczba Coxetera \mathbf{c}_Δ są następujące:

$$(4.16) \quad \text{cox}_\Delta(t) := \begin{cases} t^n + t^{n-1} + \dots + t^2 + t + 1, & \mathbf{c}_\Delta = n + 1, & \text{gdy } \Delta = \mathbb{A}_n, n \geq 1, \\ t^n + t^{n-1} + t + 1, & \mathbf{c}_\Delta = 2(n - 1), & \text{gdy } \Delta = \mathbb{D}_n, n \geq 4, \\ t^6 + t^5 - t^3 + t + 1, & \mathbf{c}_\Delta = 12, & \text{gdy } \Delta = \mathbb{E}_6, \\ t^7 + t^6 - t^4 - t^3 + t + 1, & \mathbf{c}_\Delta = 18, & \text{gdy } \Delta = \mathbb{E}_7, \\ t^8 + t^7 - t^5 - t^4 - t^3 + t + 1, & \mathbf{c}_\Delta = 30, & \text{gdy } \Delta = \mathbb{E}_8. \end{cases}$$

Dowód. Stwierdzenia (a)-(d) zostały udowodnione w [41, Proposition 2.2-2.3], zobacz również [41, Example 2.1].

Formuły zawarte w (4.16) są znane i zostały udowodnione na wykładzie monograficznym [35]. Idea dowodu indukcyjnego została również podana w [9, Lemma 2.5, Remark 2.6]. \square

Twierdzenie 4.17. (a) Jeśli Δ jest jednym z diagramów Euklidesa $\tilde{\mathbb{D}}_n$, $n \geq 4$, $\tilde{\mathbb{E}}_6$, $\tilde{\mathbb{E}}_7$, $\tilde{\mathbb{E}}_8$ przedstawionych w Tabeli 1.2 (posiada $n + 1$ wierzchołków), to jego wielomian Coxetera $\text{cox}_\Delta(t)$ ma postać:

$$(4.18) \quad \text{cox}_\Delta(t) := \begin{cases} t^{n+1} + t^n - t^{n-1} - t^{n-2} - t^3 - t^2 + t + 1, & \text{gdy } \Delta = \tilde{\mathbb{D}}_n, n \geq 4, \\ t^7 + t^6 - 2t^4 - 2t^3 + t + 1, & \text{gdy } \Delta = \tilde{\mathbb{E}}_6, \\ t^8 + t^7 - t^5 - 2t^4 - t^3 + t + 1, & \text{gdy } \Delta = \tilde{\mathbb{E}}_7, \\ t^9 + t^8 - t^6 - t^5 - t^4 - t^3 + t + 1, & \text{gdy } \Delta = \tilde{\mathbb{E}}_8. \end{cases}$$

Zauważmy, że $\text{cox}_{\tilde{\mathbb{D}}_4}(t) := t^5 + t^4 - 2t^3 - 2t^2 + t + 1$ oraz $\text{cox}_{\tilde{\mathbb{D}}_5}(t) := t^6 + t^5 - t^4 - 2t^3 - t^2 + t + 1$.

(b) Jeśli $n \geq 1$ oraz $\Delta = \tilde{\mathbb{A}}_n$, to wielomian Coxetera $\text{cox}_\Delta(t)$ zależy od numeracji a_1, \dots, a_n wierzchołków bigrafu Δ oraz jest on jednym z wielomianów

$$(4.19) \quad F_\Delta^{(1)}(t), F_\Delta^{(2)}(t), \dots, F_\Delta^{(m_n)}(t), \text{ gdzie } m_n = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{gdy } n \text{ jest liczbą parzystą,} \\ \frac{n+1}{2}, & \text{gdy } n + 1 \text{ jest liczbą nieparzystą,} \end{cases}$$

$$F_\Delta^{(j)}(t) = t^{n+1} - t^{n-j+1} - t^j + 1, \text{ dla } j = 1, \dots, m_n$$

zobacz [25], [37] oraz [41].

W szczególności, gdy $n + 1$ jest liczbą nieparzystą oraz $j = m_n = \frac{n+1}{2}$, to $t^{n-j+1} = t^j$ oraz $F_\Delta^{(j)}(t)$ ma postać $F_\Delta^{(m_n)}(t) = F_\Delta^{(\frac{n+1}{2})}(t) = t^{n+1} - 2t^{\frac{n+1}{2}} + 1$. Jeśli $\Delta = \tilde{\mathbb{A}}_1 : \bullet \text{---} \bullet$ jest grafem Kroneckera, to $n = 1$, $m_n = 2$ oraz $F_\Delta(t) = F_{\tilde{\mathbb{A}}_1}^{(2)}(t) = t^2 - 2t + 1 = (t - 1)^2$.

(c) Dla $\Delta = \tilde{\mathbb{A}}_n$ oraz $s \in \{2, \dots, n - 2\}$, wielomian $F_\Delta^{(s)}(t)$ jest wielomianem Coxetera następującego grafu rozważanego jako bigraf, zobacz [41],

$$(4.20) \quad \tilde{\mathbb{A}}_n[s] : \begin{array}{ccccccc} \bullet_1 & \text{---} & \dots & \text{---} & \bullet_{s-1} & \text{---} & \bullet_s \\ | & & & & | & & | \\ \bullet_{s+1} & \text{---} & \dots & \text{---} & \bullet_n & \text{---} & \bullet_{n+1} \end{array}$$

Dowód. Zobacz [41, Proposition 2.2-2.3] oraz [25]. Twierdzenie zostało również udowodnione na wykładzie monograficznym [35]. \square

4.2. Algorytm inflacyjny dla grafów krawędziowo-dwudzielnych bez pętli

W badaniu klas równoważności grafów krawędziowo-dwudzielnych $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$ względem słabej \mathbb{Z} -kongruencji Grama $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$ bardzo ważną rolę odgrywa algorytm inflacyjny definiowany rekurencyjnie przy użyciu dwóch rodzajów inflacji bigrafów zdefiniowanych w pracach [24] oraz [41] następująco.

Definicja 4.21 Załóżmy, że $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$ jest grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli. Dla uproszczenia zapisu załóżmy, że $\Delta_0 = \{1, 2, \dots, n\}$ jest zbiorem wierzchołków bigrafu Δ .

(a) Dla dowolnego wierzchołka $a \in \Delta_0$ definiujemy nowy bigraf $\Delta' := \mathbf{t}_a^- \Delta \in \mathcal{UBigr}_n$ otrzymany z Δ przez zamianę znaków wszystkich krawędzi incydentnych z wierzchołkiem a . Innymi słowy, Δ' jest taki, że forma kwadratowa $q_{\Delta'}(x)$ definiująca jego funkcjonal $q_{\Delta'} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ powstaje z formy $q_{\Delta}(x)$ (4.4) przez podstawienie $x_a \mapsto -x_a$.

Przyporządkowanie $\Delta \mapsto \mathbf{t}_a^- \Delta$ nazywa się **inflacją Δ w punkcie $a \in \Delta_0$** , lub zamianą znaków krawędzi bigrafu Δ w wierzchołku a .

(b) Dla dowolnej pary wierzchołków $a, b \in \Delta_0$ połączonych przynajmniej jedną przerywaną krawędzią $a - - b$ (tzn. $d_{ab}^{\Delta} > 0$) definiujemy nowy bigraf $\Delta' := \mathbf{t}_{ab}^- \Delta \in \mathcal{UBigr}_n$ tak, że forma kwadratowa $q_{\Delta'}(x)$ definiująca jego funkcjonal $q_{\Delta'} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ powstaje z formy $q_{\Delta}(x)$ (4.4) przez podstawienie $x_a \mapsto x_a - d_{ab}^{\Delta} x_b$, przy czym przyjmuje się tu $d_{ab}^{\Delta} = d_{ba}^{\Delta}$, dla dowolnych $a, b \in \Delta_0$.

Przyporządkowanie $\Delta \mapsto \mathbf{t}_{ab}^- \Delta$ nazywa się **inflacją bigrafu Δ względem pary punktów $a, b \in \Delta_0$** .

Główne własności operacji inflacji zawarte są w następującym twierdzeniu udowodnionym w pracach [41, Section 3] oraz [23, Section 6].

Twierdzenie 4.22. *Założmy, że $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$ jest grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli oraz niech $\Delta' := \mathbf{t}^- \Delta \in \mathcal{UBigr}_n$ oznacza bigraf otrzymany przez jednym z operatorów inflacji $\Delta \mapsto \mathbf{t}_a^- \Delta$ lub $\Delta \mapsto \mathbf{t}_{ab}^- \Delta$.*

(a) *Bigraf $\Delta' := \mathbf{t}^- \Delta$ nie ma pętli. Ponadto, $\Delta' := \mathbf{t}^- \Delta$ jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy bigraf Δ jest spójny.*

(b) *$\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$ oraz istnieje przemienny diagram*

$$(4.23) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{q_{\Delta}} & \mathbb{Z}, \\ h \downarrow \cong & \nearrow q_{\Delta'} & \\ \mathbb{Z}^n & & \end{array}$$

gdzie $h : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ jest izomorfizmem grup przyporządkowującym dowolnemu wektorowi $v \in \mathbb{Z}^n$ wektor $h(v) \in \mathbb{Z}^n$ otrzymany z v przez podstawienie

$$v_a \mapsto \begin{cases} -v_a, & \text{gdy } \mathbf{t}^- = \mathbf{t}_a^-, \\ v_a + d_{ab}^{\Delta} v_b, & \text{gdy } \mathbf{t}^- = \mathbf{t}_{ab}^-. \end{cases}$$

(c) *Jeśli $v_b > 0$ oraz $\mathbf{t}^- = \mathbf{t}_{ab}^-$, to zachodzi nierówność $v < h(v)$ (definiowana „po współrzędnych”).*

(d) *Izomorfizm $h : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ przeprowadza zbiór pierwiastków \mathcal{R}_{Δ} bigrafu Δ na zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_{\Delta'}$ bigrafu Δ' .*

(e) *Jeśli Δ jest nieujemny, to Δ' jest nieujemny oraz ograniczenie \check{h} izomorfizmu $h : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ do podgrupy $\text{Ker } q_{\Delta}$ jest izomorfizmem grup $\check{h} : \text{Ker } q_{\Delta} \xrightarrow{\cong} \text{Ker } q_{\Delta'}$. Jeśli ponadto*

bigraf Δ jest główny, to Δ' jest główny oraz wektor \mathbf{h} generuje grupę $\text{Ker } q_\Delta$ wtedy i tylko wtedy, gdy wektor $\mathbf{h}' := \check{h}(\mathbf{h}) = h(\mathbf{h})$ generuje grupę $\text{Ker } q_{\Delta'}$.

Dowód. (a) Dowód tego stwierdzenia można znaleźć w artykułach [41, Section 3] oraz [23, Section 6], [24].

(b) Wykorzystując definicję funkcji $h : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ podaną w (b) bezpośrednim rachunkiem sprawdza się, że h jest homomorfizmem grup, jest funkcją różnowartościową oraz jest surjekcją. Wprost z definicji operatorów inflacji $\Delta \mapsto \mathbf{t}_a^- \Delta$ oraz $\Delta \mapsto \mathbf{t}_{ab}^- \Delta$ wynika, że diagram (4.23) jest przemienny.

Jeśli $B = M_h$ jest macierzą homomorfizmu h w standardowej \mathbb{Z} -bazie e_1, \dots, e_n wolnej grupy \mathbb{Z}^n , to wprost z definicji homomorfizmu $h_B : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ (4.14) wynika, że $h = h_B$. Ponieważ h jest izomorfizmem, więc $B = M_h \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ i na podstawie lematu 4.13 przemiennosc diagramu (4.23) implikuje równość $G_{\Delta'} = B \cdot G_\Delta \cdot B^{tr}$. Zatem \mathbb{Z} -odwracalna macierz $B = M_h$ definiuje słabą \mathbb{Z} -kongruencję Grama $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$, co kończy dowód stwierdzenia (b).

Dowody stwierdzeń (c)-(e) otrzymuje się łatwo przez zastosowanie definicji oraz przemiennosci diagramu (4.23).

Dla przykładu uzasadnijmy prawdziwość ostatniego stwierdzenia w (e). W tym celu założmy, że bigraf Δ jest główny. Zatem Δ jest dodatnio półokreślony (zobacz wniosek 2.16(b)), $\text{Ker } q_\Delta$ jest podgrupą grupy \mathbb{Z}^n (zobacz lemat 2.6 (b)) oraz istnieje niezerowy wektor $\mathbf{h} \in \text{Ker } q_\Delta$ generujący grupę $\text{Ker } q_\Delta$, tzn. $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$. Ponieważ h jest izomorfizmem i przemienny jest diagram (4.23), więc funkcjonal $q_{\Delta'} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest nieujemny i na podstawie wniosku 2.16(b) funkcjonal rzeczywisty $q_{\Delta'} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest dodatnio półokreślony. Ponadto, ponieważ h jest izomorfizmem i przemienny jest diagram (4.23), więc h indukuje homomorfizm grup $\check{h} : \text{Ker } q_{\Delta'} \rightarrow \text{Ker } q_\Delta$ zdefiniowany wzorem $\check{h}(v) = h(v)$, dla dowolnego wektora $v \in \text{Ker } q_{\Delta'}$. W tym celu zauważmy, że dla dowolnego wektora $v \in \text{Ker } q_{\Delta'}$, przemiennosc diagramu (4.23) implikuje równość $0 = q_{\Delta'}(v) = q_\Delta(h(v)) = q_\Delta(\check{h}(v))$, tzn. $\check{h}(v) \in \text{Ker } q_\Delta$. Ponieważ h jest izomorfizmem grup, więc $\check{h} : \text{Ker } q_{\Delta'} \rightarrow \text{Ker } q_\Delta$ jest monomorfizmem, a z przemiennosci diagramu (4.23) łatwo wynika, że \check{h} jest surjekcją, tzn. \check{h} jest izomorfizmem grup. Stąd łatwo wynika, że wektor $\mathbf{h}' := \check{h}^{-1}(\mathbf{h})$ należy do grupy $\text{Ker } q_{\Delta'}$ oraz zachodzi równość $\text{Ker } q_{\Delta'} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}'$. \square

W pracach [24] oraz [41, Section 3] (zobacz także [23, Section 6]) udowodniono następujące ważne twierdzenie.

Twierdzenie 4.24. *Założmy, że $n \geq 1$ oraz $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$ jest spójnym grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli.*

(a) *Bigraf Δ jest dodatni wtedy tylko wtedy, gdy istnieje złożenie \mathbf{t}^- skończonej liczby operatorów inflacji $\mathbf{t}_{a_i a_j}^-$ takich, bigraf $D\Delta := \mathbf{t}^- \Delta$ jest jednym z grafów Dynkina \mathbb{A}_n , $n \geq 1$, \mathbb{D}_n , $n \geq 4$, \mathbb{E}_6 , \mathbb{E}_7 , \mathbb{E}_8 przedstawionych w Tabeli 1.1.*

(b) *Bigraf Δ jest nieujemny korangi 1 (tzn. Δ jest główny) wtedy tylko wtedy, gdy $n \geq 2$ oraz istnieje złożenie \mathbf{t}^- skończonej liczby operatorów inflacji $\mathbf{t}_{a_i a_j}^-$ takich, że bigraf $D\Delta := \mathbf{t}^- \Delta$ jest jednym z grafów Euklidesa $\tilde{\mathbb{A}}_{n-1}$, $n \geq 2$, $\tilde{\mathbb{D}}_{n-1}$, $n \geq 5$, $\tilde{\mathbb{E}}_6$, $\tilde{\mathbb{E}}_7$, $\tilde{\mathbb{E}}_8$ przedstawionych w Tabeli 1.2.*

Dowód. Dowód tego twierdzenia można znaleźć w artykułach [24, Theorems 4.2 i 5.2], [41, Theorems 3.1-3.2], a także w pracy [23, Proposition 6.7(a)]. \square

W artykułach [24] oraz [41] można znaleźć **algorytm inflacyjny** realizujący efekt opisany w twierdzeniu 4.24. Implementacja w programie Maple tego algorytmu znajduje się na płycie.

4.3. Krawędziowo-dwudzielne grafy P -krytyczne bez pętli

Głównym celem tego rozdziału jest przedstawienie efektywnej charakteryzacji klasy krawędziowo-dwudzielnych grafów P -krytycznych bez pętli zdefiniowanych w artykule [41] (zobacz również [39, Definition 2.2]) następująco.

Definicja 4.25. Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{Bigr}_n$ będzie grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli, gdzie $n \geq 2$, oraz niech $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$ będzie zbiorem wierzchołków bigrafu Δ ponumerowanych liczbami naturalnymi $1, \dots, n$. Bigraf $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ nazywamy P -krytycznym, jeśli funkcjonal całkowity $q_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ (4.3) jest P -krytyczny, tzn. q_Δ nie jest dodatni oraz każde z jego ograniczeń $q_\Delta^{(1)}, \dots, q_\Delta^{(n)} : \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$ do \mathbb{Z}^{n-1} jest funkcjonalem dodatnim.

Oznaczenie 4.26. Jeśli $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{Bigr}_n$ jest bigrafem bez pętli, gdzie $n \geq 2$, oraz $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$ jest zbiorem wierzchołków bigrafu Δ ponumerowanych liczbami naturalnymi $1, \dots, n$, to dla dowolnego $j \in \{1, \dots, n\}$ oznaczymy symbolem $\Delta^{(j)} \in \mathcal{UBigr}_{n-1}$ podbigraf bigrafu Δ otrzymany z Δ przez opuszczenie wierzchołka a_j oraz incydentnych z nim krawędzi.

Lemat 4.27. (a) Jeśli $n \geq 2$, to bigraf $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$ jest P -krytyczny wtedy i tylko wtedy, gdy Δ nie jest dodatni oraz każdy z bigrafów $\Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(n)} \in \mathcal{UBigr}_{n-1}$ jest dodatni.

(b) Definicja bigrafu P -krytycznego nie zależy od numeracji jego wierzchołków.

Dowód. (a) Łatwo widać, że funkcjonal Grama $q_{\Delta^{(j)}} : \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$ bigrafu $\Delta^{(j)}$ jest równy funkcjonalowi ograniczonemu $q_\Delta^{(j)} : \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$ funkcjonala $q_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ do \mathbb{Z}^{n-1} . Ponadto, bigraf Δ nie ma pętli wtedy i tylko wtedy, gdy funkcjonal $q_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest jednolity. Stąd wynika, że lemat jest prostym wnioskiem z definicji bigrafu P -krytycznego i funkcjonala P -krytycznego.

(b) Ponieważ definicja bigrafu P -krytycznego Δ jest wyrażona przez własności jego funkcjonala $q_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, więc (b) jest prostą konsekwencją lematu 4.6. \square

Twierdzenie 4.28. Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$ będzie spójnym bigrafem bez pętli, gdzie $n \geq 2$, oraz niech $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$ będzie zbiorem wierzchołków bigrafu Δ ponumerowanych liczbami naturalnymi $1, \dots, n$.

(a) Jeśli $n = 2$, to Δ jest P -krytyczny wtedy i tylko wtedy, gdy Δ posiada co najmniej dwie krawędzie.

(b) Jeśli $n \geq 3$, to następujące trzy warunki są równoważne:

(b1) bigraf Δ jest P -krytyczny;

(b2) bigraf Δ jest nieujemny, nie jest dodatni oraz każdy z bigrafów $\Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(n)} \in \mathcal{UBigr}_{n-1}$ jest dodatni.

(b3) bigraf Δ jest główny oraz istnieje wektor $\mathbf{h} \in \text{Ker } q_\Delta$ taki, że $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ oraz \mathbf{h} jest wierny, tzn. grupa $\text{Ker } q_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest cykliczna nieskończona generowana przez wektor wierny \mathbf{h} .

Dowód. (a) Przypomnijmy, że bigraf $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$ bez pętli jest P -krytyczny wtedy i tylko wtedy, gdy jego jednolity funkcjonal Grama $q_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest P -krytyczny. Zatem (a) jest prostym wnioskiem z lematu 3.4.

(b) Załóżmy, że $n \geq 3$. Równoważność (b1) \Leftrightarrow (b3) jest wersją równoważności (a) \Leftrightarrow (b) w twierdzeniu 3.5. Ponieważ (b1) implikuje (b3), to każdy P -krytyczny bigraf Δ jest nieujemny. Stąd wynika, że (b1) implikuje (b2). Ponieważ implikacja przeciwna (b2) \Rightarrow (b1) jest oczywista, więc dowód twierdzenia jest zakończony. \square

Wniosek 4.29. Jeśli $n \geq 3$, to każdy P -krytyczny bigraf $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$ bez pętli

jest prosty, tzn. jeśli pomiędzy jego wierzchołkami $a_i, a_j \in \Delta_0$ istnieje krawędź, to istnieje tylko jedna. Innymi słowy; $-1 \leq d_{ij}^\Delta \leq 1$, dla dowolnych wierzchołków $a_i, a_j \in \Delta_0$.

Dowód. Jeśli $n \geq 3$ oraz bigraf $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$ bez pętli jest P -krytyczny, to jego całkowity funkcjonal Grama $q_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest jednolity i P -krytyczny. Zatem Δ jest grafem prostym, gdyż $-1 \leq d_{ij}^\Delta \leq 1$, dla dowolnych wierzchołków $a_i, a_j \in \Delta_0$ (na podstawie wniosku 3.8), co kończy dowód. \square

Wykorzystując redukcję inflacyjną oraz idee dowodu Proposition 6.7 w pracy [23] udowodnimy teraz bardzo ważną własność P -krytycznych bigrafów $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$ bez pętli, którą będziemy wykorzystywać w algorytmie konstruującym rekurencyjnie bigrafy P -krytyczne z bigrafów dodatnich posiadających wierny pierwiastek.

Twierdzenie 4.30. Niech $n \geq 3$ oraz niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$ będzie P -krytycznym spójnym bigrafem bez pętli ze zbiorem $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$ jego wierzchołków ponumerowanych liczbami naturalnymi $1, \dots, n$.

(a) Bigraf Δ jest nieujemny oraz grupa $\text{Ker } q_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest cykliczna nieskończona generowana przez wektor wierny.

(b) Jeśli $\mathbf{h}, \mathbf{h}' \in \text{Ker } q_\Delta$ są dodatnimi wektorami wiernymi takimi, że $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}'$, to $\mathbf{h} = \mathbf{h}'$.

(c) Jeśli $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \text{Ker } q_\Delta$ jest wektorem wiernym takim, że $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, to

(c1) $-6 \leq h_j \leq 6$, dla dowolnego $j \in \{1, \dots, n\}$,

(c2) $h_s \in \{-1, 1\}$, dla pewnego $s \in \{1, \dots, n\}$.

Dowód. Stwierdzenie (a) wynika z twierdzenia 4.28.

(b) Załóżmy, że $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}'$. Zatem istnieją liczby $\lambda, \lambda' \in \mathbb{Z}$ takie, że $\mathbf{h} = \lambda \cdot \mathbf{h}'$ oraz $\mathbf{h}' = \lambda' \cdot \mathbf{h}$. Ponieważ wektory \mathbf{h}, \mathbf{h}' są wierne dodatnie, więc $\lambda > 0$ oraz $\lambda' > 0$. Z równości $\mathbf{h} = \lambda \cdot \mathbf{h}' = \lambda\lambda' \cdot \mathbf{h}$ wynika, że $\lambda\lambda' = 1$ i w rezultacie otrzymujemy $\lambda = \lambda' = 1$, gdyż $\lambda > 0$ oraz $\lambda' > 0$.

(c) Ustalmy liczbę $n \geq 3$. Dowód stwierdzenia (c) rozpoczniemy od następujących obserwacji.

1° Zbiór wszystkich P -krytycznych spójnych bigrafów $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$ bez pętli jest skończony, gdyż liczba ich niesymetrycznych macierzy Grama $\check{G}_\Delta \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ (4.9) jest skończona. Istotnie, na podstawie wniosku 4.29, współczynniki d_{ij}^Δ tych macierzy są liczbami całkowitymi i spełniają nierówność $-1 \leq d_{ij}^\Delta \leq 1$.

2° Jeśli bigraf $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$ jest P -krytyczny oraz $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie \mathbf{h} jest dodatnim wektorem wiernym, to taki wektor jest jedyny. Jeśli ponadto istnieje krawędź przerywana $a_i - \dots - a_j$ w Δ , to

- inflacja $\Delta' := \mathbf{t}_{a_i a_j}^- \Delta$ bigrafu Δ jest bigrafem P -krytycznym posiadającym mniej krawędzi przerywanych niż bigraf Δ ,

- wektor $\mathbf{h}' := h^{-1}(\mathbf{h})$ zdefiniowany w twierdzeniu 4.22(e) jest jedynym dodatnim generatorem grupy $\text{Ker } q_{\Delta'}$ i spełnia nierówności $0 < \mathbf{h} < \mathbf{h}'$.

Stwierdzenie 2° wynika wprost z (b) oraz z twierdzeń 4.22 i 4.28.

Udowodnimy teraz (c). W tym celu załóżmy, że $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$ jest bigrafem P -krytycznym, spójnym i nie zawiera pętli. Na podstawie twierdzenia 4.28, Δ jest główny oraz istnieje wektor wierny $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^n$ taki że $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$. Rozważmy następujące dwa przypadki.

Przypadek 1. Załóżmy, że wektor $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$ jest dodatni. Jeśli Δ nie zawiera żadnej krawędzi przerywanej $a_i - \dots - a_j$, to wszystkie jego krawędzie są ciągłe i na podstawie wniosku 4.29 bigraf Δ jest grafem prostym. Zatem, na podstawie twierdzenia 4.7, Δ jest jednym z

grafów Euklidesa $\tilde{\mathbb{A}}_{n-1}$, $n \geq 3$, $\tilde{\mathbb{D}}_{n-1}$, $n \geq 5$, $\tilde{\mathbb{E}}_6$, $\tilde{\mathbb{E}}_7$, $\tilde{\mathbb{E}}_8$ oraz dodatni wierny wektor $\mathbf{h} \in \mathbb{N}^n$ jest jednym z wektorów (i)-(v) przedstawionych w twierdzeniu 2.20. Stąd wynika, że $1 \leq h_j \leq 6$, dla dowolnego $j \in \{1, \dots, n\}$, oraz $h_s = 1$, dla pewnego $s \in \{1, \dots, n\}$.

Załóżmy teraz, że Δ zawiera krawędź przerywaną $a_i - - - a_j$. Pokażemy najpierw, że istnieje skończony ciąg operatorów inflacji \mathbf{t}_{ab}^- takich, że ich złożenie \mathbf{t}^- przeprowadza bigraf Δ w bigraf $\Delta' := \mathbf{t}^- \Delta$, który nie ma przerywanych krawędzi. Innymi słowy: iterowanie operatorów inflacji $\Delta \mapsto \mathbf{t}_{ab}^- \Delta$ tego ciągu prowadzi po skończonej liczbie kroków do bigrafu Δ' bez przerywanych krawędzi.

Przypuśćmy, przez sprzeczność, że nie ma takiego skończonego ciągu operatorów inflacji \mathbf{t}_{ab}^- , ale istnieje taki nieskończony ciąg inflacji. Ponieważ każdy z operatorów inflacji przeprowadza bigraf P -krytyczny zbioru \mathcal{UBigr}_n na bigraf P -krytyczny zbioru \mathcal{UBigr}_n (na podstawie 2°) oraz zbiór \mathcal{UBigr}_n zawiera tylko skończoną liczbę bigrafów P -krytycznych (na podstawie 1°), to istnieje bigraf P -krytyczny $\tilde{\Delta}$ należący do zbioru \mathcal{UBigr}_n oraz złożony operator inflacji \mathbf{t}^- taki, że bigrafy $\tilde{\Delta}$ oraz $\tilde{\Delta}' := \mathbf{t}^- \tilde{\Delta}$ są równe.

Na podstawie 2°, każda z grup $\text{Ker } q_{\tilde{\Delta}}$ oraz $\text{Ker } q_{\tilde{\Delta}'}$ jest generowana przez dodatni wektor wierny, odpowiednio przez $\tilde{\mathbf{h}}$ oraz $\tilde{\mathbf{h}}'$. Ponadto zachodzą nierówności $0 < \tilde{\mathbf{h}} < \tilde{\mathbf{h}}'$. Z drugiej strony, równość $\tilde{\Delta} = \tilde{\Delta}' = \mathbf{t}^- \tilde{\Delta}$ implikuje równości $\mathbb{Z} \cdot \tilde{\mathbf{h}} = \text{Ker } q_{\tilde{\Delta}} = \text{Ker } q_{\tilde{\Delta}'} = \mathbb{Z} \cdot \tilde{\mathbf{h}}'$, z których wynika równość $\tilde{\mathbf{h}} = \tilde{\mathbf{h}}'$, na podstawie (b), co przeczy nierówności $\tilde{\mathbf{h}} < \tilde{\mathbf{h}}'$.

Z otrzymanej sprzeczności wynika, że istnieje skończony ciąg operatorów inflacji \mathbf{t}_{ab}^- takich, że ich złożenie \mathbf{t}^- przeprowadza bigraf Δ w bigraf główny P -krytyczny $\Delta' := \mathbf{t}^- \Delta$, który nie ma przerywanych krawędzi. Na podstawie 2°, wektor \mathbf{h}' : generujący grupę $\text{Ker } q_{\Delta'}$ jest dodatni i wierny, gdyż spełnia nierówności $0 < \mathbf{h} < \mathbf{h}'$. Na podstawie twierdzenia 4.7, Δ' jest jednym z grafów Euklidesa $\tilde{\mathbb{A}}_{n-1}$, $n \geq 3$, $\tilde{\mathbb{D}}_{n-1}$, $n \geq 5$, $\tilde{\mathbb{E}}_6$, $\tilde{\mathbb{E}}_7$, $\tilde{\mathbb{E}}_8$ oraz dodatni wierny wektor $\mathbf{h}' \in \mathbb{N}^n$ jest jednym z wektorów (i)-(v) przedstawionych w twierdzeniu 2.20. Stąd wynika, że $1 \leq h_j \leq h'_j \leq 6$, dla dowolnego $j \in \{1, \dots, n\}$, oraz $1 \leq h_s \leq h'_s = 1$ (tzn. $h_s = h'_s = 1$), dla pewnego $s \in \{1, \dots, n\}$. Dowód stwierdzenia (c) w przypadku 1 został więc zakończony.

Przypadek 2. Załóżmy, że wektor $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$ nie jest dodatni. Rozważmy bigraf Δ' otrzymany z Δ przez iterowany ciąg inflacji $\Delta \mapsto \mathbf{t}_{a_i}^- \Delta$, dla dowolnego wierzchołka a_i takiego, że współrzędna h_i jest ujemna. Na podstawie twierdzenia 4.22, bigraf Δ' jest główny, P -krytyczny oraz grupa cykliczna $\text{Ker } q_{\Delta'}$ jest generowana przez dodatni wierny wektor $\mathbf{h}' = (h'_1, \dots, h'_n)$, w którym $h'_j = -h_j$, gdy $h_j < 0$, oraz $h'_j = h_j$, gdy $h_j > 0$. Z dowodu w przypadku 1 wynika, że $1 \leq h'_j \leq 6$, dla dowolnego $j \in \{1, \dots, n\}$, oraz $h'_s = 1$, dla pewnego $s \in \{1, \dots, n\}$. Stąd oraz z definicji wektora \mathbf{h}' wynikają nierówności (c1) i (c2) dla wektora \mathbf{h} , co kończy dowód twierdzenia. \square

5. Konstrukcja krawędziowo-dwudzielnych grafów głównych

W tym rozdziale będziemy zajmowali się nieujemnymi grafami krawędziowo-dwudzielnymi $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$, gdzie $n \geq 2$ oraz $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}\}$ jest zbiorem jego $n+1$ wierzchołków a_1, \dots, a_n, a_{n+1} ponumerowanych liczbami naturalnymi $1, \dots, n, n+1$.

Jeśli $v = (v_1, \dots, v_n, v_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ jest dowolnym wektorem, to dla dowolnej liczby $j \in \{1, \dots, n, n+1\}$, oznaczamy symbolem $v^{(j)}$ wektor

$$v^{(j)} := (v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n, v_{n+1}) \in \mathbb{Z}^n.$$

Przypomnijmy też, że symbolem $\Delta^{(j)} = (\Delta_0^{(j)}, \Delta_1^{(j)}) \in \mathcal{UBigr}_n$ oznaczamy podbigrاف bigrafu Δ otrzymany z Δ przez opuszczenie wierzchołka a_j oraz incydentnych z nim krawędzi.

Jednym z głównych celów tego rozdziału jest uogólnienie naszkicowanej w pracy [41, Section 4] konstrukcji $(\Delta', w) \mapsto \Delta := \Delta'[w]$ bigrafu głównego $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$ otrzymanego z danego bigrafu dodatniego $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$ oraz jego pierwiastka $w \in \mathcal{R}_{\Delta'}$. Idea tej konstrukcji naśladuje konstrukcje podane w artykule [16] i rozwijane w naszej pracy [27, Sections 3-4].

Przypomnijmy, że krawędziowo-dwudzielny graf $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$ bez pętli nazywamy **głównym**, jeśli jego funkcjonal całkowity Grama $q_\Delta : \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ (4.4) jest nieujemny oraz grupa $\text{Ker } q_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^{n+1}$ jest cykliczna nieskończona, tzn. istnieje wektor $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n, h_{n+1}) \in \text{Ker } q_\Delta$ różny od zera taki, że $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$.

Rozpocznijmy od następującej ważnej uwagi analogicznej do wniosku 4.29.

Lemat 5.1. *Założmy, że $n \geq 1$ oraz $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$ jest nieujemnym bigrafem bez pętli.*

(a) *Jeśli pomiędzy wierzchołkami $a_i, a_j \in \Delta_0$ istnieje krawędź, to istnieją co najwyżej dwie krawędzie. Innymi słowy: $-2 \leq d_{ij}^\Delta \leq 2$, dla dowolnych wierzchołków $a_i, a_j \in \Delta_0$.*

(b) *Jeśli Δ jest główny oraz $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n, h_{n+1}) \in \text{Ker } q_\Delta$ jest generatorem cyklicznej nieskończonej grupy $\text{Ker } q_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^{n+1}$, to*

- (b1) *przynajmniej dwie współrzędne wektora \mathbf{h} są różne od zera,*
- (b2) *$-6 \leq h_j \leq 6$, dla dowolnego $j \in \{1, \dots, n+1\}$,*
- (b3) *$h_s \in \{-1, 1\}$, dla pewnego $s \in \{1, \dots, n+1\}$.*

Dowód. (a) Założmy, że $n \geq 1$ oraz $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$ jest nieujemnym bigrafem bez pętli. Zatem jego funkcjonal Grama $q_\Delta : \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ jest jednolity i nieujemny. Zatem Δ jest grafem prostym, gdyż $-2 \leq d_{ij}^\Delta \leq 2$, dla dowolnych wierzchołków $a_i, a_j \in \Delta_0$ (na podstawie wniosku 2.16 (d)), co kończy dowód tego punktu.

(b) Aby udowodnić (b1), założmy przez sprzeczność, że jedna i tylko jedna współrzędna wektora \mathbf{h} jest różna od zera; powiedzmy $h_1 \neq 0$ oraz $h_2 = 0, \dots, h_{n+1} = 0$. Ponieważ $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n, h_{n+1}) \in \text{Ker } q_\Delta$, więc $0 = q_\Delta(\mathbf{h}) = h_1^2 \neq 0$ i otrzymujemy sprzeczność.

Aby udowodnić (b2) oraz (b3), udowodnimy najpierw, że jeśli $h_s = 0$, to bigraf $\Delta^{(s)}$ jest główny oraz wektor $\mathbf{h}^{(s)}$ jest niezerowym generatorem grupy $\text{Ker } q_{\Delta^{(s)}} \subseteq \mathbb{Z}^n$.

W tym celu zauważmy, że $q_{\Delta^{(s)}} = q_\Delta^{(s)}$ oraz $q_{\Delta^{(s)}}(\mathbf{h}^{(s)}) = q_\Delta(\mathbf{h}) = 0$, tzn. $\mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^{(s)} \subseteq \text{Ker } q_{\Delta^{(s)}}$. Aby udowodnić inkluzję przeciwną, weźmy dowolny wektor $w \in \text{Ker } q_{\Delta^{(s)}}$ i rozważmy wektor $\hat{w} = (w_1, w_2, \dots, w_{s-1}, 0, w_{s+1}, \dots, w_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1}$. Zatem $q_\Delta(\hat{w}) = q_\Delta^{(s)}(\hat{w}^{(s)}) = q_\Delta^{(s)}(w) = 0$, tzn. $\hat{w} \in \text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$. Innymi słowy $\hat{w} = \lambda \cdot \mathbf{h}$, dla pewnej liczby $\lambda \in \mathbb{Z}$, a stąd $w = \hat{w}^{(s)} = \lambda \cdot \mathbf{h}^{(s)}$, tzn. $w \in \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^{(s)} \subseteq \text{Ker } q_{\Delta^{(s)}}$.

Iterując tę redukcję dla wszystkich $s \in \{1, \dots, n+1\}$ takich, że $h_s = 0$ otrzymamy z Δ bigraf $\tilde{\Delta}$ o co najmniej dwóch wierzchołkach (na podstawie (b1)), który jest główny oraz grupa $\text{Ker } q_{\tilde{\Delta}}$ jest generowana przez wektor $\tilde{\mathbf{h}}$ otrzymany z \mathbf{h} przez opuszczenie wszystkich jego zerowych współrzędnych h_s . Ponieważ wektor \mathbf{h} jest wierny, więc na podstawie twierdzenia

4.29, bigraf $\check{\Delta}$ jest P -krytyczny, co najmniej jedna współrzędna wektora $\check{\mathbf{h}}$ jest równa ± 1 a pozostałe spełniają nierówność (b3). Z konstrukcji wektora $\check{\mathbf{h}}$ wynika, że warunki (b2) oraz (b3) są spełnione dla wektora \mathbf{h} , co kończy dowód lematu. \square

Zapowiedziana wcześniej konstrukcja $(\Delta', w) \mapsto \Delta := \Delta'[w]$ opiera się na następującym twierdzeniu o strukturze bigrafów głównych (porównaj z [27, (3.11)]).

Twierdzenie 5.2. *Załóżmy, że $n \geq 2$ oraz $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$ jest krawędziowo-dwudzielnym grafem bez pętli. Jeśli Δ jest główny, spójny oraz istnieją wektor*

$$\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n, h_{n+1}) \in \text{Ker } q_\Delta \text{ oraz liczba } s \in \{1, \dots, n, n+1\}$$

takie, że $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ oraz $h_s \in \{-1, 1\}$ (zobacz lemat 5.1), to

(a) *bigraf $\Delta^{(s)} = (\Delta_0^{(s)}, \Delta_1^{(s)}) \in \mathcal{UBigr}_n$ jest dodatni i spójny;*

(b) *wektor $w = \mathbf{h}^{(s)} \in \mathbb{Z}^n$ jest pierwiastkiem bigrafu $\Delta^{(s)}$, tzn. $w := \mathbf{h}^{(s)} \in \mathcal{R}_{\Delta^{(s)}}$;*

(c) *jeśli Δ jest P -krytyczny, to wektor $w = \mathbf{h}^{(s)} \in \mathbb{Z}^n$ jest wiernym pierwiastkiem bigrafu $\Delta^{(s)}$;*

(d) *zachodzi równość: $q_\Delta(x) = q_{\Delta^{(s)}}(x^{(s)}) + x_s^2 - 2 \cdot b_{q_{\Delta^{(s)}}}(x^{(s)}, \mathbf{h}^{(s)}) \cdot h_s \cdot x_s$.*

(e) *jeśli $s = n+1$ oraz $h_{n+1} = \varepsilon \in \{-1, 1\}$ (zobacz lemat 5.1 (c2)), to niesymetryczna macierz Grama bigrafu Δ ma postać*

$$\check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} \check{G}_{\Delta'} & \hat{w}^{tr} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{Z})$$

gdzie $\Delta' := \Delta^{(n+1)}$, $\hat{w} = (\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_n) := -\varepsilon w \cdot 2G_{\Delta'} \in \mathbb{Z}^n$ oraz $2G_{\Delta'} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ jest podwojeniem symetrycznej macierzy Grama $G_{\Delta'}$ bigrafu $\Delta' := \Delta^{(n+1)} \in \mathcal{UBigr}_n$. W tym wypadku bigraf główny Δ posiada następującą strukturę:

$$(5.3) \quad \Delta : \quad \begin{array}{c} \text{-----} \\ \Delta' \quad a_s \text{---} \hat{w}_s \text{---} a_{n+1} \\ \text{-----} \end{array} \begin{array}{l} a_j \\ \hat{w}_j \\ a_i \\ \hat{w}_i \end{array}$$

gdzie symbolem $a_i \xrightarrow{\hat{w}_i} a_{n+1}$ oznaczamy zbiór $\Delta^+(a_i, a_{n+1})$ mocy \hat{w}_i wszystkich krawędzi przerywanych pomiędzy a_i oraz a_{n+1} , o ile $\hat{w}_i > 0$, oraz oznaczamy zbiór $\Delta^-(a_i, a_{n+1})$ mocy $-\hat{w}_i$ wszystkich ciągłych krawędzi pomiędzy a_i oraz a_{n+1} , o ile $\hat{w}_i < 0$.

Dowód. (a) Pokażemy najpierw, że bigraf $\Delta^{(s)}$ jest nieujemny. Istotnie, dla dowolnego wektora $u = (u_1, u_2, \dots, u_{s-1}, u_{s+1}, \dots, u_{n+1}) \in \mathbb{Z}^n$ rozważmy wektor

$$\hat{u} = (u_1, u_2, \dots, u_{s-1}, 0, u_{s+1}, \dots, u_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1}.$$

Na podstawie dowodu lematu 5.1, mamy $q_{\Delta^{(s)}}(u) = q_\Delta(\hat{u}) \geq 0$. Aby udowodnić, że bigraf $\Delta^{(s)}$ jest dodatni, wystarczy pokazać, że $\text{Ker } q_{\Delta^{(s)}} = 0$.

W tym celu weźmy $u = (u_1, u_2, \dots, u_{s-1}, u_{s+1}, \dots, u_{n+1}) \in \text{Ker } q_{\Delta^{(s)}}$. Zatem $q_\Delta(\hat{u}) = q_{\Delta^{(s)}}(\hat{u}^{(s)}) = q_{\Delta^{(s)}}(u) = 0$, tzn. $\hat{u} \in \text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$. Stąd wynika, że $u = 0$, gdyż $\hat{u}_s = 0$ oraz $h_s \neq 0$.

Dowód faktu, że bigraf $\Delta^{(s)}$ jest spójny jest dość złożony i trudny. Można go uzyskać przez modyfikację argumentów używanych na stronach 132-133 w pracy [14] oraz w dowodzie Theorem 3.1 w pracy [15].

(b) Rozważmy wektor $\check{\mathbf{h}} = -\text{sgn}(\varepsilon)e_s + \mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_{s-1}, 0, h_{s+1}, \dots, h_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1}$. Zauważmy, że $\check{\mathbf{h}}$ jest pierwiastkiem grafu Δ , gdyż

$$\begin{aligned}
q_{\Delta}(\check{\mathbf{h}}) &= b_{q_{\Delta}}(\check{\mathbf{h}}, \check{\mathbf{h}}) = \\
&= b_{q_{\Delta}}(-\text{sgn}(\varepsilon)e_s, -\text{sgn}(\varepsilon)e_s) - 2b_{q_{\Delta}}(-\text{sgn}(\varepsilon)e_s, \mathbf{h}) + b_{q_{\Delta}}(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = \\
&= b_{q_{\Delta}}(e_s, e_s) = q_{\Delta}(e_s) = 1,
\end{aligned}$$

gdyż $b_{q_{\Delta}}(e_s, \mathbf{h}) = 0$ (na podstawie twierdzenia 2.26 (b)) oraz $b_{q_{\Delta}}(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = q_{\Delta}(\mathbf{h}) = 0$. Stąd wynika, że wektor $\mathbf{h}^{(s)} \in \mathbb{Z}^n$ jest pierwiastkiem grafu $\Delta^{(s)}$, gdyż $q_{\Delta^{(s)}}(\mathbf{h}^{(s)}) = q_{\Delta}(\check{\mathbf{h}}) = 1$.

(c) Jeśli Δ jest P -krytyczny, to wektor \mathbf{h} jest wierny (na podstawie twierdzenia 4.28 oraz założenia $n \geq 2$) co implikuje wierność pierwiastka $w = \mathbf{h}^{(s)} \in \mathbb{Z}^n$ bigrafu $\Delta^{(s)}$.

(d) Dla prostoty zapisu przyjmijmy oznaczenie $q := q_{\Delta}$. Przypomnijmy, że $h_s \in \{-1, 1\}$ oraz $q^{(s)} := q_{\Delta^{(s)}}$. Ponieważ Δ jest nieujemny, więc $b_q(-, \mathbf{h}) = 0$, na podstawie twierdzenia 2.26 (b). Zatem dla $j \neq s$ mamy $0 = b_q(e_j, \mathbf{h}) = b_q(e_j, \mathbf{h} - h_s e_s + h_s e_s) = b_q(e_j, \mathbf{h}^{(s)}) + h_s \cdot b_q(e_j, e_s)$, tzn.,

$$b_q(e_j, e_s) = -h_s \cdot b_{q^{(s)}}(e_j, \mathbf{h}^{(s)}),$$

gdyż $h_s^{-1} = h_s$. Stąd wynikają równości

$$\begin{aligned}
q(x) &= q((x_1, \dots, x_{s-1}, 0, x_{s+1}, \dots, x_{n+1}) + x_s e_s) \\
&= q^{(s)}(x^{(s)}) + x_s^2 + 2 \cdot b_q((x_1, \dots, x_{s-1}, 0, x_{s+1}, \dots, x_{n+1}), x_s e_s) \\
&= q^{(s)}(x^{(s)}) + x_s^2 + \sum_{j \neq s} 2 \cdot b_q(e_j, e_s) \cdot x_j \cdot x_s \\
&= q^{(s)}(x^{(s)}) + x_s^2 - \sum_{j \neq s} 2 \cdot h_s \cdot b_{q^{(s)}}(e_j, \mathbf{h}^{(s)}) \cdot x_j \cdot x_s \\
&= q^{(s)}(x^{(s)}) + x_s^2 - 2 \cdot b_{q^{(s)}}(x^{(s)}, \mathbf{h}^{(s)}) \cdot h_s \cdot x_s
\end{aligned}$$

co kończy dowód stwierdzenia (d), porównaj z dowodem Proposition 3.7 (a)-(b) w naszej pracy [27].

(e) Ponieważ $h_{n+1} = \varepsilon \in \{-1, 1\}$, więc $\widehat{w} = (\widehat{w}_1, \dots, \widehat{w}_n) := -\varepsilon w \cdot 2G_{\Delta'} \in \mathbb{Z}^n$. Zatem druga część stwierdzenia (e) wynika wprost z pierwszej i dowód twierdzenia jest zakończony. \square

5.1. Podstawowa konstrukcja

Wykorzystując opisaną w twierdzeniu 5.2 strukturę krawędziowo-dwudzielnych grafów głównych Δ podamy teraz zapowiadaną wcześniej konstrukcję dowolnego bigrafu głównego. Wzorumy się tu na konstrukcji naszkicowanej w pracy [41, Section 4] oraz konstrukcji P -krytycznych funkcjonałów kwadratowych podanej w naszej pracy [27, Section 3 and 4].

Konstrukcja 5.4. Załóżmy, że $n \geq 2$, dany jest spójny krawędziowo-dwudzielny graf $\Delta' = (\Delta'_0, \Delta'_1) \in \mathcal{UBigr}_n$ o zbiorze wierzchołków $\Delta'_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$, liczba $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ oraz wektor $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{Z}^n$.

1° Definiujemy nowy wektor $\widehat{w} \in \mathbb{Z}^n$ wzorem

$$\widehat{w} = (\widehat{w}_1, \dots, \widehat{w}_n) := -\varepsilon w \cdot 2G_{\Delta'} \in \mathbb{Z}^n$$

gdzie $2G_{\Delta'} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ jest podwojeniem symetrycznej macierzy Grama $G_{\Delta'}$ bigrafu Δ' .

2° Następnie konstruujemy krawędziowo-dwudzielny graf

$$(5.5) \quad \widehat{\Delta}' = \Delta'[w, \varepsilon] := (\widehat{\Delta}'_0, \widehat{\Delta}'_1) \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$$

kształtu (5.3) jako jednopunktowe \widehat{w} -rozszerzenie bigrafu Δ' o jeden wierzchołek a_{n+1} , tzn.

- $\widehat{\Delta}'_0 := \Delta'_0 \cup \{a_{n+1}\} = \{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}\}$

- zbiór $\widehat{\Delta}'_1$ krawędzi bigrafu $\widehat{\Delta}'$ otrzymuje się przez dodanie do zbioru krawędzi Δ'_1 bigrafu

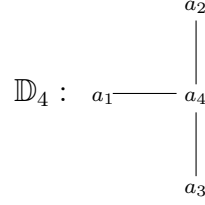
Δ' nowej (multi)krawędzi postaci $a_j \xrightarrow{\widehat{w}_j} a_{n+1}$, dla dowolnego wierzchołka a_j bigrafu Δ' takiego, że liczba całkowita \widehat{w}_j jest różna od zera,

- niesymetryczna macierz Grama bigrafu $\widehat{\Delta}'$ ma postać

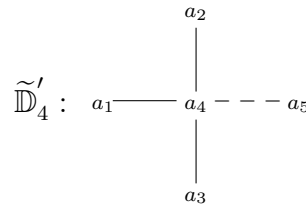
$$(5.6) \quad \check{G}_{\widehat{\Delta}'} = \begin{bmatrix} \check{G}_{\Delta'} & \widehat{w}^{tr} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{Z}).$$

gdzie $\check{G}_{\Delta'} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ jest niesymetryczną macierzą Grama bigrafu Δ' .

Przykład 5.7. (a) Niech $n = 4$, $\varepsilon = -1$, $w = (1, 1, 1, 2) \in \mathbb{Z}^4$ oraz niech $\Delta' = (\Delta'_0, \Delta'_1) \in \mathcal{UBigr}_4$ będzie diagramem Dynkina

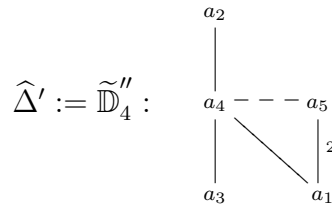


rozważanym jako graf krawędziowo-dwudzielny bez przerywanych krawędzi. Łatwo obliczyć, że $\hat{w} = (0, 0, 0, 1)$. Zatem $\hat{w}_4 = 1$ i konstrukcja $(\Delta', w, \varepsilon = -1) \mapsto \hat{\Delta}'$ daje bigraf



typu Euklidesa $\tilde{\mathbb{D}}_4$.

(b) Niech $n = 4$, $\varepsilon = 1$, $w = (1, 0, 0, 0) \in \mathbb{Z}^4$ oraz niech Δ' będzie grafem Dynkina tak jak w (a). Łatwo obliczyć, że $\hat{w} = (-2, 0, 0, 1)$. Zatem $\hat{w}_1 = -2$, $\hat{w}_4 = 1$ i konstrukcja $(\Delta', w, \varepsilon = 1) \mapsto \hat{\Delta}'$ daje bigraf



Jest to bigraf główny, wektor $\mathbf{h} = (1, 0, 0, 0, 1)$ generuje grupę $\text{Ker } q_{\hat{\Delta}'}$, oraz $\text{cox}_{\hat{\Delta}'}(t) = t^5 - t^4 - t + 1 \in \mathbb{Z}[t]$ jest jego wielomianem Coxetera.

Przykład 5.8. Niech $n = 5$, $\varepsilon = -1$ oraz niech $\Delta' = (\Delta'_0, \Delta'_1) \in \mathcal{UBigr}_5$ będzie krawędziowo-dwudzielnym grafem

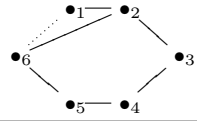
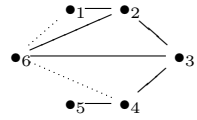
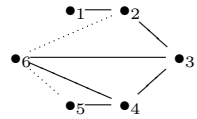
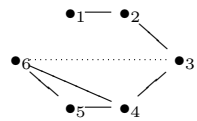
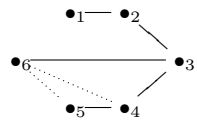
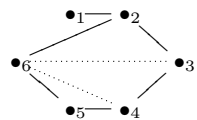
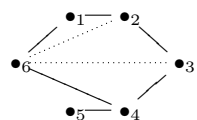
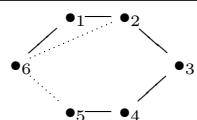
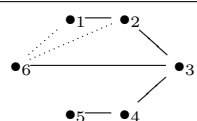
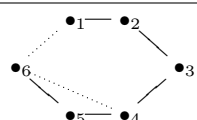
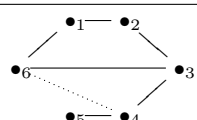
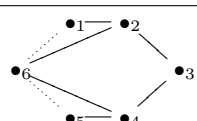
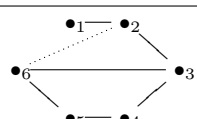


o niesymetrycznej macierzy Grama

$$\check{G}_{\Delta'} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_5(\mathbb{Z})$$

Wykorzystując program Maple łatwo pokazać, że konstrukcja $(\Delta', w, \varepsilon = -1) \mapsto \hat{\Delta}'$, gdzie w jest pierwiastkiem Δ' , pozwala uzyskać następujące bigrafy (pogrupowane według wielomianu Coxetera)

$\widehat{\Delta}'$	w	\widehat{w}	$\text{cox}_{\widehat{\Delta}'}(t)$
	$(-1, -1, -1, -1, -1)$	$(-1, 0, 0, 0, -1)$	$t^6 - t^5 - t + 1$
	$(0, -1, 0, 0, 0)$	$(1, -2, 1, 0, 0)$	$t^6 - t^5 - t + 1$
	$(0, 0, -1, 0, 0)$	$(0, 1, -2, 1, 0)$	$t^6 - t^5 - t + 1$
	$(0, 0, 0, -1, 0)$	$(0, 0, 1, -2, 1)$	$t^6 - t^5 - t + 1$
	$(0, 0, 0, 0, -1)$	$(0, 0, 0, 1, -2)$	$t^6 - t^5 - t + 1$
	$(0, 0, 0, 0, 1)$	$(0, 0, 0, -1, 2)$	$t^6 - t^5 - t + 1$
	$(0, 0, 0, 1, 0)$	$(0, 0, -1, 2, -1)$	$t^6 - t^5 - t + 1$
	$(0, 0, 1, 0, 0)$	$(0, -1, 2, -1, 0)$	$t^6 - t^5 - t + 1$
	$(0, 1, 0, 0, 0)$	$(-1, 2, -1, 0, 0)$	$t^6 - t^5 - t + 1$
	$(1, 0, 0, 0, 0)$	$(2, -1, 0, 0, 0)$	$t^6 - t^5 - t + 1$
	$(1, 1, 1, 1, 1)$	$(1, 0, 0, 0, 1)$	$t^6 - t^5 - t + 1$
	$(-1, -1, -1, -1, 0)$	$(-1, 0, 0, -1, 1)$	$t^6 - t^4 - t^2 + 1$
	$(-1, -1, 0, 0, 0)$	$(-1, -1, 1, 0, 0)$	$t^6 - t^4 - t^2 + 1$

$\hat{\Delta}'$	w	\hat{w}	$\text{cox}_{\hat{\Delta}'}(t)$
	$(0, -1, -1, -1, -1)$	$(1, -1, 0, 0, -1)$	$t^6 - t^4 - t^2 + 1$
	$(0, -1, -1, 0, 0)$	$(1, -1, -1, 1, 0)$	$t^6 - t^4 - t^2 + 1$
	$(0, 0, -1, -1, 0)$	$(0, 1, -1, -1, 1)$	$t^6 - t^4 - t^2 + 1$
	$(0, 0, 0, -1, -1)$	$(0, 0, 1, -1, -1)$	$t^6 - t^4 - t^2 + 1$
	$(0, 0, 0, 1, 1)$	$(0, 0, -1, 1, 1)$	$t^6 - t^4 - t^2 + 1$
	$(0, 0, 1, 1, 0)$	$(0, -1, 1, 1, -1)$	$t^6 - t^4 - t^2 + 1$
	$(0, 1, 1, 0, 0)$	$(-1, 1, 1, -1, 0)$	$t^6 - t^4 - t^2 + 1$
	$(0, 1, 1, 1, 1)$	$(-1, 1, 0, 0, 1)$	$t^6 - t^4 - t^2 + 1$
	$(1, 1, 0, 0, 0)$	$(1, 1, -1, 0, 0)$	$t^6 - t^4 - t^2 + 1$
	$(1, 1, 1, 1, 0)$	$(1, 0, 0, 1, -1)$	$t^6 - t^4 - t^2 + 1$
	$(-1, -1, -1, 0, 0)$	$(-1, 0, -1, 1, 0)$	$t^6 - 2t^3 + 1$
	$(0, -1, -1, -1, 0)$	$(1, -1, 0, -1, 1)$	$t^6 - 2t^3 + 1$
	$(0, 0, -1, -1, -1)$	$(0, 1, -1, 0, -1)$	$t^6 - 2t^3 + 1$

$\widehat{\Delta}'$	w	\widehat{w}	$\text{cox}_{\widehat{\Delta}'}(t)$
	$(0, 0, 1, 1, 1)$	$(0, -1, 1, 0, 1)$	$t^6 - 2t^3 + 1$
	$(0, 1, 1, 1, 0)$	$(-1, 1, 0, 1, -1)$	$t^6 - 2t^3 + 1$
	$(1, 1, 1, 0, 0)$	$(1, 0, 1, -1, 0)$	$t^6 - 2t^3 + 1$

Twierdzenie 5.9. Załóżmy, że $n \geq 2$, dany jest spójny krawędziowo-dwudzielny graf $\Delta' = (\Delta'_0, \Delta'_1) \in \mathcal{UBigr}_n$ o zbiorze wierzchołków $\Delta'_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$, liczba $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ oraz wektor $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{Z}^n$. Niech $\widehat{w} = (\widehat{w}_1, \dots, \widehat{w}_n) := -\varepsilon w \cdot 2G_{\Delta'} \in \mathbb{Z}^n$, gdzie $2G_{\Delta'} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ jest podwojeniem symetrycznej macierzy Grama bigrafu Δ' .

Krawędziowo-dwudzielny graf $\widehat{\Delta}' = \Delta'[w, \varepsilon] := (\widehat{\Delta}'_0, \widehat{\Delta}'_1) \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$ (5.5) posiada następujące własności.

(a) Jeśli $w \neq 0$, to $\widehat{\Delta}'$ jest spójny.

(b) $\Delta'[-w, \varepsilon] = \Delta'[w, -\varepsilon]$.

(c) Jeśli wektor $w = (w_1, \dots, w_n)$ jest pierwiastkiem bigrafu Δ' , to

(c1) funkcjonal kwadratowy Grama $q_{\widehat{\Delta}'} : \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ bigrafu $\widehat{\Delta}'$ jest zdefiniowany wzorem

$$(5.10) \quad \begin{aligned} q_{\widehat{\Delta}'}(x_1, \dots, x_{n+1}) &= q_{\Delta'}(x_1, \dots, x_n) + x_{n+1}^2 - 2 \cdot \varepsilon \cdot b_{q_{\Delta'}}((x_1, \dots, x_n), w) \cdot x_{n+1} = \\ &= q_{\Delta'}(x_1, \dots, x_n) + x_{n+1}^2 + (x_1 \widehat{w}_1 + \dots + x_n \widehat{w}_n) x_{n+1}. \end{aligned}$$

(c2) bigraf $\widehat{\Delta}'$ jest główny oraz $\text{Ker } q_{\widehat{\Delta}'} = \mathbb{Z} \cdot \widehat{\mathbf{h}}$, gdzie $\widehat{\mathbf{h}} = (w_1, \dots, w_n, \varepsilon) \in \mathbb{Z}^{n+1}$.

(d) Jeśli wektor $w = (w_1, \dots, w_n)$ jest wiernym pierwiastkiem bigrafu Δ' , to bigraf $\widehat{\Delta}'$ jest P -krytyczny.

Dowód. (a) Jeśli wektor $w \neq 0$, to również wektor $\widehat{w} \neq 0$, gdyż w przeciwnym wypadku $0 = \widehat{w} = -\varepsilon w \cdot 2G_{\Delta'}$ implikuje równość $w \cdot G_{\Delta'} = 0$, która z kolei implikuje równości $0 = w \cdot G_{\Delta'} \cdot w^{tr} = q_{\Delta'}(w)$. Ponieważ zakładamy, że Δ' jest dodatni, więc funkcjonal $q_{\Delta'}$ jest dodatnio określony (na podstawie wniosku 2.16(b)). Stąd wynika nierówność $q_{\Delta'}(w) > 0$, gdyż $w \neq 0$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że wektor $\widehat{w} = (\widehat{w}_1, \dots, \widehat{w}_n)$ jest różny od zera. Załóżmy, że współrzędna \widehat{w}_s wektora \widehat{w} jest różna od zera. Stąd wynika, że istnieje multikrawędź $a_s \xrightarrow{\widehat{w}_s} a_{n+1}$ bigrafu $\widehat{\Delta}'$ łącząca wierzchołek a_s spójnego bigrafu Δ' z wierzchołkiem a_{n+1} ; zatem $\widehat{\Delta}'$ jest spójny.

(b) Niech $w \in \mathbb{Z}^n$ oraz $\widehat{w} := -\varepsilon w \cdot 2G_{\Delta'} \in \mathbb{Z}^n$. Jeśli $w' = -w \in \mathbb{Z}^n$, to $\widehat{w}' := -\varepsilon w' \cdot 2G_{\Delta'} = -\varepsilon(-w) \cdot 2G_{\Delta'} = \varepsilon w \cdot 2G_{\Delta'} = -\widehat{w}$. Stąd wynika, że bigrafy $\Delta'[w', \varepsilon] = \Delta'[-w, \varepsilon]$ oraz $\Delta'[w, -\varepsilon]$ są identyczne.

(c) Równość (c1) wynika wprost z definicji bigrafu $\widehat{\Delta}'$ oraz jego funkcjonału Grama $q_{\widehat{\Delta}'}$, gdyż

$$\begin{aligned} -2 \cdot \varepsilon \cdot b_{q_{\Delta'}}((x_1, \dots, x_n), w) &= -2 \cdot \varepsilon \cdot b_{q_{\Delta'}}((w_1, \dots, w_n), (x_1, \dots, x_n)) = \\ &= (w_1, \dots, w_n) \cdot (-2 \cdot \varepsilon \cdot G_{\Delta'} \cdot (x_1, \dots, x_n)^{tr}) = \\ &= (\widehat{w}_1, \dots, \widehat{w}_n) \cdot (x_1, \dots, x_n)^{tr} = \\ &= x_1 \widehat{w}_1 + \dots + x_n \widehat{w}_n. \end{aligned}$$

Stąd również łatwo wynika, że niesymetryczna macierz Grama bigrafu $\widehat{\Delta}'$ ma kształt (5.6).

(c2) Załóżmy, że wektor $w = (w_1, \dots, w_n)$ jest pierwiastkiem bigrafu Δ' , tzn. $q_{\Delta'}(w) = 1$. Zauważmy najpierw, że wektor $\widehat{\mathbf{h}} = (w_1, \dots, w_n, \varepsilon) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ należy do $\text{Ker } q_{\Delta'}$, gdyż równości (5.10) implikują

$$\begin{aligned} q_{\widehat{\Delta}'}(\widehat{\mathbf{h}}) &= q_{\Delta'}(w) + \varepsilon^2 - 2 \cdot \varepsilon \cdot b_{q_{\Delta'}}(w, w) \cdot \varepsilon = \\ &= 1 + 1 - 2 \cdot \varepsilon \cdot b_{q_{\Delta'}}(w, w) \cdot \varepsilon = \\ &= 1 + 1 - 2 \cdot q_{\Delta'}(w) = 0. \end{aligned}$$

Pokażemy teraz, że bigraf $\widehat{\Delta}'$ jest główny oraz $\text{Ker } q_{\widehat{\Delta}'} = \mathbb{Z} \cdot \widehat{\mathbf{h}}$. Ponieważ niesymetryczna macierz Grama bigrafu $\widehat{\Delta}'$ ma kształt (5.6), więc podwojenie symetrycznej macierzy Grama bigrafu $\widehat{\Delta}'$ ma postać

$$2G_{\widehat{\Delta}'} = \begin{bmatrix} 2G_{\Delta'} & \widehat{w}^{tr} \\ \widehat{w} & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{Z})$$

Ponieważ Δ' jest dodatni, więc $\det G_{\Delta'} > 0$, na podstawie kryterium Sylwestera. Zauważmy również, że $\det G_{\widehat{\Delta}'} = (1 - w \cdot G_{\Delta'} w^{tr}) \cdot \det G_{\Delta'} = 0$, gdyż $w \cdot G_{\Delta'} w^{tr} = q_{\Delta'}(w) = 1$, na podstawie założenia, zobacz Step 1.1° na stronie 253 pracy [31]. Stąd wynika, że rząd macierzy wymiernej $G_{\widehat{\Delta}'} \in \mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{Q})$ nad ciałem \mathbb{Q} równy n , gdyż z wykładu algebry liniowej wiemy, że wiersze macierzy $G_{\widehat{\Delta}'}$ o numerach $1, \dots, n$ są \mathbb{Q} -liniowo niezależne. Na podstawie twierdzenia 2.26, grupa $\text{rad } q_{\widehat{\Delta}'} \subseteq \mathbb{Z}^{n+1}$ jest wolna rangi $1 = n+1 - n$. Stąd wynika, że jej podgrupa $\mathbb{Z} \cdot \widehat{\mathbf{h}} \subseteq \text{Ker } q_{\widehat{\Delta}'}$ jest wolna rangi 1. Ponieważ $\widehat{h}_{n+1} = \varepsilon = \pm 1$, więc zachodzi równość $\text{Ker } q_{\widehat{\Delta}'} = \mathbb{Z} \cdot \widehat{\mathbf{h}}$.

Aby zakończyć dowód (c2) należy udowodnić, że bigraf $\widehat{\Delta}'$ jest nieujemny. Fakt ten można udowodnić modyfikując dowód kryterium Sylwestera podany na pierwszym roku studiów na wykładzie z algebry liniowej. Inny dowód można też znaleźć na stronach 253-254 (Step 1.2° – 1.3°) w artykule [31].

(d) Ponieważ $n \geq 2$ oraz zakładamy, że w jest wierny, więc wektor $\mathbf{h} = (w_1, \dots, w_n, \varepsilon) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ jest wierny. Zatem bigraf $\widehat{\Delta}' = \Delta'[w, \varepsilon] \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$ jest P -krytyczny, na podstawie (b) oraz twierdzenie 4.30 (a). Dowód twierdzenia został więc zakończony. \square

Następujący wniosek pokazuje, że konstrukcja (5.4) $(\Delta', w, \varepsilon = 1) \mapsto \Delta'[w, \varepsilon = 1]$ definiuje prosty algorytm obliczający wszystkie główne bigrafy $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$, z bigrafów dodatnich $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$, $n \geq 2$, oraz pierwiastków $w \in \mathcal{R}_{\Delta'}$.

Wniosek 5.11. (a) *Z dokładnością do numeracji wierzchołków, dowolny krawędziowo-dwudzielny graf główny $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$ bez pętli, gdzie $n \geq 2$, ma postać $\Delta = \widehat{\Delta}' = \Delta'[w, \varepsilon] \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$, gdzie Δ' jest spójnym dodatnim pełnym podbigrafem bigrafu Δ , $w \in \mathcal{R}_{\Delta'}$ jest pierwiastkiem bigrafu Δ' oraz $\varepsilon = 1$ }.
(b) *Z dokładnością do numeracji wierzchołków, dowolny krawędziowo-dwudzielny graf P -krytyczny $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$ bez pętli, gdzie $n \geq 2$, ma postać $\Delta = \widehat{\Delta}' = \Delta'[w, \varepsilon] \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$, gdzie Δ' jest spójnym dodatnim pełnym podbigrafem bigrafu Δ , $w \in \mathcal{R}_{\Delta'}$ jest wiernym pierwiastkiem bigrafu Δ' oraz $\varepsilon = 1$.**

Dowód. Weźmy $n \geq 2$ oraz dowolny bigraf główny $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$ bez pętli. Na podstawie lematu 5.1, istnieje wektor $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n, h_{n+1}) \in \text{Ker } q_{\Delta}$ taki, że $\text{Ker } q_{\Delta} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h} \subseteq \mathbb{Z}^{n+1}$ oraz $h_s \in \{-1, 1\}$, dla pewnego $s \in \{1, \dots, n+1\}$. Transpozycja $\tau = (s, n+1)$ prowadzi do bigrafu głównego Δ^τ dla którego grupa $\text{Ker } q_{\Delta^\tau}$ jest generowana przez wektor $\mathbf{h}^\tau = (h_1, \dots, h_{s-1}, h_{n+1}, h_{s+1}, \dots, h_n, h_s)$, gdzie $h_s \in \{-1, 1\}$. Zatem z dokładnością do transpozycji $\tau = (s, n+1)$ możemy założyć, że $s = n+1$, tzn. ostatnia współrzędna wektora $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n, h_{n+1}) \in \text{Ker } q_{\Delta}$ jest równa -1 lub 1 .

Niech $\Delta' = \Delta^{(n+1)}$ oraz $w = \mathbf{h}^{(n+1)} \in \mathbb{Z}^n$ będą takie, jak w twierdzeniu 5.2(e). Wtedy Δ' jest spójnym dodatnim pełnym podbigratem bigrafu Δ , $w \in \mathcal{R}_{\Delta'}$ jest pierwiastkiem bigrafu Δ' . Z twierdzenia 5.2(d)-(e), konstrukcji 5.4 oraz twierdzenia 5.9 wynika, że $\Delta = \widehat{\Delta}' = \Delta'[w, \varepsilon]$. Zauważmy, że można przyjąć $\varepsilon = 1$, gdyż w wypadku $\varepsilon = -1$ mamy $\Delta = \Delta'[w, \varepsilon] = \Delta'[-w, -\varepsilon] = \Delta'[-w, 1]$, na podstawie twierdzenia 5.9(b). Korzystamy tu z faktu, że jeśli wektor $w \in \mathbb{Z}^n$ jest pierwiastkiem bigrafu Δ' , to również wektor $-w \in \mathbb{Z}^n$ jest pierwiastkiem bigrafu Δ' .

Ponadto, jeśli Δ jest P -krytyczny, to $w \in \mathcal{R}_{\Delta'}$ jest wiernym pierwiastkiem bigrafu Δ' . \square

Stosując twierdzenie 5.9 oraz wniosek 5.11 otrzymujemy następujący ważny fakt analogiczny do znanego twierdzenia Ovsienki [26].

Wniosek 5.12. *Jeśli $\Delta' \in \Delta \in \mathcal{UBigr}_n$ jest spójnym bigrafem dodatnim bez pętli oraz $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{Z}^n$ jest jego pierwiastkiem, to $-6 \leq w_j \leq 6$, dla dowolnego $j \in \{1, \dots, n\}$.*

Dowód. Zastosujemy metodę użytą w dowodzie Proposition 6.7 pracy [23]. Załóżmy, że $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$ spójnym bigrafem dodatnim bez pętli. Ustalmy jego pierwiastek $w \in \mathbb{Z}^n$ i skonstruujmy bigraf $\widehat{\Delta}' = \Delta'[w, \varepsilon = 1] \in \Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$ postaci (5.3). Na podstawie twierdzenia 5.9, bigraf $\widehat{\Delta}'$ jest główny oraz wektor $\widehat{\mathbf{h}} = (w_1, \dots, w_n, 1) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ generuje grupę $\text{Ker } q_{\Delta'} \subseteq \mathbb{Z}^{n+1}$. Stosując lemat 5.1 (b) do bigrafu głównego $\widehat{\Delta}' \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$ i wektora $\widehat{\mathbf{h}} = (w_1, \dots, w_n, 1) \in \text{Ker } q_{\Delta'} \subseteq \mathbb{Z}^{n+1}$ otrzymujemy nierówności $-6 \leq w_j \leq 6$, dla dowolnego $j \in \{1, \dots, n\}$. \square

Następujący algorytm numeryczno-symboliczny jest bezpośrednim wnioskiem z konstrukcji 5.4 oraz twierdzenia 5.9.

Algorytm 5.12 ("główne"). Wejście: Liczba naturalna $n \geq 2$, dodatni spójny bigraf $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$ bez pętli o n wierzchołkach.

Wyjście: Lista \mathcal{UBigr}_{n+1} wszystkich bigrafów głównych $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$ bez pętli o $n+1$ wierzchołkach.

Etap 1° Obliczamy skończony zbiór $\mathcal{R}_{\Delta'} \subseteq \mathbb{Z}^n$ wszystkich pierwiastków w bigrafu Δ' . Używamy algorytmu ograniczonego zliczania 2.5.2.

Etap 2° Dla każdego wektora $w \in \mathcal{R}_{\Delta'}$ oraz $\varepsilon = 1$ konstruujemy bigraf główny $\widehat{\Delta}' := \Delta'[w, \varepsilon = 1] \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$ oraz jego wielomian Coxetera $\text{cox}_{\widehat{\Delta}'}(t) \in \mathbb{Z}[t]$.

Etap 3° Dla dowolnego bigrafu Δ' skonstruowanego w etapie 2° oraz dla dowolnej transpozycji $\tau = (s, n+1)$ konstruujemy bigraf główny $\Delta^\tau \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$ otrzymany z Δ przez przez transpozycję jego wierzchołków a_s oraz a_{n+1} . Ponadto obliczamy wielomian Coxetera $\text{cox}_{\Delta^\tau}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ bigrafu Δ^τ .

Etap 4° Tworzymy listę wszystkich par $(\Delta^\tau, \text{cox}_{\Delta^\tau}(t))$.

Uwaga 5.13. (i) Na podstawie wniosku 5.11, dowolny spójny krawędziowo-dwudzielny graf główny $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$ bez pętli, gdzie $n \geq 2$, jest jednym z bigrafów obliczonych w etapie 4°, dla pewnego spójnego dodatniego bigrafu $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$. Aby znaleźć pełną listę bigrafów głównych $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$ bez pętli należy zastosować algorytm 5.12 do dowolnego dodatniego spójnego bigrafu $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$ bez pętli o n wierzchołkach.

(ii) Zauważmy, że liczba takich bigrafów jest skończona, gdyż każdy taki bigraf jest prostym grafem oznakowanym.

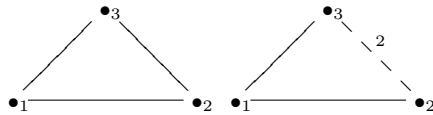
Istotnie, gdyby dodatni spójny bigrafu $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$ nie był prosty, to zawiera multikrawędź $a_i \overset{d}{\text{---}} a_j$, gdzie liczba $d := d_{ij}^{\Delta'}$ jest większa od 1 lub mniejsza od -1 . Ponieważ Δ' jest

dodatni, więc zbiór $\mathcal{R}_{\Delta'}$ jego pierwiastków jest skończony (na podstawie twierdzenia 2.22). Zatem, na podstawie dowodu lematu 3.7, zbiór pierwiastków bigrafu Δ'' indukowanego z Δ' przez wierzchołki a_i oraz a_j jest również skończony. Z drugiej strony, na podstawie części 2° dowodu twierdzenia 3.5 (w rozdziale 3.2), zbiór pierwiastków bigrafu Δ'' jest nieskończony, gdyż $|d| \geq 2$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że zachodzi nierówność $-1 \leq d_{ij}^{\Delta'} \leq 1$, dla dowolnych $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

5.2. Obliczenia algorytmiczne bigrafów głównych o małej liczbie wierzchołków

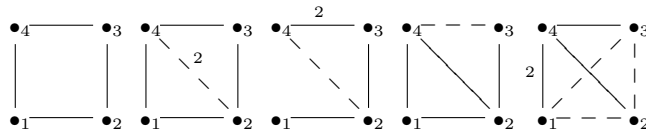
Stosując algorytm 5.12 skonstruujemy w tym podrozdziale wszystkie bigrafy główne o trzech, czterech i pięciu wierzchołkach.

Wniosek 5.14. *Jeśli $n = 2$, to każdy bigraf główny $\Delta \in \mathcal{UBigr}_3$ bez pętli o trzech wierzchołkach jest jednym z bigrafów*



Dowód. Na podstawie uwagi 5.13 (ii), każdy spójny bigraf dodatni $\Delta \in \mathcal{UBigr}_2$ bez pętli o dwóch wierzchołkach jest jednym z bigrafów $\mathbb{A}_2 : a_1 \text{---} a_2$ oraz $\mathbb{A}'_2 : a_1 \text{--} a_2$. Stosując algorytm 5.12 do każdego z tych dwóch bigrafów otrzymamy podaną we wniosku listę bigrafów głównych o trzech wierzchołkach (z dokładnością do permutacji wierzchołków oraz operacji $\Delta \mapsto \mathbf{t}_a^- \Delta$ zamiany znaków). Obliczenia można znaleźć na płycie. \square

Wniosek 5.15. *Jeśli $n = 3$, to każdy bigraf główny $\Delta \in \mathcal{UBigr}_4$ bez pętli o czterech wierzchołkach jest jednym z bigrafów*



Dowód. Łatwo pokazać przez proste obliczenia w Maple, że każdy spójny bigraf dodatni $\Delta \in \mathcal{UBigr}_3$ bez pętli o trzech wierzchołkach jest (z dokładnością do permutacji wierzchołków) jednym z trzech bigrafów liniowych

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_3 &: a_1 \text{---} a_2 \text{---} a_3 \\ \mathbb{A}'_3 &: a_1 \text{--} a_2 \text{---} a_3 \\ \mathbb{A}''_3 &: a_1 \text{--} a_2 \text{--} a_3 \end{aligned}$$

lub jest bigrafem trójkątnym Δ' , którego wszystkie trzy krawędzie są przerywane oraz niesymetryczna macierz Grama ma postać

$$\check{G}_{\Delta'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wielomian $\text{cox}_{\Delta'}(t) = t^3 + t^2 + t + 1$ jest wielomianem Coxetera bigrafu Δ' .

5.3. Konstrukcja algorytmiczna bigrafów dodatnich

Wykorzystując konstrukcję $\Delta' \mapsto \Delta'[w, \varepsilon]$ opisaną w paragrafie 5.1 podamy teraz algorytm konstruujący rekurencyjnie dodatnie bigrafy $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$ z dodatnich bigrafów $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$ oraz pewnego zbioru $\mathcal{W}_{\Delta'}^+ \subseteq \mathbb{Z}^n$ wektorów $w \in \mathbb{Z}^n$ o współrzędnych $w_j \in \{-1, 0, 1\}$. Wykorzystamy tu konstrukcję dodatnich funkcjonałów kwadratowych podaną w naszej pracy [27, Section 4].

Przy ograniczeniu w twierdzeniu 5.9 wektorów $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{Z}^n$ do „specjalnych wektorów” zbioru $\mathcal{W}_{\Delta'}^+$, otrzymamy następującą „dodatnią” wersję tego twierdzenia.

Twierdzenie 5.17. *Załóżmy, że $n \geq 2$, dany jest spójny krawędziowo-dwudzielny graf $\Delta' = (\Delta'_0, \Delta'_1) \in \mathcal{UBigr}_n$ o zbiorze wierzchołków $\Delta'_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$, liczba $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ oraz wektor $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{Z}^n$. Niech $\widehat{w} = (\widehat{w}_1, \dots, \widehat{w}_n) := -\varepsilon w \cdot 2G_{\Delta'} \in \mathbb{Z}^n$, gdzie $2G_{\Delta'} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ jest podwojeniem symetrycznej macierzy Grama bigrafu Δ' . Krawędziowo-dwudzielny graf $\widehat{\Delta}' = \Delta'[w, \varepsilon] := (\widehat{\Delta}'_0, \widehat{\Delta}'_1) \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$ (5.5) posiada następujące własności.*

- (a) *Jeśli $w \neq 0$, to $\widehat{\Delta}'$ jest spójny.*
- (b) $\Delta'[-w, \varepsilon] = \Delta'[w, -\varepsilon]$.
- (c) *Jeśli wektor $w = (w_1, \dots, w_n)$ należy do następującego zbioru*

$$(5.18) \quad \mathcal{W}_{\Delta'}^+ = \left\{ w \in \mathbb{Z}^n, w_1, \dots, w_n \in \{-1, 0, 1\}, w \neq 0 \det \begin{bmatrix} 2G_{\Delta'} & w^{tr} \\ w & 2 \end{bmatrix} > 0 \right\} \subseteq \mathbb{Z}^n,$$

mocy $|\mathcal{W}_{\Delta'}^+| = 3^n - 1$, to

- (c1) *funkcjonał kwadratowy Grama $q_{\widehat{\Delta}'} : \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ bigrafu $\widehat{\Delta}'$ jest zdefiniowany wzorem*

$$(5.19) \quad \begin{aligned} q_{\widehat{\Delta}'}(x_1, \dots, x_{n+1}) &= q_{\Delta'}(x_1, \dots, x_n) + x_{n+1}^2 - 2 \cdot \varepsilon \cdot b_{q_{\Delta'}}((x_1, \dots, x_n), w) \cdot x_{n+1} = \\ &= q_{\Delta'}(x_1, \dots, x_n) + x_{n+1}^2 + (x_1 \widehat{w}_1 + \dots + x_n \widehat{w}_n) x_{n+1}. \end{aligned}$$

- (c2) *bigraf $\widehat{\Delta}'$ jest dodatni oraz niesymetryczna macierz Grama bigrafu $\widehat{\Delta}'$ ma postać*

$$\check{G}_{\Delta'} = \begin{bmatrix} \check{G}_{\Delta'} & \widehat{w}^{tr} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{Z}),$$

gdzie $\Delta' := \Delta^{(n+1)}$.

(d) *Z dokładnością do numeracji wierzchołków, dowolny krawędziowo-dwudzielny spójny graf dodatni $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$ bez pętli, gdzie $n \geq 2$, ma postać $\Delta = \widehat{\Delta}' = \Delta'[w, \varepsilon] \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$, gdzie Δ' jest spójnym dodatnim pełnym podbigrafem bigrafu Δ , $w \in \mathcal{W}_{\Delta'}^+$ jest pewnym wektorem skończonego zbioru $\mathcal{W}_{\Delta'}^+$ oraz $\varepsilon = 1$.*

Dowód. Stwierdzenia (a), (b) oraz (c1) wynikają z twierdzenia 5.9 (a)-(b)-(c1).

(c) Z równości (5.19) wynika, że niesymetryczna macierz Grama bigrafu $\widehat{\Delta}'$ oraz podwojenie symetrycznej macierzy Grama bigrafu $\widehat{\Delta}'$ mają postaci

$$\check{G}_{\widehat{\Delta}'} = \begin{bmatrix} \check{G}_{\Delta'} & \widehat{w}^{tr} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{Z}) \quad \text{oraz} \quad 2G_{\widehat{\Delta}'} = \begin{bmatrix} 2G_{\Delta'} & \widehat{w}^{tr} \\ \widehat{w} & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{Z}),$$

Ponieważ Δ' jest dodatni, więc $\det G_{\Delta'} > 0$ (na podstawie kryterium Sylwestera). Na podstawie założenia, wektor w jest różny od zera i należy do zbioru $\mathcal{W}_{\Delta'}^+$. Stąd wynika, że $\det \begin{bmatrix} 2G_{\Delta'} & w^{tr} \\ w & 2 \end{bmatrix} > 0$. Zatem macierz symetryczna $2G_{\widehat{\Delta}'}$ spełnia warunki Sylwestera i na podstawie kryterium Sylwestera funkcjonał Grama $q_{\widehat{\Delta}'} : \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ jest dodatnio określony. Stąd wynika, że bigraf $\widehat{\Delta}' = \Delta'[w, \varepsilon]$ jest dodatni, co kończy dowód stwierdzenia (c).

Łatwo widać, że dowód (d) jest analogiczny do dowodu wniosku 5.11(a), co kończy dowód twierdzenia. \square

Następujący algorytm jest bezpośrednim wnioskiem z konstrukcji 5.4 oraz twierdzenia 5.17.

Algorytm 5.20 ("dodatnie"). Wejście: Liczba naturalna $n \geq 2$, dodatni spójny bigraf $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$ bez pętli o n wierzchołkach.

Wyjście: Lista \mathcal{UBigr}_{n+1}^+ bigrafów dodatnich $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$ bez pętli o $n+1$ wierzchołkach, powstałych przez rozszerzenie bigrafu Δ' o 1 wierzchołek.

Etap 1° Obliczamy skończony zbiór $\mathcal{W}_{\Delta'}^+ \subseteq \mathbb{Z}^n$.

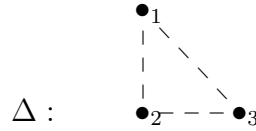
Etap 2° Dla dowolnego wektora $w \in \mathcal{W}_{\Delta'}^+$, konstruujemy bigraf dodatni $\widehat{\Delta}' := \Delta'[w] \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$ oraz jego wielomian Coxetera $\text{cox}_{\widehat{\Delta}'}(t) \in \mathbb{Z}[t]$.

Etap 3° Dla dowolnego bigrafu Δ' skonstruowanego w etapie 2° oraz dla dowolnej transpozycji $\tau = (s, n+1)$ konstruujemy bigraf główny $\Delta^\tau \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$ otrzymany z Δ przez transpozycję jego wierzchołków a_s oraz a_{n+1} . Ponadto obliczamy wielomian Coxetera $\text{cox}_{\Delta^\tau}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ bigrafu Δ^τ .

Etap 4° Tworzymy listę wszystkich par $(\Delta^\tau, \text{cox}_{\Delta^\tau}(t))$.

Uwaga 5.21. Na podstawie twierdzenia 5.17, dowolny spójny krawędziowo-dwudzielny graf dodatni $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$ bez pętli, gdzie $n \geq 2$, jest jednym z bigrafów obliczonych w etapie 4°, dla pewnego spójnego dodatniego bigrafu $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$. Aby znaleźć pełną listę bigrafów dodatnich $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$ bez pętli należy zastosować algorytm 5.20 do dowolnego dodatniego spójnego bigrafu $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$ bez pętli o n wierzchołkach (liczba takich bigrafów jest skończona, gdyż każdy taki bigraf jest prostym grafem oznakowanym, zobacz uwaga 5.13(ii)).

Przykład 5.22. Zastosujmy Algorytm 5.20 do dodatnio określonego bigrafu Δ



którego macierz Grama jest równa

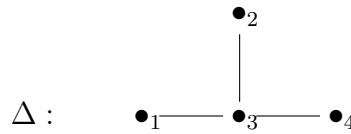
$$\check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{Z}).$$

W poniższej tabeli zamieszczone zostały wartości wektorów μ oraz odpowiadające im bigrafy dodatnie Δ' o 4 wierzchołkach wraz z ich macierzami Grama $\check{G}_{\Delta'} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{Z})$ oraz wielomianami Coxetera.

μ	$\check{G}_{\Delta'}$	Δ'	$\text{COX}_{\Delta'}(t)$
$[1, 1, 1]$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$
$[1, 1, 0]$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^4 + t^3 + t + 1$
$[1, 0, 1]$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^4 + 2t^2 + 1$

μ	$\check{G}_{\Delta'}$	Δ'	$\text{COX}_{\Delta'}(t)$
$[1, 0, 0]$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$
$[0, 1, 1]$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^4 + t^3 + t + 1$
$[0, 1, 0]$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$
$[0, 0, 1]$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$
$[0, 0, -1]$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$
$[0, -1, 0]$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$
$[0, -1, -1]$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^4 + t^3 + t + 1$
$[-1, 0, 0]$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$
$[-1, 0, -1]$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^4 + 2t^2 + 1$
$[-1, -1, 0]$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^4 + t^3 + t + 1$
$[-1, -1, -1]$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$

Przykład 5.23. Analogicznie jak w Przykładzie 5.22 zastosujemy Algorytm 5.20 do dodatnio określonego bigrafu Δ



którego macierz Grama ma postać

$$\check{G}_{\Delta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{Z}).$$

Wykonując identyczne obliczenia otrzymujemy wektory μ oraz odpowiadające im bigrafy dodatnio Δ' o 5 wierzchołkach wraz z ich macierzami Grama $\check{G}_{\Delta'} \in \mathbb{M}_5(\mathbb{Z})$ oraz wielomianami Coxetera.

μ	$\check{G}_{\Delta'}$	Δ'	$\text{COX}_{\Delta'}(t)$
$[-1, 1, 0, 0]$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^5 + t^3 + t^2 + 1$
$[-1, 0, 1, 0]$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^5 + t^4 + t + 1$
$[-1, 0, 1, -1]$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^5 + t^3 + t^2 + 1$
$[-1, 0, 0, 1]$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^5 + t^4 + t + 1$
$[-1, 0, 0, 0]$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^5 + t^4 + t + 1$
$[-1, -1, 1, 0]$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$t^5 + t^4 + t + 1$

6. Algorytmiczna konstrukcja oczkowych kołczanów pierwiastków oraz \mathbb{Z} -kongruencji bigrafów

W artykułach [40]- [42] pokazano, że rozwiązanie problemów 1.1 oraz 1.2 sformułowanych we wstępie rozprawy można zredukować do analizy izomorfizmów kołczanów Φ_Δ -oczkowych stowarzyszonych z bigrafami Δ i zdefiniowanych w artykule [38]. Definicję tę oraz podstawowe fakty o geometriach Φ_Δ -oczkowych pierwiastków bigrafów przypomnimy w paragrafie 6.1.

W dalszym ciągu $n \geq 2$ będzie liczbą naturalną oraz $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$ będzie spójnym krawędziowo-dwudzielnym grafem bez pętli o zbiorze wierzchołków $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$. Transformacją Coxetera bigrafu Δ nazywamy grupowy automorfizm

$$(6.1) \quad \Phi_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n; \quad v \mapsto \Phi_\Delta(v) := v \cdot \text{Cox}_\Delta,$$

gdzie $\text{Cox}_\Delta \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ jest macierzą Coxetera bigrafu Δ . Przypomnijmy z artykułów [38, 40, 41], że dla dowolnej liczby $d \in \mathbb{Z}$ zbiór pierwiastków \mathcal{R}_Δ z liczby d jest Φ_Δ -niezmienniczy, tzn. $\Phi_\Delta(v) \in \mathcal{R}_\Delta$, dla dowolnego wektora $v \in \mathcal{R}_\Delta$.

Głównym celem tego rozdziału jest podanie algorytmicznej konstrukcji Φ_Δ -oczkowego kołczanu pierwiastków $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta) \subseteq \mathbb{Z}^n$ zbudowanego z Φ_Δ -orbit zbioru Φ_Δ -niezmienniczego

$$\mathcal{R}_\Delta := \{v \in \mathbb{Z}^n; q_\Delta(v) = 1\}$$

pierwiastków bigrafu Δ , dla pewnej klasy bigrafów spełniających warunek zdefiniowany przez specjalne „dziwne” cykle. Pokażemy jak przyporządkowanie $\Delta \mapsto \Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta)$ można wykorzystać w rozwiązywaniu problemu 1.2, tzn. konstruowaniu, dla danej pary bigrafów $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$ bez pętli spełniających relację $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$, pewnej macierzy $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ definiującej tę silną \mathbb{Z} -kongruencję Grama $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$, tzn. taką, że $\det B = \pm 1$ oraz $\check{G}_\Delta = B \cdot \check{G}_{\Delta'} \cdot B^{tr}$.

6.1. Graficzne przedstawianie Φ_Δ -orbit pierwiastków

Przypomnijmy teraz podstawowe fakty o Φ_Δ -oczkowych kołczanach pierwiastków bigrafów zdefiniowanych w artykułach [38]-[41].

Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$ będzie spójnym krawędziowo-dwudzielnym grafem bez pętli o zbiorze wierzchołków $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$ oraz niech $\Phi_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ będzie jego transformacją Coxetera.

(a) Jeśli $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest niepustym podzbiorem Φ_Δ -niezmienniczym grupy \mathbb{Z}^n oraz $v \in \mathcal{R}$, to Φ_Δ -orbitą wektora v nazywamy podzbiór $\Phi_\Delta\text{-Orb}(v) = \{\Phi_\Delta^j(v)\}_{j \in \mathbb{Z}}$ zbioru $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z}^n$.

Orbitę $\Phi_\Delta\text{-Orb}(v)$ wektora v będziemy przedstawiać graficznie w postaci nieskończonego grafu

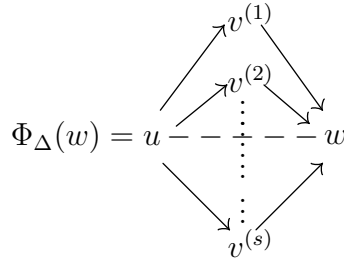
$\mathcal{O}(v) : \dots \text{---} \Phi_\Delta^3(v) \text{---} \Phi_\Delta^2(v) \text{---} \Phi_\Delta(v) \text{---} v \text{---} \Phi_\Delta^{-1}(v) \text{---} \Phi_\Delta^{-2}(v) \text{---} \Phi_\Delta^{-3}(v) \text{---} \dots$
wektorów $\Phi_\Delta^j(v) \in \mathcal{R}$ realizowanych jako punkty płaszczyzny Euklidesa \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, połączone przerywanymi krawędziami.

Definicja 6.2. (a) Wektory $u, v^{(1)}, \dots, v^{(s)}, w \in \mathbb{Z}^n$ tworzą Φ_Δ -oczko szerokości $s \geq 1$ (w przestrzeni Euklidesa \mathbb{R}^n , $n \geq 2$), jeśli spełnione są następujące trzy warunki:

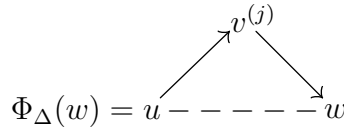
- (i) $u = \Phi_\Delta(w)$;
- (ii) $u + w = v^{(1)} + \dots + v^{(s)}$;
- (iii) wektory $v^{(1)}, \dots, v^{(s)}$ są parami różne oraz żaden z nich nie należy do Φ_Δ -orbity wektora u .

Wektory u oraz w nazywamy odpowiednio początkiem i końcem Φ_Δ -oczka.

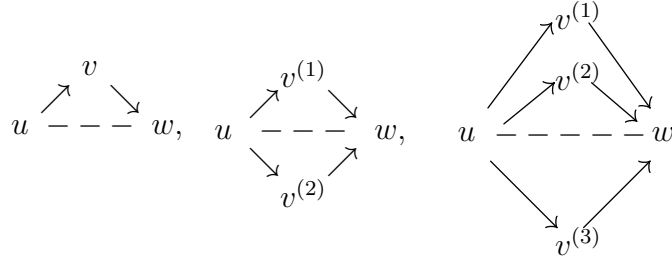
(b) Φ_Δ -oczko wyznaczone przez wektory $u, w, v^{(1)}, \dots, v^{(s)}$ będziemy realizować w postaci następującego kołczanu Φ_Δ -oczkowego w \mathbb{R}^n , $n \geq 2$:



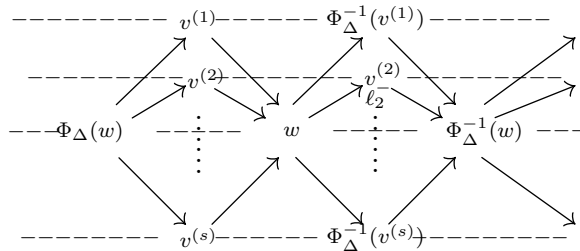
w przestrzeni Euklidesa \mathbb{R}^2 . Składa się on z trójkątów postaci



W szczególności Φ_Δ -oczka szerokości jeden, dwa oraz trzy mają kształt



Jednym z problemów występujących w spektralnej analizie Coxetera grafów krawędziowo-dwudzielnych jest problem konstrukcji (z orbit pierwiastków danego bigrafu Δ) kołczanu Φ_Δ -oczkowego $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta) \subseteq \mathbb{Z}^n$ składającego się z Φ_Δ -oczek następującej postaci (zobacz [38, (3.4)])



Poprzednie definicje zilustrujemy teraz dwoma prostymi przykładami.

Przykład 6.3. Niech $n = 3$ oraz niech Δ będzie pełnym bigrafem trójkątnym o trzech wierzchołkach a_1, a_2, a_3 połączonych trzema krawędziami przerywanymi. Niesymetryczna macierz Grama, macierz Coxetera oraz jej odwrotność mają postaci

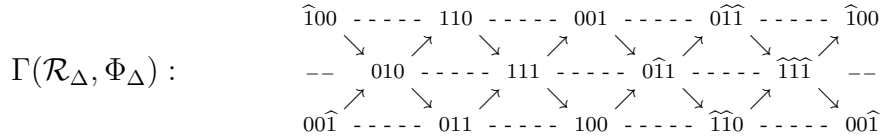
$$\check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{Cox}_\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{Cox}_\Delta^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Łatwo obliczyć, że wielomianem Coxetera bigrafu Δ jest $\text{cox}_\Delta(t) = t^3 + t^2 + t + 1$, zaś $\mathbf{c}_\Delta = 4$ jest jego liczbą Coxetera. Funkcjonał Grama $q_\Delta : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}$ bigrafu Δ jest zdefiniowany przez formę kwadratową

$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 =$ forma kanoniczna.

Stąd wynika, że Δ jest dodatni, zbiór $\mathcal{R}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^3$ jego pierwiastków składa się z 12-tu wektorów, z których można utworzyć 3 równoliczne czteroelementowe Φ_Δ -orbity.

Za pomocą prostych manipulacji kombinatorycznych z tych Φ_Δ -orbit pierwiastków bigrafu Δ można zbudować następujący kołczan Φ_Δ -oczkowy:



gdzie $\widehat{1} = -1$. Dokonując w kołczanie $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta)$ oczywistej identyfikacji modulo 4 (w każdej z orbit) otrzymamy kołczan Φ_Δ -oczkowy $\overline{\Gamma}(\mathcal{R}_{q_\Delta}, \Phi_\Delta)$ o kształcie dwunastoelementowego cylindra szerokości 3.

Przykład 6.4. Skonstruujemy teraz kołczan Φ_Δ -oczkowy $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta) \subseteq \mathbb{Z}^n$ pierwiastków bigrafu Δ , który jest diagramem Dynkina \mathbb{D}_5 . Jego niesymetryczna macierz Grama $\check{G}_{\mathbb{D}_5}$, macierz Coxetera $\text{Cox}_{\mathbb{D}_5}$ oraz jej odwrotność mają postaci

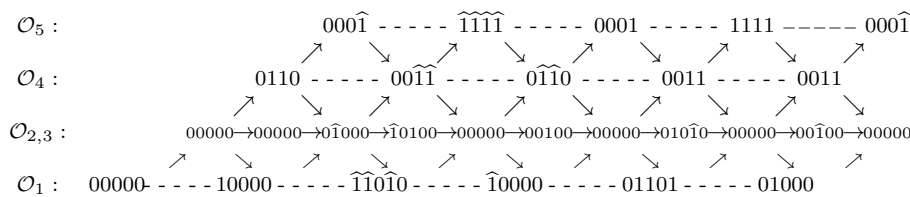
$$\check{G}_{\mathbb{D}_5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{Cox}_{\mathbb{D}_5} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \text{Cox}_{\mathbb{D}_5}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wielomianem Coxetera bigrafu $\Delta = \mathbb{D}_5$ jest $\text{cox}_{\mathbb{D}_5}(t) = t^5 + t^4 + t + 1$, zaś $\mathbf{c}_{\mathbb{D}_5} = 8$ jest jego liczbą Coxetera.

Obliczamy pierwiastki formy kwadratowej $q_{\mathbb{D}_5}(x) = x_1^2 + \dots + x_5^2 - x_1x_3 - x_2x_3 - x_3x_4 - x_4x_5$ przy użyciu algorytmu ograniczonego zliczania. Uzyskujemy 40 pierwiastków, które można przedstawić w postaci rozłącznej sumy pięciu równolicznych $\Phi_{\mathbb{D}_5}$ -orbit

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1 : & 10000 \dots 01100 \dots 10110 \dots 01111 \dots 0\widehat{1}000 \dots \widehat{1}0\widehat{1}00 \dots 0\widehat{1}\widehat{1}\widehat{1}0 \dots \widehat{1}0\widehat{1}\widehat{1}\widehat{1} \\ \mathcal{O}_2 : & 01000 \dots 10100 \dots 01110 \dots 10111 \dots \widehat{1}0000 \dots 0\widehat{1}\widehat{1}00 \dots \widehat{1}0\widehat{1}\widehat{1}0 \dots 0\widehat{1}\widehat{1}\widehat{1}\widehat{1} \\ \mathcal{O}_3 : & 00100 \dots 00010 \dots 00001 \dots \widehat{1}\widehat{1}\widehat{1}\widehat{1}\widehat{1} \dots 00\widehat{1}00 \dots 000\widehat{1}0 \dots 0000\widehat{1} \dots 11111 \\ \mathcal{O}_4 : & 11100 \dots 11210 \dots 11221 \dots 00111 \dots \widehat{1}\widehat{1}\widehat{1}00 \dots \widehat{1}\widehat{1}\widehat{1}0 \dots \widehat{1}\widehat{1}\widehat{1}\widehat{1} \dots 00\widehat{1}\widehat{1}\widehat{1} \\ \mathcal{O}_5 : & 11110 \dots 11211 \dots 00110 \dots 00011 \dots \widehat{1}\widehat{1}\widehat{1}\widehat{1}0 \dots \widehat{1}\widehat{1}\widehat{1}\widehat{1}\widehat{1} \dots 00\widehat{1}\widehat{1}0 \dots 000\widehat{1}\widehat{1} \end{aligned}$$

Za pomocą prostych manipulacji kombinatorycznych z orbit tych konstruujemy następujący Φ_Δ -oczkowy kołczan $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta) \subseteq \mathbb{Z}^n$ pierwiastków bigrafu $\Delta = \mathbb{D}_5$:



gdzie (dla uproszczenia rysunku) w drugim wierszu od dołu umieściliśmy dwie orbity \mathcal{O}_2 oraz \mathcal{O}_3 (oznaczyliśmy je symbolem $\mathcal{O}_{2,3}$:), których wektory łącznie z wektorami orbit \mathcal{O}_1 oraz \mathcal{O}_4 tworzą oczka szerokości 3.

6.2. Idea algorytmu konstruującego kołczan Φ_Δ -orbit pierwiastków

W artykułach [40]-[41] oraz [12]-[15] buduje się algorytmy kombinatoryczne pozwalające konstruować Φ_Δ -oczkowe kołczany $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta) \subseteq \mathbb{Z}^n$ pierwiastków, dla klas bigrafów Δ bez pętli spełniających pewne dodatkowe warunki. Jednym z nich jest tzw. „mesh toroidal algorithm” zdefiniowany w pracach [39]-[40].

W naszym artykule [19] definiujemy algorytm (przestawiony w tej rozprawie jako algorytm 6.11) konstruujący kanonicznie pewien kołczan Φ_A -oczkowy $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_A) \subseteq \mathbb{Z}^n$ pierwiastków, dla klasy dodatnich bigrafów Δ bez pętli, w którym automorfizm Coxetera $\Phi_\Delta : \mathcal{R}_\Delta \rightarrow \mathcal{R}_\Delta$ zastąpiono przez automorfizm Coxetera $\Phi_A : \mathcal{R}_\Delta \rightarrow \mathcal{R}_\Delta$ zdefiniowany dla danej quasi-trójkątnej morsyfikacji macierzowej $A \in \mathbf{Mor}_\Delta$ w sensie [40] bigrafu Δ , tzn. macierzy $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ o wyznaczniku 1 spełniającej warunek $A + A^{tr} = 2G_\Delta$.

Przykładem takiej morsyfikacji jest macierz $A = \check{G}_\Delta$, dla której automorfizm Coxetera $\Phi_A : \mathcal{R}_\Delta \rightarrow \mathcal{R}_\Delta$ jest identyczny z automorfizmem Coxetera $\Phi_\Delta : \mathcal{R}_\Delta \rightarrow \mathcal{R}_\Delta$ bigrafu Δ .

Celem tego rozdziału jest przypomnienie konstrukcji wspomnianego wyżej algorytmu podanego w artykule [19]. Aby uniknąć w tym przedstawieniu dość żmudnych przygotowań technicznych i kombinatorycznych używanych w [19], przedstawimy ideę tego algorytmu w wypadku, gdy $A = \check{G}_\Delta$ oraz Δ spełnia pewne dodatkowe warunki.

W całym rozdziale zakładamy, że $n \geq 2$, $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$ jest spójnym krawędziowo-dwudzielnym grafem bez pętli o zbiorze wierzchołków $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$ oraz $\Phi_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ jest jego transformacją Coxetera. Będziemy też zakładać, że Δ jest dodatni, co implikuje, że Δ jest bigrafem prostym, tzn. zachodzi nierówność $-1 \leq d_{ij}^{\Delta'} \leq 1$, dla dowolnych $i, j \in \{1, \dots, n\}$, zobacz uwaga 5.13.

Zgodnie z terminologią stosowaną w naszej pracy [19] wprowadzamy następującą definicję.

Definicja 6.5. Niech $n \geq 2$, $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$, $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$ i $\Phi_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ będą takie, jak ustalono w przedmowie do tej definicji.

(a) Cykl długości ≥ 3 krawędzi w Δ nazywamy cyklem prostym, jeśli nie zawiera właściwego podcyklu długości ≥ 3 .

(b) Niech $\vec{\Delta}$ będzie (bi)kołczanem otrzymanym z bigrafu Δ przez zdefiniowanie orientacji krawędzi bigrafu Δ następująco:

- jeśli istnieje krawędź ciągła $a_i \text{---} a_j$, to zastępujemy ją strzałką $a_i \rightarrow a_j$, gdy $i < j$;
- jeśli istnieje krawędź przerywana $a_r \text{---} a_s$, to zastępujemy ją strzałką przerywaną $a_r \text{---} \rightarrow a_s$, gdy $r < s$, zobacz [41, Remark 2.2].

(c) Mówimy, że Δ nie posiada dziwnych cykli prostych, jeśli w Δ nie ma krawędzi przerywanych lub każdy cykl prosty (długości ≥ 3) w kołczanie $\vec{\Delta}$ ma postać

$$\begin{array}{ccc} \circ & \text{---} & \circ \\ \downarrow & & \uparrow \\ \circ & \rightarrow \circ \rightarrow \dots \rightarrow \circ & \rightarrow \circ \end{array}$$

Przykład 6.6. Rozważmy następującą parę bigrafów

$$\Delta : \begin{array}{ccc} \bullet 2 & \text{---} & \bullet 3 \\ | & & | \\ \bullet 1 & \text{---} & \bullet 4 \end{array} \quad \text{oraz} \quad \Delta' : \begin{array}{ccc} \bullet 1 & \text{---} & \bullet 3 \\ | & & | \\ \bullet 2 & \text{---} & \bullet 4 \end{array}$$

Zauważmy, że Δ' otrzymaliśmy z Δ przez permutację $\sigma = (1, 2)$ jego wierzchołków oraz

$$\bullet \check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{Cox}_\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\bullet \check{G}_{\Delta'} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{Cox}_{\Delta'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

- $\text{cox}_\Delta(t) = t^4 + t^3 + t + 1 = \text{cox}_{\mathbb{D}_4}(t)$, $\text{specc}_\Delta = \{-1, -1, \frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\}$, $\mathbf{c}_\Delta = 6 = \mathbf{c}_{\mathbb{D}_4}$,
- $\text{cox}_{\Delta'}(t) = t^4 + 2t^2 + 1$, $\text{specc}_{\Delta'} = \{-\mathbf{i}, -\mathbf{i}, \mathbf{i}, \mathbf{i}\}$, $\mathbf{c}_{\Delta'} = 4$,
- $q_\Delta(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2 - x_1x_4 - x_2x_3 + x_3x_4$

Idea zapowiadanego algorytmu podobna jest do algorytmicznej konstrukcji postprojektywnej składowej \mathcal{P}_R kołczanu Auslandera-Reiten $\Gamma(\text{mod } R, \Phi_R)$ podanej w [1, Chapter IX.3] dla dowolnej K -algebry dróg $R = KQ$ kołczanu Dynkina Q lub kołczanu Euklidesa Q , gdzie K jest ciałem algebraicznie domkniętym. Idea ta wykorzystana została w artykule [39] w dowodzie następującego twierdzenia.

Twierdzenie 6.7. *Załóżmy, że $n \geq 2$, $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$ jest jednym z grafów Dynkina $\Delta \in \{\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ przedstawionych w Tabeli 1.1, $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$ jest zbiorze wierzchołków Δ , $\Phi_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ jest transformacją Coxetera oraz \mathbf{c}_Δ jest liczbą Coxetera bigrafu Δ podaną w zestawieniu (4.16).*

(a) *Zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$ bigrafu Δ jest skończony i jest rozłączną sumą n równolicznych Φ_Δ -orbit, każda długości \mathbf{c}_Δ .*

(b) *Ze zbioru wszystkich Φ_Δ -orbit pierwiastków bigrafu Δ konstruuje się kanonicznie Φ_Δ -oczkowy kołczan pierwiastków $\Gamma_{kan}(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta) \subseteq \mathbb{Z}^n$ rozszerzający kołczan Auslandera-Reiten $\Gamma(\text{mod } R, \Phi_R)$ K -algebry $R = K\bar{\Delta}$ dróg kołczanu Dynkina $\bar{\Delta}$ w sensie definicji 6.5(b).*

Dowód. Niech $\bar{\Delta}$ będzie kołczanem Dynkina grafu Dynkina Δ (w sensie definicji 6.5(b)) oraz niech $R = K\bar{\Delta}$ będzie K -algebrą dróg kołczanu $\bar{\Delta}$. Na podstawie wyników podanych w [1, Chapter IX.3], kołczan Auslandera-Reiten $\Gamma(\text{mod } R, \Phi_R)$ jest skończony i jest równy swojej składowej postprojektywnej \mathcal{P}_R , której konstrukcja podana jest również w [1, Chapter IX.3]. Wektory wymiaru modułów nierozkładalnych w $\text{mod } R$ pokrywają się z dodatnimi pierwiastkami kołczanu $\bar{\Delta}$; równoważnie z dodatnimi pierwiastkami grafu Dynkina Δ , na podstawie twierdzenia Gabriela udowodnionego w [1, Chapter VII]. Ponieważ $\Phi_R = \Phi_D$, więc teza twierdzenia wynika wprost z Theorem 4.7 artykułu [38]. \square

Zapowiadany wcześniej algorytm poprzedzimy następującym twierdzeniem opisującym m.in. efekt końcowy działania tego algorytmu, zobacz [19, Theorem 1.10].

Twierdzenie 6.8. *Załóżmy, że $n \geq 2$, $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$ jest spójnym krawędziowo-dwudzielnym grafem bez pętli o zbiorze wierzchołków $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$ oraz $\Phi_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ jest jego transformacją Coxetera. Załóżmy ponadto, że Δ jest dodatni, nie posiada dziwnych cykli prostych oraz graf Dynkina $D \in \{\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ jest typem Dynkina bigrafu Δ , tzn. D jest jednym z grafów Tabeli 1.1 oraz $D = D\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta$ jest grafem Dynkina otrzymanym ze spójnego dodatniego bigrafu Δ w wyniku algorytmu inflacyjnego, zobacz uwaga po twierdzeniu 4.24.*

(a) *$\text{cox}_\Delta(t) = \text{cox}_D(t) \in \mathbb{Z}[t]$, $\text{specc}_\Delta = \text{specc}_D$ oraz wielomian Coxetera $\text{cox}_\Delta(t)$ bigrafu Δ jest wielomianem $\text{cox}_D(t)$ w zestawieniu (4.16).*

(b) *Zbiór pierwiastków \mathcal{R}_Δ bigrafu Δ jest równoliczny ze zbiorem pierwiastków \mathcal{R}_D grafu D oraz liczba Coxetera \mathbf{c}_Δ bigrafu Δ jest równa liczbie Coxetera \mathbf{c}_D grafu D .*

(c) *Istnieje Φ_Δ -oczkowy kołczan pierwiastków $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta) \subseteq \mathbb{Z}^n$ oraz istnieje macierz $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ o wyznaczniku $\det B = \pm 1$ takie, że*

(c1) *macierz $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ definiuje silną \mathbb{Z} -kongruencję Grama $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} D$, tzn. $\check{G}_D = B \cdot \check{G}_\Delta \cdot B^{\text{tr}}$,*

(c2) *przemienny jest diagram*

$$(6.9) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{\Phi_\Delta} & \mathbb{Z}^n, \\ h_B \downarrow \cong & & \cong \downarrow h_B \\ \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{\Phi_D} & \mathbb{Z}^n, \end{array}$$

gdzie $h_B : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ jest izomorfizmem grup zdefiniowanym wzorem $h_B(v) = v \cdot B$, dla $v \in \mathbb{Z}^n$.

(c3) ograniczenie izomorfizmu $h_B : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ do kołczanu pierwiastków $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta) \subseteq \mathbb{Z}^n$ definiuje izomorfizm kołczanów oczkowych

$$(6.10) \quad h_B : \Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta) \xrightarrow{\cong} \Gamma_{kan}(\mathcal{R}_D, \Phi_D),$$

gdzie $\Gamma_{kan}(\mathcal{R}_D, \Phi_D) \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest kanonicznym Φ_D -oczkowym kołczanem pierwiastków opisanym w twierdzeniu 6.7.

(d) Φ_Δ -oczkowy kołczan pierwiastków $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta) \subseteq \mathbb{Z}^n$ oraz macierz $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ spełniające warunki stwierdzenia (b) otrzymuje się w wyniku działania algorytmu 6.11 przedstawionego w następnym paragrafie i zastosowanego do bigrafu Δ .

Dowód tego twierdzenia jest długi i złożony. Jego szczegóły można znaleźć w rozdziale 4.4 naszej publikacji [19]. \square

6.3. Konstrukcja algorytmu oraz przykłady jego zastosowań

Jak już wspomnieliśmy wcześniej, konstrukcję zapowiadanego algorytmu podano w naszym artykule [19, Algorithm 3.1] w sytuacji nieco ogólniejszej niż zapowiadamy w twierdzeniu 6.8. Przedstawimy teraz zmodyfikowaną wersję algorytmu [19, Algorithm 3.1] i dostosowaną do założeń przyjętych w twierdzeniu 6.8. Wersję tego algorytmu dla zbiorów częściowo uporządkowanych można znaleźć w artykule [20].

Algorytm 6.11. Wejście: (a) Liczba naturalna $n \geq 2$.

(b) Spójny krawędziowo-dwudzielny graf $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$ bez pętli o zbiorze wierzchołków $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$.

(c) Zakładamy tak jak w twierdzeniu 6.8, że Δ jest dodatni oraz nie posiada dziwnych cykli prostych.

(d) Bikołczan $Q := \vec{\Delta}$ stowarzyszony z bigrafem Δ w definicji 6.5.

(e) Macierz $A := \check{G}_\Delta \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, tzn. niesymetryczna macierz Grama bigrafu Δ .

(f) Transformacja Coxetera $\Phi_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ bigrafu Δ .

Wyjście: (a) Typ Dynkina $D \in \{\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ bigrafu Δ , tzn. D jest jednym z grafów Tabeli 1.1 oraz $D = D\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta$ jest grafem Dynkina otrzymanym ze spójnego dodatniego bigrafu Δ w wyniku algorytmu inflacyjnego, zobacz uwaga po twierdzeniu 4.24.

(b) Φ_Δ -oczkowy kołczan pierwiastków $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta) \subseteq \mathbb{Z}^n$ oraz macierz $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ o wyznaczniku $\det B = \pm 1$ o własnościach (b1)-(b3) zawartych w twierdzeniu 6.8.

Etap 1° Używając algorytmu 7.2, sprawdzamy, czy Δ jest dodatni i spójny.

Etap 2° Używając algorytmów 7.4 oraz 7.5 obliczamy skończony zbiór $\mathcal{R}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$ pierwiastków bigrafu Δ , jego wielomian Coxetera $\text{cox}_\Delta(t) \in \mathbb{Z}[t]$ oraz liczbę Coxetera \mathbf{c}_Δ .

Etap 3° Stosując algorytm inflacyjny 7.6 realizujący efekt opisany w twierdzeniu 4.24(a) obliczamy typ Dynkina $D := D\Delta \in \{\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ bigrafu Δ .

Etap 4° Sprawdzamy, czy Δ nie posiada dziwnych cykli prostych.

Etap 5° Dla bikołczanu $Q := \vec{\Delta}$, obliczamy jego wektory projektywne oraz p_1, \dots, p_n oraz jego wektory radykałowe r_1, \dots, r_n bikołczanu $Q = \vec{\Delta}$, zdefiniowane następująco (zobacz [19, Section 2.2]).

Jeśli $d = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ jest pewną zorientowaną drogą w Q (zawierającą strzałki obu typów), to definiujemy wektor $v_d \in \mathbb{Z}^n$ wzorami

$$v_d(x_i) = (-1)^{i-1} d_{x_1, x_1}^Q \cdot d_{x_1, x_2}^Q \cdot d_{x_2, x_3}^Q \cdot \dots \cdot d_{x_{i-1}, x_i}^Q;$$

$$v_d(j) = 0, \text{ jeśli } j \notin \{x_1, \dots, x_k\}.$$

Dla dowolnego $a_i \in Q_0$, definiujemy **wektor projektywny**

$$p_i = (p_i(1), \dots, p_i(n)) \in \mathbb{Z}^n$$

bikołczanu Q wzorem $p_i(j) = \sum_d v_d(j)$, gdzie sumujemy po wszystkich drogach d z wierzchołka a_i do a_j . Dla dowolnego $a_i \in Q_0$, definiujemy **wektor radykałowy**

$$r_i = (r_i(1), \dots, r_i(n)) \in \mathbb{Z}^n$$

bikołczanu Q wzorem $r_i = p_i - e_i$, gdzie p_i jest wektorem projektywnym.

Etap 6° Stosując procedurę 6.12 „Signs of vertices” obliczamy wektor c .

Etap 7° Indukcyjnie konstruujemy:

- listę uporządkowaną $L[i]$, dla $i = 1, \dots, n$;
- kołczan $G^i = (G_0^i, G_1^i)$, dla $i = 0, 1, 2, \dots$;
- kołczan $\Gamma^i = (\Gamma_0^i, \Gamma_1^i)$, dla $i = 0, 1, 2, \dots$;
- łańcuch zbiorów $\mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{P}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{P}_k \subseteq c\mathcal{P} =: \{c_1 p_1, \dots, c_n p_n\}$.

Etap 7.1° Przyjmujemy $L[i] := [c_i p_i]$, dla $i = 1, \dots, n$.

Etap 7.2° Przyjmujemy

$$\mathcal{P}_0 = G_0^0 = \{c_i p_i \in \mathcal{P} ; r_i = 0\} \quad \text{oraz} \quad \Gamma_0^0 = \Gamma_1^0 = G_1^0 = \emptyset.$$

Etap 7.3° Przyjmujemy

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &:= \{c_i p_i ; r_i \neq 0 \text{ oraz } c_i r_i^j \in G_0^0, \text{ dla } j = 1, \dots, k_i\}, \\ \mathcal{P}_1 &:= G_0^1 := G_0^0 \cup \mathcal{C}_1, \\ \Gamma_0^1 &= \Gamma_1^1 = \emptyset \\ G_1^1 &:= \{c_i r_i^j \rightarrow c_i p_i ; \text{ dla dowolnego } c_i p_i \in \mathcal{C}_1 \text{ oraz } j = 1, \dots, k_i\}. \end{aligned}$$

Etap 7.4° Załóżmy, że $G^i, \Gamma^i, \mathcal{P}_i$ są zdefiniowane dla $i = 0, \dots, m-1, m \geq 2$. Definiujemy

$$\begin{aligned} \mathcal{P}'_m &= \{c_i p_i \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{m-1} ; r_i \neq 0 \text{ oraz } c_i r_i^j \in G_0^{m-1} \text{ dla } j = 1, \dots, k_i\} \\ \mathcal{P}_m &= \mathcal{P}'_m \cup \mathcal{P}_{m-1}, \\ \mathcal{C}_m &= \mathcal{P}'_m \cup \left\{ z = -x + \sum_{x \rightarrow y} y ; y \in \mathcal{C}_{m-1} \right\}, \\ G_0^m &= G_0^{m-1} \cup \mathcal{C}_m \\ G_1^m &= \left\{ r_i^j \rightarrow p_i ; \text{ dla dowolnego } p_i \in \mathcal{C}_m \text{ oraz } j = 1, \dots, k_i \right\} \\ &\quad \cup \left\{ y \rightarrow z ; \text{ dla dowolnego } y \text{ takiego, że } z = -x + \sum_{x \rightarrow y} y \right\}. \end{aligned}$$

Ponadto, jeśli $\mathcal{P}_m \neq c\mathcal{P}$, $z = -x + \sum_{x \rightarrow y} y$ oraz $x \in L[i]$, to dodajemy wektor z na końcu listy $L[i]$ oraz opuszczamy początkowy wektor listy $L[i]$.

Jeśli $\mathcal{P}_m \neq c\mathcal{P}$, to przyjmujemy $\Gamma_0^m = \Gamma_1^m = \emptyset$; w przeciwnym wypadku przyjmujemy

$$\Gamma_0^m = \Gamma_0^{m-1} \cup \mathcal{C}_m$$

oraz przyjmujemy

$$\Gamma_1^m = \Gamma_1^{m-1} \cup \{y \rightarrow z ; \text{ dla dowolnego } y \rightarrow z \in G_1^{m-1} \text{ takiego, że } y, z \in \Gamma_0^{m-1} \cup \Gamma_0^m\}.$$

W wypadku, gdy $\mathcal{P}_m = c\mathcal{P}$, $z = -x + \sum_{x \rightarrow y} y$ oraz $x \in L[i]$, dodajemy wektor z na końcu listy $L[i]$.

Etap 8° Jeśli $m \geq 2$ jest taką liczbą, że $\Gamma_0^m = \mathcal{R}_\Delta$, to algorytm kończy pracę i na wyjściu otrzymujemy

$$\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta) := \Gamma^m \subseteq \mathbb{Z}^n.$$

Uwaga. Na podstawie wyników pracy [19], algorytm osiąga stan $\Gamma_0^m = \mathcal{R}_\Delta$, dla pewnej liczby $m \geq 2$. Ponadto konstruuje macierz $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ o wyznaczniku $\det B = \pm 1$ taką, że

$\check{G}_D = B \cdot \check{G}_\Delta \cdot B^{tr}$, tzn. definiującą silną \mathbb{Z} -kongruencję Grama $D \approx_{\mathbb{Z}} \Delta$ bigrafu Δ z grafem Dynkina $D := D\Delta$. \square

W Etapie 6° algorytmu 6.11 wykorzystujemy następującą procedurę pomocniczą, zobacz [19, Section 2.4].

Procedura 6.12 („Signs of vertices”).

Wejście: (a) Liczba naturalna $n \geq 2$.

(b) Spójny krawędziowo-dwudzielny graf $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$ bez pętli o zbiorze wierzchołków $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$.

(c) Zakładamy tak jak w twierdzeniu 6.8, że Δ jest dodatni oraz nie posiada dziwnych cykli prostych.

(d) Bikołczan $Q := \vec{\Delta}$ stowarzyszony z bigrafem Δ w definicji 6.5.

Wyjście: Wektor $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{Z}^n$ o współrzędnych $c_j = c[j] \in \{-1, 1\}$.

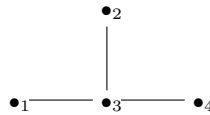
```

1.  c[n]:=1
2.  for i:=1 to n-1 do
3.    c[i]:=0
4.  end do
5.  J:=[n]; I:={}
6.  while I<>{1,...,n} do
7.    i:=Dequeue(J)
8.    I:=I union {i}
9.    for (j takie, że istnieje ciągła krawędź między i oraz j) do
10.     if c[j]=0 then
11.       Enqueue(J,j)
12.       c[j]:=c[i]
13.     end if
14.   end do
15.   for i from {1,2,...,n}\I do
16.     if J={} then
17.       if (istnieje przerywana krawędź między wierzchołkami i oraz j dla pewnego j należącego do I) then
18.         Enqueue(J,i)
19.         c[i]:=-c[j]
20.       end if
21.     end if
22.   end do
23. end do

```

Teraz zilustrujemy działanie algorytmu 6.11 na kilku przykładach grafów krawędziowo-dwudzielnych $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$. Rozważmy najpierw bigrafy występujące w przykładzie 6.6.

Przykład 6.13. Niech $n = 4$ oraz niech $\Delta = D$ będzie grafem Dynkina



którego niesymetryczna macierz Grama, macierz Coxetera oraz bikołczan $\vec{\Delta}$ mają postaci:

$$\check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{Cox}_\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{\Delta} : \begin{array}{c} \bullet_2 \\ \downarrow \\ \bullet_1 \longrightarrow \bullet_3 \longrightarrow \bullet_4 \end{array}$$

Jest to bigraf dodatni, nie posiada dziwnych cykli prostych, $\text{cox}_\Delta(t) = t^4 + t^3 + t + 1$, $\mathbf{c}_\Delta = 6$, zbiór jego pierwiastków $\mathcal{R}_\Delta = \{v \in \mathbb{Z}^4; q_\Delta(v) = 1\}$ składa się z 24 wektorów, jest rozłączną sumą czterech Φ_Δ -orbit, każda długości $\mathbf{c}_\Delta = 6$.

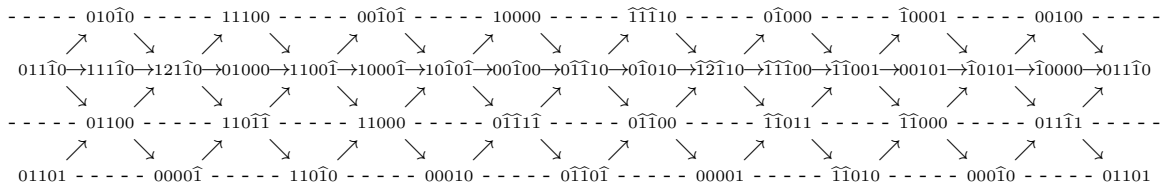
\mathcal{R}_Δ zawiera cztery wektory projektywne: $p_1 = (1, 0, 1, 1)$, $p_2 = (0, 1, 1, 1)$, $p_3 = (0, 0, 1, 1)$, $p_4 = (0, 0, 0, 1)$,

$$\check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{Cox}_\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{\Delta} :$$

Jest to dodatni bigraf, który nie posiada dziwnych cykli prostych, $\text{cox}_\Delta(t) = t^5 + t^4 + t + 1$, $\mathbf{c}_D = 6$, zbiór jego pierwiastków $\mathcal{R}_\Delta = \{v \in \mathbb{Z}^5; q_\Delta(v) = 1\}$ składa się z 40 wektorów, jest rozłączną sumą pięciu Φ_Δ -orbit, każda długości $\mathbf{c}_\Delta = 8$. Zbiór \mathcal{R}_Δ zawiera następujące pięć wektorów projektywnych: $p_1 = (1, 1, 1, -1, 0)$, $p_2 = (0, 1, 1, -1, 1)$, $p_3 = (0, 0, 1, 0, 1)$, $p_4 = (0, 0, 0, -1, 0)$, $p_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$.

oraz następujące pięć wektorów radykałowych: $r_1 = (0, 1, 1, -1, 0)$, $r_2 = (0, 0, 1, -1, 1)$, $r_3 = (0, 0, 0, 0, 1)$, $r_4 = (0, 0, 0, 0, 0)$, $r_5 = (0, 0, 0, 0, 0)$.

Stosując algorytm 6.11 do Δ otrzymujemy następujący kołczan Φ_Δ -oczkowy $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta)$ leżący na cylindrze:



7. Dodatek

W rozdziale tym zamieszczone zostały implementacje algorytmów omówionych we wcześniejszych rozdziałach, zrealizowane w programie Maple. Implementacje te można również znaleźć na załączonej do pracy płycie.

7.1. Kryterium Sylwestera

Algorytm 7.1 (kryterium Sylwestera).

Opis: Implementacja kryterium Sylwestera.

Wejście: Macierz kwadratowa m .

Wyjście: Liczba całkowita: -1 , jeśli macierz m nie jest dodatnio określona; 1 , jeśli macierz m jest dodatnio określona.

```

1.   kryteriumSylwestera := proc (m)
2.     local minorM, n, i, dodatnia;
3.     n := coldim(m);
4.     minorM := evalm(scalarmul(m+transpose(m), 1/2))
5.     dodatnia := true;
6.     if det(minorM) <= 0 then
7.       dodatnia := false
8.     end if;
9.     for i from 0 to n-2 do
10.      minorM := minor(minorM, n-i, n-i);
11.      if det(minorM) <= 0 then
12.        dodatnia := false
13.      end if;
14.    end do;
15.    if dodatnia = true then
16.      print("Macierz jest dodatnio okreslona");
17.      return 1;
18.    else
19.      print("Macierz nie jest dodatnio okreslona");
20.      return -1;
21.    end if;
22.    return 0;
23.  end proc;

```

7.2. Uogólnione kryterium Sylwestera

Algorytm 7.2 (uogólnione kryterium Sylwestera).

Opis: Implementacja uogólnionego kryterium Sylwestera.

Wejście: Macierz kwadratowa m .

Wyjście: Liczba całkowita: -1 , jeśli macierz m jest nieokreślona; 1 , jeśli macierz m jest dodatnio półokreślona; 2 , jeśli macierz m jest dodatnio określona; 0 w pozostałych przypadkach.

```

1.   uogolnioneKryteriumSylwestera := proc (m)
2.     local minory, minorM, newM, n, i, j, k, dodatnia, dodatnioPolokreslona;
3.     n := coldim(m);
4.     newM := evalm(scalarmul(m+transpose(m), 1/2))
5.     dodatnia := true;
6.     dodatnioPolokreslona := true;
7.     for i from 0 to n-1 do
8.       minory := choose(n, i);
9.       for j to nops(minory) do
10.        minorM := evalm(newM);
11.        for k from nops(minory[j]) by -1 to 1 do
12.          minorM := minor(minorM, minory[j][k], minory[j][k]);
13.        end do;
14.        if det(minorM) <= 0 then
15.          dodatnia := false;
16.        end if;
17.        if det(minorM) < 0 then
18.          dodatnioPolokreslona := false;
19.        end if;

```

```

20.         end do;
21.     end do;
22.     if dodatnia = true then
23.         print("Macierz jest dodatnio okreslona");
24.         return 2;
25.     elif dodatnioPolokreslona = true then
26.         print("Macierz jest dodatnio polokreslona");
27.         return 1;
28.     else
29.         print("Macierz jest nieokreslona");
30.         return -1;
31.     end if;
32.     return 0;
33. end proc:

```

7.3. Algorytm Lagrange'a

Algorytm 7.3 (algorytm Lagrange'a).

Opis: Implementacja algorytmu Lagrange'a, wyznaczającego postać kanoniczną funkcjonału kwadratowego $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$.

Wejście: (a) Macierz Grama m funkcjonału kwadratowego $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ lub funkcjonal kwadratowy $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$.

(b) Liczba całkowita *stopien*: 0, jeśli w punkcie (a) podano macierz Grama; stopień funkcjonału, jeśli w punkcie (a) podano funkcjonal kwadratowy.

Wyjście: Postać kanoniczna funkcjonału q .

```

1.  Lagrange := proc (m, stopien)
2.      local wiel, X, i, j, A, w1, w2, zmienne, zmienna, zm_pom, reszta, tmp, wynik_konc,
3.          tmp_wynik, wspolczynnik, konc, ilosc, zm, Z;
4.      if stopien = 0 then
5.          ilosc := rowdim(m);
6.          X := evalm(Matrix(1, ilosc, [seq(x[i], i = 1 .. ilosc)]));
7.          wiel := sort(simplify(evalm('&*&'('&*&'(X, m), transpose(X))))[1, 1]);
8.      else
9.          wiel := sort(simplify(m));
10.         ilosc := stopien;
11.     end if;
12.     zmienne := array(1 .. ilosc, [seq(x[i], i = 1 .. ilosc)]);
13.     zm_pom := evalm(zmienne);
14.     A := array(1 .. ilosc, [seq(0, i = 1 .. ilosc)]);
15.     tmp_wynik := 0;
16.     for i to ilosc-1 do
17.         zmienna := zmienne[i];
18.         if remove(has, wiel, zmienna) <> wiel then
19.             wiel := sort(expand(wiel));
20.             if select(has, wiel, zmienna^2) = 0 or degree(select(has, wiel-Z, zmienna)) < 2 then
21.                 for j from i+1 to ilosc do
22.                     if 0 < degree(select(has, wiel-Z, zmienne[j]^2)) then
23.                         A[i] := -j;
24.                         break;
25.                     end if;
26.                 end do;
27.                 if A[i] < 0 then
28.                     wiel := subs({zmienne[-A[i]] = zm_pom[i], zmienne[i] = zm_pom[-A[i]]}, wiel);
29.                     tmp_wynik := subs({zmienne[-A[i]] = zm_pom[i], zmienne[i] = zm_pom[-A[i]]}, tmp_wynik);
30.                 else
31.                     for j from i+1 to ilosc do
32.                         if 0 < degree(select(has, wiel-Z, zmienne[i]*zmienne[j])) then
33.                             A[i] := j;
34.                             break;
35.                         end if;
36.                     end do;
37.                     if 0 < A[i] then
38.                         wiel := subs({zmienne[A[i]] = zm_pom[i]-zm_pom[A[i]],
39.                             zmienne[i] = zm_pom[i]+zm_pom[A[i]]}, wiel);
40.                         tmp_wynik := subs({zmienne[A[i]] = zm_pom[i]-zm_pom[A[i]],
41.                             zmienne[i] = zm_pom[i]+zm_pom[A[i]]}, tmp_wynik);

```

```

39.         else
40.             return;
41.         end if;
42.     end if;
43. end if;
44. wiel := expand(wiel);
45. zm := select(has, wiel-Z, zmienna);
46. reszta := remove(has, wiel-Z, zmienna)+Z;
47. wspolczynnik := coeff(zm, zmienna^2);
48. if wspolczynnik = 0 then break end if;
49. w1 := expand(zm/(zmienna*wspolczynnik));
50. if zm = wspolczynnik*zmienna^2 then
51.     tmp := wspolczynnik*zmienna^2;
52. elif
53.     w1 = zmienna then print("stop", m, w1);
54.     break;
55. else
56.     w2 := expand((1/2)*remove(has, w1-Z, zmienna)+(1/2)*Z);
57.     tmp := wspolczynnik*(zmienna+w2)^2;
58. end if;
59. tmp_wynik := tmp_wynik+tmp;
60. konc := reszta-remove(has, expand(tmp)+Z, zmienna)+Z;
61. wynik_konc := tmp_wynik+konc;
62. wiel := konc;
63. end if;
64. end do;
65. for j from ilosc-1 by -1 to 1 do
66.     if 0 < A[j] then
67.         wynik_konc := subs({zm_pom[A[j]] = (1/2)*zmienne[j]-(1/2)*zmienne[A[j]],
68.             zm_pom[j] = (1/2)*zmienne[j]+(1/2)*zmienne[A[j]]}, wynik_konc);
69.     elif A[j] < 0 then
70.         wynik_konc := subs({zm_pom[-A[j]] = zmienne[j], zm_pom[j] = zmienne[-A[j]]}, wynik_konc);
71.     end if;
72. end do;
73. return wynik_konc;
end proc:

```

7.4. Algorytm ograniczonego zliczania

Algorytm 7.4 (algorytm ograniczonego zliczania).

Opis: Implementacja algorytmu ograniczonego zliczania podanego w [38, Algorithm 4.2] i obliczającego wszystkie wektory zbioru \mathcal{R}_q pierwiastków dowolnego dodatniego funkcjonału $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$.

Wejście: (a) Macierz Grama m dodatnio określonego funkcjonału $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$.

(b) Liczba naturalna $d \geq 0$, z której będą liczone pierwiastki.

Wyjście: Lista wszystkich pierwiastków z d .

```

1. ograniczoneZliczanie := proc (m, d)
2.     local i, j, n, X, q, dziedzina, max, postac_kanoniczna, rozwiazanie, lista, T,
3.     wektor, wynik;
4.     n := coldim(m);
5.     X := evalm(Matrix(1, n, [seq(x[i], i = 1 .. n)]));
6.     q := sort(simplify(evalm('&*&'('&*&'(X, m), transpose(X))))[1, 1]);
7.     dziedzina := [seq([], i = 1 .. n)];
8.     wynik := [];
9.     for i to n do
10.         max := 0;
11.         postac_kanoniczna := Lagrange(subs({x[i] = x[n], x[n] = x[i]}, q), n);
12.         rozwiazanie := isolve(VectorCalculus:-'*'(coeffs(op(nops(postac_kanoniczna),
13.         postac_kanoniczna)), x^2) <= d);
14.         lista := map(proc (x) solve(x[1]) end proc, [rozwiazanie]);
15.         for j to nops(lista) do
16.             if max < lista[j] then
17.                 max := lista[j];
18.             end if;
19.         end do;
20.         printf("|x%d|<=%d\n", i, max);
21.         dziedzina[i] := [seq(j, j = VectorCalculus:-'*'(max, -1) .. max)];

```

```

20.     end do;
21.     T := cartprod(dziedzina);
22.     while not T['finished'] do
23.         wektor := evalm(convert(evalm(T['nextvalue']()), vector));
24.         if subs([seq(x[i] = wektor[i], i = 1 .. n)], evalm(q)) = d then
25.             wynik := [op(wynik), evalm(wektor)];
26.         end if;
27.     end do;
28.     return wynik;
29. end proc:

```

7.5. Algorytm obliczający zredukowaną liczbę Coxetera oraz liczbę Coxetera

Algorytm 7.5.

Opis: Implementacja algorytmu obliczającego zredukowaną liczbę Coxetera oraz liczbę Coxetera funkcjonału $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$.

Wejście: Macierz Grama m funkcjonału $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$.

Wyjście: Zredukowana liczba Coxetera oraz liczba Coxetera funkcjonału q (o ile jest skończona).

```

1.     zredukowanaLiczbaCoxetera:=proc(m)
2.         local cox, n, zliczba, tmpcox, tmpm, i, j, k, l, E, Z, v;
3.         n:= coldim(m);
4.         cox:=evalm(-(m&*transpose(inverse(m))));
5.         tmpcox:=evalm(cox);
6.         zliczba:=1;
7.         E:=matrix(n,n, [seq(0,i=1..n^(2))]);
8.         Z:=evalm(E);
9.         for i from 1 to n do E[i,i]:=1; end do;
10.        tmpm:=evalm(tmpcox-E);
11.        while (true) do
12.            k:=0;
13.            for i from 1 to n do
14.                v:=matrix(1,n, [seq(0, j=1..n)]);
15.                for j from 1 to n do
16.                    v[1,j]:=tmpm[i,j];
17.                end do;
18.                if evalm(v&*m&*transpose(v))[1,1]=0 then
19.                    k:=k+1;
20.                end if;
21.            end do;
22.            if k=n then
23.                print("Zredukowana liczba Coxetera: ", zliczba);
24.                if equal(tmpm, Z) = true then
25.                    print("Liczba Coxetera: ", zliczba);
26.                end if;
27.                return zliczba;
28.            end if;
29.            tmpcox:=evalm((evalm(tmpcox)&*cox));
30.            tmpm:=evalm(tmpcox-E);
31.            zliczba:=zliczba+1;
32.        end do;
33.        return zliczba;
34.    end proc:

```

7.6. Algorytm inflacyjny

Algorytm 7.6 (algorytm inflacyjny).

Opis: Implementacja algorytmu inflacyjnego, którego opis można znaleźć w artykułach [24] oraz [41].

Wejście: (a) Macierz Grama bigrafu $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$,
(b) pierwiastek.

Wyjście: Macierz inflacji.

```

1.  algorytm_inflacyjny:=proc(macierz,pierwiastek)
2.      local n, T, i, j, zerowe, niezerowe, t, mt, num, znaleziono, k, m, h, a, b, aa, bb;
3.      n:=coldim(evalm(macierz));
4.      m:=utrojkatnienie(evalm(macierz), n);
5.      h:=evalm(pierwiastek);
6.      T:=evalm(Matrix(n,n,shape=identity));
7.      for i from 1 to n do
8.          if h[1,i] < 0 then
9.              mt:=jed_podstaw(n,i,i,1);
10.             T:=evalm(T) &* mt;
11.             m:=transpose(mt) &* evalm(m) &* mt;
12.             h:=evalm(h &* mt);
13.         end if;
14.     end do;
15.     m:=utrojkatnienie(evalm(m),n);
16.     zerowe=[];
17.     niezerowe=[];
18.     for i from 1 to n do
19.         if h[1,i]=0 then
20.             zerowe:=[op(zerowe),i];
21.         else
22.             niezerowe:=[op(niezerowe),i];
23.         end if;
24.     end do;
25.     while nops(zerowe) > 0 do
26.         znaleziono:=0;
27.         for i in zerowe do
28.             for j in niezerowe do
29.                 if i < j then
30.                     aa:=i;
31.                     bb:=j;
32.                 else
33.                     aa:=j;
34.                     bb:=i;
35.                 end if;
36.                 if m[aa, bb] > 0 then
37.                     a:=i;
38.                     b:=j;
39.                     znaleziono:=1;
40.                     break;
41.                 elif m[aa, bb] < 0 then
42.                     a:=i;
43.                     b:=j;
44.                 end if;
45.             end do;
46.             if znaleziono=1 then
47.                 break;
48.             end if;
49.         end do;
50.         if znaleziono=0 then
51.             mt:=jed_podstaw(n,a,a,1);
52.             T:=evalm(T) &* mt;
53.             m:=transpose(mt) &* evalm(m) &* mt;
54.             h:=evalm(h &* mt);
55.         end if;
56.         if a < b then
57.             t:=m[a,b];
58.         else
59.             t:=m[b,a];
60.         end if;
61.         mt:=jed_podstaw(n,a,b,t);
62.         T:=evalm(T) &* mt;
63.         m:=transpose(mt) &* m &* mt;
64.         h[1,a]:=t*h[1,b];
65.         m:=utrojkatnienie(evalm(m), n);
66.         for k from nops(zerowe) by -1 to 1 do
67.             if zerowe[k]=a then
68.                 zerowe:=subsop(k=NULL,zerowe);
69.             end if;
70.         end do;
71.         niezerowe:=[op(niezerowe),a];
72.     end do;

```

```

73.     num:=0;
74.     znaleziono:=1;
75.     while znaleziono=1 do
76.         znaleziono:=0;
77.         for i from 1 to n do
78.             for j from i+1 to n do
79.                 if m[i,j] > 0 then
80.                     znaleziono:=1;
81.                     num:=num+1;
82.                     t:=m[i,j];
83.                     mt:=jed_podstaw(n,i,j,t);
84.                     T:=evalm(T) &* mt;
85.                     m:=transpose(mt) &* m &* mt;
86.                     m:=utrojkatnienie(evalm(m),n);
87.                     break;
88.                 end if;
89.             end do;
90.             if znaleziono=1 then
91.                 break;
92.             end if;
93.         end do;
94.     end do;
95.     return evalm(T);
96. end proc:

```

Procedury pomocnicze, wykorzystywane przez implementację algorytmu inflacyjnego:

```

1.  jed_podstaw:=proc(n,i,j,x)
2.      local mt;
3.      mt:=evalm(Matrix(n,n,shape=identity));
4.      mt[i,j]:=-x;
5.      return mt;
6.  end proc:

1.  utrojkatnienie:=proc(macierz, n)
2.      local i, j, wynik;
3.      wynik:=evalm(macierz);
4.      for i from 1 to n do
5.          for j from i+1 to n do
6.              wynik[i,j]:=macierz[i,j]+macierz[j,i];
7.              wynik[j,i]:=0;
8.          end do;
9.      end do;
10.     return wynik;
11. end proc:

```

7.7. Algorytm „dodatnie”

Algorytm 7.7 (algorytm „dodatnie”).

Opis: Implementacja algorytmu rozszerzającego dodatnio określone bigrafy o n wierzchołkach do dodatnio określonych bigrafów o $n + 1$ wierzchołkach.

Wejście: Lista macierzy Grama dodatnio określonych bigrafów o n wierzchołkach.

Wyjście: Lista macierzy Grama dodatnio określonych bigrafów o $n + 1$ wierzchołkach.

```

1.  dodatnie:=proc(lista)
2.      local W, tmp, n, G, i, j, k, Mtmp, M, ii, wynik;
3.      n:=coldim(lista[1]);
4.      wynik:=[];
5.      for ii from 1 to nops(lista) do
6.          W:=[];
7.          tmp:=cartprod([seq([1,0,-1], x=1..n)]);
8.          while not tmp[finished] do
9.              W:=[op(W),tmp[nextvalue] ()];
10.         end do;
11.         G:=evalm(lista[ii]+transpose(lista[ii]));
12.         for i from 1 to nops(W) do
13.             Mtmp:=evalm(Matrix(n+1,n+1,shape=identity));
14.             M:=evalm(Matrix(n+1,n+1,shape=identity));
15.             for j from 1 to n do

```

```

16.         for k from 1 to n do
17.             Mtmp[j,k]:=G[j,k];
18.             M[j,k]:=lista[ii][j,k];
19.         end do;
20.         Mtmp[n+1,j]:=W[i][j];
21.         M[j,n+1]:=W[i][j];
22.         Mtmp[j,n+1]:=W[i][j];
23.     end do;
24.     Mtmp[n+1,n+1]:=2;
25.     if det(Mtmp)>0 and HasNonZero(convert(W[i], Vector)) = true then
26.         wynik:=[op(wynik),evalm(M)];
27.     end fi;
28. end do;
29. end do;
30. return wynik;
31. end proc:

```

7.8. Algorytm „główne”

Algorytm 7.8 (algorytm „główne”).

Opis: Implementacja algorytmu rozszerzającego dodatkowo określone bigrafy o n wierzchołkach do bigrafów głównych o $n + 1$ wierzchołkach.

Wejście: (a) Lista macierzy Grama dodatnio określonych bigrafów o n wierzchołkach,
(b) Liczba całkowita ϵ (patrz opis algorytmu).

Wyjście: Lista macierzy Grama bigrafów głównych o $n + 1$ wierzchołkach.

```

1.     glowne := proc (lista, epsilon)
2.         local w, m, i, j, k, l, n, wynik, pierwiastki;
3.         wynik := [];
4.         n := coldim(lista[1]);
5.         for i to nops(lista) do
6.             pierwiastki := ograniczoneZliczanie(lista[i], 1);
7.             for j to nops(pierwiastki) do
8.                 w := evalm(-'&*' (epsilon*pierwiastki[j], lista[i]+transpose(lista[i]));
9.                 m := matrix(n+1, n+1, []);
10.                for k to n do
11.                    for l to n do
12.                        m[k, l] := evalm(lista[i][k, l]);
13.                    end do;
14.                    m[k, n+1] := w[k];
15.                    m[n+1, k] := 0;
16.                end do;
17.                m[n+1, n+1] := 1;
18.                wynik := [op(wynik), evalm(m)];
19.            end do;
20.        end do;
21.        return wynik;
22.    end proc:

```


Bibliografia

- [1] I. Assem, D. Simson and A. Skowroński, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, Volume 1. Techniques of Representation Theory*, London Math. Soc. Student Texts 65, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York, 2006.
- [2] M. Barot and J.A. de la Peña, The Dynkin type of a non-negative unit form, *Expo. Math.* 17(1999), 339–348
- [3] V. M. Bondarenko and A. M. Polishchuck, On finiteness of critical Tits forms of posets, *Proc. Inst. Math. NAS Ukraine* 50(2004), 1061–1063.
- [4] V. M. Bondarenko and M. V. Styopochkina, On posets of width two with positive Tits form, *Algebra and Discrete Math.* 2(2005), 20–35.
- [5] V. M. Bondarenko and M. V. Styopochkina, (Min, max)-equivalency of partially ordered sets and Tits quadratic forms, *In: Analysis and Algebra Problems*, Inst. Mat. NAS Ukraine 2(3), 2005, pp. 3–46.
- [6] K. Bongartz, Algebras and quadratic forms, *J. London Math. Soc.*, 28(1983), 461–469.
- [7] Z. I. Borevich and I. R. Shafarevich, *Number Theory*, Izd. Nauka, Moscow, 1964.
- [8] J. A. Drozd, Coxeter transformations and representations of partially ordered sets, *Funkc. Anal. i Priložen.* 8(1974), 34–42 (w języku rosyjskim).
- [9] M. Felisiak and D. Simson, Applications of matrix morsifications to Coxeter spectral study of loop-free edge-bipartite graphs, *Discrete Appl. Math.* 192(2015), 49–64, doi: 10.1016//dam.2014.05.002.
- [10] P. Gabriel and A. V. Roiter, *Representations of Finite Dimensional Algebras*, Algebra VIII, Encyclopaedia of Math. Sc., Vol. 73, Springer–Verlag, 1992.
- [11] F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Vol.1, Chelsea Publishing Company, New York, 1984.
- [12] M. Gąsiorek and D. Simson, One-peak posets with positive Tits quadratic form, their mesh translation quivers of roots, and programming in Maple and Python, *Linear Algebra Appl.* 436(2012), 2240–2272, doi: 10.1016//j.laa. 2011.10.045.
- [13] M. Gąsiorek and D. Simson, A computation of positive one-peak posets that are Tits sincere, *Colloq. Math.* 127(2012), 83–103.
- [14] M. Gąsiorek D. Simson and K. Zajęc, On Coxeter type study of non-negative posets using matrix morsifications and isotropy groups of Dynkin and Euclidean diagrams, *Europ. J. Comb.* 48(2015), 127–142, doi: 10.1016//j.ejc.2015.02.15.
- [15] M. Gąsiorek, D. Simson and K. Zajęc, Structure and a Coxeter-Dynkin type classification of corank two non-negative posets, *Linear Alg. Appl.* 469(2015), 76–113
- [16] H. J. von Höhne, On weakly positive unit forms, *Comment Math. Helvetici*, 63(1988), 312–336.
- [17] R.A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 2013.
- [18] R.A. Horn and V. V. Sergeichuk, Congruences of a square matrix and its transpose, *Linear Algebra Appl.* 389(2004), 347–353.
- [19] M. Kaniecki, J. Kosakowska, P. Malicki and G. Marczak, A horizontal mesh algorithm for a class of edge-bipartite graphs and their matrix morsifications, *Fund. Inform.* 136(2015), 345–379.
- [20] M. Kaniecki, J. Kosakowska, P. Malicki and G. Marczak, A horizontal mesh algorithm for posets with positive Tits form, *Algebra and Discrete Math.* Vol 21, No 2, 2016, 111–132.
- [21] S. Kasjan and D. Simson, Mesh algorithms for Coxeter spectral classification of Cox-regular edge-bipartite graphs with loops, I. Mesh root systems, *Fund. Inform.* 139(2015), 153–184, doi: 10.3233//FI-2015-1230.
- [22] S. Kasjan and D. Simson, Mesh algorithms for Coxeter spectral classification of Cox-regular edge-bipartite graphs with loops, II. Application to Coxeter spectral analysis, *Fund. Inform.* 139(2015), 185–209, doi: 10.3233//FI-2015-1231.
- [23] S. Kasjan and D. Simson, Algorithms for isotropy groups of Cox-regular edge-bipartite graphs, *Fund. Inform.* 129 (2015), 249–254, doi: 10.3233//FI-2015-1234.
- [24] J. Kosakowska, Inflation algorithms for positive and principal edge-bipartite graphs and unit quadratic forms, *Fund. Inform.* 119(2012), 149–162, doi: 10.3233//FI-2012-731.
- [25] H. Lenzing and J.A de la Peña, Spectral analysis of finite dimensional algebras and singularities, In: *Trends in Representation Theory of Algebras and Related Topics*, ICRA XII, (ed. A. Skowroński), Series of Congress Reports, European Math. Soc. Publishing House, Zürich, 2008, pp. 541–588.
- [26] S. A. Ovsienko, Integral weakly positive forms, *in Schur Matrix Problems and Quadratic Forms*, Inst. Mat. Akad. Nauk USSR, Preprint 78.25 (1978), pp. 3–17 (in Russian).
- [27] G. Marczak, A. Polak, D. Simson, P -critical integral quadratic forms and positive unit forms: an algorithmic approach, *Linear Algebra Appl.* 433 (2010) 1873–1888, doi:10.1016//j.laa.2010.06.052.
- [28] G. Marczak, D. Simson and K. Zajęc, On computing non-negative loop-free edge-bipartite graphs, 15th Intern. Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing, SYNASC13, Timisoara, September 2013, IEEE Computer Society, IEEE CPS, Tokyo, 2013.
- [29] A. Mostowski i M. Stark, *Elementy algebry wyższej.*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1975.
- [30] A. Mróz and J. A. de la Peña, Tubes in derived categories and cyclotomic factors of Coxeter polynomials of an algebra, *J. Algebra*, 420(2014), 242–260.
- [31] A. Polak and D. Simson, Algorithms computing $O(n, \mathbb{Z})$ -orbits of P -critical edge-bipartite graphs and P -critical unit forms using Maple and C#, *Algebra and Discrete Mathematics*, 16(2013), No. 2, 1–41

- [32] A. Polak and D. Simson, Coxeter spectral classification of almost TP -critical one-peak posets using symbolic and numeric computations, *Linear Algebra Appl.* 445 (2014) 223–255, doi: 10.1016/j.laa.2013.12.018. .
- [33] C. M. Ringel, *Tame Algebras and Integral Quadratic Forms*, Lecture Notes in Math., Vol. 1099, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo, 1984.
- [34] D. Simson, *Linear Representations of Partially Ordered Sets and Vector Space Categories*, Algebra, Logic and Applications, Vol. 4, Gordon& Breach Science Publishers, 1992.
- [35] D. Simson, *Pierwiastki funkcjonalów kwadratowych, diagramy Dynkina i zbiory częściowo uporządkowane*, Wykłady monograficzne - skrypt, Wydział Matematyki i Informatyki UMK, Toruń, wrzesień 2004-kwiecień 2009.
- [36] D. Simson, Incidence coalgebras of intervally finite posets, their integral quadratic forms and comodule categories, *Colloq. Math.*, 115(2009), 259–295.
- [37] D. Simson, Integral bilinear forms, Coxeter transformations and Coxeter polynomials of finite posets, *Linear Algebra Appl.* 433(2010), 699–717; doi: 10.1016/j.laa. 2010.03.04.
- [38] D. Simson, Mesh geometries of root orbits of integral quadratic forms, *J. Pure Appl. Algebra*, 215(2011), 13–34, doi: 10.1016/j.jpaa. 2010.02.029.
- [39] D. Simson, Mesh algorithms for solving principal Diophantine equations, sand-glass tubes and tori of roots, *Fund. Inform.* 109(2011), 425–462, doi: 3233/FI-2011-603.
- [40] D. Simson, Algorithms determining matrix morsifications, Weyl orbits, Coxeter polynomials and mesh geometries of roots for Dynkin diagrams, *Fund. Inform.* 123(2013), 447–490.
- [41] D. Simson, A Coxeter-Gram classification of positive simplylaced bipartite graphs and unit forms, *SIAM J. Discr. Math.* 27(2013), 827–854.
- [42] D. Simson, A framework for Coxeter spectral analysis of edge-bipartite graphs, their rational morsifications and mesh geometries of root orbits, *Fund. Inform.* 124(2013), 309–338, doi: 10.3233/FI-2013-836.
- [43] D. Simson, Symbolic Algorithms Computing Gram Congruences in the Coxeter Spectral Classification of Edge-bipartite Graphs, I. A Gram Classification, *Fund. Inform.* 145(2016), 19–48, doi: 10.3233/FI-2016-1345.
- [44] D. Simson, Symbolic Algorithms Computing Gram Congruences in the Coxeter Spectral Classification of Edge-bipartite Graphs, II. Isotropy Mini-groups, *Fund. Inform.* 145(2016), 49–80, doi: 10.3233/FI-2016-1346.
- [45] D. Simson and A. Skowroński, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, Volume 2. Tubes and Concealed Algebras of Euclidean Type*, London Math. Soc. Student Texts 71, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York, 2007.
- [46] D. Simson and A. Skowroński, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, Volume 3. Representation-Infinite Tilted Algebras*, London Math. Soc. Student Texts 72, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York, 2007.
- [47] D. Simson, K. Zając, A framework for Coxeter spectral classification of finite posets and their mesh geometries of roots, *Int. J. Math. Math. Sci.* 2013 (2013) Article ID 743734, 22 pages, doi:10.1155/2013/743734.
- [48] T. Zaslavsky, Signed graphs, *Discrete Appl. Math.* 4(1982), 47–74.