Uniwersytet Mikołaja Kopernika
w Toruniu
Wydział Matematyki i Informatyki

Stochastyczne równania różniczkowe względem procesów o skończonej p-wariacji

Adrian Falkowski

*Praca doktorska napisana
w Katedrze Teorii Prawdopodobieństwa
i Analizy Stochastycznej pod kierunkiem
prof. dr. hab. Leszka Słomińskiego*

Toruń 2015

Spis treści

Wstęp

W rozprawie badany jest problem istnienia, jednoznaczności oraz aproksymacji rozwiązań stochastycznych równań różniczkowych (srr) z odbijającymi barierami U i L postaci

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_{s-})\, dB_s + \int_0^t g(s, X_{s-})\, dA_s + K_t, \quad t \in \mathbb{R}^+ \tag{i}$$

oraz

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_{s-})\, dZ_s + \int_0^t g(s, X_{s-})\, dA_s + K_t, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{ii}$$

gdzie A jest procesem posiadającym trajektorie o lokalnie skończonej p-wariacji dla $p \in (1,2)$, a B, Z są odpowiednio procesem posiadającym trajektorie o lokalnie skończonej wariacji i semimartyngałem. Rozwiązaniem równania (i) (lub (ii)) jest para procesów (X, K) takich, że $X_t \in [L_t, U_t]$, $t \in \mathbb{R}^+$, a K kompensuje odbicia od barier U i L (definicje rozwiązań (i) i (ii) znajdują się w rozdziałach 3. i 4.). Równanie (i) jest szczególnym przypadkiem równania (ii). W pracy równania te badamy jednak oddzielnie, gdyż wymagają one różnych definicji rozwiązań i różnych założeń na współczynniki. Duża część uzyskanych w pracy wyników jest nowa nawet w przypadku równań bez barier, tzn. gdy $K \equiv 0$.

Problem istnienia i jednoznaczności rozwiązań równań bez barier względem procesów o skończonej p-wariacji był przedmiotem badań wielu autorów. Rozważali je między innymi Dudley [18], Kubilius [37–42], Lyons [46], Norvaiša [57], Nualart z Răşcanu [59] i Guerrą [30] oraz Ruzmaikina [68]. Ze względu na szereg praktycznych zastosowań w modelach finansowych, teorii kolejek i teorii ryzyka badania skoncentrowane były głównie na równaniach względem ułamkowego ruchu Browna B^H z parametrem $H \in (1/2, 1)$, którego trajektorie posiadają lokalnie skończoną p-wariację dla $p > 1/H$.

Równania z barierami postaci (ii) jako pierwszy badał Skorochod w pracy [73] w przypadku, gdy $L \equiv 0$, $U \equiv \infty$, $A_t = t$ oraz $Z = W$, gdzie W jest standardowym procesem Wienera. W późniejszym czasie szersze klasy barier oraz procesów całkujących rozważane były między innymi przez Tanakę [83], Lionsa i Sznitmana [45], Saisho [69], Dupuisa i Ishi [20], Słomińskiego [75] oraz Rozkosza [66]. W ostatnich latach Besalú i Rovira [6] oraz Ferrante i Rovira [27] opublikowali pierwsze prace dotyczące równań z barierami postaci (i) dla $L \equiv 0$, $U \equiv \infty$, $B_t = t$, $A = B^H$. Tak duże zainteresowanie równaniami z barierami wynika z faktu, iż zagadnienie to znajduje zastosowanie m.in. w teorii kolejek, analizie niezawodności sejsmicznej oraz matematyce finansowej (patrz np. [2, 21, 36, 71]). Można zauważyć, że równanie (ii) jest równoważne tzw. problemowi zamiatania ze stochastycznym zaburzeniem:

$$\begin{cases} dX_t \in \Phi(t, X_t) + N(C_t; X_t), \\ X_0 = x_0 \in C_0, \\ X_t \in C_t, \end{cases} \tag{iii}$$

gdzie $C_t = [L_t, U_t]$, $\Phi(t, X_t) = f(t, X_t)\, dA_t + g(t, X_t)\, dZ_t$, a $N(C_t; X_t)$ oznacza wewnętrzny wektor normalny do C_t w punkcie X_t, $t \in \mathbb{R}^+$. Tego typu zagadnienia po raz pierwszy badał Moreau w latach 70. W pracach [53–55] Moreau rozważał deterministyczny odpowiednik inkluzji stochastycznej (iii) dla wypukłego, zmieniającego się w czasie zbioru C_t oraz $\Phi \equiv 0$. W kolejnych pracach Benabdellah [3], Castaing, Dúc Hā i Valadier [10], Castaing i Monteiro Marques [11], Colombo i Goncharov [13], Colombo i Monteiro Marques [14] oraz Thibalult [84] rozszerzali wyniki Moreau, dodając dodatkowe zaburzenie Φ lub osłabiając założenia na zbiór C_t. W pracy [5] Bernicot oraz Venel rozważali inkluzję stochastyczną postaci (iii) dla $A_t = t$, $Z = W$. Zarówno w przypadku deterministycznym, jak i stochastycznym problem zamiatania (iii) również posiada wiele praktycznych zastosowań, m.in. w mechanice niegładkiej, analizie zjawiska histerezy, matematyce finansowej oraz modelowaniu ruchu w sieciach z przełączaniem obwodów (patrz np. monografie [1, 16, 52] oraz cytowane w nich prace).

W rozprawie duża uwaga zwrócona została na przypadek procesu $A = Y^H = \int_0^\cdot \sigma_s dB_s^H$, gdzie $\sigma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ nie musi być funkcją ciągłą, którego trajektorie posiadają lokalnie skończoną p-wariację dla $p > 1/H$. Zaproponowana została nowa metoda aproksymacji procesu Y^H oraz rozwiązań równań względem Y^H. Metoda ta, oparta na reprezentacji całkowej ułamkowego ruchu Browna z pracy Decreusefonda i Üstünela [15], stanowi rozszerzenie rezultatów z wcześniejszych prac: Nieminena [56], Sottinena [79], Słomińskiego i Ziemkiewicza [78] dotyczących aproksymacji ułamkowego ruchu Browna oraz Parczewskiego [60] dotyczącej aproksymacji procesu Y^H w przypadku ciągłej funkcji σ.

Poniżej została opisana szczegółowo treść pracy.

Rozdział 1. zawiera definicje i twierdzenia wykorzystywane w dalszej części pracy. Są tam między innymi opisane podstawowe własności topologii Skorochoda J_1 na przestrzeni $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, p-wariacji oraz całek względem funkcji i procesów o skończonej p-wariacji. Znajdują się tam również kryteria zbieżności procesów stochastycznych w topologii J_1 oraz przegląd dotychczasowych wyników dotyczących równań względem funkcji i procesów o skończonej p-wariacji.

W rozdziale 2. udowodniono wyniki dotyczące istnienia, jednoznaczności i aproksymacji deterministycznego odpowiednika równania (i) postaci

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(s, x_{s-})\, db_s + \int_0^t g(s, x_{s-})\, da_s + k_t, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{iv}$$

gdzie $b \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ jest funkcją o lokalnie skończonej wariacji, $a \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ jest funkcją o lokalnie skończonej p-wariacji, a k jest funkcją kompensującą odbicia od barier u i $l \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$. Szczególny przypadek równania (iv) był badany wcześniej w pracy [27], gdzie autorzy rozważali równania z jedną barierą $l \equiv 0$ względem funkcji λ-hölderowskich. Wiadomo, że każda funkcja λ-hölderowska posiada skończoną p-wariację dla $p \geqslant 1/\lambda$. W pracy [27] podano warunki zapewniające istnienie rozwiązań, jednak jednoznaczność została uzyskana jedynie na małych przedziałach czasu. Kluczowym wynikiem tego rozdziału jest twierdzenie 2.6. W twierdzeniu tym udowodniono lipschitzowskość rozwiązań problemu Skorochoda z dwiema barierami w normie p-wariacyjnej. Uzyskany rezultat stanowi główne narzędzie dowodowe przy badaniu istnienia i jednoznaczności rozwiązań równania (iv). Warto nadmienić, że w [27, Remark 3.6] pokazano, iż powyższa własność nie zachodzi w normie λ-hölderoskiej, co jest głównym powodem, dla którego w [27] autorzy nie byli w stanie uzyskać globalnej jednoznaczności. Rozważane są dwa zbiory warunków: liniowy wzrost funkcji f i hölderowskość funkcji g (założenie (H1)) oraz lokalna lipschitzowskość f i lokalna hölderowskość pochodnej każdego współczynnika $g^{i,j}$, $i,j = 1,\dots,d$ (założenie (H2)). W twierdzeniu 2.26 pokazano istnienie rozwiązań (iv) przy założeniu (H1) oraz dodatkowym założeniu ciągłości funkcji f. W tym celu wykorzystano naturalny odpowiednik schematu Eulera dla równania (iv) oraz rezultaty dotyczące relatywnej zwartości i zbieżności całek względem funkcji o skończonej p-wariacji opisane w faktach 2.21 i 2.22. W twierdzeniu 2.18 pokazano istnienie i jednoznaczność rozwiązań równania (iv) przy założeniach (H1) oraz (H2) z wykorzystaniem ciągu kolejnych iteracji Picarda dla (iv). W podrozdziale 2.3 opisano metodę aproksymacji rozwiązań równania (iv) oraz udowodniono stabilność rozwiązań ze względu na wartość początkową x_0 i współczynniki f, g. Główne wyniki tego rozdziału w trochę mniej ogólnej postaci (dla f i g jednorodnych w czasie oraz jednej bariery $l \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$) zostały opublikowane w pracy [24]. Wyniki dotyczące przypadku z dwiema barierami oraz funkcjami f i g zależnymi od czasu zostały zebrane w [25]. Praca została wysłana do czasopisma, znajduje się obecnie w recenzji.

W rozdziale 3. badany jest problem istnienia, jednoznaczności i aproksymacji mocnych oraz słabych rozwiązań równania (i). W twierdzeniach 3.1 i 3.2 udowodniono wyniki dotyczące jednostajnej jędrności i zbieżności całek stochastycznych względem procesów posiadających trajektorie o lokalnie skończonej p-wariacji. W twierdzeniu 3.5 wykorzystano rezultaty z rozdziału 2. do uzyskania istnienia i jednoznaczności mocnych rozwiązań równania (i) przy założeniach (H1) i (H2). W podrozdziale 3.2 opisano metodę aproksymacji mocnych rozwiązań za pomocą odpowiedniego schematu Eulera. Podrozdział 3.3 dotyczy zagadnienia istnienia, jednoznaczności i aproksymacji słabych rozwiązań równania (i). We wniosku 3.11 pokazano, że przy założeniu (H1) oraz dodatkowym założeniu ciągłości funkcji f istnieją słabe rozwiązania równania (i) będące granicami według rozkładu ciągów zdefiniowanych w oparciu o odpowiedni schemat Eulera.

Rozdział 4. poświęcony jest zagadnieniu istnienia i jednoznaczności rozwiązań równania (ii). W podrozdziale 4.1 badana jest jednostajna jędrność i zbieżność całek stochastycznych względem p-semimartyngałów tzn. procesów X o rozkładzie $X = X_0 + A + Z$, gdzie A jest procesem posiadającym trajektorie o lokalnie skończonej p-wariacji dla $p \in (1,2)$, a Z jest semimartyngałem (patrz definicja 4.1). Rozpatrywany jest nowy zestaw założeń: (G1) i (G2). Są one podobne do warunków (H1) i (H2). Różnią się jedynie zakresami wykładników w warunku Höldera. W twierdzeniu 4.13 pokazano stabilność rozwiązań równania (ii) przy założeniu (G1) oraz dodatkowym założeniu ciągłości funkcji f. W twierdzeniu 4.14 udowodniono istnienie słabych rozwiązań przy założeniu (G1) oraz założeniu ciągłości funkcji f, natomiast przy założeniach (G1) oraz (G2) uzyskano istnienie i jednoznaczność mocnych rozwiązań (twierdzenie 4.16).

Rozdział 5. dotyczy aproksymacji procesu Y^H i rozwiązań równań względem Y^H oraz względem W i Y^H. Badane są również zastosowania w matematyce finansowej. W podrozdziale 5.1 pokazano zbieżność według rozkładu ciągu $\{Y^{H,n}\}$ skonstruowanego za pomocą tablicy różnic martyngałowych $\{\{X_{nk}\}\}$ oraz reprezentacji całkowej ułamkowego ruchu Browna z pracy [15] do procesu Y^H (twierdzenie 5.2). Przy pewnych dodatkowych założeniach na tablicę $\{\{X_{nk}\}\}$ uzyskano zbieżność jednostajną na kompaktach według prawdopodobieństwa oraz oszacowano tempo zbieżności w normie $\mathbb{L}^2$. W dalszej części tego rozdziału badana jest aproksymacja rozwiązań równań względem procesu Y^H wykorzystująca wyniki z podrozdziału 5.1. W twierdzeniu 5.9 pokazano zbieżność według rozkładu ciągów skonstruowanych za pomocą odpowiednika schematu Eulera z wykorzystaniem aproksymacji $\{Y^{H,n}\}$, opisanych w podrozdziale 5.1, do słabych rozwiązań równania (i) bez barier z $A = Y^H$ i $B = b$, gdzie $b \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ jest funkcją deterministyczną o lokalnie skończonej wariacji. Twierdzenia 5.12 i 5.13 dotyczą aproksymacji mocnych rozwiązań równań z barierami postaci (i) dla $A = Y^H$ i $B = b$ za pomocą ciągu $\{Y^{H,n}\}$. Wniosek 5.14 poświęcony jest z kolei aproksymacji słabych rozwiązań (i) dla $A = Y^H$ i $B = b$. Podobny rezultat został otrzymany dla równania (ii) z $A = Y^H$ oraz $Z = W$ (wniosek 5.15). W ostatnim podrozdziale badane jest zagadnienie aktuarialnej wyceny opcji na rynkach finansowych modelowanych za pomocą procesu Y^H. W twierdzeniu 5.17 uzyskano jawny wzór na cenę aktuarialną w przypadku opcji zależnych od ceny akcji w chwili wykupu. W szczególności dla europejskiej opcji kupna otrzymano analog znanej formuły Blacka-Scholesa (wniosek 5.18). Z kolei w twierdzeniu 5.19 opisano metodę numerycznej wyceny opcji zależnych od całej trajektorii procesu ceny akcji. Większość wyników z rozdziału 5. została opublikowana w pracach [23, 26].

Pragnę serdecznie podziękować Panu Profesorowi Leszkowi Słomińskiemu za opiekę nad przebiegiem mojej pracy naukowej, propozycję ciekawego tematu, cenne uwagi i sugestie, cierpliwość w oczekiwaniu na rezultaty oraz za niezwykłą życzliwość.

Rozdział 1

Wiadomości wstępne

1.1 Przestrzeń Skorochoda $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$

$\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ oznaczać będzie przestrzeń funkcji *càdlàg* $x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^d$ tzn. funkcji prawostronnie ciągłych oraz posiadających w każdym punkcie lewostronne granice. Dla $x \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, $t \in \mathbb{R}^+$ przyjmujemy, że x_t oznacza wartość funkcji x w punkcie t, x_{t-} jej granicę lewostronną w t (przy czym zakładamy, że $x_{0-} = x_0$), a $\Delta x_t = x_t - x_{t-}$ skok funkcji w chwili t. Ponadto x_- oznacza funkcję: $t \mapsto x_{t-}$, $t \in \mathbb{R}^+$. Dla x, $y \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ piszemy, że $x \leqslant y$ jeśli $x_t^i \leqslant y_t^i$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, d$, $t \in \mathbb{R}^+$.

Jeżeli $x \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, to dla dowolnych $T, \varepsilon > 0$ funkcja x posiada na przedziale $[0, T]$ skończoną liczbę skoków o normie większej niż ε. Stąd w szczególności liczba wszystkich skoków x jest co najwyżej przeliczalna.

Na przestrzeni $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ będziemy rozważać topologię Skorochoda J_1, zdefiniowaną przez Skorochoda [72] dla przestrzeni $\mathbb{D}([0, 1], \mathbb{R}^d)$, a następnie rozszerzoną na przestrzeń $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ przez Stone'a [82] i Lindvalla [44].

Twierdzenie 1.1. *Na przestrzeni $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ istnieje metryzowalna topologia (nazywana topologią Skorochoda J_1), dla której $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ jest zupełna i ośrodkowa. Można ją scharakteryzować w następujący sposób: ciąg $\{x^n\}$ zbiega do x w J_1 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $\{\lambda^n\}$ funkcji ściśle rosnących i ciągłych $\lambda^n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\lambda_0^n = 0$ taki, że*

$$\sup_t |\lambda_t^n - t| \longrightarrow 0$$

oraz dla wszystkich $T \in \mathbb{R}^+$

$$\sup_{t \leqslant T} |x^n \circ \lambda_t^n - x_t| \longrightarrow 0.$$

Dowód. Patrz [7, Section 12] dla przestrzeni $\mathbb{D}([0, 1], \mathbb{R}^d)$ oraz [32, Chapter VI, Theorem 1.14] dla $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$. $\square$

Jeżeli ciąg $\{x^n\}$ zbiega do x w topologii J_1, to piszemy, że $x^n \to x$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$.

Nietrudno zauważyć, że topologia J_1 jest słabsza niż topologia zbieżności jednostajnej na kompaktach. Ponadto jeżeli x jest funkcją ciągłą, to $\{x^n\}$ zbiega do x w J_1 wtedy i tylko wtedy, gdy zbiega do x w topologii zbieżności jednostajnej na kompaktach.

Poniżej zaprezentujemy kilka faktów dotyczących topologii J_1, wykorzystywanych w dalszej części pracy.

Fakt 1.2 ([32, Chapter VI, Proposition 2.1]). *Niech* $x^n \to x$ *w* $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ *oraz* $t \in \mathbb{R}^+$. *Wówczas*

(i) *istnieje ciąg* $t_n \to t$ *taki, że* $x^n_{t_n} \to x_t$, $x^n_{t_n-} \to x_{t-}$, $\Delta x^n_{t_n} \to \Delta x_t$;

(ii) *jeżeli* $t_n \to t$, $\Delta x^n_{t_n} \to \Delta x_t$ *oraz* $\Delta x_t \neq 0$, *to dla każdego ciągu* $\{t'_n\}$ *o takich samych własnościach jak ciąg* $\{t_n\}$, $t'_n = t_n$ *dla odpowiednio dużych* n. *Ponadto:*

(ii.1) *jeśli* $t''_n \to t$ *i* $t''_n < t_n$, $n \in \mathbb{N}$, *to* $x^n_{t''_n} \to x_{t-}$,

(ii.2) *jeśli* $t''_n \to t$ *i* $t''_n \leqslant t_n$, $n \in \mathbb{N}$, *to* $x^n_{t''_n-} \to x_{t-}$,

(ii.3) *jeśli* $t''_n \to t$ *i* $t''_n \geqslant t_n$, $n \in \mathbb{N}$, *to* $x^n_{t''_n} \to x_t$,

(ii.4) *jeśli* $t''_n \to t$ *i* $t''_n > t_n$, $n \in \mathbb{N}$, *to* $x^n_{t''_n-} \to x_t$,

(ii.5) *jeśli* $t''_n \to t$ *i* $\Delta x_t = 0$, *to* $x^n_{t''_n} \to x_t$ *i* $x^n_{t''_n-} \to x_{t-}$.

Fakt 1.3. *Niech* $x^n \to x$ *w* $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ *oraz* $y^n \to y$ *w* $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$. *Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) *dla każdego* $t \in \mathbb{R}^+$ *istnieje ciąg* $t_n \to t$ *taki, że* $\Delta x^n_{t_n} \to \Delta x_t$ *i* $\Delta y^n_{t_n} \to \Delta y_t$,

(ii) $(x^n, y^n) \to (x, y)$ *w* $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$,

(iii) $x^n + y^n \to x + y$ *w* $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$.

Dowód. Wynika z faktu 1.2 oraz [32, Chapter VI, Proposition 2.2]. □

Uwaga 1.4. Jeżeli $(x^n, y^n) \to (x, x)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, to

$$\sup_{t \leqslant T} |x^n_t - y^n_t| \longrightarrow 0, \quad T \in \mathbb{R}^+. \tag{1.1}$$

Istotnie, z faktu 1.3 mamy, że $x^n - y^n \to 0$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, co jest równoważne z (1.1).

Fakt 1.5 ([74, Lemma C]). *Niech* $(x^n, y^n) \to (x, y)$ *w* $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$ *oraz dla każdego* $T \in \mathbb{R}^+$ *zachodzi zbieżność:* $\sup_{t \leqslant T} |y^n_t - y_t| \to 0$. *Jeżeli dla każdego* $t \in \mathbb{R}^+$ $\Delta x_t \neq 0 \Rightarrow \Delta y_t \neq 0$, *to*

$$\sup_{t \leqslant T} |x^n_t - x_t| \to 0, \quad T \in \mathbb{R}^+.$$

Twierdzenie 1.6. *Niech* $x \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ *oraz* $\pi_n = \{0 = t_{n,0} < t_{n,1} < t_{n,2} < \ldots\}$ *będzie ciągiem podziałów takim, że* $\lim_{k \to \infty} t_{n,k} = \infty$, $n \in \mathbb{N}$ *i* $\operatorname{diam}(\pi_n) = \max_{k \in \mathbb{N}}(t_{n,k} - t_{n,k-1}) \to 0$. *Wówczas*

(i) *jeżeli*

$$x^{(n)}_t = x_{t_{n,k}} \quad \text{dla } t \in [t_{n,k}, t_{n,k+1}), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ n \in \mathbb{N}, \tag{1.2}$$

to $x^{(n)} \to x$ *w* $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$;

(ii) *jeżeli dodatkowo prawdziwa jest implikacja*

$$\forall_{t\in\mathbb{R}^+} \quad \Delta x_t \neq 0 \Rightarrow t \in \liminf_{n\to\infty} \pi_n,$$

to

$$\sup_{t\leqslant T} \left| x_t^{(n)} - x_t \right|, \quad T \in \mathbb{R}^+.$$

Dowód. Aby udowodnić (i), wystarczy zastosować [32, Chapter VI, Proposition 6.37] dla funkcji deterministycznej. W celu uzasadnienia (ii) pokażemy, że w rozważanym przypadku $(x^{(n)}, x) \to (x, x)$ i skorzystamy z uwagi 1.4. Połóżmy $\varrho_n^\star(t) = \min\{t_{n,k}\,;\, t_{n,k} \geqslant t\}$ oraz zauważmy, że $\varrho_n^\star(t) \to t$ i

$$\Delta x^{(n)}_{\varrho_n^\star(t)} \longrightarrow \Delta x_t, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Ponadto, jeżeli $\Delta x_t \neq 0$, to dla dostatecznie dużych n mamy, że $t \in \pi_n$ i w konsekwencji $\Delta x_{\varrho_n^\star(t)} = \Delta x_t$. Zatem dla dowodu (ii) wystarczy skorzystać z faktu 1.3. □

Wniosek 1.7. *Niech $x \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, $\{\delta_n\}$ będzie ciągiem dodatnich stałych takim, że $\delta_n \downarrow 0$ oraz $\pi_n = \{0 = t_{n,0} < t_{n,1} < t_{n,2} < \ldots\}$ będzie ciągiem podziałów zdefiniowanym następująco:*

$$t_{n,0} = 0, \quad t_{n,k+1} = \min\{t_{n,k} + \delta_n, \inf\{t > t_{n,k}\,;\, |\Delta x_t| > \delta_n\}\}, \quad k \in \mathbb{N}\cup\{0\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Wówczas dla $x^{(n)}$ zdefiniowanego jak w (1.2)

$$\sup_{t\leqslant T} \left| x_t^{(n)} - x_t \right| \longrightarrow 0, \quad T \in \mathbb{R}^+.$$

Dowód. Jeśli $\Delta x_t \neq 0$ dla pewnego $t \in \mathbb{R}^+$, to $|\Delta x_t| > \delta_n$ dla odpowiednio dużych n. Stąd dla tych samych n mamy, że $t \in \pi_n$. Korzystając z twierdzenia 1.6 (ii), otrzymujemy tezę. □

Fakt 1.8. *Niech $(x^n, y^n) \to (x, y)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d+d'})$ oraz $\{\delta_k\}$ będzie ciągiem dodatnich stałych takim, że $\delta_k \downarrow 0$. Definiujemy: $t^n_{k,0} = 0$, $t^n_{k,i+1} = \min\{t^n_{k,i} + \delta_{k,i}, \inf\{t > t^n_{k,i}\,;\, |\Delta x^n_t| > \delta_k\}\}$ i $t_{k,0} = 0$, $t_{k,i+1} = \min\{t_{k,i} + \delta_{k,i}, \inf\{t > t_{k,i}\,;\, |\Delta x_t| > \delta_k\}\}$, gdzie $\delta_k/2 \leqslant \delta_{k,i} \leqslant \delta_k$ $i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $n, k \in \mathbb{N}$. Jeżeli*

$$|\Delta x_t| \neq \delta_k \text{ oraz } |\Delta x_{t_{k,i}+\delta_{k,i}}| + |\Delta y_{t_{k,i}+\delta_{k,i}}| = 0, \quad i \in \mathbb{N}\cup\{0\},\ k \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{R}^+,$$

to

$$\begin{aligned} t^n_{k,i} \longrightarrow t_{k,i}, \quad x^n_{t^n_{k,i}} \longrightarrow x_{t_{k,i}}, \quad x^n_{t^n_{k,i}-} \longrightarrow x_{t_{k,i}-}, \\ y^n_{t^n_{k,i}} \longrightarrow y_{t_{k,i}}, \quad y^n_{t^n_{k,i}-} \longrightarrow y_{t_{k,i}-}, \quad i \in \mathbb{N}\cup\{0\},\ k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ponadto jeśli $x_t^{n,(k)} = x^n_{t^n_{k,i}}$, $t \in [t^n_{k,i}, t^n_{k,i+1})$ oraz $x_t^{(k)} = x_{t_{k,i}}$, $t \in [t_{k,i}, t_{k,i+1})$ dla $i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $n, k \in \mathbb{N}$, to $(x^n, x^{n,(k)}, y^n) \longrightarrow (x, x^{(k)}, y)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d+d'})$, $k \in \mathbb{N}$.

Dowód. Przebiega podobnie jak dowody [32, Chapter VI, Proposition 2.7] oraz [32, Chapter VI, Corollary 2.8]. □

1.2 Całka względem funkcji i procesów o skończonej p-wariacji

Zaczynamy od definicji i podstawowych własności p-wariacji.

Definicja 1.9. Niech $x : [a,b] \to \mathbb{R}^d$. Mówimy, że x ma skończoną *p-wariację*, jeżeli

$$v_p(x)_{[a,b]} = \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p < \infty,$$

gdzie supremum przebiega po wszystkich podziałach $\pi = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ przedziału $[a,b]$. Ponadto przyjmujemy następujące oznaczenia: $V_p(x)_{[a,b]} = (v_p(x)_{[a,b]})^{1/p}$, $\bar{V}_p(x)_{[a,b]} = V_p(x) + |x_a|$. Dla uproszczenia notacji przez $v_p(x)_T$, $V_p(x)_T$, $\bar{V}_p(x)_T$ będziemy oznaczać odpowiednio: $v_p(x)_{[0,T]}$, $v_p(x)_{[0,T]}$, $\bar{V}_p(x)_{[0,T]}$.

Oznaczmy przez $\mathcal{W}_p([a,b],\mathbb{R}^d)$ zbiór wszystkich funkcji $x : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ o skończonej p-wariacji. Poniższe fakty zostały zaczerpnięte z [17].

Uwaga 1.10. 1. Dla $p \geqslant 1$, V_p jest seminormą na $\mathcal{W}_p([a,b],\mathbb{R}^d)$, $V_p(x)_{[a,b]} = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy x jest stała. Ponadto $\bar{V}_p$ jest normą na $\mathcal{W}_p([a,b],\mathbb{R}^d)$ oraz przestrzeń $(\mathcal{W}_p([a,b],\mathbb{R}^d), \bar{V}_p)$ jest przestrzenią Banacha.

2. Dla ustalonego x, $V_p(x)_{[a,b]}$ jest nierosnącą funkcją p. Zatem jeśli $p < q$, to $\mathcal{W}_p([a,b],\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{W}_q([a,b],\mathbb{R}^d)$.

3. Jeżeli $x \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^d)$, to funkcja $t \mapsto V_p(x)_t$ jest funkcją càdlàg.

Uwaga 1.11. Niech $a < c < b$, $1 \leqslant p < q$ oraz $x \in \mathcal{W}_p([a,b],\mathbb{R}^d)$. Wówczas mamy:

(i) $v_p(x)_{[a,c]} + v_p(x)_{[c,b]} \leqslant v_p(x)_{[a,b]} \leqslant 2^{p-1}\left(v_p(x)_{[a,c]} + v_p(x)_{[c,b]}\right)$,

(ii) $V_p(x)_{[a,b]} \leqslant V_p(x)_{[a,c]} + V_p(x)_{[c,b]}$,

(iii) $\lim_{t\uparrow b} v_p(x)_{[t,b]} = |\Delta x_b|^p$,

(iv) $\sup_{t\in[a,b]} |x_t| \leqslant \bar{V}_p(x)_{[a,b]}$,

(v) $V_q(x)_{[a,b]} \leqslant \mathrm{Osc}(x)_{[a,b]}^{1-p/q} V_p(x)_{[a,b]}^{p/q}$, gdzie $\mathrm{Osc}(x)_{[a,b]} = \sup\{|x_t - x_s|\,;\, a \leqslant t, s \leqslant b\}$.

Lemat 1.12. *Załóżmy, że $x^n \to x$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^d)$. Wówczas dla dowolnych $p \geqslant 1$, $T \in \mathbb{R}^+$ mamy, że $V_p(x)_T \leqslant \liminf_n V_p(x^n)_T$.*

Dowód. Niech $T \in \mathbb{R}^+$ będzie punktem ciągłości funkcji x. Zauważmy, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje podział $\{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = T\}$ składający się z punktów ciągłości x taki, że

$$v_p(x)_T \leqslant \sum_{i=1}^{m} |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p + \varepsilon = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} |x^n_{t_i} - x^n_{t_{i-1}}|^p + \varepsilon \leqslant \liminf_{n\to\infty} v_p(x^n)_T + \varepsilon.$$

Korzystając z uwagi 1.10.3. oraz dowolności $\varepsilon > 0$ uzyskujemy tezę. $\square$

Uwaga 1.13. Niech $\mathbb{M}^d$ oznacza zbiór $d \times d$-wymiarowych macierzy rzeczywistych. Dla $x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{M}^d$ przyjmujemy, że $|\cdot|$ w definicji p-wariacji oznacza normę macierzową zdefiniowaną wzorem: $|A| = \sup\{|Av'|\,;\, v \in \mathbb{R}^d, |v| = 1\}$. Ponadto przez $\mathcal{W}_p([a,b], \mathbb{M}^d)$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich $x : [a,b] \to \mathbb{M}^d$ o skończonej p-wariacji. Wszystkie wymienione powyżej własności p-wariacji pozostają prawdziwe dla funkcji o wartościach w $\mathbb{M}^d$.

Niech $y \in \mathcal{W}_q([a,b], \mathbb{M}^d)$, $x \in \mathcal{W}_p([a,b], \mathbb{R}^d)$ dla p, $q > 0$ takich, że $1/p + 1/q > 1$. Jeżeli funkcje x i y nie mają wspólnych prawostronnych punktów nieciągłości oraz wspólnych lewostronnych punktów nieciągłości, to istnieje *uogólniona całka Riemanna-Stiejtiesa* $\int_a^b y_s\, dx_s$ zdefiniowana jako granica sum riemannowskich po zagnieżdżających się ciągach podziałów. W szczególności jeśli $y \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{M}^d)$, $x \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ oraz istnieją p, $q > 0$, $1/p + 1/q > 1$ takie, że dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ $V_p(x)_T < \infty$ i $V_q(y)_T < \infty$, to istnieje całka $\int_0^\cdot y_{s-}\, dx_s$ oraz dla wszystkich $0 \leqslant a < b$

$$V_p\left(\int_a^\cdot y_{s-}\, dx_s\right)_{[a,b]} \leqslant K_{p,q} \bar{V}_q(y)_{[a,b)} V_p(x)_{[a,b]}, \tag{1.3}$$

gdzie $K_{p,q} = 2\zeta(p^{-1} + q^{-1})$, ζ oznacza funkcję zeta Riemanna tzn. $\zeta(t) = \sum_{n=1}^\infty 1/n^t$ (patrz np. [17–19]). Ponieważ x i y są funkcjami càdlàg, więc również odwzorowanie $t \mapsto \int_0^t y_{s-}\, dx_s$ jest càdlàg.

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną z filtracją.

Definicja 1.14. Mówimy, że proces stochastyczny $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ ma *lokalnie skończoną p-wariację*, jeśli $P(V_p(X)_T < \infty) = 1$ dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$.

Uwaga 1.15. Jeżeli X ma lokalnie skończoną p-wariację dla $p = 1$, to mówimy, że X ma *lokalnie skończoną wariację*.

Rozważmy procesy stochastyczne: X o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ i lokalnie skończonej p-wariacji oraz Y o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{M}^d)$ i lokalnie skończonej q-wariacji, gdzie p, $q > 0$, $1/p + 1/q > 1$. Z faktów przytoczonych powyżej wiemy, że dla P-prawie wszystkich $\omega \in \Omega$ oraz każdego $t > 0$ istnieje całka $\int_0^t Y_{s-}(\omega)\, dX_s(\omega)$. Oznaczmy $J_t = \int_0^t Y_{s-}\, dX_s$, $t \in \mathbb{R}^+$. Proces $J = \{J_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ będziemy nazywać *całką Riemanna-Stieltjesa po trajektoriach.*

Fakt 1.16. *J jest procesem stochastycznym na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}, P)$ o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$. Ponadto jeżeli X i Y są $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptowane, to J jest również $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptowany.*

Dowód. Wynika z faktu, iż J jest P-p.w. granicą odpowiednich sum riemannowskich (dyskretnych procesów $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptowanych). □

Poniżej zaprezentujemy przykład procesu o skończonej p-wariacji, który będzie wykorzystywany w rozdziale 5. Zaczniemy od przytoczenia wyniku dotyczącego skończoności p-wariacji w przypadku procesów gaussowskich.

Twierdzenie 1.17 ([33, Theorem 3.2]). *Niech $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ będzie jednowymiarowym, scentrowanym i ośrodkowym procesem gaussowskim. Jeżeli*

$$\sup_\pi \sum_{i=1}^n (E|X_{t_i} - X_{t_{i-1}}|)^q < \infty$$

dla pewnego $q \geqslant 1$, gdzie supremum przebiega po wszystkich podziałach $\pi = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ przedziału $[a, b]$, to dla $p > q$

$$P(V_p(X)_{[a,b]} < \infty) = 1.$$

Niech $B^H = \{B_t^H\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ będzie *ułamkowym ruchem Browna* z wykładnikiem Hursta $H \in (1/2, 1)$ tzn. jednowymiarowym, scentrowanym procesem gaussowskim o ciągłych trajektoriach takim, że $B_0^H = 0$ oraz $EB_t^H B_s^H = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H})$ dla wszystkich $t, s \in \mathbb{R}^+$.

Rozważymy całkę Wienera z funkcji deterministycznej względem B^H z parametrem $H > 1/2$. Można ją zdefiniować jako granicę w przestrzeni $\mathbb{L}^2$ w następujący sposób.

Niech $\sigma \in \mathbb{L}^{1/H}_{[0,T]}$ tzn. $\sigma : [0, T] \to \mathbb{R}$ oraz $\|\sigma\|_{\mathbb{L}^{1/H}_{[0,T]}} = \left(\int_0^T |\sigma_s|^{1/H}\, ds\right)^H < \infty$, $T \in \mathbb{R}^+$. Oznaczmy przez $\mathcal{E}$ zbiór wszystkich funkcji schodkowych tzn. funkcji postaci $\sigma_t = \sum_{i=1}^n \sigma_{i-1} \mathbf{1}_{(t_{i-1}, t_i]}(t)$, $t \in [0, T]$, gdzie $\{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T\}$ jest pewnym podziałem odcinka $[0, T]$, $\sigma_i \in \mathbb{R}$. Dla $\sigma \in \mathcal{E}$ całkę względem B^H definiujemy następująco:

$$\int_0^T \sigma_s\, dB_s^H = \sum_{i=1}^n \sigma_{i-1}(B_{t_i}^H - B_{t_{i-1}}^H).$$

Można zauważyć, że $EB_t^H B_s^H = H(2H-1) \int_0^t \int_0^s |u-v|^{2H-2}\, du\, dv$, co pociąga, że dla wszystkich $\sigma^1, \sigma^2 \in \mathcal{E}$ mamy

$$E\left(\int_0^T \sigma_s^1\, dB_s^H \int_0^T \sigma_s^2\, dB_s^H\right) = \langle \sigma^1, \sigma^2 \rangle_T^H, \tag{1.4}$$

gdzie

$$\langle \sigma^1, \sigma^2 \rangle_T^H = H(2H-1) \int_0^T \int_0^T \sigma_t^1 \sigma_s^2 |t-s|^{2H-2}\, ds\, dt. \tag{1.5}$$

Pipiras i Taqqu w pracy [61] pokazali, że $\langle \cdot, \cdot \rangle_T^H$ jest iloczynem skalarnym w przestrzeni $\mathbb{L}^{1/H}_{[0,T]}$. Ponadto na mocy nierówności (2.1) z pracy [47] istnieje stała $c(2, H)$ taka, że dla każdego $\sigma \in \mathbb{L}^{1/H}_{[0,T]}$

$$\sqrt{\langle \sigma, \sigma \rangle_T^H} \leqslant c(2, H) \|\sigma\|_{\mathbb{L}^{1/H}_{[0,T]}}. \tag{1.6}$$

Niech $\{\sigma^n\}$ będzie ciągiem funkcji schodkowych takim, że $\sigma^n \to \sigma$ w $\mathbb{L}^{1/H}_{[0,T]}$. Wówczas z (1.4) oraz (1.6) wynika, że ciąg $\{\int_0^T \sigma_s^n\, dB_s^H\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $\mathbb{L}^2$. Ponieważ przestrzeń $\mathbb{L}^2$ jest zupełna, więc dla $\sigma \in \mathbb{L}^{1/H}_{[0,T]}$ całka $\int_0^T \sigma_s\, dB_s^H \in \mathbb{L}^2$ definiowana jest jako granica ciągu $\{\int_0^T \sigma_s^n\, dB_s^H\}$ przy $n \to \infty$.

Fakt 1.18. *Niech $\sigma \in \mathbb{L}^{1/H}_{loc}$ (tzn. $\int_0^T |\sigma_s|^{1/H}\, ds < \infty$ dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$). Proces $Y^H = \{Y_t^H\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ dany wzorem:*

$$Y_t^H = \int_0^t \sigma_s\, dB_s^H, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{1.7}$$

jest scentrowanym procesem gaussowskim o ciągłych trajektoriach oraz dla każdego $p > 1/H$

$$P(\, V_p(Y^H)_T < \infty\,) = 1, \quad T \in \mathbb{R}^+. \tag{1.8}$$

Dowód. Ciągłość trajektorii procesu Y^H została udowodniona w [51, Section 1.11]. Z twierdzenia 1.1 w [47] dla każdego $r > 0$ istnieje stała $C(r,H)$ taka, że

$$E|Y^H_{t_2} - Y^H_{t_1}|^r \leqslant C(r,H)\left(\int_{t_1}^{t_2} |\sigma_s|^{1/H}\,ds\right)^{rH} \tag{1.9}$$

dla wszystkich $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$. Stąd dla dowolnego podziału $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T\}$ odcinka $[0,T]$ mamy, że

$$\sum_{i=1}^{n}(E|Y^H_{t_i} - Y^H_{t_{i-1}}|)^{1/H} \leqslant (C(1,H))^{1/H}\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{t_{i-1}}^{t_1} |\sigma_s|^{1/H}\,ds\right) = (C(1,H))^{1/H}\|\sigma\|_{\mathbb{L}^{1/H}_{[0,T]}}.$$

Na mocy powyższej nierówności oraz twierdzenia 1.17 proces Y^H spełnia (1.8). □

1.3 Rozwiązania równań względem funkcji i procesów o skończonej p-wariacji

Nasze rozważania zaczniemy od równania deterministycznego postaci

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(x_s)\,da_s, \quad t \in [0,T], \tag{1.10}$$

gdzie $x_0 \in \mathbb{R}$, $a : [0,T] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą taką, że $V_p(a)_T < \infty$ dla pewnego $p \in [1,2)$. Równanie (1.10) badali wcześniej Lyons [46] i Dudley [18].

Twierdzenie 1.19 (Lyons [46]). *Jeżeli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją α-hölderowską dla $\alpha \in (p-1,1]$, to istnieje rozwiązanie równania* (1.10) *w przestrzeni $\mathcal{W}_q([0,T],\mathbb{R}^d)$ dla $q > p$.*

Aby uzyskać jednoznaczność rozwiązań, autorzy potrzebowali mocniejszych założeń na funkcję f.

Twierdzenie 1.20 (Lyons [46], Dudley [18]). *Jeżeli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją klasy $\mathcal{C}^1$ oraz f' jest ograniczoną funkcją γ-hölderowską dla $\gamma \in (p-1,1]$, to równanie* (1.10) *posiada jednoznaczne rozwiązanie w przestrzeni $\mathcal{W}_p([0,T],\mathbb{R}^d)$.*

Analogiczny wynik uzyskał Norvaiša [57] dla równań postaci

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(x_{s-})\,da_s, \quad t \in [0,T], \tag{1.11}$$

gdzie $x_0 \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ oraz $V_p(a)_T < \infty$ dla pewnego $p \in [1,2)$.

Twierdzenie 1.21 (Norvaiša [57]). *Jeżeli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją różniczkowalną, spełniającą warunek Lipschitza oraz f' jest funkcją lokalnie γ-hölderowską dla $\gamma \in (p-1,1]$, to równanie* (1.11) *posiada jednoznaczne rozwiązanie w przestrzeni $\mathcal{W}_p([0,T],\mathbb{R}^d)$.*

Podobnym zagadnieniem zajmowali się Nualart i Răşcanu [59]. Badali oni problem istnienia i jednoznaczności rozwiązań równań deterministycznych postaci

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(s,x_s)\,ds + \int_0^t g(s,x_s)\,da_s, \quad t \in [0,T], \tag{1.12}$$

gdzie $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $f : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $g : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{M}^d$ oraz $a : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ jest funkcją spełniającą warunek

$$\sup_{0<s<t<T} \left(\frac{|a_t - a_s|}{(t-s)^{1-\alpha}} + \int_s^t \frac{|a_u - a_s|}{(u-s)^{2-\alpha}}\, du \right) < \infty$$

dla pewnego $\alpha \in (0, 1/2)$. Można zauważyć, że jeżeli a spełnia powyższy warunek, to jest również funkcją $(1-\alpha)$-hölderowską, co pociąga, iż posiada skończoną p-wariację dla $p \geqslant 1/(1-\alpha)$.

Rozważmy następujący zestaw założeń.

(i) Istnieją: funkcja $f_0 \in \mathbb{L}^q_{[0,T]}$, gdzie $q \geqslant 2$, oraz $L > 0$ takie, że

$$|f(t,x)| \leqslant L|x| + f_0(t), \quad x \in \mathbb{R}^d,\ t \in [0,T].$$

(ii) Dla każdego $N \in \mathbb{R}^+$ istnieje $L_N > 0$ taka, że

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leqslant L_N|x-y|, \quad |x|, |y| < N,\ t \in [0,T].$$

(iii) Istnieje $C > 0$ taka, że

$$|g(t,x) - g(t,y)| \leqslant C|x-y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^d,\ t \in [0,T].$$

(iv) Istnieje $\beta > 0$ taka, że dla wszystkich $i = 1, \ldots, d$

$$|g(t,x) - g(s,x)| + |\partial_{x_i} g(t,x) - \partial_{x_i} g(s,x)| \leqslant C|t-s|^\beta, \quad x \in \mathbb{R}^d,\ t, s \in [0,T].$$

(v) Istnieje $\delta \in (0,1]$ oraz dla każdego $N \in \mathbb{R}^+$ istnieje C_N takie, że

$$|\partial_{x_i} g(t,x) - \partial_{y_i} g(t,y)| \leqslant C_N|x-y|^\delta, \quad |x|, |y| < N,\ t \in [0,T],\ i = 1, \ldots, d.$$

Oznaczmy przez $\mathcal{W}^{\alpha,\infty}([0,T]; \mathbb{R}^d)$ przestrzeń funkcji mierzalnych $\phi : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ spełniających warunek

$$\sup_{t \leqslant T} \left(|\phi_t| + \int_0^t \frac{|\phi_t - \phi_s|}{(t-s)^{\alpha+1}}\, ds \right) < \infty.$$

Twierdzenie 1.22 (Nualart, Răşcanu [59]). *Niech f i g spełniają założenia* (i)–(v) *dla $\beta > 0$, $\delta \leqslant 1$, $q = 1/\alpha$. Jeżeli $\alpha < \min\{1/2, \beta, \delta/(1+\delta)\}$, to równanie* (1.12) *posiada jednoznaczne rozwiązanie w przestrzeni $\mathcal{W}^{\alpha,\infty}([0,T]; \mathbb{R}^d)$. Ponadto rozwiązanie to jest* $(1-\alpha)$*-hölderowskie.*

Jako bezpośredni wniosek z twierdzenia 1.21 otrzymujemy następujący rezultat dotyczący stochastycznych równań różniczkowych postaci

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_{s-})\, dA_s, \quad t \in [0,T], \tag{1.13}$$

gdzie $X_0 \in \mathbb{R}$, a A jest procesem o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ takim, że $P(V_p(A)_T < \infty) = 1$ dla pewnego $p \in [1,2)$.

Wniosek 1.23. *Jeżeli $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ spełnia założenia twierdzenia 1.21, to równanie* (1.13) *posiada jednoznaczne mocne rozwiązanie X wśród procesów o lokalnie skończonej p-wariacji (w sensie definicji 3.3).*

Uwaga 1.24. Zauważmy, że na mocy (1.8) proces A w powyższym wniosku możemy zastąpić przez ułamkowy ruch Browna B^H lub proces Y^H.

Kubilius [37], Lin [43], Nualart i Răşcanu [59] oraz Ruzmaikina [68] badali równania względem ułamkowego ruchu Browna postaci

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_s)\, ds + \int_0^t g(s, X_s)\, dB_s^H, \quad t \in [0,T], \tag{1.14}$$

gdzie całka względem B^H jest zdefiniowana jako całka Riemenna-Stieltjesa po trajektoriach. Dla przykładu podamy najbardziej ogólny wynik pochodzący z pracy [59].

Twierdzenie 1.25 (Nualart, Răşcanu [59]). *Niech B^H oznacza d-wymiarowy, ułamkowy ruch Browna, X_0 będzie d-wymiarową zmienną losową oraz $\alpha_0 = \min\{1/2, \beta, \delta/(1+\delta)\}$, $\alpha \in (1-H, \alpha_0)$. Jeżeli funkcje f i g spełniają* (i)–(v) *dla $\beta > 1-H$, $\delta > 1/H - 1$, $q \geqslant 1/\alpha$, to równanie* (1.14) *posiada jednoznaczne mocne rozwiązanie wśród procesów o trajektoriach należących do $\mathcal{W}^{\alpha,\infty}([0,T];\mathbb{R}^d)$. Ponadto rozwiązanie to posiada trajektorie* $(1-\alpha)$-*hölderowskie.*

Kubilius [38–42] badał również zagadnienie istnienia, jednoznaczności oraz aproksymacji słabych i mocnych rozwiązań równań postaci

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s)\, dW_s + \int_0^t g(X_s)\, dB_s^H, \quad t \in [0,T],$$

gdzie W jest procesem Wienera oraz ich ogólniejszej wersji:

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_{s-})\, dM_s + \int_0^t g(X_{s-})\, dA_s, \quad t \in [0,T].$$

W powyższym równaniu M oznacza lokalny martyngał względem $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, natomiast A jest $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptowanym procesem o lokalnie skończonej p-wariacji.

Nieco ogólniejsze równania względem procesu Wienera oraz ułamkowego ruchu Browna rozważali Guerra i Nualart [30].

Twierdzenie 1.26 (Guerra, Nualart [30]). *Niech B^H będzie d-wymiarowym, ułamkowym ruchem Browna, W d-wymiarowym procesem Wienera oraz B^H i W będą niezależne. Załóżmy, że $h : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ i $f : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{M}^d$ są funkcjami ciągłymi spełniającymi* (i) *dla $f_0 \equiv L$ oraz globalnie warunek* (ii). *Ponadto niech $g : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{M}^d$ będzie funkcją ciągłą spełniającą* (iii), (iv) *oraz globalnie warunek* (v). *Jeżeli $1 - H < \alpha < \min\{1/2, \beta, \delta/2\}$, to równanie*

$$X_t = X_0 + \int_0^t h(s, X_s)\, ds + \int_0^t f(s, X_s)\, dW_s + \int_0^t g(s, X_s)\, dB_s^H, \quad t \in [0,T],$$

posiada jednoznaczne mocne rozwiązanie wśród procesów o trajektoriach należących do $\mathcal{W}^{\alpha,\infty}([0,T];\mathbb{R}^d)$.

W ostatnich latach ukazały się również pierwsze prace dotyczące stochastycznych równań różniczkowych z odbiciem względem ułamkowego ruchu Browna. W pracy [27] (patrz również [6]) Ferrante i Rovira zajmowali się równaniami postaci

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_s)\, ds + \int_0^t g(s, X_s)\, dB_s^H + K_t, \quad t \in [0, T], \tag{1.15}$$

gdzie K jest procesem kompensującym odbicie od dolnej bariery $L \equiv 0$. Autorzy pokazali istnienie słabych rozwiązań powyższego równania, zakładając, że funkcje f i g są ograniczone, spełniają warunek Lipschitza względem zmiennej x oraz że funkcja g jest hölderowska względem czasu. Nie byli natomiast w stanie pokazać globalnej jednoznaczności rozwiązań (definicja rozwiązania równania (1.15) zawarta jest w rozdziale 3.).

1.4 Zbieżność procesów stochastycznych

Rozważmy ciąg $\{X^n\}$ elementów losowych o wartościach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ (tzn. procesów o trajektoriach càdlàg) określonych na (być może różnych) przestrzeniach probabilistycznych $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, P^n)$ oraz element losowy X o wartościach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ określony na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Definicja 1.27. Powiemy, że ciąg $\{X^n\}$:

(i) *zbiega według rozkładu* do X w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ (co oznaczamy $X^n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$), jeżeli $Ef(X^n) \to Ef(X)$ dla dowolnej ciągłej i ograniczonej funkcji $f : \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$;

(ii) jest *jednostajnie jędrny* w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $K \subset \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ zwarty taki, że $P(X^n \notin K) < \varepsilon,\ n \in \mathbb{N}$.

Przyjmijmy dla X następujące oznaczenie: $J(X) = \{t \in \mathbb{R}^+ ; P(\Delta X_t \neq 0) > 0\}$. Można pokazać, że dla dowolnego procesu o trajektoriach càdlàg zbiór $J(X)$ jest co najwyżej przeliczalny (patrz np. [32, Chapter VI, Lemma 3.12]).

Definicja 1.28. Powiemy, że rozkłady skończenie wymiarowe $\{X^n\}$ zbiegają do rozkładów skończenie wymiarowych X (co oznaczamy $X^n \xrightarrow{\mathcal{D}_f} X$), jeżeli

$$(X^n_{t_1}, X^n_{t_2}, \ldots, X^n_{t_m}) \xrightarrow{\ \mathcal{D}\ } (X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_m}) \quad \text{w } (\mathbb{R}^d)^m$$

dla dowolnych $t_1, t_2, \ldots, t_m \in \mathbb{R}^+ \setminus J(X)$, $m \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie 1.29 ([7, Theorem 13.1]). *$X^n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

(i) *$X^n \xrightarrow{\mathcal{D}_f} X$,*

(ii) *X^n jest jednostajnie jędrny w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$.*

Twierdzenie 1.30. *Załóżmy, że dla wszystkich* $t \in \mathbb{R}^+$ $X^n_t \xrightarrow{\mathcal{P}} X_t$, *gdzie* X *jest procesem o ciągłych trajektoriach. Jeżeli* $\{X^n\}$ *jest jednostajnie jędrny w* $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, *to*

$$\sup_{t \leqslant T} |X^n_t - X_t| \xrightarrow{\ \mathcal{P}\ } 0, \quad T \in \mathbb{R}^+.$$

Dowód. Ponieważ X ma ciągłe trajektorie, więc także $\{(X^n, X)\}$ jest jednostajnie jędrny w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$. Stąd $(X^n, X) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X, X)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$. Zatem $X^n - X \xrightarrow{\mathcal{D}} X - X = 0$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, co implikuje, że $\sup_{t \leqslant T} |X^n_t - X_t| \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$. □

Twierdzenie 1.31 ([31, Lemma 1.1]). *Niech* $\{X^n\}$ *będzie ciągiem procesów o trajektoriach w* $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$. $\{X^n\}$ *jest zbieżny według prawdopodobieństwa w* $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych dwóch podciągów* $\{m\} \subset \{n\}$, $\{l\} \subset \{n\}$ *istnieją dalsze podciągi* $\{m_k\} \subset \{m\}, \{l_k\} \subset \{l\}$ *takie, że* $(X^{m_k}, X^{l_k}) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X, X')$ *w* $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$ *oraz* $P(X_t = X'_t,\ t \in \mathbb{R}^+) = 1$.

Twierdzenie 1.32 ([32, Chapter VI, Corollary 3.33]). *Jeżeli* $\{Y^n\}$ *jest jednostajnie* $\mathcal{C}$*-jędrny w* $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ *(tzn.* $\{Y^n\}$ *jest jednostajnie jędrny i każdy jego punkt skupienia ma ciągłe trajektorie) oraz* $\{X^n\}$ *jest jednostajnie jędrny (odp. jednostajnie* $\mathcal{C}$*-jędrny) w* $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, *to* $\{(X^n, Y^n)\}$ *jest jednostajnie jędrny (odp. jednostajnie* $\mathcal{C}$*-jędrny) w* $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$.

Twierdzenie 1.33 ([74, Proposition 2]). *Niech* $\{X^n\}$ *będzie ciągiem procesów* $\{\mathcal{F}^n_t\}$*-adaptowanych o trajektoriach w* $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$.

(i) *Załóżmy, że istnieją trzy rodziny stałych* $\{\delta_k\}$, $\{\{\delta_{k,i}\}\}$, $\{q_i\}$, *gdzie* $\delta_k \to 0$, $\delta_{k,i} \to 0$ *przy* $k \to \infty$, $q_i \to \infty$ *przy* $i \to \infty$ *oraz dla ustalonych* $n, k \in \mathbb{N}$ *istnieje ciąg* $\{\tau^n_{k,j}\}$ *momentów zatrzymania względem* $\{\mathcal{F}^n_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ *taki, że* $0 = \tau^n_{k,0} < \tau^n_{k,1} < \ldots$, $\lim_j \tau^n_{k,j} = \infty$ P*-p.w.,*

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P(\max_{j \in D^n_{k,i}} (\tau^n_{k,j+1} - \tau^n_{k,j}) > \delta_k) = 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P(\min_{j \in D^n_{k,i}} (\tau^n_{k,j+1} - \tau^n_{k,j}) \leqslant \delta_{k,i}) = 0, \quad i \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

gdzie $D^n_{k,i} = \{j\,;\, \tau^n_{k,j+1} \leqslant q_i\}$, $k, n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Jeżeli dodatkowo*

$$\{\sup_{t \leqslant q_i} |X^n_t|\} \quad \text{jest ograniczony według prawdopodobieństwa, } i \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P(\sup_{t \leqslant \delta_k} |X^n_t| \geqslant \varepsilon) = 0, \quad \varepsilon > 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P(\max_{j \in D^n_{k,i}} \sup_{\tau^n_{k,j} \leqslant t < \tau^n_{k,j+1}} |X^n_t - X^n_{\tau^n_{k,j}}| \geqslant \varepsilon) = 0, \quad \varepsilon > 0,\ i \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

to $\{X^n\}$ *jest jednostajnie jędrny w* $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$.

(ii) *Jeżeli ciąg* $\{X^n\}$ *jest zbieżny według rozkładu w* $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, *to istnieją rodziny stałych* $\{\delta_k\}$, $\{\{\delta_{k,i}\}\}$, $\{q_i\}$ *oraz momentów zatrzymania* $\{\{\tau^n_{k,i}\}\}$ *spełniające warunki z punktu* (i).

Twierdzenie 1.34 ([78, Lemma 2.4]). *Niech $\{X^n\}$ będzie ciągiem procesów dyskretnych postaci $X^n_t = X^n_{t_{n,k}}$ dla $t \in [t_{n,k}, t_{n,k+1})$, gdzie $\pi_n = \{0 = t_{n,0} < t_{n,1} < t_{n,2} < \ldots\}$ jest ciągiem podziałów takim, że $\lim_{k\to\infty} t_{n,k} = \infty$, $n \in \mathbb{N}$ oraz $\mathrm{diam}(\pi_n) \to 0$. Jeżeli ciąg zmiennych losowych $\{|X^n_0|\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa oraz istnieją stałe $\gamma, \varepsilon > 0$ i ciągła, niemalejąca funkcja $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ taka, że*

$$P(|X^n_t - X^n_s| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda^\gamma}|F_{\varrho^n_t} - F_{\varrho^n_s}|^{1+\varepsilon}, \quad t, s \in \mathbb{R}^+, \tag{1.16}$$

gdzie $\varrho^n_t = t_{n,k}$, $t \in [t_{n,k}, t_{n,k+1})$, $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, to ciąg $\{X^n\}$ jest jednostajnie $\mathcal{C}$-jędrny w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$.

Uwaga 1.35. Zamiast (1.16) możemy założyć, że istnieją stałe $\gamma, \varepsilon > 0$ takie, że

$$E|X^n_t - X^n_s|^\gamma \leqslant |F_{\varrho^n_t} - F_{\varrho^n_s}|^{1+\varepsilon}$$

dla wszystkich $t, s \in \mathbb{R}^+$.

Fakt 1.36. *Niech $\{X^n\}$ będzie ciągiem procesów o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ takim, że ciąg $\{V_p(X^n)_T\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa dla pewnego $p \geqslant 1$. Jeżeli $X^n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, to $P(V_p(X) < \infty) = 1$.*

Dowód. Patrz dowód [40, Lemma 3]. □

Semimartyngałem względem filtracji $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ nazywamy każdy $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptowany proces $Z = \{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, który można przedstawić w postaci

$$Z_t = Z_0 + M_t + B_t, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

gdzie Z_0 jest $\mathcal{F}_0$-mierzalną zmienną losową, M jest lokalnym martyngałem względem filtracji $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, a B jest $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptowanym procesem o lokalnie skończonej wariacji. Wiadomo, że dla każdego $a > 0$ semimartyngał Z posiada jednoznaczny rozkład

$$Z_t = Z_0 + J^a_t + M^a_t + D^a_t, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{1.17}$$

gdzie $J^a_t = \sum_{s\leqslant t} \Delta Z_s \mathbf{1}_{\{|\Delta Z_s|>a\}}$, $t \in \mathbb{R}^+$, M^a jest lokalnym maryngałem całkowalnym z kwadratem, D^a jest procesem prognozowalnym z lokalnie skończoną wariacją, $|\Delta M^a| \leqslant 2a$, $|\Delta D^a| \leqslant a$, $M^a_0 = D^a_0 = 0$.

Niech dla każdego $n \in \mathbb{N}$ $Z^n = \{Z^n_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ będzie semimaryngałem zdefiniowanym na przestrzeni $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, P^n)$ i adaptowanym do pewnej filtracji $\{\mathcal{F}^n_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$. Mówimy, że ciąg $\{Z^n\}$ spełnia warunek (UT), jeżeli dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ rodzina zmiennych losowych

$$\left\{U^n_0 Z^n_0 + \int_0^T U^n_s \, dZ^n_s \,;\, n \in \mathbb{N},\, U^n \in \mathbb{U}^n_T\right\}$$

jest ograniczona według prawdopodobieństwa. $\mathbb{U}^n_T$ oznacza rodzinę prognozowalnych procesów prostych postaci $U^n_s = U^n_0 + \sum_{i=0}^k U^n_i \mathbf{1}_{\{t_i<s\leqslant t_{i+1}\}}$ takich, że $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = T$ oraz U^n_i jest $\mathcal{F}^n_{t_i}$ mierzalne, $|U^n_i| \leqslant 1$ dla każdego $i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$.

Rozważmy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ rozkład Z^n postaci $Z_t^n = Z_0^n + J_t^{n,a} + M_t^{n,a} + D_t^{n,a}$, $t \in \mathbb{R}^+$, gdzie $J^{n,a}$, $M^{n,a}$ i $D^{n,a}$ spełniają analogiczne warunki jak w (1.17).

Dla d-wymiarowego procesu X niech $[X]_t = \sum_{i=1}^d [X^i]_t$, $\langle X \rangle_t = \sum_{i=1}^d \langle X^i \rangle_t$, $t \in \mathbb{R}^+$, gdzie $[X^i] = \{[X^i]_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, $\langle X^i \rangle = \{\langle X^i \rangle_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ oznaczają odpowiednio wariację kwadratową procesu X^i oraz kompensator prognozowalny wariacji kwadratowej procesu X^i, $i = 1, \dots, d$.

Twierdzenie 1.37 ([48, Théorème 1.4]). *Następujące warunki są równoważne:*

(i) $\{Z^n\}$ *spełnia* (UT),

(ii) *dla wszystkich* $t \in \mathbb{R}^+$, $a > 0$ *ciągi zmiennych losowych* $\{Z_0^n\}$, $\{V_1(J^{n,a})_t\}$, $\{V_1(D^{n,a})_t\}$, $\{[M^{n,a}]_t\}$ *są ograniczone według prawdopodobieństwa,*

(iii) *dla dowolnych* $t \in \mathbb{R}^+$ *i* $\varepsilon > 0$ *istnieje* $\delta > 0$ *taka, że dla każdego procesu prognozowalnego* H^n *zachodzi implikacja*

$$P(\sup_{s\leqslant t} |H_t^n| > \delta) < \delta \;\Rightarrow\; P\left(\sup_{s\leqslant t}\left|H_0^n Z_0^n + \int_0^s H_u^n dZ_u^n\right| > \varepsilon\right) < \varepsilon.$$

Uwaga 1.38. Ponieważ skoki $M^{n,a}$ są ograniczone, więc ciąg $\{[M^{n,a}]_t\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa wtedy i tylko wtedy, gdy ograniczony według prawdopodobieństwa jest ciąg $\{\langle M^{n,a}\rangle_t\}$.

Twierdzenie 1.39 ([35, Théorème 2.6]). *Niech* $\{Z^n\}$ *będzie ciągiem semimartyngałów spełniających warunek* (UT). *Jeżeli* $\{X^n\}$, $\{H^n\}$ *są ciągami procesów* $\{\mathcal{F}_t^n\}$*-adaptowanych takich, że* $(H^n, X^n, Z^n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (H, X, Z)$ *w* $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d'+2d})$, *to* Z *jest semimartyngałem adaptowanym do filtracji generowanej przez* (H, X, Z) *oraz*

$$\left(H^n,\, X^n,\, Z^n,\, \int_0^\cdot X_{s-}^n\, dZ_s^n\right) \xrightarrow{\;\mathcal{D}\;} \left(H,\, X,\, Z,\, \int_0^\cdot X_{s-}\, dZ_s\right) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d'+2d+1}).$$

Twierdzenie 1.40 (Skorochoda o reprezentacji). *Jeżeli* $X^n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ *w* $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, *to istnieje przestrzeń probabilistyczna* $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{P})$, *procesy* $\widehat{X^n}$, $\widehat{X}$ *takie, że* $\mathcal{L}(\widehat{X^n}) = \mathcal{L}(X^n)$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}(\widehat{X}) = \mathcal{L}(X)$ *oraz*

$$\widehat{X^n}(\omega) \longrightarrow \widehat{X}(\omega) \text{ w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d) \text{ dla } \widehat{P} - \text{prawie wszystkich } \omega \in \widehat{\Omega}.$$

Fakt 1.41 ([42, Lemma 3], [58, Theorem 4.4]). *Każdy lokalny martyngał* $M = \{M_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ *względem* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ *posiada lokalnie skończoną* p*-wariację dla dowolnego* $p > 2$. *Jeżeli* M *jest dodatkowo całkowalny z kwadratem i* $M_0 = 0$, *to dla dowolnego* $p > 2$ *istnieje stała* $K(p)$ *zależna tylko od* p *taka, że dla każdego momentu zatrzymania* τ *względem* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ *mamy*

$$EV_p(M)_\tau^2 \leqslant K(p)E[M]_\tau$$

oraz

$$EV_p(M)_{\tau-}^2 \leqslant K(p)(E\langle M\rangle_{\tau-} + E[M]_{\tau-}).$$

Rozdział 2

Równania z barierami względem funkcji o skończonej p-wariacji

2.1 Lipschitzowskość rozwiązań problemu Skorochoda w normie p-wariacyjnej

Skorochod w roku 1961 udowodnił następujący lemat.

Lemat 2.1 (Skorochod [73]). *Dla dowolnej funkcji ciągłej y, $y_0 \geqslant 0$ istnieją funkcje x, k takie, że*

(i) $x_t = y_t + k_t \geqslant 0$ *dla* $t \in \mathbb{R}^+$,

(ii) $k_0 = 0$, *k jest niemalejąca oraz* $\int_0^t x_s \, dk_s = 0$, $t \in \mathbb{R}^+$.

Ponadto funkcja k dana jest wzorem

$$k_t = \sup_{s \leqslant t} (y_s)^-, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Łatwo zauważyć, że powyższy lemat pozostaje prawdziwy, jeśli zamiast funkcji ciągłych, rozważa się funkcje càdlàg. Oprócz tego barierę równą zero można również zastąpić funkcją càdlàg. Dokładniej dla dowolnych funkcji $y, l \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, $l_0 \leqslant y_0$ istnieje para funkcji $(x, k) \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$ taka, że

(i) $x_t = y_t + k_t \geqslant l_t$, $t \in \mathbb{R}^+$,

(ii) $k_0 = 0$, $k = (k^1, \ldots, k^d)$, gdzie k^i są funkcjami niemalejącymi oraz dla każdego $t \in \mathbb{R}^+$ mamy
$$\int_0^t (x_s^i - l_s^i) \, dk_s^i = 0, \quad i = 1, \ldots, d.$$

Parę (x, k) nazywamy rozwiązaniem problemu Skorochoda stowarzyszonego z y oraz dolną barierą l. Będziemy stosowali oznaczenie $(x, k) = SP_l(y)$. Ponieważ $SP_l(y) = SP_0(y - l)$, gdzie parametr 0 oznacza funkcję stałą równą zero, na mocy lematu 2.1 otrzymujemy, że dla $(x, k) = SP_l(y)$ mamy

$$k_t = \sup_{s \leqslant t} (y_s - l_s)^-, \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{2.1}$$

Podobnie można rozważać problem Skorochoda z barierą górną. Dla dowolnych funkcji $y, u \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, $u_0 \geqslant y_0$ istnieje para funkcji $(x, k) \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$ taka, że

(i) $x_t = y_t + k_t \leqslant u_t$, $t \in \mathbb{R}^+$,

(ii) $k_0 = 0$, $k = (k^1, \ldots, k^d)$, gdzie k^i są funkcjami nierosnącymi oraz dla każdego $t \in \mathbb{R}^+$ mamy

$$\int_0^t (x_s^i - u_s^i)\, dk_s^i = 0, \quad i = 1, \ldots, d.$$

Funkcja k dana jest wzorem

$$k_t = -\sup_{s \leqslant t} (y_s - u_s)^+, \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{2.2}$$

Parę (x, k) będziemy nazywać rozwiązaniem problemu Skorochoda stowarzyszonego z y i górną barierą u oraz będziemy stosować oznaczenie $(x, k) = SP^u(y)$.

W pracy [9] Burdzy, Kang oraz Ramanan podali definicję tzw. rozszerzonego problemu Skorochoda z dwiema barierami.

Definicja 2.2. Niech $y, l, u \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ będą takie, że $l \leqslant u$ oraz $l_0 \leqslant y_0 \leqslant u_0$. Powiemy, że para $(x, k) \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$ jest rozwiązaniem *rozszerzonego problemu Skorochoda* stowarzyszonego z y oraz barierami l, u jeżeli

(i) $x_t = y_t + k_t \in [l_t, u_t]$, $t \in \mathbb{R}^+$,

(ii) $k_0 = 0$, $k = (k^1, \ldots, k^d)$, gdzie dla dowolnych $0 \leqslant t \leqslant q$, $i = 1, \ldots, d$

$$\begin{aligned} k_q^i - k_t^i &\geqslant 0, \qquad \text{jeśli } x_s^i < u_s^i \text{ dla wszystkich } s \in (t, q], \\ k_q^i - k_t^i &\leqslant 0, \qquad \text{jeśli } x_s^i > l_s^i \text{ dla wszystkich } s \in (t, q] \end{aligned}$$

oraz dla każdego $t \in \mathbb{R}^+$, $\Delta k_t^i \geqslant 0$, jeśli $x_t^i < u_t^i$ i $\Delta k_t^i \leqslant 0$, jeśli $x_t^i > l_t^i$.

Będziemy stosowali oznaczenie $(x, k) = ESP(y, l, u)$.

Uwaga 2.3. 1. W [9, Theorem 2.6] pokazano, że dla dowolnych $y, l, u \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ takich, że $l \leqslant u$ oraz $l_0 \leqslant y_0 \leqslant u_0$ istnieje jednoznaczne rozwiązanie $(x, k) = ESP(y, l, u)$.

2. Jak zostało zauważone w [76], zamiast (ii) w definicji rozszerzonego problemu Skorochoda można rozważać następujący zestaw warunków: dla dowolnych $0 \leqslant t \leqslant q$, $i = 1, \ldots, d$ takich, że $\inf_{s \in [t,q]} (u_s^i - l_s^i) > 0$ funkcja k^i posiada skończoną wariację na $[t, q]$ oraz

$$\int_{[t,q]} (x_s^i - l_s^i)\, dk_s^i \leqslant 0 \quad \text{i} \quad \int_{[t,q]} (x_s^i - u_s^i)\, dk_s^i \leqslant 0. \tag{2.3}$$

W powyższym wzorze $\int_{[t,q]} w_s\, dv_s$ oznacza całkę po przedziale domkniętym $[t, q]$, tzn. $\int_{[t,q]} w_s\, dv_s = w_t \Delta v_t + \int_t^q w_s\, dv_s$, gdzie $\int_t^q w_s\, dv_s$ oznacza tradycyjną całkę po przedziale $(t, q]$. Definicja z [9] jest równoważna definicji z [76].

3. Na mocy (2.3), jeżeli $u_t^i > l_t^i$, to $(x_t^i - l_t^i)\Delta k_t^i \leqslant 0$ oraz $(x_t^i - u_t^i)\Delta k_t^i \leqslant 0$. W konsekwencji, jeśli $\Delta k_t^i > 0$, to $x_t^i = l_t^i$, natomiast jeżeli $\Delta k_t^i < 0$, to $x_t^i = u_t^i$, $i = 1, \dots, d$. Zatem dla każdego $t \in \mathbb{R}^+$
$$x_t = \max\{\min\{(x_{t-} + \Delta y_t), u_t\}, l_t\} \quad \text{oraz} \quad k_t = \max\{\min\{k_{t-}, u_t - y_t\}, l_t - y_t\},$$
co oznacza, że x_t jest rzutem $x_{t-} + \Delta y_t$ na przedział $[u_t, l_t]$ oraz k_t jest rzutem k_{t-} na przedział $[u_t - y_t, l_t - y_t]$.

4. W definicji klasycznego problemu Skorochoda (patrz np. [67]) zakłada się, że funkcja k posiada skończoną wariację na każdym ograniczonym przedziale $[t, q]$, albo równoważnie $k = k^{(+)} - k^{(-)}$, gdzie $k^{(+),i}$, $k^{(-),i}$ są niemalejącymi prawostronnie ciągłymi funkcjami, $k_0 = k_0^{(+)} = k_0^{(-)} = 0$ oraz $k^{(+),i}$ rośnie tylko na zbiorze $\{t\,;\, x_t^i = l^i{}_t\}$, natomiast $k^{(-),i}$ rośnie tylko na zbiorze $\{t\,;\, x_t^i = u^i{}_t\}$, $i = 1, \dots, d$. Jeżeli $(x, k) = ESP(y, l, u)$ i $\inf_{t \leqslant T}(u_t - l_t) > 0$, $T \in \mathbb{R}^+$, to k jest funkcją o skończonej wariacji oraz (x, k) jest rozwiązaniem klasycznego problemu Skorochoda (patrz np. [9, Corollary 2.4]).

W przypadku jednej bariery lipschitzowskość rozwiązań problemu Skorochoda w normie supremum jest bezpośrednią konsekwencją postaci funkcji k. Jeżeli $(x, k) = SP_l(y)$ (odp. $(x, k) = SP^u(y)$) oraz $(x', k') = SP_{l'}(y')$ (odp. $(x', k') = SP^{u'}(y')$), to dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$
$$\sup_{t \leqslant T} |x_t - x'_t| \leqslant 2 \sup_{t \leqslant T} |y_t - y'_t| + \sup_{t \leqslant T} |l_t - l'_t| \quad \Big(\text{odp.} \ \sup_{t \leqslant T} |x_t - x'_t| \leqslant 2 \sup_{t \leqslant T} |y_t - y'_t| + \sup_{t \leqslant T} |u_t - u'_t|\Big)$$
oraz
$$\sup_{t \leqslant T} |k_t - k'_t| \leqslant \sup_{t \leqslant T} |y_t - y'_t| + \sup_{t \leqslant T} |l_t - l'_t| \quad \Big(\text{odp.} \ \sup_{t \leqslant T} |k_t - k'_t| \leqslant \sup_{t \leqslant T} |y_t - y'_t| + \sup_{t \leqslant T} |u_t - u'_t|\Big).$$

Analogiczny rezultat dla rozszerzonego problemu Skorochoda z dwiema barierami został udowodniony w pracy [76].

Lemat 2.4 ([76, Theorem 2.6]). *Jeżeli $(x, k) = ESP(y, l, u)$ i $(x', y') = ESP(k', l', u')$, to*
$$\sup_{t \leqslant T} |x_t - x'_t| \leqslant 2 \sup_{t \leqslant T} |y_t - y'_t| + \sup_{t \leqslant T} \max\{|l_t - l'_t|,\, |u_t - u'_t|\}$$
oraz
$$\sup_{t \leqslant T} |k_t - k'_t| \leqslant \sup_{t \leqslant T} |y_t - y'_t| + \sup_{t \leqslant T} \max\{|l_t - l'_t|,\, |u_t - u'_t|\}.$$

Jako wniosek z powyższych oszacowań otrzymujemy stabilność rozwiązań problemu Skorochoda w topologii J_1.

Wniosek 2.5 ([76, Theorem 2.8]). *Załóżmy, że $(x^n, k^n) = ESP(y^n, l^n, u^n)$, $n \in \mathbb{N}$, $(x, k) = ESP(y, l, u)$. Jeżeli $(y^n, l^n, u^n) \to (y, l, u)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{3d})$, to*
$$(x^n,\, k^n,\, y^n,\, l^n,\, u^n) \longrightarrow (x,\, k,\, y,\, l,\, u) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{5d}).$$
Analogicznie, jeżeli $(x^n, k^n) = SP_{l^n}(y^n)$ (odp. $(x^n, k^n) = SP^{u^n}(y^n)$), $n \in \mathbb{N}$, $(x, k) = SP_l(y)$ (odp. $(x, k) = SP^u(y)$) oraz $(y^n, l^n) \to (y, l)$ (odp. $(y^n, u^n) \to (y, u)$) w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$, to
$$(x^n,\, k^n,\, y^n,\, l^n) \longrightarrow (x,\, k,\, y,\, l) \ (\text{odp.}(x^n,\, k^n,\, y^n,\, u^n) \longrightarrow (x,\, k,\, y,\, u)) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{4d}).$$

W dalszej części tego podrozdziału będziemy zajmować się lipschitzowskością rozwiązań problemu Skorochoda w normie p-wariacyjnej. Najpierw rozważać będziemy przypadek jednowymiarowy.

Twierdzenie 2.6. *Ustalmy $p \geqslant 1$. Niech $y^1, y^2, l, u \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ będą takie, że $l_0 \leqslant y_0^1, y_0^2 \leqslant u_0$ oraz $l \leqslant u$. Jeżeli $(x^j, k^j) = ESP(y^j, l, u)$, $j = 1, 2$, to dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ mamy:*

$$\bar{V}_p(k^1 - k^2)_T \leqslant \bar{V}_p(y^1 - y^2)_T.$$

Dowód. Postępujemy podobnie jak w dowodzie [24, Theorem 2.1].

Krok 1. Ustalmy $T \in \mathbb{R}^+$. Załóżmy dodatkowo, że y^1, y^2, l oraz u są funkcjami schodkowymi postaci:

$$y_t^j = Y_i^j,\ l_t = L_i,\ u_t = U_i, \quad t \in [t_{i-1}, t_i), \quad i = 1, \dots, n-1$$

oraz $y_t^j = Y_n^j$, $l_t = L_n$, $u_t = U_n$, $t \in [t_{n-1}, t_n = T]$, $j = 1, 2$ dla pewnego podziału $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ przedziału $[0, T]$. Z uwagi 2.3.3. wynika, że $k_t^j = K_i^j$, $t \in [t_{i-1}, t_i)$, $i = 1, \dots, n-1$, $k_t^j = K_n^j$, $t \in [t_{n-1}, t_n = T]$, $j = 1, 2$, gdzie $K_0^1 = K_0^2 = 0$ oraz $K_i^j = \max\{\min\{K_{i-1}^j, U_i - Y_i^j\}, L_i - Y_i^j\}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, 2$.

Łatwo zauważyć, że

$$L_i - Y_i^j \leqslant K_i^j \leqslant U_i - Y_i^j, \quad i = 1, \dots, n,\ j = 1, 2. \tag{2.4}$$

Bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy założyć, że $v_p(k^1 - k^2)_T > 0$. Zatem istnieje taki indeks i, że $K_i^1 \neq K_{i-1}^1$ lub $K_i^2 \neq K_{i-1}^2$. Dalej, również bez zmniejszenia ogólności założymy, że dla każdego $i = 1, \dots, n-1$, mamy:

$$K_i^1 \neq K_{i-1}^1 \quad \text{lub} \quad K_i^2 \neq K_{i-1}^2. \tag{2.5}$$

(Jeżeli (2.5) nie zachodziłoby, to kładąc $v_0 = 0$,

$$v_k = \inf\{i > v_{k-1}\,;\, K_i^1 \neq K_{i-1}^1 \,\text{lub}\, K_i^2 \neq K_{i-1}^2\} \wedge n, \quad k = 1, \dots, n,$$

$\tilde{n} = \inf\{k\,;\, v_k = n\}$, $\tilde{y}_t^j = Y_{v_k}^j$, $\tilde{l}_t = L_{v_k}$, $\tilde{u}_t = U_{v_k}$, $t \in [t_{v_{k-1}}, t_{v_k})$ dla $k = 1, \dots, \tilde{n} - 1$, $\tilde{y}_t^j = Y_{\tilde{n}}^j$, $\tilde{l}_t = L_{\tilde{n}}$, $\tilde{u}_t = U_{\tilde{n}}$ dla $t \in [t_{v_{\tilde{n}-1}}, t_{v_{\tilde{n}}} = T]$, $j = 1, 2$, dostalibyśmy, że (2.5) zachodzi dla funkcji $\tilde{y}^j$, $(\tilde{x}^j, \tilde{k}^j) = ESP(\tilde{y}^j, \tilde{l}, \tilde{u})$, $j = 1, 2$. Ponadto, $\bar{V}_p(k^1 - k^2)_T = \bar{V}_p(\tilde{k}^1 - \tilde{k}^2)_T$ oraz $\bar{V}_p(\tilde{y}^1 - \tilde{y}^2)_T \leqslant \bar{V}_p(y^1 - y^2)_T$.) Jest oczywiste, że przy poczynionych wcześniej założeniach istnieje skończony ciąg indeksów $0 = i_0 < i_1 < \ldots < i_m = n$ taki, że

$$v_p(k^1 - k^2)_T = \sum_{k=1}^{m} |(K_{i_k}^1 - K_{i_{k-1}}^1) - (K_{i_k}^2 - K_{i_{k-1}}^2)|^p \tag{2.6}$$

oraz

$$(K_{i_k}^1 - K_{i_{k-1}}^1) - (K_{i_k}^2 - K_{i_{k-1}}^2) \neq 0, \quad k = 1, \dots, m. \tag{2.7}$$

Zatem, jeśli $m \geqslant 2$, to dla wszystkich $k = 2, \dots, m$ mamy, że

$$\Big((K_{i_{k-1}}^1 - K_{i_{k-2}}^1) - (K_{i_{k-1}}^2 - K_{i_{k-2}}^2)\Big)\Big((K_{i_k}^1 - K_{i_{k-1}}^1) - (K_{i_k}^2 - K_{i_{k-1}}^2)\Big) < 0. \tag{2.8}$$

Istotnie, jeżeli (2.8) nie zachodzi dla pewnego $k = 2, \ldots, m$, to korzystając z (2.7), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&|(K^1_{i_{k-1}} - K^1_{i_{k-2}}) - (K^2_{i_{k-1}} - K^2_{i_{k-2}})|^p + |(K^1_{i_k} - K^1_{i_{k-1}}) - (K^2_{i_k} - K^2_{i_{k-1}})|^p \\
&\quad < |(K^1_{i_{k-1}} - K^1_{i_{k-2}}) - (K^2_{i_{k-1}} - K^2_{i_{k-2}}) + (K^1_{i_k} - K^1_{i_{k-1}}) - (K^2_{i_k} - K^2_{i_{k-1}})|^p \\
&\quad = |(K^1_{i_k} - K^1_{i_{k-2}}) - (K^2_{i_k} - K^2_{i_{k-2}})|^p,
\end{aligned}$$

co przeczy (2.6).

Pokażemy, że istnieje $0 = i_0 \leqslant r^\wedge_1 \leqslant i_1$ (odp. $0 = i_0 \leqslant r^\vee_1 \leqslant i_1$) takie, że jeśli $K^1_{i_1} - K^2_{i_1} \leqslant 0$ (odp. $K^1_{i_1} - K^2_{i_1} \geqslant 0$), to

$$Y^2_{r^\wedge_1} - Y^1_{r^\wedge_1} \leqslant K^1_{i_1} - K^2_{i_1} \text{ (odp. } K^1_{i_1} - K^2_{i_1} \leqslant Y^2_{r^\vee_1} - Y^1_{r^\vee_1}) \tag{2.9}$$

oraz że dla $k = 2, \ldots, m$ istnieją $i_{k-1} \leqslant r^\wedge_k, r^\vee_k \leqslant i_k$ takie, że

$$Y^2_{r^\wedge_k} - Y^1_{r^\wedge_k} \leqslant K^1_{i_k} - K^2_{i_k} \leqslant Y^2_{r^\vee_k} - Y^1_{r^\vee_k}. \tag{2.10}$$

Ustalmy $k = 1, \ldots, m$. Połóżmy $r^j_k = \max\{i \leqslant i_k\,;\, K^j_i = U_i - Y^j_i \text{ lub } K^j_i = L_i - Y^j_i\}$, $j = 1, 2$ (przyjmujemy konwencję: $\max \emptyset = 0$). Z (2.5) wynika, że $r^1_k = i_k$ lub $r^2_k = i_k$. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że $r^1_k = i_k$. Wówczas mogą zajść następujące przypadki:

(a) $K^1_{i_k} - K^2_{i_k} = (L_{i_k} - Y^1_{i_k}) - (L_{r^2_k} - Y^2_{r^2_k})$ (lub $K^1_{i_k} - K^2_{i_k} = (U_{i_k} - Y^1_{i_k}) - (U_{r^2_k} - Y^2_{r^2_k})$),

(b) $K^1_{i_k} - K^2_{i_k} = L_{i_k} - Y^1_{i_k}$ oraz $r^2_k = 0$ (lub $K^1_{i_k} - K^2_{i_k} = U_{i_k} - Y^1_{i_k}$ oraz $r^2_k = 0$),

(c) $K^1_{i_k} - K^2_{i_k} = (L_{i_k} - Y^1_{i_k}) - (U_{r^2_k} - Y^2_{r^2_k})$ (lub $K^1_{i_k} - K^2_{i_k} = (U_{i_k} - Y^1_{i_k}) - (L_{r^2_k} - Y^2_{r^2_k})$).

Korzystając z (2.4), we wszystkich przypadkach otrzymujemy

$$K^1_{i_k} - K^2_{i_k} = L_{i_k} - Y^1_{i_k} - K^2_{i_k} \leqslant L_{i_k} - Y^1_{i_k} - K^2_{i_k} + K^2_{i_k} - (L_{i_k} - Y^2_{i_k}) = Y^2_{i_k} - Y^1_{i_k},$$

co pociąga, że możemy przyjąć $r^\vee_k = i_k$. W celu znalezienia $r^\wedge_k$ musimy rozpatrzyć przypadki (a), (b), (c) osobno.

W przypadku (a), jeśli $r^2_k = i_k$, to

$$K^1_{i_k} - K^2_{i_k} = L_{i_k} - Y^1_{i_k} - (L_{i_k} - Y^2_{i_k}) = Y^2_{i_k} - Y^1_{i_k},$$

więc przyjmujemy $r^\wedge_k = i_k$. Jeżeli $r^2_k < i_k$, to kładąc $r^\star = \max\{i < i_k\,;\, K^1_i = U_i - Y^1_i\} \vee r^2_k$, możemy zauważyć, że $K^2_{r^\star} = K^2_{r^\star+1} = \cdots = K^2_{i_k}$. Ponieważ dla $r^\star < v \leqslant i_k$, $K^1_v = \max\{K_{v-1}, L_v - Y^1_v\}$, korzystając z (2.5), uzyskujemy

$$K^1_{r^\star} - K^2_{r^\star} < K^1_{r^\star+1} - K^2_{r^\star+1} < \cdots < K^1_{i_k} - K^2_{i_k}. \tag{2.11}$$

Z powyższego wynika również, że $Y^2_{r^\star} - Y^1_{r^\star} < K^1_{i_k} - K^2_{i_k}$. Istotnie, jeżeli $r^\star > r^2_k$ (odp. $r^\star = r^2_k$) to $K^1_{r^\star} = U_{r^\star} - Y^1_{r^\star}$ (odp.$K^2_{r^\star} = L_{r^\star} - Y^2_{r^\star}$) oraz na mocy (2.4)

$$K^1_{i_k} - K^2_{i_k} > K^1_{r^\star} - K^2_{r^\star} \geqslant U_{r^\star} - Y^1_{r^\star} - U_{r^\star} + Y^2_{r^\star} = Y^2_{r^\star} - Y^1_{r^\star}$$

(odp. $K^1_{i_k} - K^2_{i_k} > K^1_{r^\star} - K^2_{r^\star} \geqslant L_{r^\star} - Y^1_{r^\star} - L_{r^\star} + Y^2_{r^\star} = Y^2_{r^\star} - Y^1_{r^\star}$). Niech $r^\wedge_k = r^\star$. Dla dowodu tezy w przypadku (a) pozostaje pokazać, że $i_{k-1} \leqslant r^\star$. Jest to oczywiste dla $k = 1$, więc załóżmy, że $k \geqslant 2$ oraz $i_{k-1} > r^\star$. Na mocy (2.11) wnosimy, iż $(K^1_{i_k} - K^1_{i_{k-1}}) - (K^2_{i_k} - K^2_{i_{k-1}}) > 0$, co razem z (2.8) pociąga: $(K^1_{i_{k-1}} - K^1_{i_{k-2}}) - (K^2_{i_{k-1}} - K^2_{i_{k-2}}) < 0$. W konsekwencji korzystając z (2.11), otrzymujemy, że $i_{k-2} < r^\star$. Stosując ponownie (2.11), uzyskujemy $(K^1_{r^\star} - K^1_{i_{k-1}}) - (K^2_{r^\star} - K^2_{i_{k-1}}) < 0$. Zatem

$$\begin{aligned}0 &> (K^1_{i_{k-1}} - K^1_{i_{k-2}}) - (K^2_{i_{k-1}} - K^2_{i_{k-2}})\\ &> (K^1_{i_{k-1}} - K^1_{i_{k-2}}) - (K^2_{i_{k-1}} - K^2_{i_{k-2}}) + (K^1_{r^\star} - K^1_{i_{k-1}}) - (K^2_{r^\star} - K^2_{i_{k-1}})\\ &= (K^1_{r^\star} - K^1_{i_{k-2}}) - (K^2_{r^\star} - K^2_{i_{k-2}})\end{aligned}$$

oraz

$$|(K^1_{i_{k-1}} - K^1_{i_{k-2}}) - (K^2_{i_{k-1}} - K^2_{i_{k-2}})|^p < |(K^1_{r^\star} - K^1_{i_{k-2}}) - (K^2_{r^\star} - K^2_{i_{k-2}})|^p. \tag{2.12}$$

Podobnie

$$\begin{aligned}0 &< (K^1_{i_k} - K^1_{i_{k-1}}) - (K^2_{i_k} - K^2_{i_{k-1}})\\ &< (K^1_{i_k} - K^1_{i_{k-1}}) - (K^2_{i_k} - K^2_{i_{k-1}}) - (K^1_{r^\star} - K^1_{i_{k-1}}) + (K^2_{r^\star} - K^2_{i_{k-1}})\\ &= (K^1_{i_k} - K^1_{r^\star}) - (K^2_{i_k} - K^2_{r^\star}),\end{aligned}$$

co implikuje, że

$$|(K^1_{i_k} - K^1_{i_{k-1}}) - (K^2_{i_k} - K^2_{i_{k-1}})|^p < |(K^1_{i_k} - K^1_{r^\star}) - (K^2_{i_k} - K^2_{r^\star})|^p. \tag{2.13}$$

Z (2.12) i (2.13) dostajemy oszacowanie

$$\begin{aligned}&|(K^1_{i_{k-1}} - K^1_{i_{k-2}}) - (K^2_{i_{k-1}} - K^2_{i_{k-2}})|^p + |(K^1_{i_k} - K^1_{i_{k-1}}) - (K^2_{i_k} - K^2_{i_{k-1}})|^p\\ &\quad< |(K^1_{r^\star} - K^1_{i_{k-2}}) - (K^2_{r^\star} - K^2_{i_{k-2}})|^p + |(K^1_{i_k} - K^1_{r^\star}) - (K^2_{i_k} - K^2_{r^\star})|^p,\end{aligned}$$

które przeczy (2.6) oraz kończy dowód faktu, iż $i_{k-1} \leqslant r^\star$. Ostatecznie w przypadku (a) przyjmujemy: $r^\wedge_k = r^\star$.

W przypadku (b) (odp. (c)) kładziemy $r^\star = \max\{i < i_k\,;\, K^1_i = U_i - Y^1_i\}$ (odp. $r^\star = \max\{i < i_k\,;\, K^2_i = L_i - Y^2_i \,\text{lub}\, K^1_i = U_i - Y^1_i\}$). Dla $r^\star < v \leqslant i_k$ mamy, że $K^1_v = \max\{K^1_{v-1}, L_v - Y^1_v\}$ oraz $K^2_v = \min\{K^2_{v-1}, U_v - Y^2_v\}$. Podobnie jak w przypadku (a) wnioskujemy z powyższego oraz z (2.5), że

$$K^1_{r^\star} - K^2_{r^\star} < K^1_{r^\star+1} - K^2_{r^\star+1} < \cdots < K^1_{i_k} - K^2_{i_k}.$$

Stosując te same argumenty jak w przypadku (a), możemy pokazać oszacowanie: $i_{k-1} \leqslant r^\star$. Ponadto, jeśli $r^\star > 0$ oraz $K^1_{r^\star} = U_{r^\star} - Y^1_{r^\star}$ (odp. $K^2_{r^\star} = L_{r^\star} - Y^2_{r^\star}$), to na mocy (2.4)

$$K^1_{i_k} - K^2_{i_k} > (U_{r^\star} - Y^1_{r^\star}) - K^2_{r^\star} \geqslant (U_{r^\star} - Y^1_{r^\star}) - (U_{r^\star} - Y^2_{r^\star}) = Y^2_{r^\star} - Y^1_{r^\star}$$

(odp. $K^1_{i_k} - K^2_{i_k} > K^1_{r^\star} - (L_{r^\star} - Y^2_{r^\star}) \geqslant (L_{r^\star} - Y^1_{r^\star}) - (L_{r^\star} - Y^2_{r^\star}) = Y^2_{r^\star} - Y^1_{r^*}$). Zatem przyjmujemy $r^\wedge_k = r^\star$. Ponieważ, jeśli $r^\star = 0$, to $k = 1$, dowód istnienia $r^\wedge_k, r^\vee_k$ spełniających (2.9) i (2.10) został zakończony.

Zauważmy dalej, że jeżeli $K^1_{i_k} - K^2_{i_k} > K^1_{i_{k-1}} - K^2_{i_{k-1}}$ dla pewnego $k = 2, \ldots, m$, to na mocy (2.10):

$$0 < (K^1_{i_k} - K^2_{i_k}) - (K^1_{i_{k-1}} - K^2_{i_{k-1}}) \leqslant (Y^2_{r^\vee_k} - Y^1_{r^\vee_k}) - (Y^2_{r^\wedge_{k-1}} - Y^1_{r^\wedge_{k-1}}).$$

Zatem

$$|(K^1_{i_k} - K^2_{i_k}) - (K^1_{i_{k-1}} - K^2_{i_{k-1}})|^p \leqslant |(Y^1_{r^\vee_k} - Y^2_{r^\vee_k}) - (Y^1_{r^\wedge_{k-1}} - Y^2_{r^\wedge_{k-1}})|^p. \tag{2.14}$$

Podobnie, jeśli $K^1_{i_k} - K^2_{i_k} < K^1_{i_{k-1}} - K^2_{i_{k-1}}$, to

$$|(K^1_{i_k} - K^2_{i_k}) - (K^1_{i_{k-1}} - K^2_{i_{k-1}})|^p \leqslant |(Y^1_{r^\wedge_k} - Y^2_{r^\wedge_k}) - (Y^1_{r^\vee_{k-1}} - Y^2_{r^\vee_{k-1}})|^p. \tag{2.15}$$

W przypadku, gdy $k = 1$, nierówność $K^1_{i_1} - K^2_{i_1} > 0$ pociąga, że

$$|(K^1_{i_1} - K^2_{i_1}) - (K^1_{i_0} - K^2_{i_0})|^p = |K^1_{i_1} - K^2_{i_1}|^p \leqslant |Y^1_{r^\vee_1} - Y^2_{r^\vee_1}|^p, \tag{2.16}$$

natomiast, jeżeli $K^1_{i_1} - K^2_{i_1} < 0$, to

$$|(K^1_{i_1} - K^2_{i_1}) - (K^1_{i_0} - K^2_{i_0})|^p \leqslant |Y^1_{r^\wedge_1} - Y^2_{r^\wedge_1}|^p. \tag{2.17}$$

Z (2.14)–(2.17) wnioskujemy, że

$$\sum_{k=1}^m |(K^1_{i_k} - K^2_{i_k}) - (K^1_{i_{k-1}} - K^2_{i_{k-1}})|^p \leqslant |Y^1_{\tilde r_1} - Y^2_{\tilde r_1}|^p + \sum_{k=2}^m |(Y^1_{\tilde r_k} - Y^2_{\tilde r_k}) - (Y^1_{\tilde r_{k-1}} - Y^2_{\tilde r_{k-1}})|^p,$$

gdzie $\tilde r_k = r^\wedge_k$ lub $\tilde r_k = r^\vee_k$ oraz $i_{k-1} \leqslant \tilde r_k \leqslant i_k$, $k = 1, \ldots, m$. W konsekwencji:

$$\begin{aligned}
\bar V_p(k^1 - k^2)_T &= V_p(k^1 - k^2)_T \\
&= \Big(\sum_{k=1}^m |(K^1_{i_k} - K^2_{i_k}) - (K^1_{i_{k-1}} - K^2_{i_{k-1}})|^p \Big)^{1/p} \\
&\leqslant \Big(|Y^1_{\tilde r_1} - Y^2_{\tilde r_1}|^p + \sum_{k=2}^m |(Y^1_{\tilde r_k} - Y^2_{\tilde r_k}) - (Y^1_{\tilde r_{k-1}} - Y^2_{\tilde r_{k-1}})|^p \Big)^{1/p} \\
&\leqslant |y^1_0 - y^2_0| + \Big(\sum_{k=1}^m |(y^1_{t_{\tilde r_k}} - y^2_{t_{\tilde r_k}}) - (y^1_{t_{\tilde r_{k-1}}} - y^2_{t_{\tilde r_{k-1}}})|^p \Big)^{1/p}
\end{aligned}$$

dla pewnego podziału $0 = t_{\tilde r_0} < t_{\tilde r_1} < \cdots < t_{\tilde r_m} \leqslant T$, co kończy dowód twierdzenia w przypadku schodkowych funkcji y^1, y^2, l oraz u.

Krok 2. Przypadek ogólny.

Niech $\{y^{1,(n)}\}$, $\{y^{2,(n)}\}$, $\{l^{(n)}\}$ oraz $\{u^{(n)}\}$ będą ciągami dyskretyzacji funkcji y^1, y^2, l oraz u, odpowiednio, zdefiniowanymi tak jak w twierdzeniu 1.6. Z twierdzenia 1.6 wynika, że $(y^{1,(n)}, y^{2,(n)}, l^{(n)}, u^{(n)}) \to (y^1, y^2, l, u)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^4)$. Połóżmy dla $n \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2$

$(x^{j,n},\, k^{j,n}) = ESP(y^{j,(n)},\, l^{(n)},\, u^{(n)})$. Korzystając z wniosku 2.5, otrzymujemy zbieżność: $(k^{1,n},\, k^{2,n},\, y^{1,n},\, y^{2,n}) \to (k^1,\, k^2,\, y^1,\, y^2)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^4)$, co pociąga, że

$$k^{1,n} - k^{2n} \longrightarrow k^1 - k^2 \text{ w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}). \tag{2.18}$$

Korzystając z Kroku 1. dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$, $T \in \mathbb{R}^+$, mamy: $\bar{V}_p(k^{1,n} - k^{2,n})_T \leqslant \bar{V}_p(y^{1,(n)} - y^{2,(n)})_T$. Jest jasne, że $\bar{V}_p(y^{1,(n)} - y^{2,(n)})_T \leqslant \bar{V}_p(y^1 - y^2)_T$, $n \in \mathbb{N}$, $T \in \mathbb{R}^+$. Stąd, z (2.18) oraz lematu 1.12 wynika, że dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$

$$\bar{V}_p(k^1 - k^2)_T \leqslant \liminf_{n\to\infty} \bar{V}_p(k^{1,n} - k^{2,n})_T \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \bar{V}_p(y^{1,(n)} - y^{2,(n)})_T \leqslant \bar{V}_p(y^1 - y^2)_T.$$

Dowód twierdzenia został zakończony. □

Uwaga 2.7. 1. Przypadek $p = 1$ był wcześniej badany w [76, Theorem 2.14] (patrz również [70]).

2. Założenie: $l^1 = l^2$ oraz $u^1 = u^2$, jest konieczne (patrz np. [76, Example 2.15]).

Wniosek 2.8. *Niech $p \geqslant 1$, $y, y', l, u \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ będą takie, że $l_0 \leqslant y_0, y'_0 \leqslant u_0$. Jeżeli $(x, k) = ESP(y, l, u)$ oraz $(x', k') = ESP(y', l, u)$, to*

$$\bar{V}_p(x - x')_T \leqslant (d+1)\bar{V}_p(y - y')_T \quad \textit{oraz} \quad \bar{V}_p(k - k')_T \leqslant d\bar{V}_p(y - y')_T$$

dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$.

Dowód. Korzystając z twierdzenia 2.6, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\bar{V}_p(k - k')_T \leqslant d^{(p-1)/p}\left(\sum_{i=1}^d v_p(k^i - k'^i)_T\right)^{1/p} &\leqslant d^{(p-1)/p}\left(\sum_{i=1}^d \bar{V}_p(y^i - y'^i)_T^p\right)^{1/p} \\ &\leqslant d \max_i \bar{V}_p(y^i - y'^i)_T \leqslant d\bar{V}_p(y - y')_T.\end{aligned}$$

Ponieważ $\bar{V}_p(x - x')_T \leqslant \bar{V}_p(y - y')_T + \bar{V}_p(k - k')_T$, dowód wniosku został zakończony. □

Wniosek 2.9. *Niech $p \geqslant 1$, $y, l, h, u \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ będą takie, że $l_0 \leqslant y_0 \leqslant u_0$, $l \leqslant h \leqslant u$. Jeżeli $(x, k) = ESP(y, l, u)$, to*

$$\bar{V}_p(k)_T \leqslant d\bar{V}_p(y)_T + d\bar{V}_p(h)_T \quad \textit{oraz} \quad \bar{V}_p(x)_T \leqslant (d+1)\bar{V}_p(y)_T + d\bar{V}_p(h)_T$$

dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$.

Dowód. Zauważmy, że $(h, 0) = ESP(h, l, u)$. Zatem z wniosku 2.8 mamy

$$\bar{V}_p(k)_T \leqslant d\bar{V}_p(y - h)_T \leqslant d\bar{V}_p(y)_T + d\bar{V}_p(h)_T.$$

Druga nierówność jest bezpośrednią konsekwencją pierwszej. □

Podobne oszacowania można pokazać dla rozwiązań problemu Skorochoda z jedną barierą. W tym przypadku nie jest konieczne założenie o równości barier.

Wniosek 2.10. *Niech* $p \geqslant 1$, y, y', l, l', u, $u' \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$. *Dla każdego* $T \in \mathbb{R}^+$,

(i) *jeżeli* $l_0 \leqslant y_0$, $l'_0 \leqslant y'_0$ *oraz* $(x, k) = SP_l(y)$, $(x', k') = SP_{l'}(y')$, *to*

$$\bar{V}_p(k - k')_T \leqslant d\bar{V}_p(y - y')_T + d\bar{V}_p(l - l')_T$$

oraz

$$\bar{V}_p(x - x')_T \leqslant (d+1)\bar{V}_p(y - y')_T + d\bar{V}_p(l - l')_T;$$

(ii) *jeżeli* $u_0 \geqslant y_0$, $u'_0 \geqslant y'_0$ *oraz* $(x,\, k) = SP^u(y)$, $(x',\, k') = SP^{u'}(y')$, *to*

$$\bar{V}_p(k - k')_T \leqslant d\bar{V}_p(y - y')_T + d\bar{V}_p(u - u')_T$$

oraz

$$\bar{V}_p(x - x')_T \leqslant (d+1)\bar{V}_p(y - y')_T + d\bar{V}_p(u - u')_T.$$

Dowód. (i) Załóżmy najpierw, że $l = l'$. Wówczas $(x, k) = ESP(y, l, \max\{y, y', l, \})$ oraz $(x', k') = ESP(y', l, \max\{y, y', l, \})$. Zatem korzystając z wniosku 2.8, mamy

$$\bar{V}_p(k - k')_T \leqslant d\bar{V}_p(y - y')_T. \tag{2.19}$$

W ogólnym przypadku bez straty ogólności rozważań możemy przyjąć, że $l_0 \leqslant l'_0$, co pociąga, iż $l_0 \leqslant y'_0$. Połóżmy $(\bar{x}, \bar{k}) = ESP(y', l, \max\{y, y', l\}) = SP_l(y')$. Stosując (2.19), otrzymujemy

$$\bar{V}_p(k - \bar{k})_T \leqslant d\bar{V}_p(y - y')_T. \tag{2.20}$$

Ponieważ $(x' - l', k') = SP_0(y' - l')$ oraz $(\bar{x} - l, \bar{k}) = SP_0(y' - l)$, więc korzystając ponownie z (2.19), uzyskujemy

$$\bar{V}_p(\bar{k} - k')_T \leqslant d\bar{V}_p(l - l')_T. \tag{2.21}$$

Z (2.20) i (2.21) wnioskujemy pierwszą nierówność w (i). Druga nierówność w (i) jest konsekwencją pierwszej. Podobnie pokazujemy (ii). ☐

Wniosek 2.11. *Niech* $p \geqslant 1$, $y, l, u \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$. *Dla każdego* $T \in \mathbb{R}^+$,

(i) *jeżeli* $l_0 \leqslant y_0$ *i* $(x, k) = SP_l(y)$, *to*

$$\bar{V}_p(k)_T \leqslant d\bar{V}_p(y)_T + d\sup_{t \leqslant T} |l_t| \quad \textit{oraz} \quad \bar{V}_p(x)_T \leqslant (d+1)\bar{V}_p(y)_T + d\sup_{t \leqslant T} |l_t|;$$

(ii) *jeżeli* $u_0 \geqslant y_0$ *i* $(x, k) = SP^u(y)$, *to*

$$\bar{V}_p(k)_T \leqslant d\bar{V}_p(y)_T + d\sup_{t \leqslant T} |u_s| \quad \textit{oraz} \quad \bar{V}_p(x)_T \leqslant (d+1)\bar{V}_p(y)_T + d\sup_{t \leqslant T} |u_s|.$$

Dowód. (i) Ponieważ dla każdego $i = 1, \dots, d$ funkcja $k^i = \sup_{t \leqslant \cdot}(y^i_s - l^i_s)^-$ jest niemalejąca, to $V_p(k^i)_T = k^i_T \leqslant \sup_{t\leqslant T}|y^i_t| + \sup_{t\leqslant T}|l^i_t|$, $T \in \mathbb{R}^+$. W konsekwencji

$$\bar{V}_p(k)_T \leqslant d^{(p-1)/p}\left(\sum_{i=1}^d v_p(k^i)_T\right)^{1/p} \leqslant d^{(p-1)/p}\left(\sum_{i=1}^d \Big(\bar{V}_p(y^i)_T + \sup_{t\leqslant T}|l^i_t|\Big)^p\right)^{1/p}$$
$$\leqslant d\max_i \Big(\bar{V}_p(y^i)_T + \sup_{t\leqslant T}|l^i_t|\Big) \leqslant d\Big(\bar{V}_p(y)_T + \sup_{t\leqslant T}|l_t|\Big).$$

Ponieważ $\bar{V}_p(x)_T \leqslant \bar{V}_p(y)_T + \bar{V}_p(k)_T$, dowód (i) został zakończony. Stosując analogiczne argumenty, pokazujemy (ii). □

Na zakończenie niniejszego podrozdziału podamy wniosek dotyczący lipschitzowskości operatora supremum w normie p-wariacyjnej.

Wniosek 2.12. *Jeżeli $p \geqslant 1$, $y, y' \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, to dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$*

$$\bar{V}_p(\sup_{s\leqslant\cdot} y_s - \sup_{s\leqslant\cdot} y'_s)_T \leqslant \bar{V}_p(y - y')_T.$$

Dowód. Załóżmy najpierw, że $y_0 = y'_0 = 0$. Wówczas korzystając z wniosku 2.10 dla $(x, k) = SP^0(y)$ i $(x', k') = SP^0(y')$, otrzymujemy

$$V_p(\sup_{s\leqslant\cdot} y_s - \sup_{s\leqslant\cdot} y'_s)_T = \bar{V}_p(\sup_{s\leqslant\cdot} y_s - \sup_{s\leqslant\cdot} y'_s)_T$$
$$= \bar{V}_p(k - k')_T \leqslant \bar{V}_p(y - y')_T = V_p(y - y')_T, \quad T \in \mathbb{R}^+. \tag{2.22}$$

W ogólnym przypadku mamy

$$\bar{V}_p(\sup_{s\leqslant\cdot} y_s - \sup_{s\leqslant\cdot} y'_s)_T = |y_0 - y'_0| + V_p(\sup_{s\leqslant\cdot} y_s - \sup_{s\leqslant\cdot} y'_s)_T$$
$$= |y_0 - y'_0| + V_p(\sup_{s\leqslant\cdot}(y_s - y_0) - \sup_{s\leqslant\cdot}(y'_s - y'_0))_T,$$

więc korzystając z (2.22), uzyskujemy

$$\bar{V}_p(\sup_{s\leqslant\cdot} y_s - \sup_{s\leqslant\cdot} y'_s)_T \leqslant |y_0 - y'_0| + V_p((y - y_0) - (y' - y'_0))_T$$
$$= |y_0 - y'_0| + V_p(y - y')_T = \bar{V}_p(y - y')_T.$$

□

Uwaga 2.13. Inny dowód wniosku 2.12 można znaleźć w [24].

2.2 Istnienie i jednoznaczność rozwiązań równań z barierami

Niech $p \in (1, 2)$, $b \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, a, l, $u \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ będą funkcjami takimi, że $V_1(b)_T < \infty$, $V_p(a)_T < \infty$, $T \in \mathbb{R}^+$ oraz $l \leqslant u$. Będziemy badać problem istnienia i jednoznaczności rozwiązań deterministycznych równań z barierami postaci:

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(s, x_{s-})\, db_s + \int_0^t g(s, x_{s-})\, da_s + k_t, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{2.23}$$

gdzie $l_0 \leqslant x_0 \leqslant u_0$, $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{M}^d$ są danymi funkcjami, a całka względem a jest uogólnioną całką Riemanna-Stieltjesa.

Definicja 2.14. Powiemy, że para $(x, k) \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$ jest rozwiązaniem równania (2.23), jeżeli $V_p(x)_T < \infty$ dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ oraz $(x, k) = ESP(y, l, u)$, gdzie

$$y_t = x_0 + \int_0^t f(s, x_{s-})\, db_s + \int_0^t g(s, x_{s-})\, da_s, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Uwaga 2.15. Będziemy zakładać dodatkowo, że istnieje funkcja $h \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ o własnościach: $l \leqslant h \leqslant u$ i $V_p(h)_T < \infty$, $T \in \mathbb{R}^+$. Nietrudno zauważyć, że to dodatkowe założenie jest konieczne, aby rozwiązanie problemu Skorochoda $(x, k) = ESP(y, l, u)$ posiadało lokalnie skończoną p-wariację dla dowolnej funkcji y o lokalnie skończonej p-wariacji (jest ono spełnione, jeśli $\inf_{t \leqslant T}(u_t - l_t) > 0$, $T \in \mathbb{R}^+$, ponieważ w tym przypadku możemy przyjąć $h = x'$, gdzie $(x', k') = ESP(y', l, u)$, $y' \equiv l_0$ oraz korzystając z uwagi 2.3.4, wywnioskować, iż funkcja h posiada lokalnie skończoną wariację).

Rozważać będziemy założenia.

(H1) (a) Istnieje $C_f > 0$ taka, że

$$|f(t, x)| \leqslant C_f(1 + |x|), \quad x \in \mathbb{R}^d,\ t \in \mathbb{R}^+.$$

(b) Istnieją $\beta \in (1 - 1/p, 1]$, $\alpha \in (p - 1, 1]$ oraz $C_g > 0$ takie, że

$$|g(t, x) - g(s, y)| \leqslant C_g(|t - s|^\beta + |x - y|^\alpha), \quad x, y \in \mathbb{R}^d,\ t, s \in \mathbb{R}^+.$$

(H2) (a) Dla każdego $N \in \mathbb{R}^+$ istnieje $C_{f,N} > 0$ taka, że

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leqslant C_{f,N}|x - y|, \quad |x|,\ |y| < N,\ t \in \mathbb{R}^+.$$

(b) g jest różniczkowalną funkcją zmiennej x. Dla każdego $N \in \mathbb{R}^+$ istnieją $\alpha_N \in (p - 1, 1]$ i $C_{g,N} > 0$ takie, że

$$|\nabla_x g(t, x)| \leqslant C_{g,N}$$

oraz

$$|\nabla_x g(t, x) - \nabla_x g(s, y)| \leqslant C_{g,N}(|t - s|^\beta + |x - y|^{\alpha_N}), \quad |x|,\ |y| < N,\ t, s \in \mathbb{R}^+,$$

gdzie $\nabla_x g(t, x) = (\nabla_x g^{i,j}(t, x))_{i,j=1,\dots,d}$, $|\nabla_x g(t, x)|^2 = \sum_{k=1}^{d} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \left| \frac{\partial g^{i,j}}{\partial x_k}(t, x) \right|^2$.

Uwaga 2.16. Ustalmy $T \in \mathbb{R}^+$ oraz połóżmy $C_g^T = C_g((T \vee 1) + 2) + |g(0,0)|$. Przy założeniu (H1) (b) dla wszystkich $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^d$

$$|g(t,x)| \leqslant C_g^T(1+|x|). \tag{2.24}$$

Ponadto dla wszystkich $q \geqslant p/\alpha \vee 1/\beta$, $w \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ mamy:

$$\bar{V}_q(g(\cdot,w))_t \leqslant C_g^T(1+\bar{V}_p(w)_t). \tag{2.25}$$

Aby dowieść (2.25), wystarczy skorzystać z nierówności $|ab| \leqslant \alpha|a|^{1/\alpha} + (1-\alpha)|b|^{1/(1-\alpha)}$ i zauważyć, że

$$\begin{aligned}\bar{V}_q(g(\cdot,w))_t &\leqslant C_g\left(t^\beta + V_p(w)_t^\alpha + |w_0|^\alpha\right) + |g(0,0)| \\ &\leqslant C_g\left(T^\beta + \alpha\bar{V}_p(w)_t + 2(1-\alpha)\right) + |g(0,0)|.\end{aligned}$$

Podobnie dowodzimy (2.24).

Będziemy przybliżać rozwiązania równania (2.23) za pomocą ciągu iteracji Picarda postaci: $(x^0,k^0) = ESP(x_0,l,u)$ oraz dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} y_t^n &= x_0 + \int_0^t f(s,x_{s-}^{n-1})\,db_s + \int_0^t g(s,x_{s-}^{n-1})\,da_s, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ (x^n,k^n) &= ESP(y^n,l,u). \end{cases} \tag{2.26}$$

Zauważmy, że użyte powyżej całki są poprawnie określone. Istotnie, dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ na mocy wniosku 2.9 $\bar{V}_p(x^0)_T \leqslant (d+1)|x_0| + d\bar{V}_p(h)_T$ oraz gdy $\bar{V}_p(x^{n-1})_T < \infty$, to funkcja $f(\cdot,x_-^{n-1})$ jest ograniczona na $[0,T]$, a (2.25) implikuje, że $\bar{V}_q(g(\cdot,x_-^{n-1}))_T < \infty$ dla $q = p/\alpha \vee 1/\beta$, co pociąga istnienie całek w (2.26). Ponadto korzystając jeszcze raz z wniosku 2.9, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\bar{V}_p(x^n)_T &\leqslant (d+1)\bar{V}_p(y^n)_T + d\bar{V}_p(h)_T \\ &\leqslant (d+1)\left(|x_0| + V_p\left(\int_0^\cdot f(s,x_{s-}^{n-1})\,db_s\right)_T + V_p\left(\int_0^\cdot g(s,x_{s-}^{n-1})\,da_s\right)_T\right) \\ &\quad + d\bar{V}_p(h)_T,\end{aligned} \tag{2.27}$$

gdzie

$$V_p\left(\int_0^\cdot f(s,x_{s-}^{n-1})\,db_s\right)_T \leqslant \sup_{s\leqslant T}|f(s,x_{s-}^{n-1})|V_1(b)_T \leqslant C_f(1+\bar{V}_p(x^{n-1})_T)V_1(b)_T \tag{2.28}$$

oraz na mocy (1.3) i (2.25)

$$\begin{aligned}V_p\left(\int_0^\cdot g(s,x_{s-}^{n-1})\,da_s\right)_T &\leqslant K_{p,q}\bar{V}_q(g(\cdot,x^{n-1}))_T V_p(a)_T \\ &\leqslant K_{p,q}C_g^T(1+\bar{V}_p(x^{n-1})_T)V_p(a)_T.\end{aligned} \tag{2.29}$$

Zatem w szczególności $\bar{V}_p(x^n)_T < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $T \in \mathbb{R}^+$.

Pokażemy, że w istocie zachodzi mocniejsze oszacowanie.

Lemat 2.17. *Przy założeniu* (H1) *dla każdego* $T \in \mathbb{R}^+$ *istnieje stała* $D > 0$ *zależna od* d, p, α, β, x_0, C_g^T, C_f, $V_1(b)_T$, $V_p(a)_T$ *i* $\bar{V}_p(h)_T$ *taka, że*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \bar{V}_p(x^n)_T \leqslant D.$$

Dowód. Ustalmy $T \in \mathbb{R}^+$, przyjmijmy $q = p/\alpha \vee 1/\beta$, $C_0 = (d+1)|x_0| + d\bar{V}_p(h)_T$, $C_1 = (d+1)\max\{C_f, K_{p,q}C_g^T\}$ oraz zauważmy, że dzięki (2.27), (2.28) i (2.29) mamy oszacowanie

$$\bar{V}_p(x^n)_t \leqslant C_0 + C_1(1 + \bar{V}_p(x^{n-1})_t)(V_1(b)_t + V_p(a)_t), \quad n \in \mathbb{N},\ t \leqslant T.$$

Kładąc $t_1 = \inf\{t\,;\, C_1(V_1(b)_t + V_p(a)_t) > 1/2\} \wedge T$, otrzymujemy

$$\bar{V}_p(x^n)_{t_1-} \leqslant C_0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\bar{V}_p(x^{n-1})_{t_1-}, \quad n \in \mathbb{N},$$

co pociąga, iż $\sup_n \bar{V}_p(x^n)_{t_1-} \leqslant 2(C_0 + 1/2)$. Stosując wniosek 2.9, (2.24) oraz punkty (iii), (iv) z uwagi 1.11, dostajemy

$$\begin{aligned}
|\Delta x^n_{t_1}| &= \lim_{m\to\infty} V_p(x^n)_{[t_1-1/m,t_1]} \\
&\leqslant (d+1)\left(|x^{n-1}_{t_1-}| + |f(t_1, x^{n-1}_{t_1-})\Delta b_{t_1}| + |g(t_1, x^{n-1}_{t_1-})\Delta a_{t_1}|\right) + d\bar{V}_p(h)_{t_1} \\
&\leqslant C_0 + (1+d)\bar{V}_p(x^{n-1})_{t_1-} + C_1(1 + \bar{V}_p(x^{n-1})_{t_1-})\,(V_1(b)_T + V_p(a)_T)\,.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Zatem korzystając ponownie z uwagi 1.11 (iii), wnioskujemy, że istnieje stała D_1 zależna od d, p, q, x_0, C_g^T, C_f, $V_1(b)_T$, $V_p(a)_T$ i $\bar{V}_p(h)_T$ o własności:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \bar{V}_p(x^n)_{t_1} \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bar{V}_p(x^n)_{t_1-} + |\Delta x^n_{t_1}|\right) \leqslant D_1.$$

Niech $t_k = \inf\{t > t_{k-1}\,;\, C_1(V_1(b)_{[t_{k-1},t]} + V_p(a)_{[t_{k-1},t]}) > 1/2\} \wedge T$, $k \geqslant 2$. Używając podobnych argumentów jak poprzednio, otrzymujemy, iż $\sup_n V_p(x^n)_{[t_{k-1},t_k]} \leqslant D_k$, gdzie $D_k = D_k(d, p, q, x_0, C_g^T, C_f, V_1(b)_T, V_p(a)_T, \bar{V}_p(h)_T)$, $k \geqslant 2$. Dlatego dla dowodu wystarczy pokazać, że $m = \sup\{k\,;\, t_k < T\} \leqslant C$, gdzie C zależy tylko od p, C_1, $V_1(b)_T$, $v_p(a)_T$. W tym celu zauważmy, że bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy przyjąć, iż $C_1 \geqslant 1$. Wówczas $1/2 < C_1(V_1(b)_{[t_{k-1},t_k]} + V_p(a)_{[t_{k-1},t_k]}) \leqslant 2C_1 \max\{V_1(b)_{[t_{k-1},t_k]}, V_p(a)_{[t_{k-1},t_k]}\}$ i w konsekwencji $2/(4C_1)^p < V_1(b)_{[t_{k-1},t_k]} + v_p(a)_{[t_{k-1},t_k]}$ dla każdego $k \leqslant m$. Stąd

$$m\frac{2}{(4C_1)^p} < \sum_{k=1}^{m}(V_1(b)_{[t_{k-1},t_k]} + v_p(a)_{[t_{k-1},t_k]}) \leqslant V_1(b)_T + v_p(a)_T, \tag{2.31}$$

co kończy dowód lematu. □

Twierdzenie 2.18. *Załóżmy* (H1), (H2) *oraz dodatkowo, że istnieje* $h \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ *o lokalnie skończonej p-wariacji, spełniająca warunek:* $l \leqslant h \leqslant u$. *Niech* $\{(x^n, k^n)\}$ *oznacza ciąg iteracji Picarda zdefiniowany w* (2.26). *Wówczas dla każdego* $T \in \mathbb{R}^+$

$$\bar{V}_p(x^n - x)_T \longrightarrow 0 \quad \textit{oraz} \quad \bar{V}_p(k^n - k)_T \longrightarrow 0,$$

gdzie (x, k) *jest jednoznacznym rozwiązaniem równania* (2.23).

Dowód. Krok 1. Zbieżność iteracji Picarda.

Ustalmy $T \in \mathbb{R}^+$. Ponieważ $x_0^n = x_0^{n-1} = x_0$, $n \in \mathbb{N}$, więc korzystając z wniosku 2.8, dla każdego $n \geqslant 2$ oraz dowolnego $t \leqslant T$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\bar{V}_p(x^n - x^{n-1})_t &= V_p(x^n - x^{n-1})_t \\ &\leqslant (d+1)V_p\Big(\int_0^\cdot f(s,x_{s-}^{n-1}) - f(s,x_{s-}^{n-2})\,db_s + \int_0^\cdot g(s,x_{s-}^{n-1}) - g(s,x_{s-}^{n-2})\,da_s\Big)_t \\ &\leqslant (d+1)V_p\Big(\int_0^\cdot f(s,x_{s-}^{n-1}) - f(s,x_{s-}^{n-2})\,db_s\Big)_t \\ &\quad + (d+1)V_p\Big(\int_0^\cdot g(s,x_{s-}^{n-1}) - g(s,x_{s-}^{n-2})\,da_s\Big)_t.\end{aligned}$$

Na mocy lematu 2.17 $\sup_{t\leqslant T}|x_t^n| \leqslant N$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, gdzie $N = \sup_n \bar{V}_p(x^n)_T < \infty$. Zatem

$$\begin{aligned}V_p\Big(\int_0^\cdot f(s,x_{s-}^{n-1}) - f(s,x_{s-}^{n-2})\,db_s\Big)_t &\leqslant C_{f,N}V_1(b)_t \sup_{s\leqslant t}|x_s^{n-1} - x_s^{n-2}| \\ &\leqslant C_{f,N}V_1(b)_t V_p(x^{n-1} - x^{n-2})_t\end{aligned}$$

oraz dzięki (1.3)

$$V_p\Big(\int_0^\cdot g(s,x_{s-}^{n-1}) - g(s,x_{s-}^{n-2})\,da_s\Big)_t \leqslant K_{p,r}V_r(g(\cdot,x^{n-1}) - g(\cdot,x^{n-2}))_t V_p(a)_t,$$

gdzie $r = (p/\alpha_N) \vee (1/\beta)$. W celu oszacowania prawej strony powyższej nierówności wykorzystamy następujący lemat.

Lemat 2.19. *Niech $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ spełnia* (H2) (b) *dla pewnych $\alpha_N, \beta \in (0,1]$, $N \in \mathbb{R}^+$. Jeżeli dla $x, y \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ oraz $p \geqslant 1$ $V_p(x)_T < \infty$, $V_p(y)_T < \infty$, $T \in \mathbb{R}^+$, to dla wszystkich $N \in \mathbb{R}^+$ takich, że $\sup_{t\leqslant T}|x_t| \leqslant N$, $\sup_{t\leqslant T}|y_t| \leqslant N$ oraz $r = (p/\alpha_N) \vee (1/\beta)$ zachodzi następujące oszacowanie:*

$$V_r(g(\cdot,x) - g(\cdot,y))_T \leqslant C_{g,N}\Big(V_r(x-y)_T + \sup_{t\leqslant T}|x_t - y_t|\Big(T^\beta + V_p(x)_T^{\alpha_N} + V_p(y)_T^{\alpha_N}\Big)\Big).$$

Dowód lematu. Łatwo zauważyć, że dla wszystkich $t, s \in [0,T]$

$$\begin{aligned}&|g(t,x_t) - g(t,y_t) - g(s,x_s) + g(s,y_s)| \\ &\quad = \Big|\int_0^1 \nabla_x g(t,\theta x_t + (1-\theta)y_t)(x_t - y_t) - \nabla_x g(s,\theta x_s + (1-\theta)y_s)(x_s - y_s)d\theta\Big|.\end{aligned}$$

W konsekwencji

$$\begin{aligned}&|g(t,x_t) - g(t,y_t) - g(s,x_s) + g(s,y_s)| \\ &\quad \leqslant \int_0^1 |\nabla_x g(t,\theta x_t + (1-\theta)y_t)||(x_t - y_t - x_s + y_s)|d\theta \\ &\quad\quad + \int_0^1 |\nabla_x g(t,\theta x_t + (1-\theta)y_t) - \nabla_x g(s,\theta x_s + (1-\theta)y_s)||(x_s - y_s)|d\theta \\ &\quad \leqslant C_{g,N}\Big(|x_t - y_t - x_s + y_s| + |x_s - y_s|(|t-s|^\beta + |x_t - x_s|^{\alpha_N} + |y_t - y_s|^{\alpha_N})\Big).\end{aligned}$$

Aby zakończyć dowód lematu, wystarczy zastosować powyższe oszacowanie dla każdej pary punktów $t = t_i$, $s = t_{i-1}$ należących do podziału $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ przedziału $[0, T]$ oraz skorzystać z nierówności Minkowskiego. $\square$

Z lematu 2.19 dla wszystkich $i, j = 1, \ldots, d$ mamy

$$V_r(g_{i,j}(\cdot, x^{n-1}) - g_{i,j}(\cdot, x^{n-2}))_t \leqslant C_{g,N}\Big(V_r(x^{n-1} - x^{n-2})_t + \sup_{s\leqslant t} |x^{n-1}_s - x^{n-2}_s|\Big(t^\beta + V_p(x^{n-1})^{\alpha_N}_t + V_p(x^{n-2})^{\alpha_N}_t\Big)\Big),$$

co pociąga, że

$$\begin{aligned} V_r(g(\cdot, x^{n-1}) - g(\cdot, x^{n-2}))_t &\leqslant \sum_{i,j=1}^{d} V_r(g_{i,j}(\cdot, x^{n-1}) - g_{i,j}(\cdot, x^{n-2}))_t \\ &\leqslant (C_{g,N})^{d^2}\Big(V_r(x^{n-1} - x^{n-2})_t \\ &\quad + \sup_{s\leqslant t} |x^{n-1}_s - x^{n-2}_s|\Big(t^\beta + V_p(x^{n-1})^{\alpha_N}_t + V_p(x^{n-2})^{\alpha_N}_t\Big)\Big). \end{aligned}$$

Z powyższych oszacowań, lematu 2.17 oraz faktu, że

$$\sup_{s\leqslant t} |x^{n-1}_s - x^{n-2}_s| \leqslant V_p(x^{n-1} - x^{n-2})_t, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

wynika istnienie stałej D zależnej tylko od d, p, β, N, α_N, $C_{g,N}$, $C_{f,N}$ i T o własności:

$$\bar{V}_p(x^n - x^{n-1})_t \leqslant D(V_1(b)_t + V_p(a)_t)\bar{V}_p(x^{n-1} - x^{n-2})_t, \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{2.32}$$

Połóżmy $t_1 = \inf\{t > 0; (D(V_1(b)_t + V_p(a)_t)) \geqslant 1/2\} \wedge T$ oraz zauważmy, że

$$\bar{V}_p(x^n - x^{n-1})_{t_1-} \leqslant 2^{-(n-1)}\bar{V}_p(x^1 - x^0)_{t_1-}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zatem $\{x^n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni funkcji càdlàg określonych na $[0, t_1)$ z normą p-wariacyjną. W konsekwencji istnieje funkcja càdlàg x taka, że $\bar{V}_p(x^n - x)_{t_1-} \to 0$. Podobnie możemy pokazać, że $\bar{V}_p(k^n - k)_{t_1-} \to 0$ dla pewnej funkcji càdlàg k. Analogicznie jak w (2.28) i (2.29) dla tej samej stałej D mamy:

$$V_p\Big(\int_0^{\cdot} (f(s, x^n_{s-}) - f(s, x_{s-}))\, db_s\Big)_{t_1-} \leqslant DV_1(b)_{t_1-}\bar{V}_p(x^n - x)_{t_1-} \longrightarrow 0$$

oraz

$$V_p\Big(\int_0^{\cdot} (g(s, x^n_{s-}) - g(s, x_{s-}))\, da_s\Big)_{t_1-} \leqslant DV_p(a)_{t_1-}\bar{V}_p(x^n - x)_{t_1-} \longrightarrow 0,$$

więc $\sup_{t<t_1} |y^n - y| \to 0$, gdzie $y = x_0 + \int_0^{\cdot} f(s, x_{s-})\, db_s + \int_0^{\cdot} g(s, x_{s-})\, da_s$. Dlatego korzystając z wniosku 2.5, otrzymujemy, że (x, k) jest rozwiązaniem (2.23) na przedziale $[0, t_1)$. Jeśli przyjmiemy

$$x_{t_1} = \max\{\min\{x_{t_1-} + f(t_1, x_{t_1-})\Delta b_{t_1} + g(t_1, x_{t_1-})\Delta a_{t_1}, u_{t_1}\}, l_{t_1}\}$$

oraz $k_{t_1} = k_{t_1-} + \Delta x_{t_1} - (f(t_1, x_{t_1-})\Delta b_{t_1} + g(t_1, x_{t_1-})\Delta a_{t_1})$, to na mocy uwagi 2.3.3 otrzymamy rozwiązanie (2.23) na domkniętym przedziale $[0, t_1]$. Ponadto

$$\begin{aligned} x^n_{t_1} &= \max\{\min\{x^n_{t_1-} + f(t_1, x^{n-1}_{t_1-})\Delta b_{t_1} + g(t_1, x^{n-1}_{t_1-})\Delta a_{t_1}, u_{t_1}\}, l_{t_1}\} \\ &\longrightarrow \max\{\min\{x_{t_1-} + f(t_1, x_{t_1-})\Delta b_{t_1} + g(t_1, x_{t_1-})\Delta a_{t_1}, u_{t_1}\}, l_{t_1}\} = x_{t_1} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} k^n_{t_1} &= k^n_{t_1-} + \Delta x^n_{t_1} - (f(t_1, x^{n-1}_{t_1-})\Delta b_{t_1} + g(t_1, x^{n-1}_{t_1-})\Delta a_{t_1}) \\ &\longrightarrow k_{t_1-} + \Delta x_{t_1} - (f(t_1, x_{t_1-})\Delta b_{t_1} + g(t_1, x_{t_1-})\Delta a_{t_1}) = k_{t_1}, \end{aligned}$$

co pociąga, że $\bar{V}_p(x^n - x)_{t_1} \to 0$ i $\bar{V}_p(k^n - k)_{t_1} \to 0$. Łatwo zauważyć, że możemy powtórzyć powyższe rozumowanie dla przedziału $[t_1, t_2]$, gdzie $t_2 = \inf\{t > 0\,;\, D(V_1(b)_{[t_1,t)} + V_p(a)_{[t_1,t)}) \geqslant 1/2\} \wedge T$, a następnie na przedziałach $[t_2, t_3]$, $[t_3, t_4], \ldots$ Ponieważ $V_1(b)_T < \infty$ i $V_p(a)_T < \infty$, po skończenie wielu krokach możemy skonstruować rozwiązanie (x, k) równania (2.23) na całym przedziale $[0, T]$ oraz pokazać, że $\bar{V}_p(x^n - x)_T \to 0$ i $\bar{V}_p(k^n - k)_T \to 0$.

Krok 2. Jednoznaczność rozwiązania (2.23).

Załóżmy, że istnieją dwa rozwiązania (x^1, k^1) oraz (x^2, k^2). Niech t_1 będzie zdefiniowane tak jak w poprzednim kroku. Używając argumentów z poprzedniego kroku, pokazujemy, że $V_p(x^1 - x^2)_{t_1-} \leqslant 2^{-1}\bar{V}_p(x^1 - x^2)_{t_1-}$. W konsekwencji $x^1 = x^2$ na przedziale $[0, t_1)$. Z uwagi 2.3.3 wiemy, że

$$x^j_{t_1} = \max\{\min\{x^j_{t_1-} + f(t_1, x^j_{t_1-})\Delta b_{t_1} + g(t_1, x^j_{t_1-})\Delta a_{t_1}, u_{t_1}\}, l_{t_1}\}, \quad j = 1, 2,$$

więc $x^1 = x^2$ na domkniętym przedziale $[0, t_1]$. Powtarzając powyższe rozumowanie dla przedziałów $[t_1, t_2]$, $[t_2, t_3]$, ..., w skończenie wielu krokach pokażemy, że $x^1 = x^2$ na $[0, T]$ dla wszystkich $T \in \mathbb{R}^+$. Podobnie pokazujemy równość funkcji k^1 i k^2. □

Uwaga 2.20. 1. Przy założeniach (H1) i (H2) można pokazać odpowiednik wyniku z twierdzenia 2.18 dla równań z jedną barierą. Jedyna modyfikacja w dowodzie polega na tym, że zamiast korzystać z wniosków 2.8 i 2.9 stosujemy wnioski 2.10 oraz 2.11. Nie jest wtedy wymagane istnienie funkcji h. Wynika to z faktu, iż dla równań z jedną barierą funkcja k kompensująca odbicie od bariery jest monotoniczna. W tym przypadku w celu oszacowania normy p-wariacyjnej rozwiązań równań z dolną barierą (odp. z górną barierą) zamiast $\bar{V}_p(h)_T$ możemy użyć $\sup_{t\leqslant T}|l_t|$ (odp. $\sup_{t\leqslant T}|u_t|$).

2. Podobnie można również udowodnić odpowiedni wynik dla równań bez barier. Dokładniej dla równania postaci

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(s, x_{s-})\, db_s + \int_0^t g(s, x_{s-})\, da_s, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{2.33}$$

gdzie f, g, a, b są takie jak w (2.23), rozważmy ciąg $\{x^n\}$ iteracji Picarda zdefiniowany wzorem: $x^0 \equiv x_0$,

$$x^n = x_0 + \int_0^{\cdot} f(s, x^{n-1}_{s-})\, db_s + \int_0^{\cdot} g(s, x^{n-1}_{s-})\, da_s, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Jeżeli funkcje f i g spełniają (H1) i (H2), to dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ $\bar{V}_p(x^n - x)_T \to 0$, gdzie x jest jednoznacznym rozwiązaniem równania (2.33).

2.3 Aproksymacja oraz stabilność rozwiązań równań z barierami

Na początku niniejszego podrozdziału udowodnimy wyniki dotyczące relatywnej zwartości i zbieżności całek względem funkcji o skończonej p-wariacji.

Fakt 2.21. *Niech $\{z^n\} \subset \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d'})$, $\{x^n\}, \{y^n\} \subset \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ będą ciągami takimi, że $\sup_n \bar{V}_q(y^n)_T < \infty$ oraz $\sup_n V_p(x^n)_T < \infty$, $T \in \mathbb{R}^+$, gdzie $1/p + 1/q > 1$, $p, q \geqslant 1$. Jeżeli $\{(z^n, x^n)\}$ jest relatywnie zwarty w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d'+d})$ (tzn. z każdego jego podciągu można wybrać dalszy podciąg zbieżny w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d'+d})$), to*

$$\left\{\left(z^n,\, x^n,\, \int_0^{\cdot} y^n_{s-}\, dx^n_s\right)\right\} \quad \textit{jest relatywnie zwarty w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d'+d+1}).$$

Dowód. Bez straty ogólności rozważań możemy założyć, że

$$(z^n,\, x^n) \longrightarrow (z,\, x) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d'+d}).$$

Ponieważ zbiór punktów nieciągłości funkcji x i z jest co najwyżej przeliczalny, istnieje rodzina stałych $\{\delta_k\}$, $\{\{\delta_{k,i}\}\}$ takich, że $\delta_k \downarrow 0$, $|\Delta x_t| \neq \delta_k, t \in \mathbb{R}^+$, $\delta_k/2 \leqslant \delta_{k,i} \leqslant \delta_k$ oraz $|\Delta z_{t_{k,i}+\delta_{k,i}}| + |\Delta x_{t_{k,i}+\delta_{k,i}}| = 0$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \in \mathbb{N}$. Niech $\{\{x^{n,(k)}\}\}$, $\{x^{(k)}\}$ będą ciągami zdefiniowanymi tak samo jak w fakcie 1.8, z wykorzystaniem rodziny stałych $\{\delta_k\}$, $\{\{\delta_{k,i}\}\}$ opisanych powyżej. Wówczas dla dowolnych $k, n \in \mathbb{N}$, $T \in \mathbb{R}^+$ $V_p(x^{n,(k)})_T \leqslant V_p(x^n)_T < \infty$ i w konsekwencji

$$\sup_{k,n\in\mathbb{N}} V_p(x^n - x^{n,(k)})_T < \infty, \quad T \in \mathbb{R}^+. \tag{2.34}$$

Stosując fakt 1.8, otrzymujemy

$$\begin{aligned}&(z^n,\, x^n, x^{n,(k)},\, t^n_{k,1},\, x^n_{t^n_{k,1}},\, t^n_{k,2},\, x^n_{t^n_{k,2}},\, \ldots)\\ &\qquad \longrightarrow (z,\, x,\, x^{(k)},\, t_{k,1},\, x_{t_{k,1}},\, t_{k,2},\, x_{t_{k,2}},\, \ldots) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d'+2d}) \times \mathbb{R}^\infty.\end{aligned} \tag{2.35}$$

Ponadto, argumentując tak samo jak w dowodzie wniosku 1.7, uzyskujemy

$$\sup_{t\leqslant T} \left|x^{(k)}_t - x_t\right| \longrightarrow 0, \quad T \in \mathbb{R}^+,$$

co razem z (2.35) pociąga, iż

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \sup_{t\leqslant T} \left|x^{n,(k)}_t - x^n_t\right| = 0, \quad T \in \mathbb{R}^+. \tag{2.36}$$

Z drugiej strony $\int_0^t y^n_{s-}\, dx^{n,(k)}_s = \sum_{j\leqslant i} y^n_{t^n_{k,j}-}(x^n_{t^n_{k,j}} - x^n_{t^n_{k,j-1}})$, $t \in [t^n_{k,i}, t^n_{k,i+1})$. Korzystając z (2.35), twierdzenia 1.33 oraz z faktu, że $\sup_n \bar{V}_q(y^n)_T < \infty$ pociąga ograniczoność ciągu $\{\sup_{t\leqslant T} |y^n_t|\}$, wnioskujemy, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$

$$\left\{\left(z^n,\, x^n,\, \int_0^{\cdot} y^n_{s-}\, dx^{n,(k)}_s\right)\right\} \quad \text{jest relatywnie zwarty w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d'+d+1}). \tag{2.37}$$

Niech $p' > p$ będzie takie, że $1/p' + 1/q > 1$. Z (1.3) wynika, że

$$\sup_{t\leqslant T}\left|\int_0^t y^n_{s-}d(x^n - x^{n,(k)})_s\right| \leqslant K_{p',q}\bar{V}_q(y^n)_T V_{p'}(x^n - x^{n,(k)})_T, \quad k,n\in\mathbb{N},\ T\in\mathbb{R}^+.$$

Ponadto na mocy uwagi 1.11 (v) dla dowolnych $k,n\in\mathbb{N}$, $T\in\mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} V_{p'}(x^n - x^{n,(k)})_T &\leqslant \mathrm{Osc}(x^n - x^{n,(k)})_T^{1-p/p'} V_p(x^n - x^{n,(k)})_T^{p/p'} \\ &\leqslant \Big(2\sup_{t\leqslant T}|x^n - x^{n,(k)}_t|\Big)^{1-p/p'} V_p(x^n - x^{n,(k)})_T^{p/p'}. \end{aligned}$$

Zatem mając na uwadze (2.34) i (2.36), otrzymujemy

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\sup_{t\leqslant T}\left|\int_0^t y^n_{s-}\,d(x^n - x^{n,(k)})_s\right| = 0, \quad T\in\mathbb{R}^+. \tag{2.38}$$

Teza wynika z (2.37) i (2.38). □

Fakt 2.22. *Niech* $\{z^n\}\subset\mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^{d'})$, $\{x^n\},\{y^n\}\subset\mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^d)$ *będą takie, że dla wszystkich* $T\in\mathbb{R}^+$ $\sup_n\bar{V}_q(y^n)_T<\infty$ *i* $\sup_n V_p(x^n)_T<\infty$, *gdzie* $1/p+1/q>1$, $p,q\geqslant 1$. *Jeżeli*

$$(z^n,\, x^n,\, y^n) \longrightarrow (z,\, x,\, y) \quad w\ \mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^{d'+2d}),$$

to

$$\Big(z^n,\, x^n,\, y^n,\, \int_0^\cdot y^n_{s-}\,dx^n_s\Big) \longrightarrow \Big(z,\, x,\, y,\, \int_0^\cdot y_{s-}\,dx_s\Big) \quad w\ \mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^{d'+2d+1}).$$

Dowód. Z lematu 1.12 mamy, że $V_q(y)_T\leqslant\liminf_n V_q(y^n)_T<\infty$ dla $T\in\mathbb{R}^+$ oraz analogicznie $V_p(x)_T\leqslant\liminf_n V_p(x^n)_T<\infty$ dla $T\in\mathbb{R}^+$. W konsekwencji całka $\int_0^\cdot y_{s-}dx_s$ istnieje jako uogólniona całka Riemanna-Stieltjesa. Niech $\{\{x^{n,(k)}\}\}$, $\{x^{(k)}\}$ będą ciągami funkcyjnymi zdefiniowanymi tak samo jak w fakcie 1.8, z wykorzystaniem rodziny stałych $\{\delta_k\}$, $\{\{\delta_{k,i}\}\}$ takich, że $\delta_k\downarrow 0$, $|\Delta x_t|\neq\delta_k, t\in\mathbb{R}^+$, $\delta_k/2\leqslant\delta_{k,i}\leqslant\delta_k$ oraz $|\Delta y_{t_{k,i}+\delta_{k,i}}|+|\Delta z_{t_{k,i}+\delta_{k,i}}|+|\Delta x_{t_{k,i}+\delta_{k,i}}|=0$, $i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $k\in\mathbb{N}$. Korzystając z faktu 1.8, mamy

$$\begin{aligned} &(z^n,\, x^n,\, y^n, x^{n,(k)},\, t^n_{k,1},\, x^n_{t^n_{k,1}},\, t^n_{k,2},\, x^n_{t^n_{k,2}},\, \ldots) \\ &\qquad\longrightarrow (z,\, x,\, y,\, x^{(k)},\, t_{k,1},\, x_{t_{k,1}},\, t_{k,2},\, x_{t_{k,2}},\, \ldots) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^{d'+3d})\times\mathbb{R}^\infty. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Ponieważ dla każdego $k\in\mathbb{N}$ $\int_0^t y_{s-}dx^{(k)}_s=\sum_{j\leqslant i}y_{t_{k,j}-}(x_{t_{k,j}}-x_{t_{k,j-1}})$, $t\in[t_{k,i},t_{k,i+1})$, więc na mocy (2.39)

$$\Big(z^n,\, x^n,\, y^n,\, \int_0^\cdot y^n_{s-}\,dx^{n,(k)}_s\Big) \longrightarrow \Big(z,\, x,\, y, \int_0^\cdot y_{s-}\,dx^{(k)}_s\Big) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^{d'+2d+1}). \tag{2.40}$$

Podobnie jak w dowodzie faktu 2.21 pokazujemy, że zachodzi (2.38) oraz że

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{t\leqslant T}\left|\int_0^t y_{s-}\,d(x - x^{(k)})_s\right| = 0, \quad T\in\mathbb{R}^+,$$

co razem z (2.40) pociąga tezę. □

Ustalmy $p \in (1,2)$. Niech a^n, l^n, u^n, $h^n \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^d)$, $b^n \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$, $x_0^n \in \mathbb{R}$ będą takie, że $l_0^n \leqslant x_0^n \leqslant u_0^n$, $l^n \leqslant h^n \leqslant u^n$ oraz $\max\{V_1(b^n)_T,\, V_p(a^n)_T,\, V_p(h^n)_T\} < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $T \in \mathbb{R}^+$. Będziemy rozważać ciąg rozwiązań równań postaci

$$x_t^n = x_0^n + \int_0^t f(s, x_{s-}^n)\, db_s^n + \int_0^t g(s, x_{s-}^n)\, da_s^n + k_t^n, \quad t \in \mathbb{R}^+,\ n \in \mathbb{N}. \tag{2.41}$$

Analogicznie do równania (2.23) mówimy, że $(x^n, k^n) \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^{2d})$ jest rozwiązaniem (2.41), jeżeli $(x^n,k^n) = ESP(x_0^n + \int_0^{\cdot} f(s,x_{s-}^n)\, db_s^n + \int_0^{\cdot} g(s,x_{s-}^n)\, da_s^n, l^n, u^n)$ oraz $V_p(x^n)_T < \infty$, $T \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie 2.23. *Załóżmy* (H1) *oraz dodatkowo, że f jest funkcją ciągłą. Jeżeli $b^n \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ i h^n, $a^n \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^d)$ są takie, że $\sup_n \max\{V_1(b^n)_T,\, V_p(a^n)_T,\, \bar{V}_p(h^n)_T\} < \infty$, $T \in \mathbb{R}^+$ oraz*

$$(x_0^n,\, b^n,\, a^n,\, l^n,\, u^n) \longrightarrow (x_0,\, b,\, a,\, l,\, u) \quad w\ \mathbb{R}^d \times \mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^{3d+1}),$$

to ciąg $\{(x^n,k^n)\}$ rozwiązań równań (2.41) *jest relatywnie zwarty w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^{2d})$ oraz każdy jego punkt skupienia jest rozwiązaniem* (2.23).

Dowód. Pokażemy najpierw, że jeżeli (x,k) jest rozwiązaniem równania (2.23), to dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ istnieje stała D zależna tylko od d, p, α, β, x_0, C_g^T, C_f, $V_1(b)_T$, $V_p(a)_T$ i $\bar{V}_p(h)_T$ taka, że

$$\bar{V}_p(x)_T \leqslant D. \tag{2.42}$$

W tym celu postępujemy tak samo jak w dowodzie lematu 2.17. Najpierw przyjmując $q = p/\alpha \vee 1/\beta$, $C_0 = (d+1)|x_0| + d\bar{V}_p(h)_T$, $C_1 = (d+1)\max\{C_f, K_{p,q}C_g^T\}$ oraz korzystając z wniosku 2.9, uzyskujemy oszacowanie:

$$\bar{V}_p(x)_t \leqslant C_0 + C_1(1+\bar{V}_p(x)_t)(V_1(b)_t + V_p(a)_t), \quad t \leqslant T.$$

Następnie kładąc $t_1 = \inf\{t\,;\, C_1(V_1(b)_t + V_p(a)_t) > 1/2\} \wedge T$, otrzymujemy

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \bar{V}_p(x)_{t_1-} \leqslant 2(C_0 + 1/2)$$

oraz $|\Delta x_{t_1}| \leqslant C_0 + (1+d)\bar{V}_p(x)_{t_1-} + C_1(1+\bar{V}_p(x)_{t_1-})\,(V_1(b)_T + V_p(a)_T)$. W konsekwencji istnieje stała D_1 zależna od d, p, q, x_0, C_g^T, C_f, $V_1(b)_T$, $V_p(a)_T$ i $\bar{V}_p(h)_T$ taka, że $\bar{V}_p(x)_{t_1} \leqslant D_1$. Powtarzając powyższe rozumowanie dla $t_k = \inf\{t > t_{k-1}\,;\, C_1(V_1(b)_{[t_{k-1},t]} + V_p(a)_{[t_{k-1},t]}) > 1/2\} \wedge T$, wnioskujemy, iż $V_p(x)_{[t_{k-1},t_k]} \leqslant D_k = D_k(d,p,q,x_0,C_g^T,C_f,V_1(b)_T,V_p(a)_T,\bar{V}_p(h)_T)$, $k \geqslant 2$. Stosując argumenty z dowodu (2.31), pokazujemy, że $m = \sup\{k\,;\, t_k < T\} \leqslant C(p, C_1, V_1(b)_T, v_p(a)_T)$, kończąc tym samym dowód (2.42).

Z (2.42) wynika, że $\sup_n \bar{V}_p(x^n)_T < \infty$ dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$. Dzięki (2.25) również

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \bar{V}_q(g(\cdot,x^n))_T < \infty, \quad T \in \mathbb{R}^+, \tag{2.43}$$

gdzie $q = p/\alpha \vee 1/\beta$. Ponieważ f jest funkcją ciągłą, istnieje ciąg funkcji lipschitzowskich $\{f^k\}$ taki, że $\sup_{(t,u)\in K} |f^k(t,u) - f(t,u)| \to 0$ dla każdego zbioru zwartego $K \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$. Zatem

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \bar{V}_p(f^k(\cdot,x^n))_T < \infty, \quad T \in \mathbb{R}^+,\ k \in \mathbb{N} \tag{2.44}$$

oraz

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\sup_{t\leqslant T}|f^k(t,x^n_t)-f(t,x^n_t)|=0,\quad T\in\mathbb{R}^+. \tag{2.45}$$

Na mocy (2.43), (2.44) oraz faktu 2.21 dla każdego $k\in\mathbb{N}$

$$\Big\{\Big(\int_0^{\cdot} f^k(s,x^n_{s-})\,db^n_s, b^n, \int_0^{\cdot} g(s,x^n_{s-})\,da^n_s, a^n\Big)\Big\}\ \text{jest relatywnie zwarty w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^{3d+1}),$$

co razem z (2.45) pociąga, że

$$\Big\{\Big(\int_0^{\cdot} f(s,x^n_{s-})\,db^n_s, b^n, \int_0^{\cdot} g(s,x^n_{s-})\,da^n_s, a^n\Big)\Big\}\ \text{jest relatywnie zwarty w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^{3d+1}).$$

W konsekwencji, ciąg $\{(y^n,b^n,a^n,l^n,u^n)\}$, gdzie

$$y^n=x^n_0+\int_0^{\cdot} f(s,x^n_{s-})\,db^n_s+\int_0^{\cdot} g(s,x^n_{s-})\,da^n_s,\quad n\in\mathbb{N},$$

jest relatywnie zwarty w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^{4d+1})$. Kładąc $(x^n,k^n)=ESP(y^n,l^n,u^n)$ oraz korzystając z wniosku 2.5, uzyskujemy, że

$$\{(x^n,\,k^n,\,b^n,\,a^n,\,l^n,\,u^n)\}\quad \text{jest relatywnie zwarty w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^{5d+1}).$$

Załóżmy, że $(x^n,k^n,b^n,a^n,l^n,u^n)\to(x,k,b,a,l,u)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^{5d+1})$. Stosując fakt 2.22 dla funkcji g i f^k, $k\in\mathbb{N}$ oraz (2.45), dostajemy $(y^n,l^n,u^n)\to(y,l,u)$, gdzie $y=x_0+\int_0^{\cdot} f(s,x_{s-})\,db_s+\int_0^{\cdot} g(s,x_{s-})\,da_s$. Mając na uwadze wniosek 2.5, otrzymujemy zbieżność:

$$(x^n,\,k^n)=ESP(y^n,\,l^n,\,u^n)\longrightarrow ESP(y,\,l,\,u)=(x,\,k)\quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^{2d}).$$

Z kolei na mocy lematu 1.12 oraz (2.42) dla każdego $T\in\mathbb{R}^+$ mamy oszacowanie: $V_p(x)_T\leqslant\liminf_n V_p(x^n)_T\leqslant D$, więc (x,k) jest rozwiązaniem równania 2.23, co kończy dowód twierdzenia. □

Uwaga 2.24. Przy założeniach twierdzenia 2.23 istnieje funkcja $h\in\mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^d)$ taka, że $l\leqslant h\leqslant u$ oraz $V_p(h)_T<\infty$, $T\in\mathbb{R}^+$. Możemy np. jako h przyjąć pierwszą współrzędną rozwiązania równania (2.23). Istnienie funkcji h można też uzyskać za pomocą bezpośrednich rachunków z wykorzystaniem topologii S, wprowadzonej przez Jakubowskiego w pracy [34]. Istotnie, warunek $\sup_n\bar{V}_p(h^n)_T<\infty$ implikuje, że ciąg $\{h^n\}$ jest relatywnie zwarty w topologii S na przestrzeni $\mathbb{D}([0,T],\mathbb{R}^d)$ (patrz [34, Theorem 2.13]). Istnieje, więc podciąg $\{n'\}$ oraz funkcja $h\in\mathbb{D}([0,T],\mathbb{R}^d)$ takie, że $h^{n'}\to h$ w S. Korzystając z [34, Corollary 2.9] możemy wybrać dalszy podciąg $\{n''\}$ taki, że $h^{n''}_t\to h_t$ dla wszystkich $t\leqslant T$ z wyjątkiem pewnego przeliczalnego zbioru $D\in[0,T]$. Ponieważ $\sup_n\bar{V}_p(h^n)_T<\infty$, więc powtarzając argumenty z dowodu lematu 1.12 (z tą różnicą, że zamiast punktów ciągłości funkcji granicznej rozważamy zbiór punktów ciągłości h pomniejszony o zbiór D), uzyskujemy, że $V_p(h)_T<\infty$.

Wniosek 2.25. *Załóżmy* (H1), (H2) *oraz dodatkowo, że f jest funkcją ciągłą. Niech a^n, l^n, u^n, $h^n\in\mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^d)$, $b^n\in\mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ będą takie, że $l^n_0\leqslant x^n_0\leqslant u^n_0$, $l^n\leqslant h^n\leqslant u^n$, $n\in\mathbb{N}$, $\sup_n\max\{V_1(b^n)_T,\,V_p(h^n)_T,\,V_p(a^n)_T\}<\infty$ oraz*

$$\sup_{t\leqslant T}(|b^n_t-b_t|+|a^n_t-a_t|+|l^n_t-l_t|+|u^n_t-u_t|)\longrightarrow 0,\quad T\in\mathbb{R}^+. \tag{2.46}$$

Jeżeli $\{(x^n, k^n)\}$ *jest ciągiem rozwiązań równań postaci* (2.41) *i* $x_0^n \to x_0$, *to*

$$\sup_{t\leqslant T}(|x_t^n - x_t| + |k_t^n - k_t|) \longrightarrow 0, \quad T \in \mathbb{R}^+,$$

gdzie (x, k) *jest jednoznacznym rozwiązaniem równania* (2.23).

Dowód. Z twierdzenia 2.23 oraz jednoznaczności rozwiązań wynika, że

$$(x^n,\, k^n,\, b^n,\, a^n,\, l^n,\, u^n) \longrightarrow (x,\, k,\, b,\, a,\, l,\, u) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{5d+1}).$$

Ponieważ dla każdego $t \in \mathbb{R}^+$ mamy

$$\Delta x_t \neq 0 \Rightarrow \Delta b_t \neq 0 \text{ lub } \Delta a_t \neq 0 \text{ lub } \Delta l_t \neq 0 \text{ lub } \Delta u_t \neq 0,$$

więc fakt 1.5 implikuje, że $\sup_{t\leqslant T} |x_t^n - x_t| \to 0$, $T \in \mathbb{R}^+$. Analogicznie pokazujemy jednostajną na kompaktach zbieżność k^n do k. □

W celu aproksymacji rozwiązań równań różniczkowych często używa się schematu Eulera. Niech ciąg podziałów $\pi_n = \{0 = t_{n,0} < t_{n,1} < t_{n,2} < \ldots\}$ będzie taki, że $\lim_{i\to\infty} t_{n,i} = \infty$, $n \in \mathbb{N}$ oraz $\operatorname{diam}(\pi_n) \to 0$. Rozważmy schemat Eulera dla równania (2.23) postaci: $x_0^n = x_0$, $k_0^n = 0$,

$$\begin{cases} y^n_{t_{n,i+1}} &= y^n_{t_{n,i}} + f(t_{n,i}, x^n_{t_{n,i}})(b_{t_{n,i+1}} - b_{t_{n,i}}) + g(t_{n,i}, x^n_{t_{n,i}})(a_{t_{n,i+1}} - a_{t_{n,i}}), \\ x^n_{t_{n,i+1}} &= \max\{\min\{x^n_{t_{n,i}} + (y^n_{t_{n,i+1}} - y^n_{t_{n,i}}), u_{t_{n,i+1}}\}, l_{t_{n,i+1}}\}, \\ k^n_{t_{n,i+1}} &= k^n_{t_{n,i}} + (x^n_{t_{n,i+1}} - x^n_{t_{n,i}}) - (y^n_{t_{n,i+1}} - y^n_{t_{n,i}}) \end{cases} \tag{2.47}$$

oraz $x_t^n = x^n_{t_{n,i}}$, $k_t^n = k^n_{t_{n,i}}$, $t \in [t_{n,i}, t_{n,i+1})$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie 2.26. *Załóżmy* (H1) *oraz dodatkowo, że* f *jest funkcją ciągłą. Niech* $b \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, a, l, u, $h \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ *będą funkcjami takimi, że* $\max\{V_1(b)_T,\, V_p(h)_T,\, V_p(a)_T\} < \infty$, $T \in \mathbb{R}^+$ *oraz* $l_0 \leqslant x_0 \leqslant u_0$, $l \leqslant h \leqslant u$. *Wówczas ciąg* $\{(x^n, k^n)\}$ *zdefiniowany w* (2.47) *jest relatywnie zwarty w* $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ *oraz każdy jego punkt skupienia jest rozwiązaniem* (2.23). *W szczególności równanie* (2.23) *posiada rozwiązanie.*

Dowód. Bez trudu można sprawdzić, że

$$\begin{cases} (x^n, k^n) = ESP(y^n, l^n, u^n), \\ \text{gdzie } y_t^n = x_0 + \int_0^t f(\varrho^n_{s-}, x^n_{s-})\, db^n_s + \int_0^t g(\varrho^n_{s-}, x^n_{s-})\, da^n_s, \quad t \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \tag{2.48}$$

oraz $b_t^n = b_{t_{n,i}}$, $a_t^n = a_{t_{n,i}}$, $l_t^n = l_{t_{n,i}}$, $u_t^n = u_{t_{n,i}}$, $\varrho_t^n = t_{n,i}$, $t \in [t_{n,i}, t_{n,i+1})$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$. Ustalmy $T \in \mathbb{R}^+$. Zdefiniujmy dodatkowo: $h_t^n = h_{t_{n,i}}$ dla $t \in [t_{n,i}, t_{n,i+1})$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$. Mając na uwadze fakt, że

$$V_1(b^n)_T \leqslant V_1(b)_T,\ V_p(a^n)_T \leqslant V_p(a)_T,\ V_p(h^n)_T \leqslant V_p(h)_T,\ \varrho^n_T \leqslant T, \quad n \in \mathbb{N}$$

i postępując podobnie jak w dowodzie twierdzenia 2.23, dostajemy

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \bar{V}_p(x^n)_T < \infty. \tag{2.49}$$

Niech
$$\begin{cases} (\bar{x}^n, \bar{k}^n) = ESP(\bar{y}^n, l^n, u^n), \\ \text{gdzie } \bar{y}^n_t = x_0 + \int_0^t f(s, x^n_{s-})\, db^n_s + \int_0^t g(s, x^n_{s-})\, da^n_s, \quad t \in \mathbb{R}^+,\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Korzystając z lematu 2.4, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sup_{t\leqslant T} |x^n_t - \bar{x}^n_t| \leqslant 2\sup_{t\leqslant T} |y^n_t - \bar{y}^n_t| &\leqslant 2\sup_{t\leqslant T} \left| \int_0^t f(\varrho^n_{s-}, x^n_{s-}) - f(s, x^n_{s-})\, db^n_s \right| \\ &\quad + 2V_p \left(\int_0^t g(\varrho^n_{s-}, x^n_{s-}) - g(s, x^n_{s-})\, da^n_s \right)_T \\ &\leqslant 2I^{n,1} + 2I^{n,2} \end{aligned}$$

oraz $\sup_{t\leqslant T} |k^n_t - \bar{k}^n_t| \leqslant I^{n,1} + I^{n,2}$. Z ciągłości funkcji f oraz z (2.49) wynika zbieżność:

$$I^{n,1} \leqslant \sup_{t\leqslant T} \left| f(\varrho^n_{t-}, x^n_{t-}) - f(t, x^n_{t-}) \right| V_1(b)_T \longrightarrow 0. \tag{2.50}$$

Niech $q = p/\alpha \vee 1/\beta$ oraz $\gamma \in (1 - 1/p, 1/q)$. Na mocy (1.3), (2.25), (2.49), uwagi 1.11 (v) oraz faktu, że g jest β-hölderowska względem czasu mamy:

$$\begin{aligned} I^{n,2} &\leqslant K_{p,1/\gamma} V_{1/\gamma} \left(g(\varrho^n_-, x^n_-) - g(\cdot, x^n_-) \right)_T V_p(a)_T \\ &\leqslant K_{p,1/\gamma} \operatorname{Osc}(g(\varrho^n_-, x^n_-) - g(\cdot, x^n_-))^{1-q\gamma}_{[0,T]} V_q \left(g(\varrho^n_-, x^n_-) - g(\cdot, x^n_-) \right)^{q\gamma}_T V_p(a)_T \\ &\leqslant K_{p,1/\gamma} \left(2\sup_{t\leqslant T} |g(\varrho^n_-, x^n_-) - g(\cdot, x^n_-)| \right)^{1-q\gamma} \left(2C^T_g (1 + \bar{V}_p(x^n)_T) \right)^{q\gamma} V_p(a)_T \\ &\leqslant D(1 + \bar{V}_p(x^n)_T) \sup_{t\leqslant T} |\varrho^n_{t-} - t|^{\beta(1-q\gamma)} \longrightarrow 0, \end{aligned} \tag{2.51}$$

gdzie D jest stałą zależną od p, q, γ, C^T_g, C_g i $V_p(a)_T$. Biorąc pod uwagę (2.50) i (2.51), uzyskujemy

$$\sup_{t\leqslant T} |x^n_t - \bar{x}^n_t| \longrightarrow 0 \quad \text{oraz} \quad \sup_{t\leqslant T} |k^n_t - \bar{k}^n_t| \longrightarrow 0. \tag{2.52}$$

Ponieważ na mocy twierdzenia 1.6 $(b^n, a^n, l^n, u^n) \to (b, a, l, u)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{3d+1})$, więc powtarzając rozumowanie z dowodu twierdzenia 2.23, wnioskujemy, że $\{(\bar{x}^n, \bar{k}^n, b^n, a^n, l^n, u^n)\}$ jest relatywnie zwarty w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{5d+1})$, co razem z (2.52) pociąga relatywną zwartość ciągu $\{(x^n, k^n, b^n, a^n, l^n, u^n)\}$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{5d+1})$.

Załóżmy, że $(x^n, k^n, b^n, a^n, l^n, u^n) \to (x, k, b, a, l, u)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{5d+1})$. Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 2.23 rozważając ciąg $\{f^k\}$ funkcji lipshitzowskich zbieżny jednostajnie na kompaktach do f oraz korzystając z faktu 2.22, uzyskujemy zbieżność: $(\bar{y}^n, l^n, u^n) \to (y, l, u)$, gdzie $y = x_0 + \int_0^\cdot f(s, x_{s-})\, db_s + \int_0^\cdot g(s, x_{s-})\, da_s$. W konsekwencji wniosek 2.5 implikuje, że

$$(\bar{x}^n, \bar{k}^n) = ESP(\bar{y}^n, l^n, u^n) \longrightarrow ESP(y, l, u) = (x, k) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d}),$$

co razem z (2.52) pociąga zbieżność: $(x^n, k^n) \to (x, k)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$. Ponieważ na mocy lematu 1.12 oraz (2.49) dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ mamy: $V_p(x)_T \leqslant \liminf_n V_p(x^n)_T < \infty$, dowód twierdzenia został zakończony. □

Wniosek 2.27. *Załóżmy* (H1), (H2) *oraz dodatkowo, że f jest funkcją ciągłą. Niech $b \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$, a, l, u, $h \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^d)$ będą funkcjami takimi, że* $\max\{V_1(b)_T,\, V_p(h)_T,\, V_p(a)_T\} < \infty$, *$T \in \mathbb{R}^+$ oraz $l_0 \leqslant x_0 \leqslant u_0$, $l \leqslant h \leqslant u$. Jeżeli $\{(x^n,k^n)\}$ jest ciągiem zdefiniowanym w* (2.47)*, to*

$$(x^n,k^n) \longrightarrow (x,k) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^{2d}). \tag{2.53}$$

Ponadto dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$

$$\max_{t_{n,i}\leqslant T} |x^n_{t_{n,i}} - x_{t_{n,i}}| \longrightarrow 0 \quad \textit{oraz} \quad \max_{t_{n,i}\leqslant T} |k^n_{t_{n,i}} - k_{t_{n,i}}| \longrightarrow 0, \tag{2.54}$$

gdzie (x,k) jest jednoznacznym rozwiązaniem równania (2.23)*.*

Dowód. Zbieżność (2.53) wynika z twierdzenia 2.26 oraz jednoznaczności rozwiązań równania (2.23). Dla dowodu (2.54) pokażemy, że

$$(x^n,\, x^{(n)},\, k^n,\, k^{(n)}) \longrightarrow (x,\, x,\, k,\, k) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^{4d}), \tag{2.55}$$

gdzie $x^{(n)}_t = x_{t_{n,i}}$, $k^{(n)}_t = k_{t_{n,i}}$ dla $t \in [t_{n,i}, t_{n,i+1})$, $i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $n \in \mathbb{N}$. Niech $\{b^n\}$, $\{a^n\}$, $\{l^n\}$, $\{u^n\}$ będą takie jak w dowodzie twierdzenia 2.26. Połóżmy $\varrho^\star_n(t) = \min\{t_{n,i}; t_{n,i} \geqslant t\}$ oraz zauważmy, że podobnie jak w dowodzie twierdzenia 1.6 dla każdego $t \in \mathbb{R}^+$ $\varrho^\star_n(t) \to t$ oraz $x^{(n)}_{\varrho^\star_n(t)} \to \Delta x_t$, $\Delta k^{(n)}_{\varrho^\star_n(t)} \to \Delta k_t$, $\Delta b^n_{\varrho^\star_n(t)} \to \Delta b_t$, $\Delta a^n_{\varrho^\star_n(t)} \to \Delta a_t$, $\Delta l^n_{\varrho^\star_n(t)} \to \Delta l_t$ i $\Delta u^n_{\varrho^\star_n(t)} \to \Delta u_t$. Z faktu 1.2 (i) wynika natomiast, że dla każdego $t \in \mathbb{R}^+$ istnieje ciąg $t_n \to t$ o własności:

$$\Delta x^n_{t_n} \longrightarrow \Delta x_t \text{ i } \Delta k^n_{t_n} \longrightarrow \Delta k_t. \tag{2.56}$$

Na mocy faktu 1.2 (ii.5) oraz faktu 1.3, aby zakończyć dowód (2.55), wystarczy pokazać, że jeśli $\Delta x_t \neq 0$ lub $\Delta k_t \neq 0$, to $t_n = \varrho^\star_n(t)$ dla odpowiednio dużych $n \in \mathbb{N}$.

Przypuśćmy, że tak nie jest. Wówczas istnieje podciąg $\{n_j\}$ taki, że $t_{n_j} < \varrho^\star_{n_j}(t)$ lub $t_{n_j} > \varrho^\star_{n_j}(t)$, $j \in \mathbb{N}$. W obu przypadkach na mocy (2.24), (2.49) oraz faktu 1.2 (ii.1)-(ii.4) mamy, że

$$\begin{aligned}|\Delta x^n_{t_{n_j}}| &\leqslant |f(t_{n_j}, x^{n_j}_{t_{n_j}-})\Delta b^{n_j}_{t_{n_j}}| + |g(t_{n_j}, x^{n_j}_{t_{n_j}-})\Delta a^{n_j}_{t_{n_j}}| + |\Delta u^{n_j}_{t_{n_j}}| + |\Delta l^{n_j}_{t_{n_j}}| \\ &\leqslant C_f(1+\bar V_p(x^{n_j})_T)|\Delta b^{n_j}_{t_{n_j}}| + C^T_g(1+\bar V_p(x^{n_j})_T)|\Delta a^{n_j}_{t_{n_j}}| + |\Delta u^{n_j}_{t_{n_j}}| + |\Delta l^{n_j}_{t_{n_j}}| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

oraz

$$|\Delta k^n_{t_{n_j}}| \leqslant C_f(1+\bar V_p(x^{n_j})_T)|\Delta b^{n_j}_{t_{n_j}}| + C^T_g(1+\bar V_p(x^{n_j})_T)|\Delta a^{n_j}_{t_{n_j}}| + |\Delta u^{n_j}_{t_{n_j}}| + |\Delta l^{n_j}_{t_{n_j}}| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0,$$

co przeczy (2.56) i kończy dowód (2.55). Z (2.55) oraz z uwagi 1.4 możemy wywnioskować zbieżność (2.54) i tym samym zakończyć dowód wniosku. □

Wniosek 2.28. *Załóżmy* (H1), (H2) *oraz dodatkowo, że f jest funkcją ciągłą. Niech $b \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$, a, l, u, $h \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^d)$ będą funkcjami takimi, że* $\max\{V_1(b)_T,\, V_p(h)_T,\, V_p(a)_T\} < \infty$, *$T \in \mathbb{R}^+$ oraz $l_0 \leqslant x_0 \leqslant u_0$, $l \leqslant h \leqslant u$. Ponadto, niech ciąg podziałów $\pi_n = \{0 = t_{n,0} < t_{n,1} < t_{n,2} < \ldots\}$ będzie taki, że* $\lim_{k\to\infty} t_{n,k} = \infty$, *$n \in \mathbb{N}$ oraz* $\mathrm{diam}(\pi_n) \to 0$. *Jeżeli dla*

$b^n_t = b_{t_{n,i}}$, $a^n_t = a_{t_{n,i}}$, $l^n_t = l_{t_{n,i}}$, $u^n_t = u_{t_{n,i}}$ $t \in [t_{n,i}, t_{n,i+1})$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ zachodzi (2.46) *oraz $\{(x^n, k^n)\}$ jest ciągiem zdefiniowanym w* (2.47)*, to*

$$\sup_{t \leqslant T}(|x^n_t - x_t| + |k^n_t - k_t|) \longrightarrow 0, \quad T \in \mathbb{R}^+,$$

gdzie (x, k) jest jednoznacznym rozwiązaniem równania (2.23)*.*

Dowód. Wystarczy powtórzyć argumenty z dowodu wniosku 2.25. Jedyna różnica polega na tym, że zamiast z twierdzenia 2.23 korzystamy z twierdzenia 2.26. □

Wniosek 2.29. *Załóżmy* (H1), (H2) *oraz dodatkowo, że f jest funkcją ciągłą. Niech $b \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, a, l, u, $h \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ będą funkcjami takimi, że $\max\{V_1(b)_T, V_p(h)_T, V_p(a)_T\} < \infty$, $T \in \mathbb{R}^+$ oraz $l_0 \leqslant x_0 \leqslant u_0$, $l \leqslant h \leqslant u$. Jeżeli $\{(x^n, k^n)\}$ jest ciągiem zdefiniowanym w* (2.47) *dla $t_{n,0} = 0$,*

$$t_{n,i} = \inf\{t > t_{n,i-1}\,;\, \max\{|\Delta b_t|, |\Delta a_t|, |\Delta l_t|, |\Delta u_t|\} > 1/n\} \wedge (t_{n,i-1} + 1/n)\,, \quad i, n \in \mathbb{N},$$

to

$$\sup_{t \leqslant T}(|x^n_t - x_t| + |k^n_t - k_t|) \longrightarrow 0, \quad T \in \mathbb{R}^+,$$

gdzie (x, k) jest jednoznacznym rozwiązaniem równania (2.23)*.*

Dowód. Łatwo zauważyć, że ciąg podziałów $\pi^n = \{0 = t_{n,0} < t_{n,1} < t_{n,2} < \ldots\}$ spełnia założenia wniosku 2.28. Ponadto z wniosku 1.7 wynika zbieżność (2.46). Zatem korzystając z wniosku 2.28, otrzymujemy tezę. □

Twierdzenie 2.30. *Niech $b \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, a, l, u, $h \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ będą funkcjami takimi, że $\max\{V_1(b)_T, V_p(h)_T, V_p(a)_T\} < \infty$, $T \in \mathbb{R}^+$, $l_0 \leqslant x_0 \leqslant u_0$, $l \leqslant h \leqslant u$ oraz dla $\varepsilon > 0$ f_ε, g_ε będą funkcjami spełniającymi* (H1), (H2) *z takimi samymi stałymi C_f, α, β, C_g. Jeżeli $l_0 \leqslant x^\varepsilon_0 \leqslant u_0$, $(x^\varepsilon, k^\varepsilon)$ oznacza rozwiązanie równania* (2.23) *z x^ε_0, f_ε, g_ε zamiast x_0, f, g, $x^\varepsilon_0 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} x_0$ oraz $\sup_{(t,u)\in K} |f_\varepsilon(t, u) - f(t, u)| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ i $\sup_{(t,u)\in K} |g_\varepsilon(t, u) - g(t, u)| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ dla dowolnego zbioru zwartego $K \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$, to dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ mamy, że*

$$\bar{V}_p(x^\varepsilon - x)_T \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \quad \textit{oraz} \quad \bar{V}_p(k^\varepsilon - k)_T \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0,$$

gdzie (x, k) jest jednoznacznym rozwiązaniem (2.23)*.*

Dowód. Ustalmy $T \in \mathbb{R}^+$ oraz zauważmy, że na mocy (2.42)

$$N = \sup_{\varepsilon > 0} \bar{V}_p(x^\varepsilon)_T < \infty, \tag{2.57}$$

co pociąga, że $\sup_{t\leqslant T}|x^\varepsilon_t|\leqslant N$. Korzystając z wniosku 2.8, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{\bar V_p(x^\varepsilon-x)_T}{(d+1)} &\leqslant |x^\varepsilon_0-x_0| + V_p\Big(\int_0^\cdot f_\varepsilon(s,x^\varepsilon_{s-})-f(s,x_{s-})\,db_s\Big)_T\\ &\quad + V_p\Big(\int_0^\cdot g_\varepsilon(s,x^\varepsilon_{s-})-g(s,x_{s-})\,da_s\Big)_T\\ &\leqslant |x^\varepsilon_0-x_0| + V_p\Big(\int_0^\cdot (f_\varepsilon-f)(s,x^\varepsilon_{s-})\,db_s\Big)_T + V_p\Big(\int_0^\cdot (g_\varepsilon-g)(s,x^\varepsilon_{s-})\,da_s\Big)_T\\ &\quad + V_p\Big(\int_0^\cdot f(s,x^\varepsilon_{s-})-f(s,x_{s-})\,db_s\Big)_T + V_p\Big(\int_0^\cdot g(s,x^\varepsilon_{s-})-g(s,x_{s-})\,da_s\Big)_T\\ &= |x^\varepsilon_0-x_0| + I^{\varepsilon,1}_T + I^{\varepsilon,2}_T + I^{\varepsilon,3}_T + I^{\varepsilon,4}_T.\end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że

$$I^{\varepsilon,1}_T \leqslant \sup_{\substack{|v|<N\\ t\leqslant T}} |f_\varepsilon(t,v)-f(t,v)|V_1(b)_T \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 2.26 przyjmując $q=p/\alpha\vee 1/\beta$, $\gamma\in(1-1/p,1/q)$, następnie korzystając z (1.3), (2.25), (2.57) oraz uwagi 1.11 (v), wnioskujemy, że istnieje stała D_1 zależna od p, q, γ, C^T_g i $V_p(a)_T$ taka, że

$$\begin{aligned}I^{\varepsilon,2}_T &\leqslant K_{p,1/\gamma}\bar V_{1/\gamma}((g_\varepsilon-g)(\cdot,x^\varepsilon))_T V_p(a)_T\\ &\leqslant K_{p,1/\gamma}\Big(\operatorname{Osc}((g_\varepsilon-g)(\cdot,x^\varepsilon))^{1-q\gamma}_T V_q((g_\varepsilon-g)(\cdot,x^\varepsilon))^{q\gamma}_T + |(g_\varepsilon-g)(0,x^\varepsilon_0)|\Big)V_p(a)_T\\ &\leqslant D_1\sup_{\substack{|v|<N\\ t\leqslant T}}\Big(|g_\varepsilon(t,v)-g(t,v)|^{1-q\gamma}+|g_\varepsilon(0,v)-g(0,v)|\Big).\end{aligned}$$

W konsekwencji

$$I^{\varepsilon,1}_T + I^{\varepsilon,2}_T \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \tag{2.58}$$

Korzystając ponownie z (2.57) oraz argumentów z dowodu nierówności (2.32), otrzymujemy, że istnieje stała D_2 o własności

$$(I^{\varepsilon,3}_t + I^{\varepsilon,4}_t) \leqslant D_2(V_1(b)_t+V_p(a)_t)\bar V_p(x^\varepsilon-x)_t, \quad t\leqslant T.$$

Analogicznie do dowodu twierdzenia 2.18 przyjmijmy

$$t_1=\inf\{t\,;\,D_2(V_1(b)_t+V_p(a)_t)>1/2\}\wedge T$$

oraz zauważmy, że

$$\bar V_p(x^\varepsilon-x)_{t_1-}\leqslant(|x^\varepsilon_0-x_0|+I^{\varepsilon,1}_T+I^{\varepsilon,2}_T)+\frac12\bar V_p(x^\varepsilon-x)_{t_1-}.$$

Z powyższej nierówności oraz z (2.58) mamy $\bar V_p(x^\varepsilon-x)_{t_1-}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0$. Używając argumentów z dowodu twierdzenia 2.18, pokazujemy, że $\bar V_p(x^\varepsilon-x)_{t_1}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0$. Powtarzając powyższe rozumowanie skończenie wiele razy na kolejnych przedziałach $[t_i,t_{i+1}]$, uzyskujemy tezę. □

Uwaga 2.31. 1. Podobne rezultaty dotyczące aproksymacji oraz stabilności rozwiązań można pokazać dla równań z jedną barierą. Analogicznie do uwagi 2.20.1 nie jest wtedy wymagane istnienie funkcji h, a jedyna modyfikacja w dowodach polega na tym, że zamiast korzystać z wniosków 2.8 i 2.9 stosujemy wnioski 2.10 oraz 2.11.

2. Podobnie możemy uzyskać wyniki dotyczące aproksymacji oraz stabilności rozwiązań równań bez barier postaci (2.33).

Rozdział 3

Srr z barierami względem procesów o skończonej p-wariacji

3.1 Zbieżność całek względem procesów o skończonej p-wariacji

Niniejszy rozdział rozpoczynamy od sformułowania wyników dotyczących jednostajnej jędrności i zbieżności całek względem procesów o lokalnie skończonej p-wariacji.

Twierdzenie 3.1. *Niech $\{H^n\}$ będzie ciągiem procesów o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d'})$, $\{X^n\}$, $\{A^n\}$ będą ciągami procesów o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ takimi, że dla pewnych $p, q \geqslant 1$ o własności $1/p + 1/q > 1$ ciągi $\{\bar{V}_q(X^n)_T\}$, $\{V_p(A^n)_T\}$ są ograniczone według prawdopodobieństwa, $T \in \mathbb{R}^+$. Jeżeli $\{(H^n,\, A^n)\}$ jest jednostajnie jędrny w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d'+d})$, to*

$$\left\{\left(H^n,\, A^n,\, \int_0^{\cdot} X^n_{s-}\, dA^n_s\right)\right\} \quad \textit{jest jednostajnie jędrny w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d'+d+1}).$$

Dowód. Postępujemy podobnie jak w dowodzie faktu 2.21. Bez straty ogólności rozważań możemy założyć, że

$$(H^n,\, A^n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (H,\, A) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d'+d}).$$

Niech $\tau^n_{k,0} = 0$, $\tau^n_{k,i+1} = \min\{\tau^n_{k,i} + \delta_{k,i}, \inf\{t > \tau^n_{k,i}\,;\, |\Delta A^n_t| > \delta_k\}\}$ i $\tau_{k,0} = 0$, $\tau_{k,i+1} = \min\{t_{k,i} + \delta_{k,i}, \inf\{t > \tau_{k,i}\,;\, |\Delta A_t| > \delta_k\}\}$, gdzie $\{\delta_k\}$, $\{\{\delta_{k,i}\}\}$ są stałymi takimi, że $\delta_k \downarrow 0$, $P(|\Delta A_t| \neq \delta_k,\, t \in \mathbb{R}^+) = 1$, $\delta_k/2 \leqslant \delta_{k,i} \leqslant \delta_k$ i $P(|\Delta A_{\tau_{k,i}+\delta_{k,i}}| + |\Delta H_{\tau_{k,i}+\delta_{k,i}}| = 0) = 1$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n, k \in \mathbb{N}$. Dla $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n, k \in \mathbb{N}$ połóżmy

$$A^{n,(k)}_t = A^n_{\tau^n_{k,i}},\ t \in [\tau^n_{k,i}, \tau^n_{k,i+1}) \quad \text{oraz} \quad A^{(k)}_t = A_{\tau_{k,i}},\ t \in [\tau_{k,i}, \tau_{k,i+1}).$$

Wtedy dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ rodzina zmiennych losowych

$$\{\{\bar{V}_p(A^n - A^{n,(k)})_T\}\} \quad \text{jest ograniczona według prawdopodobieństwa.} \tag{3.1}$$

Korzystając z faktu 1.8, otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
&(H^n, A^n, A^{n,(k)}, \tau^n_{k,1}, A^n_{\tau^n_{k,1}}, \tau^n_{k,2}, A^n_{\tau^n_{k,2}}, \dots) \\
&\quad \xrightarrow{\mathcal{D}} (H, A, A^{(k)}, \tau_{k,1}, A_{\tau_{k,1}}, \tau_{k,2}, A_{\tau_{k,2}}, \dots) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d'+2d}) \times R^\infty. \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

Ponieważ

$$
\int_0^t X^n_{s-} dA^{n,(k)}_s = \sum_{j \leqslant i} X^n_{\tau^n_{k,j}-}(A^n_{\tau^n_{k,j}} - A^n_{\tau^n_{k,j-1}}), \quad t \in [\tau^n_{k,i}, \tau^n_{k,i+1})
$$

i $\{\sup_{t \leqslant T} |X^n_t|\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa, z (3.2) oraz z twierdzenia 1.33 wynika, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$

$$
\left\{\left(H^n, A^n, \int_0^\cdot X^n_{s-} dA^{n,(k)}_s\right)\right\} \quad \text{jest jednostajnie jędrny w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d'+d+1}). \qquad (3.3)
$$

Argumentując podobnie jak w dowodzie faktu 2.21, dostajemy

$$
\sup_{t \leqslant T} |A^{(k)}_t - A_t| \longrightarrow 0 \quad P\text{-p.w.}, \ T \in \mathbb{R}^+,
$$

co razem z (3.2) pociąga, iż

$$
\lim_{k \to \infty} \limsup_{n \to \infty} P(\sup_{t \leqslant T} |A^{n,(k)}_t - A^n_t| \geqslant \varepsilon) = 0, \quad T \in \mathbb{R}^+. \qquad (3.4)
$$

Wybierzmy takie $p' > p$ aby $1/p' + 1/q > 1$. Wówczas biorąc pod uwagę (1.3), dla dowolnych $D, \varepsilon > 0$ uzyskujemy

$$
\begin{aligned}
P&\left(\sup_{t \leqslant T} \left|\int_0^t X^n_{s-} d(A^n - A^{n,(k)})_s\right| \geqslant \varepsilon\right) \\
&\leqslant P(\bar{V}_q(X^n)_T V_{p'}(A^n - A^{n,(k)})_T \geqslant \varepsilon / K_{p',q}) \\
&\leqslant P(\bar{V}_q(X^n)_T > D) + P(V_{p'}(A^n - A^{n,(k)})_T \geqslant \varepsilon/(K_{p',q} D)), \\
&\leqslant P(\bar{V}_q(X^n)_T > D) + P(V_p(A^n - A^{n,(k)})_T^{p/p'} > D) \\
&\qquad + P((2 \sup_{t \leqslant T} |A^n - A^{n,(k)}_t|)^{1-p/p'} \geqslant \varepsilon/(K_{p',q} D^2)). \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

Stąd oraz z (3.1) i (3.4) mamy, że

$$
\lim_{k \to \infty} \limsup_{n \to \infty} P\left(\sup_{t \leqslant T} \left|\int_0^t X^n_{s-}\, d(A^n - A^{n,(k)})_s\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0, \quad T \in \mathbb{R}^+. \qquad (3.6)
$$

Teza twierdzenia wynika z (3.3) i (3.6). □

Twierdzenie 3.2. *Niech spełnione będą założenia twierdzenia 3.1. Jeżeli dodatkowo* $(H^n, A^n, X^n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (H, A, X)$ *w* $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d'+2d})$, *to*

$$
\left(H^n, A^n, X^n, \int_0^\cdot X^n_{s-}\, dA^n_s\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \left(H, A, X, \int_0^\cdot X_{s-}\, dA_s\right) \quad w\ \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d'+2d+1}).
$$

Dowód. Na mocy faktu 1.36 $P(V_q(X)_T < \infty) = 1$ i $P(V_p(A)_T < \infty) = 1$, $T \in \mathbb{R}^+$, zatem istnieje całka $\int_0^\cdot X_{s-}\, dA_s$. Niech $\{\{A^{n,(k)}\}\}$, $\{A^{(k)}\}$ będą ciągami procesów zdefiniowanymi tak samo jak w dowodzie twierdzenia 3.1, z tą różnicą, że w konstrukcji wykorzystujemy rodzinę stałych $\{\delta_k\}$, $\{\{\delta_{k,i}\}\}$ takich, że $\delta_k \downarrow 0$, $P(|\Delta A_t| \neq \delta_k,\, t \in \mathbb{R}^+) = 1$, $\delta_k/2 \leqslant \delta_{k,i} \leqslant \delta_k$ i $P(|\Delta A_{\tau_{k,i}+\delta_{k,i}}| + |\Delta H_{\tau_{k,i}+\delta_{k,i}}| + |\Delta X_{\tau_{k,i}+\delta_{k,i}}| = 0) = 1$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \in \mathbb{N}$. Wówczas z faktu 1.8 otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}&(H^n, A^n, X^n, A^{n,(k)}, \tau^n_{k,1}, A^n_{\tau^n_{k,1}}, \tau^n_{k,2}, A^n_{\tau^n_{k,2}}, \dots)\\ &\qquad \xrightarrow{\mathcal{D}} (H, A, X, A^{(k)}, \tau_{k,1}, A_{\tau_{k,1}}, \tau_{k,2}, A_{\tau_{k,2}}, \dots) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d'+3d}) \times R^\infty. \qquad (3.7)\end{aligned}$$

Ponieważ $\int_0^t X_{s-} dA^{(k)}_s = \sum_{j \leqslant i} X_{\tau_{k,j}-}(A_{\tau_{k,j}} - A_{\tau_{k,j-1}})$, $t \in [\tau_{k,i}, \tau_{k,i+1})$, więc z (3.7) wynika, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$

$$\Big(H^n, X^n, A^n, \int_0^\cdot X^n_{s-}\, dA^{n,(k)}_s\Big) \xrightarrow{\mathcal{D}} \Big(H, X, A, \int_0^\cdot X_{s-}\, dA^{(k)}_s\Big) \ \ w\ \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d'+2d+1}). \qquad (3.8)$$

Podobnie jak dowodzie twierdzenia 3.1 pokazujemy, że zachodzi (3.6) oraz że

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{t \leqslant T} \Big| \int_0^t X_{s-} d(A - A^{(k)})_s \Big| = 0 \quad P\text{-p.w.},\ T \in \mathbb{R}^+.$$

Stąd oraz z (3.8) uzyskujemy tezę. □

3.2 Mocne rozwiązania srr z barierami względem procesów o skończonej p-wariacji

Ustalmy $p \in (1,2)$ oraz przestrzeń probabilistyczną z filtracją $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}, P)$. Niech B będzie $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptowanym procesem o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ o lokalnie skończonej wariacji oraz A, L, U będą $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptowanymi procesami o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ takimi, że $L \leqslant U$ oraz $P(V_p(A)_T < \infty) = 1$ dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$. Rozważmy następujące stochastyczne równanie różniczkowe z barierami:

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_{s-})\, dB_s + \int_0^t g(s, X_{s-})\, dA_s + K_t, \quad t \in \mathbb{R}^+, \qquad (3.9)$$

gdzie X_0 jest $\mathcal{F}_0$-mierzalną, d-wymiarową zmienną losową, $L_0 \leqslant X_0 \leqslant U_0$, $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{M}^d$, a całka względem procesu A jest zdefiniowana jako uogólniona całka Riemanna-Stieltjesa po trajektoriach.

Definicja 3.3. Powiemy, że para $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptowanych procesów stochastycznych (X, K) określonych na $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}, P)$ o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$ takich, że $P(V_p(X)_T < \infty) = 1$, $T \in \mathbb{R}^+$:

(i) jest *mocnym rozwiązaniem* równania (3.9) jeśli P-p.w. $(X, K) = ESP(Y, L, U)$, gdzie

$$Y_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_{s-})\, dB_s + \int_0^t g(s, X_{s-})\, dA_s, \quad t \in \mathbb{R}^+;$$

(ii) jest *jednoznacznym mocnym rozwiązaniem* równania (3.9), jeśli (X, K) jest mocnym rozwiązaniem oraz dla każdego innego mocnego rozwiązania (X', K') równania (3.9) zachodzi: $P(X_t = X'_t,\ t \in \mathbb{R}^+) = 1$ oraz $P(K_t = K'_t,\ t \in \mathbb{R}^+) = 1$.

Uwaga 3.4. 1. Podobnie jak w przypadku deterministycznym będziemy zakładać dodatkowo, że istnieje $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptowany proces o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ taki, że $L \leqslant H \leqslant U$ oraz $P(V_p(H)_T < \infty) = 1$ dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$. Zauważmy, że jeżeli dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$

$$\inf_{t \leqslant T}(U_t - L_t) > 0 \quad P\text{-p.w.}, \tag{3.10}$$

to istnieje proces H o żądanych własnościach. Aby tego dowieść, połóżmy $\tau_0 = 0$, $H_0 = (U_0 + L_0)/2$, $\tau_k = \inf\{t > \tau_{k-1}\,;\, U_t < H_{\tau_{k-1}} \,\mathrm{lub}\, \mathrm{L_t > H_{\tau_{k-1}}}\}$, $H_{\tau_k} = (U_{\tau_k} + L_{\tau_k})/2$, $k \in \mathbb{N}$. Ponieważ procesy U i L mają P-p.w. càdlàg trajektorie, więc $M_T = \inf\{k\,;\, \tau_k \geqslant T\} < \infty$ P-p.w. dla wszystkich $T \in \mathbb{R}^+$. Istotnie, jeżeli $P(M_T = \infty) > 0$, to na zbiorze $M_T = \infty$ istnieje skończona granica $\tau = \lim_k \tau_k$. Wówczas na tym samym zbiorze

$$H_{\tau_k} \longrightarrow (U_{\tau-} + L_{\tau-})/2. \tag{3.11}$$

Z drugiej strony na zbiorze $M_T = \infty$ zachodzi oszacowanie: $|H_{\tau_k} - H_{\tau_{k-1}}| \geqslant \inf_{t \leqslant T}(U_t - L_t)/2 > 0$, co przeczy (3.11). W konsekwencji proces dany wzorem $H_t = H_{\tau_{k-1}}$ dla $t \in [\tau_{k-1}, \tau_k)$, $k \in \mathbb{N}$ jest $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptowanym procesem o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ takim, że $L \leqslant H \leqslant U$ oraz $P(V_1(H)_T < \infty) = 1$, $T \in \mathbb{R}^+$.

2. Jeżeli procesy Y, L, U o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ są $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptowane, to rozwiązanie problemu Skorochoda $(X, K) = ESP(Y, L, U)$ jest również $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptowane. Istotnie, niech $(X^n, K^n) = ESP(Y^n, L^n, U^n)$, gdzie $Y^n_t = Y_{k/n}$, $L^n_t = L_{k/n}$, $U^n_t = U_{k/n}$ dla $t \in [k/n, (k+1)/n)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$. Wówczas korzystając z twierdzenia 1.6, mamy: $(Y^n, L^n, U^n) \to (Y, L, U)$ P-p.w. w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{3d})$. W konsekwencji, mając na uwadze wniosek 2.5, otrzymujemy

$$(X^n,\, K^n) = ESP(Y^n,\, L^n,\, U^n) \longrightarrow ESP(Y,\, L,\, U) = (X,\, K) \quad P\text{-p.w. w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d}).$$

Z uwagi 2.3.3 wnioskujemy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ proces (X^n, K^n) jest $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptowany. Zatem proces graniczny (X, K) jest również $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptowany.

Twierdzenie 3.5. *Załóżmy* (H1) *oraz* (H2) *oraz dodatkowo, że istnieje* $\{\mathcal{F}_t\}$*-adaptowany proces* H *o trajektoriach w* $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ *i lokalnie skończonej* p*-wariacji, spełniający warunek:* $L \leqslant H \leqslant U$. *Wtedy równanie* (3.9) *posiada jednoznaczne mocne rozwiązanie* (X, K). *Ponadto jeżeli zdefiniujemy* $\{(X^n, K^n)\}$ *jako ciąg iteracji Picarda dla* (3.9), *postaci:* $(X^0, K^0) = ESP(X_0, L, U)$ *oraz* $(X^n, K^n) = ESP(Y^n, L, U)$, *gdzie* $Y^n = X_0 + \int_0^\cdot f(s, X^{n-1}_s)\, dB_s + \int_0^\cdot g(s, X^{n-1}_s)\, dA_s$, $n \in \mathbb{N}$, *to*

$$\bar{V}_p(X^n - X)_T \longrightarrow 0,\ \bar{V}_p(K^n - K)_T \longrightarrow 0 \quad P\text{-}p.w.,\ T \in \mathbb{R}^+.$$

Dowód. Z twierdzenia 2.18 wynika, że dla P-prawie wszystkich $\omega \in \Omega$ istnieje jednoznaczne rozwiązanie $(X(\omega), K(\omega))$ oraz dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$

$$\bar{V}_p(X^n(\omega) - X(\omega))_T \longrightarrow 0,\ \bar{V}_p(K^n(\omega) - K(\omega))_T \longrightarrow 0.$$

Ponieważ na mocy uwagi 3.4.2 dla każdego $n \in \mathbb{N}$ proces (X^n, K^n) jest $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptowany, proces graniczny (X, K) jest również $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptowany, więc dowód twierdzenia został zakończony. $\square$

Wniosek 3.6. *Niech funkcje f, g spełniają* (H1), (H2) *oraz f będzie funkcją ciągłą. Załóżmy dodatkowo, że istnieje $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptowany proces H o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ i lokalnie skończonej p-wariacji, spełniający warunek: $L \leqslant H \leqslant U$. Wówczas*

(i) *jeżeli dla każdego $n \in \mathbb{N}$ (X^n, K^n) dany jest wzorem:*

$$(X^n_t, K^n_t) = (X^n_{t_{n,k}}, K^n_{t_{n,k}}), \quad t \in [t_{n,k}, t_{n,k+1}), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

przy czym $X^n_0 = X_0$,

$$\begin{cases} Y^n_{t_{n,k+1}} &= Y^n_{t_{n,k}} + f(t_{n,k}, X^n_{t_{n,k}})(B_{t_{n,k+1}} - B_{t_{n,k}}) + g(t_{n,k}, X^n_{t_{n,k}})(A_{t_{n,k+1}} - A_{t_{n,k}}), \\ X^n_{t_{n,k+1}} &= \max\{\min\{X^n_{t_{n,k}} + (Y^n_{t_{n,k+1}} - Y^n_{t_{n,k}}), U_{t_{n,k+1}}\}, L_{t_{n,k+1}}\}, \\ K^n_{t_{n,k+1}} &= K^n_{t_{n,k}} + (X^n_{t_{n,k+1}} - X^n_{t_{n,k}}) - (Y^n_{t_{n,k+1}} - Y^n_{t_{n,k}}) \end{cases} \tag{3.12}$$

oraz ciąg podziałów $\pi_n = \{0 = t_{n,0} < t_{n,1} < t_{n,2} < \ldots\}$ jest taki, że $\lim_{k\to\infty} t_{n,k} = \infty$, $n \in \mathbb{N}$ i $\mathrm{diam}(\pi_n) \to 0$, to

$$(X^n,\, K^n) \longrightarrow (X,\, K) \quad P\text{-}p.w. \text{ w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d}),$$

gdzie (X, K) jest jednoznacznym mocnym rozwiązaniem (3.9);

(ii) *jeżeli we wzorze* (3.12) *zastąpimy deterministyczny ciąg podziałów $\{0 = t_{n,0} < t_{n,1} < t_{n,2} < \ldots\}$ losowym ciągiem postaci: $\tau_{n,0} = 0$,*

$$\tau_{n,k} = \inf\{t > \tau_{n,k-1}; \max\{|\Delta B_t|, |\Delta A_t|, |\Delta L_t|, |\Delta U_t|\} > 1/n\} \wedge (\tau_{n,k-1} + 1/n),$$

n, $k \in \mathbb{N}$, to dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$

$$\sup_{t\leqslant T}(|X^n_t - X_t| + |K^n_t - K_t|) \longrightarrow 0 \quad P\text{-}p.w.$$

Dowód. Wynika łatwo z wniosków 2.27 i 2.29. $\square$

Wniosek 3.7. *Załóżmy* (H1), (H2) *oraz dodatkowo ciągłość funkcji f. Niech $\{X^n_0\}$ będzie ciągiem $\mathcal{F}^n_0$-mierzalnych zmiennych losowych, $\{B^n\}$ będzie ciągiem $\{\mathcal{F}^n_t\}$-adaptowanych procesów o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $\{A^n\}$, $\{L^n\}$, $\{U^n\}$, $\{H^n\}$ będą ciągami $\{\mathcal{F}^n_t\}$-adaptowanych procesów o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ takimi, że $L^n_0 \leqslant X^n_0 \leqslant U^n_0$, $L^n \leqslant H^n \leqslant U^n$, $n \in \mathbb{N}$ oraz dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ ciągi zmiennych losowych $\{V_1(B^n)_T\}$, $\{V_p(A^n)_T\}$, $\{\bar{V}_p(H^n)_T\}$ są ograniczone według prawdopodobieństwa. Niech $\{(X^n, K^n)\}$ będzie ciągiem rozwiązań równań postaci*

$$X^n_t = X^n_0 + \int_0^t f(s, X^n_{s-})\, dB^n_s + \int_0^t g(s, X^n_{s-})\, dA^n_s + K^n, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{3.13}$$

tzn. $(X^n, K^n) = ESP(X^n_0 + \int_0^{\cdot} f(s, X^n_{s-})\, dB^n_s + \int_0^{\cdot} g(s, X^n_{s-})\, dA^n_s, L^n, U^n)$, $n \in \mathbb{N}$.

(i) *Jeżeli* $(X_0^n,\, B^n,\, A^n,\, L^n,\, U^n) \xrightarrow{\mathcal{P}} (X_0,\, B,\, A,\, L,\, U)$ *w* $\mathbb{R}\times\mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^{3d+1})$, *to*

$$(X^n, K^n) \xrightarrow{\quad\mathcal{P}\quad} (X, K) \quad w\ \mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^{2d}),$$

gdzie (X,K) *jest jednoznacznym mocnym rozwiązaniem* (3.9).

(ii) *Jeżeli* $X_0^n \xrightarrow{\mathcal{P}} X_0$ *oraz*

$$\sup_{t\leqslant T}(|B_t^n - B_t| + |A_t^n - A_t| + |L_t^n - L_t| + |U_t^n - U_t|) \xrightarrow{\mathcal{P}} 0,\ T\in\mathbb{R}^+,$$

to

$$\sup_{t\leqslant T}(|X_t^n - X_t| + |K_t^n - K_t|) \xrightarrow{\quad\mathcal{P}\quad} 0, \quad T\in\mathbb{R}^+.$$

Dowód. (i) Z faktu 1.36 wynika, że $P(V_1(B)_T<\infty)=1$ oraz $P(V_p(A)_T<\infty)=1$, $T\in\mathbb{R}^+$. Mając na uwadze twierdzenie Riesza, bez zmniejszenia ogólności rozważań, możemy założyć, że

$$(X_0^n,\, B^n,\, A^n,\, L^n,\, U^n) \longrightarrow (X_0,\, B,\, A,\, L,\, U) \quad P\text{-p.w. w } \mathbb{R}\times\mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^{3d+1}).$$

Ponieważ $\sup_n V_1(B^n)_T<\infty$ oraz $\sup_n V_p(A^n)_T<\infty$ P-p.w., więc z twierdzenia 2.23 wynika zbieżność:

$$(X^n, K^n) \longrightarrow (X, K) \quad P\text{-p.w. } w\ \mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^{2d}),$$

co kończy dowód (i).

(ii) Podobnie jak w (i) możemy założyć, że dla każdego $T\in\mathbb{R}^+$

$$\sup_{t\leqslant T}(|B_t^n - B_t| + |A_t^n - A_t| + |L_t^n - L_t| + |U_t^n - U_t|) \longrightarrow 0 \quad P\text{-p.w.}$$

Korzystając z wniosku 2.25, otrzymujemy $\sup_{t\leqslant T}(|X_t^n - X_t| + |K_t^n - K_t|)\to 0$ P-p.w., tym samym kończąc dowód (ii). ☐

3.3 Słabe rozwiązania srr z barierami względem procesów o skończonej p-wariacji

Definicja 3.8. Powiemy, że równanie (3.9):

(i) posiada *słabe rozwiązanie*, jeśli istnieją: przestrzeń $(\bar\Omega, \bar{\mathcal{F}}, \{\bar{\mathcal{F}}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}, \bar P)$, $\bar{\mathcal{F}}_0$-mierzalna zmienna losowa $\bar X_0$ i $\{\bar{\mathcal{F}}_t\}$-adaptowane procesy $\{\bar B_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, $\{\bar A_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, $\{\bar L_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, $\{\bar U_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, $\{\bar X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, $\{\bar K_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ zdefiniowane na $(\bar\Omega, \bar{\mathcal{F}}, \{\bar{\mathcal{F}}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}, \bar P)$ takie, że $\mathcal{L}(\bar X_0, \bar B, \bar A, \bar L, \bar U) = \mathcal{L}(X_0, B, A, L, U)$, $\bar P(\, V_p(\bar X)_T<\infty\,)=1$, $T\in\mathbb{R}^+$ oraz $(\bar X,\bar K)=ESP(\bar Y,\bar L,\bar U)$, gdzie

$$\bar Y_t = \bar X_0 + \int_0^t f(s,\bar X_{s-})\, d\bar B_s + \int_0^t g(s,\bar X_{s-})\, d\bar A_s, \quad t\in\mathbb{R}^+;$$

(ii) posiada *własność jednoznaczności trajektorii*, jeżeli dla każdej innej $\{\bar{\mathcal{F}}_t\}$-adaptowanej pary procesów $(\bar{X}', \bar{K}')$ zdefiniowanej na tej samej przestrzeni $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \{\bar{\mathcal{F}}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}, \bar{P})$ o własności $\bar{P}(V_p(\bar{X}')_T < \infty) = 1$ i $(\bar{X}', \bar{K}') = ESP(\bar{Y}', \bar{L}, \bar{U})$, gdzie

$$\bar{Y}'_t = \bar{X}_0 + \int_0^t f(s, \bar{X}'_{s-})\, d\bar{B}_s + \int_0^t g(s, \bar{X}'_{s-})\, d\bar{A}_s, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

zachodzi: $\bar{P}(\bar{X}_t = \bar{X}'_t,\, t \in \mathbb{R}^+) = 1$ oraz $\bar{P}(\bar{K}_t = \bar{K}'_t,\, t \in \mathbb{R}^+) = 1$;

(iii) posiada *jednoznaczne słabe rozwiązanie*, jeżeli dowolnych dwóch słabych rozwiązań $(\bar{X}, \bar{K})$, $(\bar{X}', \bar{K}')$ (możliwe, że zdefiniowanych na różnych przestrzeniach probabilistycznych) zachodzi $\mathcal{L}(\bar{X}, \bar{K}) = \mathcal{L}(\bar{X}', \bar{K}')$.

Fakt 3.9. *Załóżmy* (H1) oraz (H2). *Wówczas równanie* (3.9) *posiada własność jednoznaczności trajektorii.*

Dowód. Wystarczy dla $\bar{P}$-p.w. $\bar{\omega} \in \bar{\Omega}$ zastosować argumenty z dowodu twierdzenia 2.18. □

Ustalmy $p \in (1, 2)$. Niech $\{X_0^n\}$ będzie ciągiem $\mathcal{F}_0^n$-mierzalnych zmiennych losowych, $\{B^n\}$ będzie ciągiem $\{\mathcal{F}_t^n\}$-adaptowanych procesów o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, a $\{A^n\}$, $\{L^n\}$, $\{U^n\}$, $\{H^n\}$ będą ciągami $\{\mathcal{F}_t^n\}$-adaptowanych procesów o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ takich, że $L_0^n \leqslant X_0^n \leqslant U_0^n$, $L^n \leqslant H^n \leqslant U^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie 3.10. *Załóżmy* (H1) *oraz dodatkowo, że f jest ciągła. Jeżeli $\{(X^n, K^n)\}$ jest ciągiem rozwiązań równań postaci* (3.13)*, ciągi $\{V_1(B^n)_T\}$, $\{V_p(A^n)_T\}$, $\{\bar{V}_p(H^n)_T\}$ są ograniczone według prawdopodobieństwa dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ oraz*

$$(\, X_0^n,\, B^n,\, A^n,\, L^n,\, U^n\,) \xrightarrow{\mathcal{D}} (\, X_0,\, B,\, A,\, L,\, U\,) \quad w\ \mathbb{R} \times \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{3d+1}),$$

to ciąg $\{(X^n, K^n)\}$ jest jednostajnie jędrny w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$ i każdy jego punkt skupienia jest słabym rozwiązaniem równania (3.9)*. Jeśli dodatkowo równanie* (3.9) *posiada własność jednoznaczności trajektorii, to $(X^n, K^n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X, K)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$, gdzie (X, K) jest jednoznacznym słabym rozwiązaniem* (3.9)*.*

Dowód. Niech

$$\tau_n^u = \inf\{t\,;\, \max\{V_1(B^n)_t, V_p(A^n)_t, V_p(H^n)_t\} > u\}, \quad n, u \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ $\{V_1(B^n)_T\}$, $\{V_p(A^n)_T\}$ i $\{V_p(H^n)_T\}$ są ograniczone według prawdopodobieństwa, więc

$$\lim_{u\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P(\tau_n^u \leqslant T) = 0, \quad T \in \mathbb{R}^+. \tag{3.14}$$

Ponadto na zbiorze $T < \tau_n^u$ zachodzi oszacowanie:

$$\max\{V_1(B^n)_T, V_p(A^n)_T, V_p(H^n)_T\} \leqslant u.$$

Stąd oraz z (2.42) wynika, że dla każdego $M > 0$ mamy

$$P(\bar{V}_p(X^n)_T > M) \leqslant P(\tau_n^u \leqslant T) + P(D^n \geqslant M), \tag{3.15}$$

gdzie $D^n = D(d, p, \alpha, \beta, X_0^n, C_g^T, C_f, u)$, a D jest taka jak w (2.42). Ponieważ $\{D^n\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa, (3.15) pociąga, że również $\{\bar{V}_p(X^n)_T\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa.

Dalsza część dowodu przebiega analogicznie do dowodu twierdzenia 2.23. Najpierw zauważamy, że dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ oraz $q = p/\alpha \vee 1/\beta$ ciąg zmiennych losowych $\{\bar{V}_q(g(\cdot, X^n))_T\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa. Następnie rozważamy ciąg $\{f^k\}$ funkcji lipschitzowskich zbieżny jednostajnie na kompaktach do f. Wówczas dla dowolnych $k \in \mathbb{N}$, $T \in \mathbb{R}^+$ mamy, że ciąg $\{\bar{V}_p(f^k(\cdot, X^n))_T\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa oraz dla każdego $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P\left(\sup_{t\leqslant T} |f^k(t, X_t^n) - f(t, X_t^n)| > \varepsilon\right) = 0, \quad T \in \mathbb{R}^+. \tag{3.16}$$

Z twierdzenia 3.1 i (3.16) otrzymujemy jednostajną jędrność ciągu $\{(Y^n, B^n, A^n, L^n, U^n)\}$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{4d+1})$, gdzie

$$Y^n = X_0^n + \int_0^\cdot f(s, X_{s-}^n)\, dB_s^n + \int_0^\cdot g(s, X_{s-}^n)\, dA_s^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Kładąc $(X^n, K^n) = ESP(Y^n, L^n, U^n)$ oraz korzystając z twierdzenia 1.40 i wniosku 2.5, uzyskujemy, że ciąg $\{(X^n, K^n, B^n, A^n, L^n, U^n)\}$ jest jednostajnie jędrny w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{5d+1})$.

Załóżmy, że $(X^n, K^n, B^n, A^n, L^n, U^n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X, K, B, A, L, U)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{5d+1})$. Stosując twierdzenie 3.2, otrzymujemy zbieżność: $(Y^n, L^n, U^n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (Y, L, U)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{3d})$, gdzie $Y = X_0 + \int_0^\cdot f(s, X_{s-})\, dB_s + \int_0^\cdot g(s, X_{s-})\, dA_s$. Korzystając ponownie z twierdzenia 1.40 i wniosku 2.5, dostajemy

$$(X^n,\, K^n) = ESP(Y^n,\, L^n,\, U^n) \xrightarrow{\ \mathcal{D}\ } ESP(Y,\, L,\, U) = (X,\, K) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d}).$$

Na mocy faktu 1.36 $P(V_p(X)_T < \infty) = 1$ dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$. W konsekwencji (X, K) jest słabym rozwiązaniem równania (3.9).

Korzystając z podobnych metod co w twierdzeniu Yamady-Watanabe (patrz np. [49, Theorem 37.6] lub [86]), możemy pokazać, że dla równania (3.9) własność jednoznaczności trajektorii implikuje słabą jednoznaczność rozwiązań i tym samym zakończyć dowód twierdzenia. □

Wniosek 3.11. *Niech funkcje f, g spełniają* (H1) *oraz f będzie funkcją ciągłą. Załóżmy dodatkowo, że istnieje $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptowany proces H o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ i lokalnie skończonej p-wariacji, spełniający warunek: $L \leqslant H \leqslant U$. Wówczas ciąg $\{(X^n, K^n)\}$ zdefiniowany w* (3.12) *jest jednostajnie jędrny oraz każdy jego punkt skupienia jest słabym rozwiązaniem równania* (3.9)*. W konsekwencji równanie* (3.9) *posiada słabe rozwiązanie.*

Dowód. Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 2.26 można zauważyć, że

$$\begin{cases} (X^n, K^n) = ESP(Y^n, L^n, U^n), \\ \text{gdzie } Y_t^n = X_0 + \int_0^t f(\varrho_{s-}^n, X_{s-}^n)\, dB_s^n + \int_0^t g(\varrho_{s-}^n, X_{s-}^n)\, dA_s^n, \quad t \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \tag{3.17}$$

oraz $B^n_t = B_{t_{n,k}}$, $A^n_t = A_{t_{n,k}}$, $L^n_t = L_{t_{n,k}}$, $U^n_t = U_{t_{n,k}}$ $\varrho^n_t = t_{n,k}$, $t \in [t_{n,k}, t_{n,k+1})$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$. Niech $H^n_t = H_{t_{n,k}}$ dla $t \in [t_{n,k}, t_{n,k+1})$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ

$$V_1(B^n)_T \leqslant V_1(B)_T,\ V_p(A^n)_T \leqslant V_p(A)_T,\ V_p(H^n)_T \leqslant V_p(H)_T, \quad n \in \mathbb{N},\ T \in \mathbb{R}^+,$$

więc stosując argumenty z dowodu twierdzenia 3.10, możemy pokazać, że ciąg $\{\bar{V}_p(X^n)_T\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa.

Zdefiniujmy:

$$\begin{cases} (\,\bar{X}^n,\ \bar{K}^n\,) = ESP(\,\bar{Y}^n,\ L^n,\ U^n\,), \\ \text{gdzie } \bar{Y}^n_t = X_0 + \int_0^t f(s, X^n_{s-})\, dB^n_s + \int_0^t g(s, X^n_{s-})\, dA^n_s, \quad n \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Biorąc pod uwagę lemat 2.4, (2.50) i (2.51), możemy wywnioskować, że

$$\sup_{t \leqslant T} |X^n_t - \bar{X}^n_t| \xrightarrow{\ \mathcal{P}\ } 0 \text{ oraz } \sup_{t \leqslant T} |K^n_t - \bar{K}^n_t| \xrightarrow{\ \mathcal{P}\ } 0, \quad T \in \mathbb{R}^+. \tag{3.18}$$

Na mocy twierdzenia 1.6 $(X^n_0, B^n, A^n, L^n, U^n) \to (X_0, B, A, L, U)$ P-p.w. w $\mathbb{R} \times \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{3d+1})$, więc z twierdzenia 3.1 uzyskujemy, że ciąg $\{(\bar{Y}^n, B^n, A^n, L^n, U^n)\}$ jest jednostajnie jędrny w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{4d+1})$. W konsekwencji stosując twierdzenie 1.40 i wniosek 2.5, otrzymujemy jednostajną jędrność ciągu $\{(\bar{X}^n, \bar{K}^n, B^n, A^n, L^n, U^n)\}$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{5d+1})$. Stąd oraz z (3.18) wynika, że $\{(X^n, K^n, B^n, A^n, L^n, U^n)\}$ jest jednostajnie jędrny w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{5d+1})$.

Załóżmy, że $(X^n, K^n, B^n, A^n, L^n, U^n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X, K, B, A, L, U)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{5d+1})$. Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 3.10 stosując twierdzenie 3.2, dostajemy

$$(\bar{Y}^n, L^n, U^n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (Y, L, U) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{3d}),$$

gdzie $Y = X_0 + \int_0^{\cdot} f(s, X_{s-})\, dB_s + \int_0^{\cdot} g(s, X_{s-})\, dA_s$. Zatem z twierdzenia 1.40 i wniosku 2.5 otrzymujemy zbieżność:

$$(\bar{X}^n, \bar{K}^n) = ESP(\bar{Y}^n, L^n, U^n) \xrightarrow{\ \mathcal{D}\ } ESP(Y, L, U) = (X, K) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d}),$$

co razem z (3.18) pociąga, że

$$(X^n, K^n) = ESP(Y^n, L^n, U^n) \xrightarrow{\ \mathcal{D}\ } ESP(Y, L, U) = (X, K) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d}).$$

Z kolei z faktu 1.36 wynika, że $P(V_p(X)_T < \infty) = 1$ dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$, więc (X, K) jest słabym rozwiązaniem równania (3.9). □

Uwaga 3.12. Podobnie jak w rozdziale 2. wykorzystując wnioski 2.10 i 2.11 zamiast wniosków 2.8, 2.9 uzyskujemy odpowiednie rezultaty dla stochastycznych równań różniczkowych z jedną barierą i równań bez barier.

Rozdział 4

Srr z barierami względem p-semimartyngałów

4.1 Zbieżność całek stochastycznych względem p-semimartyngałów

Definicja 4.1 (Norvaiša [58]). Niech $p \in (1,2)$. Powiemy, że proces X o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ jest *p-semimartyngałem* względem filtracji $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, jeśli istnieją: $\mathcal{F}_0$-mierzalna zmienna losowa X_0, $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptowany proces A o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ i semimartyngał Z względem $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ takie, że $Z_0 = A_0 = 0$, $P(V_p(A)_T < \infty) = 1$, $T \in \mathbb{R}^+$ oraz

$$X = X_0 + Z + A \quad P\text{-p.w.} \tag{4.1}$$

Niech X będzie p-semimaryngałem o rozkładzie (4.1) oraz H będzie adaptowanym procesem o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ o lokalnie skończonej q-wariacji. Naturalnym jest przyjąć jako całkę względem X sumę:

$$\int_0^t H_{s-}\,dX_s = \int_0^t H_{s-}\,dZ_s + \int_0^t H_{s-}\,dA_s, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

gdzie całka względem Z jest dobrze znaną całką względem semimartyngału, a całka względem A jest całką Riemmana-Stieltiesa po trajektoriach. Poniższe twierdzenie opisuje, przy jakich warunkach powyższa całka jest poprawnie określona.

Twierdzenie 4.2 ([58, Chapter 4, Theorem 12]). *Jeżeli X jest p-semimartyngałem względem $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ dla pewnego $p \in (1,2)$ oraz H jest procesem $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptowanym o lokalnie skończonej q-wariacji dla $q > 0$ takiego, że $1/p + 1/q > 1$, to całka*

$$\int_0^t H_{s-}dX_s, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

jest dobrze określona. Ponadto proces $\{\int_0^t H_{s-}dX_s\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ jest p-semimartyngałem względem $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$.

Wniosek 4.3. *Jeżeli X, Y są p-semimartyngałami względem $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ dla pewnego $p \in (1,2)$, to istnieje całka $\int_0^\cdot Y_{s-}\,dX_s$.*

Dowód. Wystarczy zauważyć, że na mocy faktu 1.41 istnieje $q > 2$ takie, że $P(V_q(Y)_T < \infty) = 1$, $T \in \mathbb{R}^+$ oraz $1/p + 1/q > 1$, a następnie skorzystać z twierdzenia 4.2. □

Twierdzenie 4.4. *Niech $\{Z^n\}$ będzie ciągiem semimartyngałów spełniającym warunek (UT), a $\{X^n\}$ ciągiem procesów $\{\mathcal{F}_t^n\}$-adaptowanych takim, że dla pewnego $p \geqslant 1$ ciąg $\{\bar{V}_p(X^n)_T\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa, $T \in \mathbb{R}^+$. Jeżeli $\{H^n\}$ jest ciągiem procesów takim, że ciąg $\{(H^n, Z^n)\}$ jest jednostajnie jędrny w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d'+d})$, to*

$$\left\{\left(H^n,\, Z^n,\, \int_0^\cdot X^n_{s-}\,dZ^n_s\right)\right\} \quad \textit{jest jednostajnie jędrny w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d'+d+1}).$$

Dowód. Ustalmy $T \in \mathbb{R}^+$ oraz $\varepsilon > 0$. Niech $\{\{Z^{n,(k)}\}\}$, $\{Z^{(k)}\}$ będą ciągami procesów zdefiniowanymi analogicznie do ciągów $\{\{A^{n,(k)}\}\}$, $\{A^{(k)}\}$ z dowodu twierdzenia 3.1. Powtarzając argumenty z dowodu twierdzenia 3.1 wnioskujemy, że

$$\left\{\left(H^n,\, Z^n,\, \int_0^\cdot X^n_{s-}\,dZ^{n,(k)}_s\right)\right\} \quad \text{jest jednostajnie jędrny w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d'+d+1}) \tag{4.2}$$

oraz

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P(\sup_{t\leqslant T} |Z^{n,(k)}_t - Z^n_t| \geqslant \varepsilon) = 0. \tag{4.3}$$

Aby zakończyć dowód, wystarczy pokazać, że

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P\left(\sup_{t\leqslant T}\left|\int_0^t X^n_{s-}\,d(Z^{n,(k)} - Z^n)_s\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0, \quad T \in \mathbb{R}^+. \tag{4.4}$$

W tym celu rozważmy dla każdego n, $k \in \mathbb{N}$ i $a > 0$ rozkłady Z^n, $Z^{n,(k)}$ postaci

$$Z^n_t = Z^n_0 + J^{n,a}_t + M^{n,a}_t + D^{n,a}_t, \quad Z^{n,(k)}_t = Z^{n,(k)}_0 + J^{n,(k),a}_t + M^{n,(k),a}_t + D^{n,(k),a}_t, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

(patrz (1.17)). Pokażemy, że istnieje $a > 0$ dla którego

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P(\sup_{t\leqslant T} |J^{n,(k),a}_t - J^{n,a}_t| + \sup_{t\leqslant T} |D^{n,(k),a}_t - D^{n,a}_t| + \langle M^{n,(k),a} - M^{n,a}\rangle_T \geqslant \varepsilon) = 0. \tag{4.5}$$

Ponieważ dla każdego $k \in \mathbb{N}$ ciąg $\{Z^{n,(k)} - Z^n\}$ spełnia (UT) oraz na mocy wzoru na całkowanie przez części

$$[Z^{n,(k)} - Z^n]_t = (Z^{n,(k)}_t - Z^n_t)^2 - 2\int_0^t (Z^{n,(k)}_{s-} - Z^n_{s-})\,d(Z^{n,(k)} - Z^n)_s, \quad t \in \mathbb{R}^+,\ n,k \in \mathbb{N},$$

więc korzystając z (4.3) i twierdzenia 1.37, otrzymujemy zbieżność:

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P([Z^{n,(k)} - Z^n]_T \geqslant \varepsilon) = 0. \tag{4.6}$$

Wybierzmy takie $a > 0$, aby $P(\Delta Z_t = a, t \in \mathbb{R}^+) = 0$ (wiadomo, że $P(\Delta Z_t = a, t \in \mathbb{R}^+) > 0$ dla co najwyżej przeliczalnie wielu $a > 0$). Wówczas można sprawdzić, że

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P(\sup_{t\leqslant T} |J_t^{n,(k),a} - J_t^{n,a}| \geqslant \varepsilon) = 0,$$

co razem z (4.6) pociąga zbieżność:

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P([M^{n,(k),a} - M^{n,a} + D^{n,(k),a} - D^{n,a}]_T \geqslant \varepsilon) = 0.$$

Ponieważ $D^{n,(k),a} - D^{n,a}$ jest prognozowalny, więc $E[M^{n,(k),a} - M^{n,a}]_T \leqslant E[M^{n,(k),a} - M^{n,a} + D^{n,(k),a} - D^{n,a}]_T$ (patrz np. [62, str. 137]). Stąd oraz z nierówności Lenglarta-Rebolledo (patrz np. [63, Lemma 3]) mamy, że dla każdego $\eta > 0$

$$\begin{aligned} P([M^{n,(k),a} - M^{n,a}]_T \geqslant \varepsilon) \leqslant \varepsilon^{-1} E[[M^{n,(k),a} - M^{n,a} + D^{n,(k),a} - D^{n,a}]_T \wedge (\eta + 4a^2)] \\ + P([M^{n,(k),a} - M^{n,a} + D^{n,(k),a} - D^{n,a}]_T > \eta). \end{aligned}$$

Zatem $\lim_k \limsup_n P([M^{n,(k),a} - M^{n,a}]_T \geqslant \varepsilon) = 0$ i w konsekwencji

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P(\langle M^{n,(k),a} - M^{n,a}\rangle_T \geqslant \varepsilon) = 0.$$

Biorąc pod uwagę fakt, że $\sup_{t\leqslant T} |D_t^{n,(k),a} - D_t^{n,a}| \leqslant \sup_{t\leqslant T} |Z_t^{n,(k)} - Z_t^n| + \sup_{t\leqslant T} |J_t^{n,(k),a} + J_t^{n,a}| + \sup_{t\leqslant T} |M_t^{n,(k),a} - M_t^{n,a}|$, wnioskujemy (4.5).

Zauważmy dalej, że

$$\begin{aligned} &\sup_{t\leqslant T} \left| \int_0^t X_{s-}^n \, d(Z^{n,(k)} - Z^n)_s \right| \\ &\quad \leqslant \sup_{t\leqslant T} \left| \int_0^t X_{s-}^n \, d(J^{n,(k),a} - J^{n,a})_s \right| + \sup_{t\leqslant T} \left| \int_0^t X_{s-}^n \, d(D^{n,(k),a} - D^{n,a})_s \right| \\ &\quad\quad + \sup_{t\leqslant T} \left| \int_0^t X_{s-}^n \, d(M^{n,(k),a} - M^{n,a})_s \right| \\ &\quad = I_1^{n,k} + I_2^{n,k} + I_3^{n,k}. \end{aligned}$$

Stosując (4.5) oraz argumenty z (3.5), otrzymujemy

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P(I_1^{n,k} + I_2^{n,k} \geqslant \varepsilon) = 0. \tag{4.7}$$

Z drugiej strony korzystając z nierówności Dooba oraz ponownie Lenglarta-Rebolledo, uzyskujemy, że dla każdego $\eta > 0$

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{t\leqslant T} \left| \int_0^t X_{s-}^n \, d(M^{n,(k),a} - M^{n,a})_s \right| \geqslant \varepsilon \right) \leqslant 4\varepsilon^{-2} E\left(\int_0^T (X_{s-}^n)^2 \, d\langle M^{n,(k),a} - M^{n,a}\rangle_s \wedge \eta \right) \\ + P\left(\int_0^T (X_{s-}^n)^2 \, d\langle M^{n,(k),a} - M^{n,a}\rangle_s > \eta \right), \end{aligned}$$

co razem z (4.7) pociąga (4.4) i kończy tym samym dowód twierdzenia. □

Wniosek 4.5. *Niech $\{X^n\}$, $\{A^n\}$ będą ciągami procesów $\{\mathcal{F}_t^n\}$-adaptowanych o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^d)$ takimi, że dla pewnych $p,q \geqslant 1$ o własności $1/p+1/q>1$ ciągi $\{\bar{V}_q(X^n)_T\}$, $\{\bar{V}_p(A^n)_T\}$ są ograniczone według prawdopodobieństwa oraz $\{Z^n\}$ niech będzie ciągiem semimartyngałów spełniającym warunek* (UT). *Jeżeli $\{H^n\}$ jest ciągiem procesów takim, że ciąg (H^n, A^n, Z^n) jest jednostajnie jędrny w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^{d'+2d})$, to*

$$\left\{\left(H^n,\, A^n,\, Z^n,\, \int_0^{\cdot} X^n_{s-}\, dA^n_s,\, \int_0^{\cdot} X^n_{s-}\, dZ^n_s\right)\right\} \quad \text{jest jednostajnie jędrny w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^{d'+2d+2}).$$

Dowód. Wynika z twierdzeń 3.1 i 4.4. □

Wniosek 4.6. *Niech $\{X^n\}$, $\{A^n\}$, $\{Z^n\}$, $\{H^n\}$ spełniają założenia wniosku 4.5. Jeżeli dodatkowo $(H^n,\, X^n,\, A^n,\, Z^n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (H,\, X,\, A,\, Z)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^{d'+3d})$, to*

$$\begin{aligned}&\left(H^n,\, X^n,\, A^n,\, Z^n,\, \int_0^{\cdot} X^n_{s-}\, dA^n_s,\, \int_0^{\cdot} X^n_{s-}\, dZ^n_s\right)\\ &\qquad \xrightarrow{\mathcal{D}} \left(H,\, X,\, A,\, Z,\, \int_0^{\cdot} X_{s-}\, dA_s,\, \int_0^{\cdot} X_{s-}\, dZ_s\right) \quad w\ \mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^{d'+3d+2}).\end{aligned}$$

Dowód. Wynika z twierdzeń 3.2 i 1.39. □

4.2 Stabilność rozwiązań srr z barierami względem p-semimartyngałów

Ustalmy $p \in (1,2)$ oraz przestrzeń z filtracją $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+},P)$. Niech Z będzie semimartyngałem względem $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^d)$, a A, L, U będą $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptowanymi procesami o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^d)$ takimi, że $L \leqslant U$ oraz $P(V_p(A)_T < \infty) = 1$ dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$. Rozważmy równanie z barierami postaci

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s,X_{s-})\, dZ_s + \int_0^t g(s,X_{s-})\, dA_s + K_t, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{4.8}$$

gdzie X_0 jest $\mathcal{F}_0$-mierzalną, d-wymiarową zmienną losową, $L_0 \leqslant X_0 \leqslant U_0$ oraz $f: \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{M}^d$, $g: \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{M}^d$. Ponieważ w równaniu występuje całka względem semimartyngału, mając na uwadze fakt 1.41, powinniśmy oczekiwać od rozwiązań równania (4.8), aby miały lokalnie skończoną q-wariację dla pewnego $q > 2$.

Definicja 4.7. Niech $q > 2$. Powiemy, że para $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptowanych procesów stochastycznych (X,K) określonych na przestrzeni $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+},P)$ o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^{2d})$ z lokalnie skończoną q-wariacją tzn. takich, że $P(V_q(X)_T < \infty) = 1$, $T \in \mathbb{R}^+$:

(i) jest *mocnym rozwiązaniem* równania (4.8) jeśli P-p.w. $(X,K) = ESP(Y,L,U)$, gdzie

$$Y_t = X_0 + \int_0^t f(s,X_{s-})\, dZ_s + \int_0^t g(s,X_{s-})\, dA_s, \quad t \in \mathbb{R}^+;$$

(ii) jest *jednoznacznym mocnym rozwiązaniem* równania (4.8) wśród procesów o lokalnie skończonej q-wariacji, jeśli (X, K) jest mocnym rozwiązaniem oraz dla każdego innego mocnego rozwiązania (X', K') równania (4.8) zachodzi: $P(X_t = X'_t,\, t \in \mathbb{R}^+) = 1$ oraz $P(K_t = K'_t,\, t \in \mathbb{R}^+) = 1$.

Definicja 4.8. Niech $q > 2$. Powiemy, że równanie (4.8):

(i) posiada *słabe rozwiązanie* o lokalnie skończonej q-wariacji, jeśli istnieją: przestrzeń $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \{\bar{\mathcal{F}}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}, \bar{P})$, $\bar{\mathcal{F}}_0$-mierzalna zmienna losowa $\bar{X}_0$, semimartyngał $\{\bar{Z}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ względem $\{\bar{\mathcal{F}}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ oraz $\{\bar{\mathcal{F}}_t\}$-adaptowane procesy $\{\bar{A}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, $\{\bar{L}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, $\{\bar{U}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, $\{\bar{X}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, $\{\bar{K}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ zdefiniowane na przestrzeni $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \{\bar{\mathcal{F}}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}, \bar{P})$ takie, że $\mathcal{L}(\bar{X}_0, \bar{Z}, \bar{A}, \bar{L}, \bar{U}) = \mathcal{L}(X_0, Z, A, L, U)$, $\bar{P}(V_q(\bar{X})_T < \infty) = 1$, $T \in \mathbb{R}^+$ oraz $(\bar{X}, \bar{K}) = ESP(\bar{Y}, \bar{L}, \bar{U})$, gdzie

$$\bar{Y}_t = \bar{X}_0 + \int_0^t f(s, \bar{X}_{s-})\, d\bar{Z}_s + \int_0^t g(s, \bar{X}_{s-})\, d\bar{A}_s, \quad t \in \mathbb{R}^+;$$

(ii) posiada *własność jednoznaczności trajektorii* wśród procesów o lokalnie skończonej q-wariacji, jeżeli dla każdej innej $\{\bar{\mathcal{F}}_t\}$-adaptowanej pary procesów $(\bar{X}', \bar{K}')$ zdefiniowanej na tej samej przestrzeni $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \{\bar{\mathcal{F}}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}, \bar{P})$ o własności $\bar{P}(V_q(\bar{X}')_T < \infty) = 1$, $T \in \mathbb{R}^+$ i $(\bar{X}', \bar{K}') = ESP(\bar{Y}', \bar{L}, \bar{U})$, gdzie

$$\bar{Y}'_t = \bar{X}_0 + \int_0^t f(s, \bar{X}'_{s-})\, d\bar{Z}_s + \int_0^t g(s, \bar{X}'_{s-})\, d\bar{A}_s, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

zachodzi: $\bar{P}(\bar{X}_t = \bar{X}'_t,\, t \in \mathbb{R}^+) = 1$ oraz $\bar{P}(\bar{K}_t = \bar{K}'_t,\, t \in \mathbb{R}^+) = 1$;

(iii) posiada *jednoznaczne słabe rozwiązanie* wśród procesów o lokalnie skończonej q-wariacji, jeżeli dla dowolnych dwóch słabych rozwiązań $(\bar{X}, \bar{K})$, $(\bar{X}', \bar{K}')$ (możliwe, że zdefiniowanych na różnych przestrzeniach probabilistycznych) o własnościach: $\bar{P}(V_q(\bar{X})_T < \infty) = 1$, $\bar{P}'(V_q(\bar{X}')_T < \infty) = 1$, $T \in \mathbb{R}^+$ zachodzi $\mathcal{L}(\bar{X}, \bar{K}) = \mathcal{L}(\bar{X}', \bar{K}')$.

Uwaga 4.9. Jeżeli dla dwóch słabych rozwiązań $(\bar{X}, \bar{K})$, $(\bar{X}', \bar{K}')$ równania (4.8) mamy $\bar{P}(V_q(\bar{X})_T < \infty) = 1$, $\bar{P}'(V_{q'}(\bar{X}')_T < \infty) = 1$, $T \in \mathbb{R}^+$, gdzie $q \neq q'$, to na mocy uwagi 1.10.2 dla $q'' = q \vee q'$ mamy $\bar{P}(V_{q''}(\bar{X})_T < \infty) = 1$, $\bar{P}'(V_{q''}(\bar{X}')_T < \infty) = 1$, $T \in \mathbb{R}^+$.

Uwaga 4.10. Podobnie jak w przypadku równania (3.9) zakładać będziemy dodatkowo, że istnieje $q \in (2, p/(p-1))$ oraz $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptowany proces H o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ taki, że $L \leqslant H \leqslant U$ oraz $P(V_q(H)_T < \infty) = 1$, $T \in \mathbb{R}^+$. Stosując argumenty z punktu 1. uwagi 3.4, możemy pokazać, że powyższe założenie jest spełnione, jeśli zachodzi warunek (3.10). Z kolei, jeżeli istnieje p-semimartyngał S taki, że $L \leqslant S \leqslant U$, to na mocy faktu 1.41 $P(V_q(S)_T < \infty) = 1$ dla wszystkich $q > 2$, $T \in \mathbb{R}^+$. Zatem w tym przypadku możemy przyjąć $H = S$.

Rozważać będziemy następujące założenia.

(G1) (a) Istnieje C_f taka, że

$$|f(t, x)| \leqslant C_f(1 + |x|), \quad x \in \mathbb{R}^d,\ t \in \mathbb{R}^+.$$

(b) Istnieją $q \in (2, p/(p-1))$, $\beta \in (1-1/p, 1]$, $\alpha \in (q(1-1/p), 1]$ oraz $C_g > 0$ takie, że

$$|g(t,x) - g(s,y)| \leqslant C_g(|t-s|^\beta + |x-y|^\alpha), \quad x, y \in \mathbb{R}^d,\ t, s \in \mathbb{R}^+.$$

(G2) (a) Dla każdego $N \in \mathbb{R}^+$ istnieje $C_{f,N} > 0$ taka, że

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leqslant C_{f,N}|x-y|, \quad |x|, |y| < N,\ t \in \mathbb{R}^+.$$

(b) g jest różniczkowalną funkcją zmiennej x, dla każdego $N \in \mathbb{R}^+$ istnieją $\alpha_N \in (q(1-1/p), 1]$ i $C_{g,N} > 0$ takie, że

$$|\nabla_x g(t,x)| \leqslant C_{g,N}$$

oraz

$$|\nabla_x g(t,x) - \nabla_x g(s,y)| \leqslant C_{g,N}(|t-s|^\beta + |x-y|^{\alpha_N}), \quad |x|, |y| < N,\ t, s \in \mathbb{R}^+.$$

Uwaga 4.11. Ustalmy $T \in \mathbb{R}^+$. Stosując argumenty z uwagi 2.16, możemy pokazać, że przy założeniu (G1) (b) dla $C_g^T = C_g((T \vee 1) + 2) + |g(0,0)|$ oraz wszystkich $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^d$

$$|g(t,x)| \leqslant C_g^T(1 + |x|). \tag{4.9}$$

Ponadto dla dowolnych $r \geqslant q/\alpha \vee 1/\beta$, $w \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ mamy:

$$\bar{V}_r(g(\cdot, w))_t \leqslant C_g^T(1 + \bar{V}_q(w)_t). \tag{4.10}$$

Niech $\{X_0^n\}$ będzie ciągiem $\mathcal{F}_0^n$-mierzalnych, d-wymiarowych zmiennych losowych, $\{Z^n\}$ będzie ciągiem semimartyngałów względem $\{\mathcal{F}_t^n\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, a $\{A^n\}$, $\{L^n\}$, $\{U^n\}$, $\{H^n\}$ będą ciągami procesów $\{\mathcal{F}_t^n\}$-adaptowanych o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ takich, że $L_0^n \leqslant X_0^n \leqslant U_0^n$, $L^n \leqslant H^n \leqslant U^n$, $n \in \mathbb{N}$. Rozważmy ciąg równań postaci

$$X_t^n = X_0^n + \int_0^t f(s, X_{s-}^n)\, dZ_s^n + \int_0^t g(s, X_{s-}^n)\, dA_s^n + K_t^n, \quad t \in \mathbb{R}^+,\ n \in \mathbb{N}. \tag{4.11}$$

Lemat 4.12. *Załóżmy, że funkcje f i g spełniają* (G1)*. Jeżeli $\{(X^n, K^n)\}$ jest ciągiem rozwiązań równań postaci* (4.11)*, ciągi $\{|X_0^n|\}$, $\{V_p(A^n)_T\}$, $\{\bar{V}_q(H^n)_T\}$ są ograniczone według prawdopodobieństwa dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$, $\{Z^n\}$ jest ciągiem semimartyngałów spełniających warunek* (UT)*, to ciąg $\{\bar{V}_q(X^n)_T\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa, $T \in \mathbb{R}^+$.*

Dowód. Ustalmy $a > 0$ oraz $N \in \mathbb{R}^+$. Bez straty ogólności rozważań możemy założyć, że $|X_0^n| \leqslant c$ P-p.w., $n \in \mathbb{N}$. Rozważmy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ rozkład Z^n postaci $Z_t^n = Z_0^n + J_t^{n,a} + M_t^{n,a} + D_t^{n,a}$, $t \in \mathbb{R}^+$ (patrz (1.17)) oraz zdefiniujmy:

$$\tau_N^n = \inf\{t\,;\ \max\{V_1(J^{n,a})_t,\ V_1(D^{n,a})_t,\ [M^{n,a}]_t,\ \langle M^{n,a}\rangle_t,\ V_p(A^n)_t,\ \bar{V}_q(H^n)_t\} > N\} \wedge N.$$

Niech C_g^N będzie stałą z (4.10) dla $T = N$ tzn. $C_g^N = C_g((N \vee 1) + 2) + |g(0,0)|$. Pokażemy, że istnieje stała D zależna od d, c, p, q, α, β, C_g^N i C_f dla której

$$\sup_n E\bar{V}_q(X^n)^2_{\tau_N^n-} \leqslant D. \tag{4.12}$$

W tym celu ustalmy moment zatrzymania $\tau \leqslant \tau_N^n$ oraz zauważmy, że stosując wniosek 2.9, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\bar{V}_q(X^n)_{\tau-} \leqslant (d+1)\Bigg(|X_0^n| + V_q\left(\int_0^{\cdot} f(s,X_{s-}^n)\,dZ_s^n\right)_{\tau-} \\ + V_q\left(\int_0^{\cdot} g(s,X_{s-}^n)\,dA_s^n\right)_{\tau-}\Bigg) + d\bar{V}_q(H^n)_{\tau-}. \qquad (4.13)\end{aligned}$$

Przyjmując $r = q/\alpha \vee 1/\beta$ oraz korzystając z (1.3) i (4.10), mamy

$$\begin{aligned}V_q\left(\int_0^{\cdot} g(s,X_{s-}^n)\,dA_s^n\right)_{\tau-} &\leqslant V_p\left(\int_0^{\cdot} g(s,X_{s-}^n)\,dA_s^n\right)_{\tau-} \\ &\leqslant K_{p,r}\bar{V}_r(g(\cdot,X^n))_{\tau-}V_p(A^n)_{\tau-} \\ &\leqslant K_{p,r}C_g^N(1+\bar{V}_q(X^n)_{\tau-})V_p(A^n)_{\tau-}. \qquad (4.14)\end{aligned}$$

Ponadto

$$\begin{aligned}V_q\left(\int_0^{\cdot} f(s,X_{s-}^n)\,dJ_s^{n,a}\right)_{\tau-} &\leqslant \sup_{t<\tau}|f(t,X_{t-}^n)|V_1(J^{n,a})_{\tau-} \\ &\leqslant C_f(1+\bar{V}_q(X^n)_{\tau-})V_1(J^{n,a})_{\tau-}. \qquad (4.15)\end{aligned}$$

Podobnie pokazujemy, że

$$V_q\left(\int_0^{\cdot} f(s,X_{s-}^n)\,dD_s^{n,a}\right)_{\tau-} \leqslant C_f(1+\bar{V}_q(X^n)_{\tau-})V_1(D^{n,a})_{\tau-}. \qquad (4.16)$$

Z kolei korzystając z faktu 1.41, uzyskujemy

$$\begin{aligned}E\bar{V}_q\left(\int_0^{\cdot} f(s,X_{s-}^n)\,dM_s^{n,a}\right)_{\tau-}^2 &\leqslant K(q)E\int_0^{\tau-}|f(s,X_{s-}^n)|^2\,d([M^{n,a}]_s+\langle M^{n,a}\rangle_s) \\ &\leqslant K(q)C_f^2E\Big((1+\bar{V}_q(X^n)_{\tau-})^2([M^{n,a}]_{\tau-}+\langle M^{n,a}\rangle_{\tau-})\Big). \quad (4.17)\end{aligned}$$

Dzięki (4.13) – (4.17) istnieją stałe C_1, C_2 zależne od d, c, p, q, r, C_g^N i C_f takie, że

$$E\bar{V}_q(X^n)_{\tau-}^2 \leqslant C_1E(1+\bar{V}_q(X^n)_{\tau-}^2)B_{\tau-}^{n,a} + C_2E\bar{V}_q(H^n)_{\tau-}^2, \qquad (4.18)$$

gdzie $B_t^{n,a} = \max\{V_1(J^{n,a})_t^2,\, V_1(D^{n,a})_t^2,\, [M^{n,a}]_t,\, \langle M^{n,a}\rangle_t,\, V_p(A^n)_t^2\}$, $t \in \mathbb{R}^+$.

Niech dla $k, n \in \mathbb{N}$

$$\tau_N^{n,1} = \inf\{t>0\,;\, C_1\max\{V_1(J^{n,a})_t^2,\, V_1(D^{n,a})_t^2,\, [M^{n,a}]_t,\, \langle M^{n,a}\rangle_t,\, V_p(A^n)_t^2\} > 1/2\} \wedge \tau_N^n.$$

Wówczas z (4.18) wynika, iż $\sup_n E\bar{V}_q(X^n)_{\tau_N^{n,1}-}^2 \leqslant D_1$, gdzie D_1 zależy od d, c, p, q, r, C_g^N i C_f. Powtarzając powyższe rozumowanie dla momentów zatrzymania

$$\begin{aligned}\tau_N^{n,k+1} = \inf\{t>\tau_N^{n,k}\,;\, C_1\max\{&V_1(J^{n,a})_{[\tau_N^{n,k},t]}^2,\, V_1(D^{n,a})_{[\tau_N^{n,k},t]}^2,\, [M^{n,a}]_t - [M^{n,a}]_{\tau_N^{n,k}}, \\ &\langle M^{n,a}\rangle_t - \langle M^{n,a}\rangle_{\tau_N^{n,k}},\, V_p(A^n)_{[\tau_N^{n,k},t]}^2\} > 1/2\} \wedge \tau_N^n, \quad k,n \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

uzyskujemy oszacowanie:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} EV_q(X^n)^2_{[\tau_N^{n,k},\tau_N^{n,k+1})} \leqslant D_k = D_k(d,c,p,q,r,C_g^N,C_f), \quad k\in\mathbb{N}.$$

Stąd oraz z faktu, iż $|\Delta Z^n_{\tau_N^{n,k}}|\mathbf{1}_{\{\tau_N^{n,k}<\tau_N^n\}} \leqslant N+a$ i $|\Delta A^n_{\tau_N^{n,k}}|\mathbf{1}_{\{\tau_N^{n,k}<\tau_N^n\}} \leqslant N$, wnioskujemy podobnie jak w (2.30), że dla dowolnych $n,k\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&E\left(|\Delta X^n_{\tau_N^{n,k}}|^2\mathbf{1}_{\{\tau_N^{n,k}<\tau_N^n\}}\right)\\
&\leqslant 4(d+1)^2\left(E\bar{V}_q(X^n)^2_{\tau_N^{n,k}-} + E\left(|f(\tau_N^{n,k},X^n_{\tau_N^{n,k}-})\Delta Z^n_{\tau_N^{n,k}}|^2\mathbf{1}_{\{\tau_N^{n,k}<\tau_N^n\}}\right)\right.\\
&\quad\left. + E\left(|g(\tau_N^{n,k},X^n_{\tau_N^{n,k}-})\Delta A^n_{\tau_N^{n,k}}|^2\mathbf{1}_{\{\tau_N^{n,k}<\tau_N^n\}}\right)\right) + 4d^2E\left(\bar{V}_q(H^n)^2_{\tau_N^{n,k}}\mathbf{1}_{\{\tau_N^{n,k}<\tau_N^n\}}\right)\\
&\leqslant 4(d+1)^2\left(E\bar{V}_q(X^n)^2_{\tau_N^{n,k}-} + (C_f^2(N+a)^2+(C_gN)^2)E\left(1+\bar{V}_q(X^n)_{\tau_N^{n,k}-}\right)^2\right) + 4(dN)^2\\
&= D'_k = D'_k(d,c,p,q,f,g,N). \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

W konsekwencji $\sup_n EV_q(X^n)^2_{[\tau_N^{n,k},\tau_N^{n,k+1}]}\mathbf{1}_{\{\tau_N^{n,k}<\tau_N^n\}} \leqslant D_k+D'_k$, $k\in\mathbb{N}$. Zatem dla zakończenia dowodu (4.12) wystarczy pokazać, że dla każdego $n\in\mathbb{N}$ zmienna losowa $m^n=\sup\{k\,;\,\tau_N^{n,k}<\tau_N^n\}$ jest P-p.w. ograniczona przez pewną stałą C zależną od p, N i C_1. Bez straty ogólności rozważań możemy założyć, że $C_1\geqslant 1$. Ponieważ argumentując podobnie jak w (2.31), mamy

$$\begin{aligned}
m^n\frac{5}{2C_1} &< \sum_{k=1}^{m^n} V_1(J^{n,a})_{[\tau_N^{n,k-1},\tau_N^{n,k}]} + V_1(D^{n,a})_{[\tau_N^{n,k-1},t\tau_N^{n,k}]} + \left([M^{n,a}]_{\tau_N^{n,k}} - [M^{n,a}]_{\tau_N^{n,k-1}}\right)\\
&\quad + \left(\langle M^{n,a}\rangle_{\tau_N^{n,k}} - \langle M^{n,a}\rangle_{\tau_N^{n,k-1}}\right) + v_p(A^n)_{[\tau_N^{n,k-1},\tau_N^{n,k}]} \leqslant 4N+N^p, \quad n\in\mathbb{N}, \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

więc możemy przyjąć $C=2C_1(4N+N^p)/5$, kończąc tym samym dowód (4.12).

Z twierdzenia 1.37 i uwagi 1.38 wiemy, że

$$\lim_{N\to\infty}\limsup_{n\to\infty} P(\tau_N^n\leqslant T)=0, \quad T\in\mathbb{R}^+. \qquad (4.21)$$

Ponadto dzięki (4.12) dla dowolniej stałej $\eta>0$

$$P(\bar{V}_q(X^n)_T>\eta)\leqslant P(\tau_N^n\leqslant T)+P(\bar{V}_q(X^n)_{\tau_N^n-}>\eta)\leqslant P(\tau_N^n\leqslant T)+D\eta^{-2},$$

co razem z (4.21) kończy dowód twierdzenia. □

Twierdzenie 4.13. *Załóżmy, że funkcje f i g spełniają* (G1) *oraz że f jest funkcją ciągłą. Jeżeli $\{(X^n,K^n)\}$ jest ciągiem rozwiązań równań* (4.11) *o lokalnie skończonej q-wariacji, ciągi $\{V_p(A^n)_T\}$, $\{\bar{V}_q(H^n)_T\}$ są ograniczone według prawdopodobieństwa, $T\in\mathbb{R}^+$, $\{Z^n\}$ jest ciągiem semimartyngałów spełniających warunek* (UT) *i*

$$(X_0^n,\,Z^n,\,A^n,\,L^n,\,U^n)\xrightarrow{\mathcal{D}}(X_0,\,Z,\,A,\,L,\,U) \quad w\ \mathbb{R}^d\times\mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^{4d}),$$

to ciąg $\{(X^n,K^n)\}$ jest jednostajnie jędrny w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^{2d})$ oraz każdy jego punkt skupienia jest słabym rozwiązaniem równania (4.8) *o lokalnie skończonej q-wariacji. Jeśli dodatkowo równanie* (4.8) *posiada własność jednoznaczności trajektorii, to $(X^n,K^n)\xrightarrow{\mathcal{D}}(X,K)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^{2d})$, gdzie (X,K) jest jednoznacznym słabym rozwiązaniem* (4.8) *wśród procesów o lokalnie skończonej q-wariacji.*

Dowód. Z lematu 4.12 wiemy, że ciąg $\{\bar{V}_q(X^n)_T\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa. Korzystając z (4.10), otrzymujemy, że dla $r=q/\alpha\vee 1/\beta$ ciąg $\{\bar{V}_r(g(\cdot,X^n))_T\}$ jest również ograniczony według prawdopodobieństwa. Dalsza część dowodu przebiega tak samo jak dowód twierdzenia 3.10. Jedyna modyfikacja polega na tym, że korzystamy z wniosków 4.5 i 4.6 zamiast twierdzeń 3.1 i 3.2. □

4.3 Istnienie i jednoznaczność rozwiązań srr z barierami względem p-semimartyngałów

Rozważymy schemat Eulera dla równania (4.8). Niech dla każdego $n\in\mathbb{N}$ (X^n,K^n) dany będzie wzorem: $(X^n_0,K^n_0)=(X_0,K_0)$,

$$(X^n_t,K^n_t)=(X^n_{t_{n,k}},K^n_{t_{n,k}}),\quad t\in[t_{n,k},t_{n,k+1}),\quad k\in\mathbb{N}\cup\{0\},$$

gdzie

$$\begin{cases} Y^n_{t_{n,k+1}} &= Y^n_{t_{n,k}}+f(t_{n,k},X^n_{t_{n,k}})(Z_{t_{n,k+1}}-Z_{t_{n,k}}) \\ &\quad +g(t_{n,k},X^n_{t_{n,k}})(A_{t_{n,k+1}}-A_{t_{n,k}}), \\ X^n_{t_{n,k+1}} &= \max\{\min\{X^n_{t_{n,k}}+(Y^n_{t_{n,k+1}}-Y^n_{t_{n,k}}),U_{t_{n,k+1}}\},L_{t_{n,k+1}}\}, \\ K^n_{t_{n,k+1}} &= K^n_{t_{n,k}}+(X^n_{t_{n,k+1}}-X^n_{t_{n,k}})-(Y^n_{t_{n,k+1}}-Y^n_{t_{n,k}}) \end{cases} \tag{4.22}$$

oraz ciąg podziałów $\pi_n=\{0=t_{n,0}<t_{n,1}<t_{n,2}<\ldots\}$ jest taki, że $\lim_{k\to\infty}t_{n,k}=\infty$, $n\in\mathbb{N}$ i $\mathrm{diam}(\pi_n)\to 0$.

Twierdzenie 4.14. *Niech funkcje f i g spełniają* (G1) *oraz f będzie funkcją ciągłą. Załóżmy dodatkowo, że istnieje $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptowany proces H o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^d)$ i lokalnie skończonej q-wariacji, spełniający warunek: $L\leqslant H\leqslant U$. Wówczas ciąg $\{(X^n,K^n)\}$ zdefiniowany w* (4.22) *jest jednostajnie jędrny oraz każdy jego punkt skupienia jest słabym rozwiązaniem równania* (4.8) *o lokalnie skończonej q-wariacji. W konsekwencji równanie* (4.8) *posiada słabe rozwiązanie o lokalnie skończonej q-wariacji.*

Dowód. Zauważmy najpierw, że

$$\begin{cases} (X^n,\,K^n)=ESP(Y^n,\,L^n,\,U^n), \\ \text{gdzie } Y^n_t=X_0+\int_0^t f(\varrho^n_{s-},X^n_{s-})\,dZ^n_s+\int_0^t g(\varrho^n_{s-},X^n_{s-})\,dA^n_s,\quad t\in\mathbb{R}^+ \end{cases} \tag{4.23}$$

oraz $Z^n_t=Z_{t_{n,k}}$, $A^n_t=A_{t_{n,k}}$, $L^n_t=L_{t_{n,k}}$, $U^n_t=U_{t_{n,k}}$ $\varrho^n_t=t_{n,k}$, $t\in[t_{n,k},t_{n,k+1})$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $n\in\mathbb{N}$. Niech dodatkowo $H^n_t=H_{t_{n,k}}$ dla $t\in[t_{n,k},t_{n,k+1})$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $n\in\mathbb{N}$. Ponieważ $V_p(A^n)_T\leqslant V_p(A)_T$, $V_q(H^n)_T\leqslant V_q(H)_T$, $T\in\mathbb{R}^+$, $n\in\mathbb{N}$ oraz ciąg $\{Z^n\}$ spełnia warunek

(UT), więc stosując argumenty z dowodu lematu 4.12, możemy pokazać, że dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ ciąg $\{\bar{V}_q(X^n)_T\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa. Połóżmy:

$$\begin{cases} (\bar{X}^n,\, \bar{K}^n) = ESP(\bar{Y}^n,\, L^n,\, U^n), \\ \text{gdzie } \bar{Y}^n_t = X_0 + \int_0^t f(s, X^n_{s-})\, dZ^n_s + \int_0^t g(s, X^n_{s-})\, dA^n_s, \quad t \in \mathbb{R}^+,\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Ustalmy $T \in \mathbb{R}^+$. Pokażemy, że

$$\sup_{t \leqslant T} |X^n_t - \bar{X}^n_t| \xrightarrow{\mathcal{P}} 0 \text{ oraz } \sup_{t \leqslant T} |K^n_t - \bar{K}^n_t| \xrightarrow{\mathcal{P}} 0. \tag{4.24}$$

Korzystając z lematu 2.4, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sup_{t \leqslant T} |X^n_t - \bar{X}^n_t| &\leqslant 2 \sup_{t \leqslant T} \left| \int_0^t f(\varrho^n_{s-}, X^n_{s-}) - f(s, X^n_{s-})\, dZ^n_s \right| \\ &\quad + 2V_q \left(\int_0^t g(\varrho^n_{s-}, X^n_{s-}) - g(s, X^n_{s-})\, dA^n_s \right)_T \\ &\leqslant 2I^{n,1} + 2I^{n,2}. \end{aligned}$$

Analogicznie do (2.51) dla $r = q/\alpha \vee 1/\beta$ oraz $\gamma \in (1 - 1/p, 1/r)$ mamy, że

$$\begin{aligned} I^{n,2} &\leqslant K_{p,1/\gamma} V_{1/\gamma} \left(g(\varrho^n_-, X^n_-) - g(\cdot, X^n_-) \right)_T V_p(A)_T \\ &\leqslant K_{p,1/\gamma} \operatorname{Osc}(g(\varrho^n_-, X^n_-) - g(\cdot, X^n_-))^{1-r\gamma}_{[0,T]} V_r \left(g(\varrho^n_-, X^n_-) - g(\cdot, X^n_-) \right)^{r\gamma}_T V_p(A)_T \\ &\leqslant K_{p,1/\gamma} \left(2 \sup_{t \leqslant T} |g(\varrho^n_-, X^n_-) - g(\cdot, X^n_-)| \right)^{1-r\gamma} \left(2C^T_g (1 + \bar{V}_q(X^n)_T) \right)^{r\gamma} V_p(A)_T \\ &\leqslant C^n \sup_{t \leqslant T} |\varrho^n_{t-} - t|^{\beta(1-r\gamma)}, \end{aligned}$$

gdzie $\{C^n\}$ jest ciągiem zmiennych losowych ograniczonym według prawdopodobieństwa. W konsekwencji $I^{n,2} \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$. Ustalmy $a > 0$ oraz rozważmy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ rozkład Z^n postaci $Z^n = Z^n_0 + J^{n,a} + M^{n,a} + D^{n,a}$ (patrz 1.17). Zauważmy, że

$$\begin{aligned} I^{n,1} &\leqslant \sup_{t \leqslant T} \left| \int_0^t f(\varrho^n_{s-}, X^n_{s-}) - f(s, X^n_{s-})\, dJ^{n,a}_s \right| + \sup_{t \leqslant T} \left| \int_0^t f(\varrho^n_{s-}, X^n_{s-}) - f(s, X^n_{s-})\, dD^{n,a}_s \right| \\ &\quad + \sup_{t \leqslant T} \left| \int_0^t f(\varrho^n_{s-}, X^n_{s-}) - f(s, X^n_{s-})\, dM^{n,a}_s \right| \\ &\leqslant \sup_{t \leqslant T} \left| f(\varrho^n_{t-}, X^n_{t-}) - f(t, X^n_{t-}) \right| V_1(J^{n,a})_T + \sup_{t \leqslant T} \left| f(\varrho^n_{t-}, X^n_{t-}) - f(t, X^n_{t-}) \right| V_1(D^{n,a})_T \\ &\quad + \sup_{t \leqslant T} \left| \int_0^t f(\varrho^n_{s-}, X^n_{s-}) - f(s, X^n_{s-})\, dM^{n,a}_s \right| = I^{n,1}_j + I^{n,1}_d + I^{n,1}_m. \end{aligned}$$

Z faktu, że f jest funkcją ciągłą oraz że ciągi $\{V_1(J^{n,a})_T\}$, $\{V_1(D^{n,a})_T\}$, $\{\sup_{t \leqslant T} |X^n_t|\}$ są ograniczone według prawdopodobieństwa, wnioskujemy zbieżność $I^{n,1}_j + I^{n,1}_d \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$. Natomiast stosując nierówność Dooba i Lenglarta-Rebolledo, dla dowolnych $\varepsilon, \eta > 0$ dostajemy

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{t\leqslant T}\left|\int_0^t f(\varrho^n_{s-}, X^n_{s-}) - f(s, X^n_{s-})\, dM^{n,a}_s\right| \geqslant \varepsilon\right) \\ \leqslant 4\varepsilon^{-2} E\left(\sup_{t\leqslant T}\left|f(\varrho^n_{t-}, X^n_{t-}) - f(t, X^n_{t-})\right|^2 \langle M^{n,a}\rangle_T \wedge \eta\right) \\ + P\left(\sup_{t\leqslant T}\left|f(\varrho^n_{t-}, X^n_{t-}) - f(t, X^n_{t-})\right|^2 \langle M^{n,a}\rangle_T > \eta\right), \end{aligned}$$

co pociąga zbieżność $I^{n,1}_m \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$. Powtarzając powyższe rozumowanie dla ciągu $\{K^n - \bar{K}^n\}$, otrzymujemy (4.24). Dalsza część dowodu przebiega analogicznie do dowodu wniosku 3.11. □

Fakt 4.15. *Niech funkcje f i g spełniają* (G1) *oraz* (G2)*. Załóżmy dodatkowo, że istnieje $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptowany proces H o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ i lokalnie skończonej q-wariacji, spełniający warunek: $L \leqslant H \leqslant U$. Wówczas równanie* (4.8) *posiada własność jednoznaczności trajektorii wśród procesów o lokalnie skończonej q-wariacji.*

Dowód. Przypuśćmy, że istnieją dwa rozwiązania $(\bar{X}^1, \bar{K}^1)$, $(\bar{X}^2, \bar{K}^2)$ równania (4.8) zdefiniowane na tej samej przestrzeni $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{P})$ oraz $\mathcal{L}(\bar{X}_0, \bar{Z}, \bar{A}, \bar{L}, \bar{U}) = \mathcal{L}(X_0, Z, A, L, U)$. Ustalmy $T \in \mathbb{R}^+$ oraz połóżmy $\bar{\tau}_N = \inf\{t\,;\, \max\{\bar{V}_q(\bar{X}^1)_t, \bar{V}_q(\bar{X}^2)_t\} > N\} \wedge N$, $N \in \mathbb{R}^+$. Ponieważ $\tau_N \uparrow \infty$ $\bar{P}$-p.w. dla zakończenia dowodu wystarczy rozważać procesy zastopowane w $\bar{\tau}_N-$. Dla uproszczenia notacji będziemy pomijać znak $\bar{\tau}_N-$ w górnym indeksie. Ustalmy $a > 0$ oraz rozważmy rozkład semimartyngału $\bar{Z}$: $\bar{Z}_t = \bar{Z}_0 + \bar{J}^a_t + \bar{M}^a_t + \bar{D}^a_t$, $t \in \mathbb{R}^+$ (patrz (1.17)).

Korzystając z wniosku 2.8, dla dowolnego momentu zatrzymania $\tau > 0$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\bar{V}_q(\bar{X}^1 - \bar{X}^2)^2_{\tau-} \\ &\leqslant 4(d+1)^2\left(V_1\left(\int_0^\cdot f(s, \bar{X}^1_{s-}) - f(s, \bar{X}^2_{s-})\, d\bar{J}^a_s\right)^2_{\tau-} + V_1\left(\int_0^\cdot f(s, \bar{X}^1_{s-}) - f(s, \bar{X}^2_{s-})\, d\bar{D}^a_s\right)^2_{\tau-}\right. \\ &\left.+ V_q\left(\int_0^\cdot f(s, \bar{X}^1_{s-}) - f(s, \bar{X}^2_{s-})\, d\bar{M}^a_s\right)^2_{\tau-} + V_p\left(\int_0^\cdot g(s, \bar{X}^1_{s-}) - g(s, \bar{X}^2_{s-})\, d\bar{A}_s\right)^2_{\tau-}\right). \end{aligned}$$

Niech $r = q/\alpha_N \vee 1/\beta$. Stosując (1.3) oraz lemat 2.19, dostajemy

$$\begin{aligned} &V_p\left(\int_0^\cdot g(s, \bar{X}^1_{s-}) - g(s, \bar{X}^2_{s-})\, d\bar{A}_s\right)_{\tau-} \\ &\leqslant K_{p,r} V_r(g(\cdot, \bar{X}^1) - g(\cdot, \bar{X}^2))_{\tau-} V_p(\bar{A})_{\tau-} \\ &\leqslant K_{p,r}(C_{g,N})^{d^2} \bar{V}_q(\bar{X}^1 - \bar{X}^2)_{\tau-}\left(1 + \tau^\beta + V_q(\bar{X}^1)^{\alpha_N}_{\tau-} + V_q(\bar{X}^2)^{\alpha_N}_{\tau-}\right) V_p(\bar{A})_{\tau-}. \end{aligned}$$

Ponadto

$$\begin{aligned} V_1\left(\int_0^\cdot f(s, \bar{X}^1_{s-}) - f(s, \bar{X}^2_{s-})\, d\bar{J}^a_s\right)_{\tau-} &\leqslant \int_0^{\tau-} |f(s, \bar{X}^1_{s-}) - f(s, \bar{X}^2_{s-})|\, dV_1(\bar{J}^a)_s \\ &\leqslant C_{f,N} \bar{V}_q(\bar{X}^1 - \bar{X}^2)_{\tau-} V_1(\bar{J}^a)_{\tau-} \end{aligned}$$

oraz analogicznie

$$V_1\left(\int_0^{\cdot} f(s,\bar X^1_{s-})-f(s,\bar X^2_{s-})\,d\bar D^a_s\right)_{\tau-}\leqslant C_{f,N}\bar V_q(\bar X^1-\bar X^2)_{\tau-}V_1(\bar D^a)_{\tau-}.$$

Oprócz tego na mocy faktu 1.41 mamy, że

$$\begin{aligned}EV_q&\left(\int_0^{\cdot} f(s,\bar X^1_{s-})-f(s,\bar X^2_{s-})\,d\bar M^a_s\right)^2_{\tau-}\\&\leqslant K(q)E\int_0^{\tau-}|f(s,\bar X^1_{s-})-f(s,\bar X^2_{s-})|^2\,d([\bar M^a]_s+\langle\bar M^a\rangle_s)\\&\leqslant K(q)C^2_{f,N}E\bar V_q(\bar X^1-\bar X^2)^2_{\tau-}([\bar M^a]_{\tau-}+\langle\bar M^a\rangle_{\tau-}).\end{aligned}$$

Zatem istnieje stała C zależna tylko od d, p, q, N, α_N, $C_{g,N}$ i $C_{f,N}$ taka, że dla dowolnego momentu zatrzymania $\tau>0$ mamy

$$E\bar V_q(\bar X^1-\bar X^2)^2_{\tau-}\leqslant CE(\bar V_q(\bar X^1-\bar X^2)^2_{\tau-}B^a_{\tau-}),$$

gdzie $B^a_t=\max\{V_1(\bar J^a)^2_t,\,V_1(\bar D^a)^2_t,\,[\bar M^a]_t,\,\langle\bar M^a\rangle_t,\,V_p(\bar A)^2_t\}$, $t\in\mathbb R^+$. Niech

$$\tau=\inf\{t>0\,;\,C\max\{V_1(\bar J^a)^2_t,\ V_1(\bar D^a)^2_t,\ [\bar M^a]_t,\ \langle\bar M^a\rangle_t,\ V_p(\bar A)^2_t\}>1/2\}\}.$$

Wówczas $E\bar V_q(\bar X^1-\bar X^2)^2_{\tau-}\leqslant 2^{-1}E\bar V_q(\bar X^1-\bar X^2)^2_{\tau-}$, więc $\bar X^1=\bar X^2$ $\bar P$-p.w. na przedziale $[0,\tau)$. Z uwagi 2.3.3 wiemy, że

$$\bar X^j_\tau=\max\{\min\{\bar X^j_{\tau-}+f(\tau,\bar X^j_{\tau-})\Delta\bar Z_\tau+g(\tau,\bar X^j_{\tau-})\Delta\bar A_\tau,\bar U_\tau\},\bar L_\tau\},\quad j=1,2,$$

więc $\bar X^1=\bar X^2$ $\bar P$-p.w. na domkniętym przedziale $[0,\tau]$. Niech teraz $\tau_1=\tau$,

$$\begin{aligned}\tau_{k+1}=\inf\{t>\tau_k\,;C\max\{&V_1(\bar J^a)^2_{[\tau_k,t]},\,V_1(\bar D^a)^2_{[\tau_k,t]},\,[\bar M^a]_t-[\bar M^a]_{\tau_k},\\&\langle\bar M^a\rangle_t-\langle\bar M^a\rangle_{\tau_{k-1}},\,V_p(\bar A)^2_{[\tau_k,t]}\}>1/2\}\},\quad k\in\mathbb N.\end{aligned}$$

Powtarzając powyższe rozumowanie, wnioskujemy, że $\bar X^1=\bar X^2$ $\bar P$-p.w. na przedziałach $[\tau_{k-1},\tau_k]$. Ponieważ $\tau_k\uparrow\infty$ $\bar P$-p.w., więc dowód faktu został zakończony. □

Twierdzenie 4.16. *Niech funkcje f i g spełniają* (G1) *oraz* (G2)*. Załóżmy dodatkowo, że istnieje $\{\mathcal F_t\}$-adaptowany proces H o trajektoriach w $\mathbb D(\mathbb R^+,\mathbb R^d)$ i lokalnie skończonej q-wariacji, spełniający warunek: $L\leqslant H\leqslant U$. Wówczas równanie* (4.8) *posiada jednoznaczne mocne rozwiązanie (X,K) wśród procesów o lokalnie skończonej q-wariacji. Ponadto jeżeli zdefiniujemy $\{(X^n,K^n)\}$ jako ciąg iteracji Picarda dla równania* (4.8) *postaci: $(X^0,K^0)=ESP(X_0,L,U)$ oraz dla każdego $n\in\mathbb N$ $(X^n,K^n)=ESP(Y^n,L,U)$, gdzie $Y^n=X_0+\int_0^{\cdot} f(s,X^{n-1}_s)\,dZ_s+\int_0^{\cdot} g(s,X^{n-1}_s)\,dA_s$, to*

$$(X^n,\,K^n)\xrightarrow{\mathcal P}(X,\,K)\quad w\ \mathbb D(\mathbb R^+,\mathbb R^{2d}).$$

Dowód. Zauważmy, że z twierdzenia 4.2, faktu 1.41 oraz wniosku 2.9 wynika, iż użyte w definicji ciągu $\{(X^n, K^n)\}$ całki są poprawnie określone. Powtarzając argumenty z dowodu lematu 4.12, otrzymujemy, że dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ ciąg $\{\bar{V}_q(X^n)_T\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa.

Rozważmy dwa dowolne podciągi $\{m\} \subset \{n\}$, $\{l\} \subset \{n\}$. Analogicznie do dowodu twierdzenia 4.13, wykorzystując wniosek 4.5, dostajemy, że ciąg $\{(X^m, K^m, X^l, K^l, Z, A, L, U)\}$ jest jednostajnie jędrny w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{8d})$. Zatem możemy wybrać dalsze podciągi $\{m_k\} \subset \{m\}, \{l_k\} \subset \{l\}$ takie, że

$$(X^{m_k},\, K^{m_k},\, X^{l_k},\, K^{l_k},\, Z,\, A,\, L,\, U) \xrightarrow{\mathcal{D}} (\bar{X},\, \bar{K},\, \bar{X}',\, \bar{K}',\, \bar{Z},\, \bar{A},\, \bar{L},\, \bar{U}) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{8d}).$$

Stosując wniosek 4.6, otrzymujemy

$$(Y^{m_k}, Y^{l_k} L, U) \xrightarrow{\mathcal{D}} (\bar{Y}, \bar{Y}', L, U) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{4d}),$$

gdzie $\bar{Y} = \bar{X}_0 + \int_0^{\cdot} f(s, \bar{X}_{s-})\, d\bar{Z}_s + \int_0^{\cdot} g(s, \bar{X}_{s-})\, d\bar{A}_s$ oraz $\bar{Y}' = \bar{X}'_0 + \int_0^{\cdot} f(s, \bar{X}'_{s-})\, d\bar{Z}_s + \int_0^{\cdot} g(s, \bar{X}'_{s-})\, d\bar{A}_s$. Na mocy twierdzenia 1.40 i wniosku 2.5 dostajemy

$$(X^{m_k},\, K^{m_k}) = ESP(Y^{m_k}, L, U) \xrightarrow{\mathcal{D}} ESP(\bar{Y}, \bar{L}, \bar{U}) = (\bar{X},\, \bar{K}) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$$

oraz

$$(X^{l_k},\, K^{l_k}) = ESP(Y^{l_k}, L, U) \xrightarrow{\mathcal{D}} ESP(\bar{Y}', \bar{L}, \bar{U}) = (\bar{X}',\, \bar{K}') \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d}).$$

Natomiast z faktu 1.36 wynika, iż $P(V_q(\bar{X})_T < \infty) = 1$ i $P(V_q(\bar{X}')_T < \infty) = 1$ dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$. W konsekwencji $(\bar{X}, \bar{K})$, $(\bar{X}', \bar{K}')$ są dwoma rozwiązaniami (4.8) o lokalnie skończonej q-wariacji, zdefiniowanymi na tej samej przestrzeni $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \{\bar{\mathcal{F}}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}, \bar{P})$. Korzystając z faktu 4.15 oraz twierdzenia 1.31, uzyskujemy zbieżność $(X^n, K^n) \xrightarrow{\mathcal{P}} (X, K)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$. Stosując ponownie fakt 1.36 dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$, dostajemy $P(V_q(X)_T < \infty) = 1$. Argumentując podobnie jak w dowodzie faktu 4.15 pokazujemy, że $(X, K) = ESP(Y, L, U)$ P-p.w., gdzie $Y = \bar{X}_0 + \int_0^{\cdot} f(s, X_{s-})\, dZ_s + \int_0^{\cdot} g(s, X_{s-})\, dA_s$. Ponieważ z uwagi 3.4.2 wynika, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ proces $(X^n, K^n) =$ jest $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptowany, proces graniczny (X, K) jest również $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptowany, więc (X, K) jest jednoznacznym mocnym rozwiązaniem (4.8) wśród procesów o lokalnie skończonej q-wariacji. $\square$

Rozdział 5

Srr względem ułamkowego ruchu Browna

5.1 Aproksymacja całki względem ułamkowego ruchu Browna

Problem aproksymacji ułamkowego ruchu Browna B^H był przedmiotem badań wielu autorów. Sottinen [79] pokazał, że proces B^H można aproksymować za pomocą tzw. zakłóconego błądzenia losowego. Podobne rezultaty zostały uzyskane później przez Nieminena [56] oraz Słomińskiego i Ziemkiewicza [78]. Parczewski [60] badał natomiast aproksymacje procesu $Y^H = \int_0^\cdot \sigma_s \, dB_s^H$ zdefiniowanego w (1.7) w przypadku, gdy σ jest funkcją ciągłą. We wszystkich powyższych pracach autorzy wykorzystywali znaną reprezentację całkową ułamkowego ruchu Browna B^H z pracy [15], w której dla $H > 1/2$ Decreusefond i Üstünel pokazali, że

$$B_t^H = \int_0^t z^H(t,s) \, dW_s, \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{5.1}$$

W powyższym wzorze W jest procesem Wienera,

$$z^H(t,s) = \begin{cases} c_H s^{1/2-H} \int_s^t u^{H-1/2}(u-s)^{H-3/2} \, du & \text{dla } t > s \\ 0 & \text{dla } t \leqslant s, \end{cases}$$

gdzie $c_H = (\frac{H(2H-1)}{\beta(H-1/2, 2-2H)})^{1/2}$, $\beta(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} \, dx$ oznacza funkcję beta Eulera. Poniżej przedstawiamy podstawowe własności funkcji z^H, które wynikają bezpośrednio z definicji.

(i) z^H jest jednostajnie ciągła na $[0,T] \times [\varepsilon, T]$ dla dowolnych $\varepsilon > 0$, $T \in \mathbb{R}^+$,

(ii) $z^H(\cdot, s)$ jest rosnąca dla dowolnego $s \in \mathbb{R}^+$,

(iii) $z^H(t, \cdot)$ jest malejąca dla dowolnego $t \in \mathbb{R}^+$,

(iv) funkcja $z^H(t,\cdot) - z^H(s,\cdot)$ jest malejąca dla dowolnych t, $s \in \mathbb{R}^+$, $s \leqslant t$,

(v) $EB_t^H B_s^H = \int_0^{t\wedge s} z^H(t,u) z^H(s,u)\,du < \infty$ dla dowolnych $t, s \in \mathbb{R}^+$.

Definicja 5.1. Tablicę całkowalnych zmiennych losowych $\{\{X_{n,k}\}\}$ nazywamy *tablicą różnic martyngałowych* względem tablicy σ-algebr $\{\{\mathcal{F}_{n,k}\}\}$, jeżeli

(i) $\mathcal{F}_{n,k} \subset \mathcal{F}_{n,k+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

(ii) $X_{n,k}$ jest $\mathcal{F}_{n,k}$-mierzalna, $n \in N$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

(iii) $E(X_{n,k+1} | \mathcal{F}_{n,k}) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Niech $\sigma \in \mathbb{L}^{1/H}_{loc}$ oraz $Y^H = \int_0^\cdot \sigma_s\, dB_s^H$ będzie procesem zdefiniowanym w (1.7). Zdefiniujmy aproksymację Y^H wzorem:

$$Y_t^{H,n} = \sum_{k=1}^{[nt]} \left(n \int_{(k-1)/n}^{k/n} \sigma_s\, ds \right) (B^{H,n}_{k/n} - B^{H,n}_{(k-1)/n}), \tag{5.2}$$

gdzie

$$B_t^{H,n} = \sum_{k=1}^{[nt]} z^H([nt]/n, k/n) X_{n,k} = \int_0^{[nt]/n} z^{H,n}([nt]/n, s)\, dW_s^n, \tag{5.3}$$

$\{\{X_{n,k}\}\}$ jest pewną tablicą różnic martyngałowych, $W_t^n = \sum_{k=1}^{[nt]} X_{n,k}$ oraz $z^{H,n}(t,s) = z^H(t, k/n)$ dla $s \in ((k-1)/n, k/n]$, $n, k \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}^+$.

Twierdzenie 5.2. *Jeżeli $W^n \xrightarrow{\mathcal{D}} W$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, gdzie W jest procesem Wienera oraz*

$$\max_{k\in\mathbb{N}} EX_{n,k}^2 \leqslant \frac{C}{n} \qquad \text{dla pewnej stałej } C > 0, \tag{5.4}$$

to ciąg procesów $\{Y^{H,n}\}$ zbiega słabo do Y^H w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ oraz istnieje stała $C(H) > 0$ taka, że dla dowolnych $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$ oraz $n \in \mathbb{N}$ mamy:

$$E|Y_{t_2}^{H,n} - Y_{t_1}^{H,n}|^2 \leqslant C(H) \left(\int_{[nt_1]/n}^{[nt_2]/n} |\sigma_s|^{1/H} ds \right)^{2H}. \tag{5.5}$$

Dowód. Zaczynamy od dowodu nierówności (5.5). Oznaczmy: $\sigma_t^n = n \int_{(k-1)/n}^{k/n} \sigma_s\, ds$, $t \in [(k-1)/n, k/n)$, $k, n \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$\begin{aligned} Y_t^{H,n} = \int_0^t \sigma_{s-}^n\, dB_s^{H,n} &= \sum_{k=1}^{[nt]} \sigma^n_{(k-1)/n} \sum_{i=1}^{k} \Big(z^H(k/n, i/n) - z^H((k-1)/n, i/n) \Big) X_{ni} \\ &= \sum_{i=1}^{[nt]} \left(\sum_{k=i}^{[nt]} \sigma^n_{(k-1)/n} \Delta_n^k z^{H,n}(k/n, i/n) \right) X_{ni}, \end{aligned}$$

gdzie $\Delta_n^k z^{H,n}(k/n,t) = z^H(k/n,t) - z^H((k-1)/n,t)$, $n,\ k \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}^+$. Korzystając z powyższej równości, (5.4), a następnie z własności (iv) i (v) funkcji z^H, otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
&E\left(\int_0^t \sigma_{s-}^n \, dB_s^{H,n}\right)^2 \\
&\quad\leqslant C\sum_{i=1}^{[nt]}\left(\sum_{k=i}^{[nt]}\sigma_{(k-1)/n}^n \Delta_n^k z^{H,n}(k/n,i/n)\right)^2 \frac{1}{n} \\
&\quad= C\sum_{i=1}^{[nt]}\left(\sum_{k,l=i}^{[nt]}\sigma_{(k-1)/n}^n\sigma_{(l-1)/n}^n \Delta_n^k z^{H,n}(k/n,i/n)\Delta_n^l z^{H,n}(l/n,i/n)\right)\frac{1}{n} \\
&\quad\leqslant C\sum_{i=1}^{[nt]}\sum_{k,l=i}^{[nt]}|\sigma_{(k-1)/n}^n\sigma_{(l-1)/n}^n|\int_{(i-1)/n}^{i/n}\Delta_n^k z^{H,n}(k/n,s)\Delta_n^l z^{H,n}(l/n,s)\,ds \\
&\quad= C\sum_{k,l=1}^{[nt]}\sum_{i=1}^{k\wedge l}|\sigma_{(k-1)/n}^n\sigma_{(l-1)/n}^n|\int_{(i-1)/n}^{i/n}\Delta_n^k z^{H,n}(k/n,s)\Delta_n^l z^{H,n}(l/n,s)\,ds \\
&\quad= C\sum_{k,l=1}^{[nt]}|\sigma_{(k-1)/n}^n\sigma_{(l-1)/n}^n|E(B_{k/n}^H B_{l/n}^H - B_{(k-1)/n}^H B_{l/n}^H - B_{k/n}^H B_{(l-1)/n}^H + B_{(k-1)/n}^H B_{(l-1)/n}^H) \\
&\quad= CE\left(\int_0^{[nt]/n}|\sigma_{s-}^n|\,dB_s^H\right)^2.
\end{aligned}
$$

Dzięki (1.9) oraz nierówności Höldera mamy

$$
\begin{aligned}
E\left(\int_0^{[nt]/n}|\sigma_{s-}^n|\,dB_s^H\right)^2 &\leqslant C(2,H)\left(\int_0^{[nt]/n}|\sigma_{s-}^n|^{1/H}ds\right)^{2H} \\
&= C(2,H)\left(\sum_{k=1}^{[nt]}\int_{(k-1)/n}^{k/n}\left|n\int_{(k-1)/n}^{k/n}\sigma_u\,du\right|^{1/H}ds\right)^{2H} \\
&\leqslant C(2,H)\left(\sum_{k=1}^{[nt]}\int_{(k-1)/n}^{k/n}n\int_{(k-1)/n}^{k/n}|\sigma_u|^{1/H}\,du\,ds\right)^{2H} \\
&= C(2,H)\left(\int_0^{[nt]/n}|\sigma_s|^{1/H}\,ds\right)^{2H}.
\end{aligned}
$$

Stosując powyższe oszacowanie dla $t = t_2$ oraz $\sigma_s = \sigma_s \mathbf{1}_{\{s>[nt_1]/n\}}$, uzyskujemy (5.5). Nierówność (5.5) i twierdzenie 1.34 implikują jednostajną jędrność ciągu $\{Y^{H,n}\}$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$.

Aby pokazać zbieżność rozkładów skończenie wymiarowych, załóżmy najpierw, że σ jest funkcją klasy $\mathcal{C}^1$. W tym przypadku wiadomo, że dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$

$$
\sup_{t\leqslant T}|\sigma_t^n - \sigma_t| \longrightarrow 0 \quad \text{oraz} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} V^1(\sigma^n)_T < \infty. \tag{5.6}
$$

Łatwo zauważyć, że proces $Y^{H,n}$ możemy przedstawić w postaci

$$
\begin{aligned}
Y_t^{H,n} = \int_0^t \sigma_{s-}^n \, dB_s^{H,n} &= \sigma_t^n B_t^{H,n} - \int_0^t B_{s-}^{H,n} \, d\sigma_s^n \\
&\quad - \sum_{k=1}^{[nt]} (\sigma_{k/n}^n - \sigma_{(k-1)/n}^n)(B_{k/n}^{H,n} - B_{(k-1)/n}^{H,n}), \quad t \in \mathbb{R}^+, \, n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Uwzględniając (5.5) i (5.6), dostajemy dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$:

$$
\begin{aligned}
E \sup_{t \leqslant T} & \left| \sum_{k=1}^{[nt]} (\sigma_{k/n}^n - \sigma_{(k-1)/n}^n)(B_{k/n}^{H,n} - B_{(k-1)/n}^{H,n}) \right| \\
&\leqslant V_1(\sigma^n)_T \left(E \left[\max_{k=1,\dots,[nT]} |B_{k/n}^{H,n} - B_{(k-1)/n}^{H,n}|^2 \right] \right)^{1/2} \\
&\leqslant C(H)^{1/2} V_1(\sigma^n)_T \, n^{-H} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \qquad (5.7)
\end{aligned}
$$

Ponadto z (5.6) wynika, że $\{\sigma^n\}$ spełnia warunek (UT). Ponieważ na mocy [78, Theorem 3.1] mamy, że $B^{H,n} \xrightarrow{\mathcal{D}} B^H$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, stosując twierdzenie 1.39, otrzymujemy zbieżność

$$
\int_0^{\cdot} B_{s-}^{H,n} \, d\sigma_s^n \xrightarrow{\ \mathcal{D}\ } \int_0^{\cdot} B_s^H \, d\sigma_s \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}). \qquad (5.8)
$$

Z ciągłości σ oraz trajektorii B^H wnioskujemy, iż $\sup_{t \leqslant T} |\sigma_t^n B_t^{H,n} - \sigma_t B_t^H| \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$, więc korzystając z (5.7), (5.8) oraz wzoru na całkowanie przez części:

$$
\sigma_t B_t^H = \int_0^t \sigma_s \, dB_s^H + \int_0^t B_s^H \, d\sigma_s, \quad t \in \mathbb{R}^+,
$$

(patrz np. [51, Section 2.7.2]), uzyskujemy

$$
\int_0^{\cdot} \sigma_{s-}^n \, dB_s^{H,n} \xrightarrow{\ \mathcal{D}\ } \int_0^{\cdot} \sigma_s \, dB_s^H \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}).
$$

W ogólnym przypadku, dla $\sigma \in \mathbb{L}_{loc}^{1/H}$ wystarczy zauważyć, że dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ istnieje ciąg $\{\sigma^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ funkcji klasy $\mathcal{C}^1$ taki, że $\|\sigma - \sigma^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^{1/H}_{[0,T]}} \leqslant \varepsilon$. Na mocy (5.5) dla dowolnych $t \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$
E \left(Y_t^{H,n} - \int_0^t \sigma_{s-}^{\varepsilon,n} \, dB_s^{H,n} \right)^2 = E \left(\int_0^t (\sigma_{s-}^n - \sigma_{s-}^{\varepsilon,n}) \, dB_s^{H,n} \right)^2 \leqslant C(H)\varepsilon^2.
$$

Natomiast z (1.9) wynika, że $E(Y_t^H - \int_0^t \sigma_s^\varepsilon \, dB_s^H)^2 = E(\int_0^t (\sigma_s - \sigma_s^\varepsilon) \, dB_s^H)^2 \leqslant C(2,H)\varepsilon^2$ dla $t \in \mathbb{R}^+$. Zatem rozkłady skończenie wymiarowe ciągu $\{Y^{H,n}\}$ zbiegają do rozkładów skończenie wymiarowych Y^H, co kończy dowód twierdzenia. □

Twierdzenie 5.3. *Niech* $\{\{X_{n,k}\}\}$ *będzie tablicą różnic martyngałowych spełniającą* (5.4) *oraz*

$$\sup_{t\leqslant T}|W_t^n - W_t| \xrightarrow{\mathcal{P}} 0, \quad T\in\mathbb{R}^+,$$

gdzie W *jest procesem Wienera. Wówczas ciąg* $\{Y^{H,n}\}$ *spełnia* (5.5) *oraz*

$$\sup_{t\leqslant T}|Y_t^{H,n} - Y_t^H| \xrightarrow{\mathcal{P}} 0, \quad T\in\mathbb{R}^+.$$

Dowód. Pokażemy najpierw, że

$$\sup_{t\leqslant T}|B_t^{H,n} - B_t^H| \xrightarrow{\mathcal{P}} 0, \quad T\in\mathbb{R}^+. \tag{5.9}$$

W tym celu ustalmy $\varepsilon>0$ i $t\in\mathbb{R}^+$ oraz zauważmy, że dla każdego $n\in\mathbb{N}$

$$B_t^{H,n} = \sum_{k=1}^{[n\varepsilon]} z^H\Big([nt]/n, k/n\Big)X_{n,k} + \sum_{k=[n\varepsilon]+1}^{[nt]} z^H\Big([nt]/n, k/n\Big)X_{n,k} = B_t^{H,n,1}(\varepsilon) + B_t^{H,n,2}(\varepsilon).$$

W dowodzie twierdzenia 3.1 z pracy [78] pokazano, że $\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_n E(B_t^{H,n,1}(\varepsilon))^2 = 0$. Ponadto

$$\begin{aligned}\left|B_t^{H,n,2}(\varepsilon) - \int_\varepsilon^t z^H(t,s)\,dW_s\right| &\leqslant \left|\sum_{k=[n\varepsilon]+1}^{[nt]} z^H\Big([nt]/n,k/n\Big)\Big(X_{n,k} - \Delta_n^k W_{k/n}\Big)\right| \\ &\quad + \left|\sum_{k=[n\varepsilon]+1}^{[nt]} z^H\Big([nt]/n,k/n\Big)\Delta_n^k W_{k/n} - \int_\varepsilon^t z^H(t,s)\,dW_s\right| \\ &= I_t^{n,1} + I_t^{n,2},\end{aligned}$$

gdzie $\Delta_n^k W_{k/n} = W_{k/n} - W_{(k-1)/n}$, $k,n\in\mathbb{N}$. W dowodzie twierdzenia 2.2 z pracy [87] pokazano zbieżność $I_t^{n,2} \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$, natomiast na mocy własności (iii) funkcji z^H otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}I_t^{n,1} &\leqslant 2\sup_{s\leqslant t}|W_s^n - W_s|\left|\sum_{k=[n\varepsilon]+1}^{[nt]}\int_{(k-1)/n}^{k/n} z^H\Big([nt]/n,s\Big)\,ds\right| \\ &= 2\sup_{s\leqslant t}|W_s^n - W_s|\left|\int_{[n\varepsilon]/n}^{[nt]/n} z^H\Big([nt]/n,s\Big)\,ds\right| \xrightarrow{\mathcal{P}} 0.\end{aligned}$$

Zatem $B_t^{H,n} \xrightarrow{\mathcal{P}} B_t^H$ dla każdego $t\in\mathbb{R}^+$. Ponieważ (5.5) implikuje, że ciąg $\{B^{H,n}\}$ jest jednostajnie $\mathcal{C}$-jędrny, dowód (5.9) został zakończony.

W dowodzie twierdzenia 5.2 pokazaliśmy, że ciąg $\{Y^{H,n}\}$ jest jednostajnie jędrny w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$, więc na mocy twierdzenia 1.30 wystarczy pokazać, że $Y_t^{H,n} \xrightarrow{\mathcal{P}} Y_t^H$ dla wszystkich $t\in\mathbb{R}^+$. Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 5.2 zakładamy dodatkowo, że σ jest funkcją klasy $\mathcal{C}^1$.

Zauważmy, że dla dowolnyvh $t \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}|Y_t^{H,n} - Y_t^H| &\leqslant \left|\int_0^t \sigma_{s-}^n \, dB_s^{H,n} - \int_0^t \sigma_{s-}^n \, dB_s^H\right| + \left|\int_0^t (\sigma_{s-}^n - \sigma_s) \, dB_s^H\right| \\ &= I_t^{1,n} + I_t^{2,n}.\end{aligned}$$

Ponadto ze wzoru na całkowanie przez części

$$\begin{aligned}I_t^{n,1} &\leqslant \left|\sigma_t^n (B_t^{H,n} - B_t^H)\right| + \left|\int_0^t (B_{s-}^{H,n} - B_s^H) \, d\sigma_s^n\right| \\ &\quad + \left|\sum_{k=1}^{[nt]} (\sigma_{k/n}^n - \sigma_{(k-1)/n}^n)(B_{k/n}^{H,n} - B_{(k-1)/n}^{H,n})\right|.\end{aligned}$$

Stosując (5.6), (5.7) i (5.9), dostajemy zbieżność: $I^{1,n} \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$. Ponieważ korzystając z (1.9) i (5.6), otrzymujemy $E(I^{2,n})^2 \to 0$, dowód twierdzenia w przypadku $\sigma \in \mathcal{C}^1$ został zakończony. Aby uzasadnić tezę dla $\sigma \in \mathbb{L}_{loc}^{1/H}$, postępujemy podobnie jak w dowodzie twierdzenia 5.2. $\square$

Przykład 5.4. Teza twierdzenia 5.3 zachodzi, jeżeli W jest standardowym procesem Wienera oraz

$$X_{nk} = W_{k/n} - W_{(k-1)/n}, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

W tym przypadku potrafimy oszacować tempo zbieżności ciągu $Y^{H,n}$ do Y^H w normie $\mathbb{L}^2$. Połóżmy

$$\varepsilon_n(\sigma, T) = \|\sigma^n - \sigma\|_{\mathbb{L}_{[0,T]}^{1/H}}^2 + \sup_{t \leqslant T} \left(\int_{([nt]/n)}^t |\sigma_s|^{1/H} \, ds\right)^{2H}, \quad n \in \mathbb{N}, T \in \mathbb{R}^+, \tag{5.10}$$

gdzie σ^n jest funkcją zdefiniowaną w dowodzie twierdzenia 5.2. Ponieważ $\sigma \in \mathbb{L}_{loc}^{1/H}$, jest jasne, że $\varepsilon_n(\sigma, T) \to 0$, $T \in \mathbb{R}^+$. Niech $\{B^{H,(n)}\}$ oznacza standardową dyskretyzację procesu B^H, tzn.

$$B_t^{H,(n)} = B_{(k-1)/n}^H, \quad t \in [(k-1)/n, k/n), \; k, n \in \mathbb{N}. \tag{5.11}$$

Fakt 5.5. *Jeżeli W jest standardowym procesem Wienera oraz*

$$X_{nk} = W_{k/n} - W_{(k-1)/n}, \quad n, k \in \mathbb{N},$$

to dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ istnieje stała D taka, że

$$\sup_{t \leqslant T} E(Y_t^{H,n} - Y_t^H)^2 \leqslant D\Big(\varepsilon_n(\sigma, T) + \|\sigma - h\|_{\mathbb{L}_{[0,T]}^{1/H}}^2 + \bar{V}_1(h)_T^2 \sup_{t \leqslant T} E|B_t^{H,n} - B_t^{H,(n)}|^2\Big)$$

dla każdej funkcji $h \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ o skończonej wariacji na $[0, T]$.

Dowód. Ustalmy $T \in \mathbb{R}^+$, $t \in [0, T]$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ σ^n ma dyskretną postać, więc

$$\int_0^{[nt]/n} \sigma_{s-}^n \, dB_s^H = \int_0^t \sigma_{s-}^n \, dB_s^{H,(n)}, \tag{5.12}$$

co pociąga, że

$$\begin{aligned} Y_t^{H,n} - Y_t^H &= \int_0^t \sigma_{s-}^n \, dB_s^{H,n} - \int_0^t \sigma_s \, dB_s^H \\ &= \int_0^t \sigma_{s-}^n \, dB_s^{H,n} - \int_{[nt]/n}^t \sigma_s \, dB_s^H - \int_0^{[nt]/n} (\sigma_s - \sigma_{s-}^n) \, dB_s^H - \int_0^t \sigma_{s-}^n \, dB_s^{H,(n)} \\ &= I_t^{n,1} - I_t^{n,2} - I_t^{n,3} - I_t^{n,4}. \end{aligned}$$

Dzięki (1.9) wiemy, że

$$E(I_t^{n,2})^2 + E(I_t^{n,3})^2 \leqslant C(2,H)\varepsilon_n(\sigma,T). \tag{5.13}$$

Zatem pozostaje oszacować różnicę $I_t^{1,n} - I_t^{4,n}$. Korzystając z (5.5), dla każdego $h \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ o skończonej wariacji otrzymujemy

$$E\left(\int_0^t (\sigma_{s-}^n - h_{s-}^n) \, dB_s^{H,n}\right)^2 \leqslant C(H)\|\sigma - h\|^2_{\mathbb{L}^{1/H}_{[0,T]}}, \tag{5.14}$$

gdzie h^n jest zdefiniowane analogicznie do σ^n. Ponadto, mając na uwadze fakt, że $B^{H,(n)}$ jest dyskretyzacją B^H

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^t (\sigma_{s-}^n - h_{s-}^n) \, dB_s^{H,(n)}\right)^2 &= E\left(\int_0^{[nt]/n} \sigma_{s-}^n - h_{s-}^n \, dB_s^H\right)^2 \\ &\leqslant C(2,H)\|\sigma^n - h^n\|^2_{\mathbb{L}^{1/H}_{[0,T]}} \leqslant C(2,H)\|\sigma - h\|^2_{\mathbb{L}^{1/H}_{[0,T]}}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Z (5.13)-(5.15) wnioskujemy, że dla dowodu wystarczy oszacować całkę $I_t^{n,5} = \int_0^t h_{s-}^n \, d(B^{H,n} - B^{H,(n)})_s$. W tym celu zauważmy, że

$$I_t^{n,5} = h_t^n(B_t^{H,n} - B_t^{H,(n)}) - \sum_{k=1}^{[nt]} (B_{k/n}^{H,n} - B_{k/n}^{H,(n)})(h_{k/n}^n - h_{(k-1)/n}^n).$$

W konsekwencji, stosując nierówność Schwarza, uzyskujemy

$$E(I_t^{n,5})^2 \leqslant 2\bar{V}_1(h^n)_T^2 E|B_t^{H,n} - B_t^{H,(n)}|^2 + 2V_1(h^n)_T^2 \max_{k=1,\ldots,[nt]} E|B_{k/n}^{H,n} - B_{k/n}^{H,(n)}|^2.$$

Stąd oraz z nierówności $V_1(h^n)_T \leqslant V_1(h)_T$ otrzymujemy tezę. □

Uwaga 5.6. Rozważmy aproksymacje procesu Y^H postaci

$$\bar{Y}_t^{H,n} = \sum_{k=1}^{[nt]} \left(n \int_{(k-1)/n}^{k/n} \sigma_s \, ds\right) (B_{k/n}^H - B_{(k-1)/n}^H), \quad t \in \mathbb{R}^+, \ n \in \mathbb{N}. \tag{5.16}$$

Wówczas stosując oszacowania z dowodu faktu 5.5, możemy pokazać, że

$$\sup_{t \leqslant T} E\left(\bar{Y}_t^{H,n} - Y_t^H\right)^2 \leqslant D\varepsilon_n(\sigma,T), \quad T \in \mathbb{R}^+, \ n \in \mathbb{N}.$$

Zauważmy również, że ciąg $\{\bar{Y}^{H,n}\}$ spełnia (5.5). Istotnie, dzięki (5.12) oraz (1.9) dla dowolnych $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$ i $n \in \mathbb{N}$ mamy:

$$E|\bar{Y}^{H,n}_{t_2} - \bar{Y}^{H,n}_{t_1}|^2 = E\left|\int_{t_1}^{t_2} \sigma^n_{s-}\, dB^{H,(n)}_s\right|^2 = E\left|\int_{[nt_1]/n}^{[nt_2]/n} \sigma^n_{s-}\, dB^H_s\right|^2$$
$$\leqslant C(2,H)\Big(\int_{[nt_1]/n}^{[nt_2]/n} |\sigma^n_s|^{1/H} ds\Big)^{2H} \leqslant C(2,H)\Big(\int_{[nt_1]/n}^{[nt_2]/n} |\sigma_s|^{1/H} ds\Big)^{2H},$$

gdzie $B^{H,(n)}$ jest dany wzorem (5.11).

5.2 Aproksymacja rozwiązań srr względem ułamkowego ruchu Browna

Niech $B^H = (B^{H,1}, \ldots, B^{H,d})$, gdzie $B^{H,1}, \ldots, B^{H,d}$ są niezależnymi ułamkowymi ruchami Browna zdefiniowanymi na $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}, P)$. W niniejszym podrozdziale badać będziemy aproksymacje rozwiązań równań postaci

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_s)\, db_s + \int_0^t g(s, X_s)\, dY^H_s, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{5.17}$$

gdzie X_0 jest $\mathcal{F}_0$-mierzalną zmienną losową o wartościach w $\mathbb{R}^d$, $b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą o lokalnie skończonej wariacji, $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{M}^d$ oraz $Y^H = (Y^{H,1}, \ldots, Y^{H,d})$, gdzie dla każdego $i = 1, \ldots, d$ proces $Y^{H,i}$ jest całką Wienera: $Y^{H,i} = \int_0^\cdot \sigma^i_s\, dB^{H,i}_s$ dla $\sigma^i \in \mathbb{L}^{1/H}_{loc}$. Ponieważ na mocy faktu 1.18 Y^H jest procesem o lokalnie skończonej p-wariacji dla $p > 1/H$, całkę względem Y^H definiujemy jako całkę Riemanna-Stieltjesa po trajektoriach. Mocne i słabe rozwiązania równania (5.17) definiujemy analogicznie jak w przypadku równań z barierami (patrz definicje 3.3 oraz 3.8).

Twierdzenie 5.7. *Załóżmy* (H1) *dla pewnego* $p \in (1/H, 2)$ *oraz* (H2). *Wówczas równanie* (5.17) *posiada jednoznaczne mocne rozwiązanie* X *w klasie procesów o lokalnie skończonej* p-*wariacji. Ponadto jeśli zdefiniujemy* $\{X^n\}$ *jako ciąg iteracji Picarda dla* (5.17), *tzn.* $X^0 \equiv X_0$, $X^n = X_0 + \int_0^\cdot f(s, X^{n-1}_{s-})\, db_s + \int_0^\cdot g(s, X^{n-1}_{s-})\, dY^H_s$, $n \in \mathbb{N}$, *to dla każdego* $T \in \mathbb{R}^+$

$$\bar{V}_p(X^n - X)_T \longrightarrow 0 \quad P\text{-}p.w.$$

Dowód. Z uwagi 2.20.2 wynika, że dla P-prawie wszystkich $\omega \in \Omega$ istnieje jednoznaczne rozwiązanie $X(\omega)$ oraz dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$

$$\bar{V}_p(X^n(\omega) - X(\omega))_T \longrightarrow 0.$$

Ponieważ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ proces X^n jest $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptowany, proces graniczny X jest również $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptowany, co kończy dowód twierdzenia. □

Będziemy aproksymować rozwiązania równania (5.17) za pomocą scentrowanych dyskretnych procesów gaussowskich postaci $Y^{H,n}_t = Y^{H,n}_{k/n}$, dla $t \in [k/n, (k+1)/n)$ spełniających warunek

$$E\left|Y^{H,n}_t - Y^{H,n}_s\right|^2 \leqslant \left(\int_{[ns]/n}^{[nt]/n} |\sigma_s|^{1/H} ds\right)^{2H}, \quad 0 \leqslant s < t \tag{5.18}$$

dla $\sigma \in \mathbb{L}^{1/H}_{loc}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Uwaga 5.8. Z twierdzenia 5.2 wynika, że jeżeli $\{Y^{H,n}\} = \{(Y^{H,n,1}, \dots, Y^{H,n,d})\}$, gdzie dla każdego $i = 1, \dots, d$ ciąg $\{Y^{H,n,i}\}$ jest taki jak w (5.2) to $\{Y^{H,n}\}$ spełnia (5.18). Ponadto jest on ciągiem procesów gaussowskich, o ile $\{W^n = (W^{n,1}, \dots, W^{n,d})\}$ jest ciągiem procesów gaussowskich. Można łatwo sprawdzić, że również ciąg procesów zdefiniowany w (5.16) oraz ciąg dyskretyzacji procesu Y^H postaci $Y^{H,(n)}_t = Y^H_{k/n}$, dla $t \in [k/n, (k+1)/n)$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ są ciągami procesów gaussowskich spełniających (5.18).

Zdefiniujmy ciąg $\{X^n\}$ następująco: $X^n_0 = X_0$,

$$\begin{aligned} X^n_{(k+1)/n} &= X^n_{k/n} + f(k/n, X^n_{k/n})(b_{(k+1)/n} - b_{k/n}) \\ &\quad + g(k/n, X^n_{k/n})(Y^{H,n}_{(k+1)/n} - Y^{H,n}_{k/n}), \end{aligned} \tag{5.19}$$

gdzie $Y^{H,n}$ jest scentrowanym dyskretnym procesem gaussowskim spełniającym warunek (5.18) oraz $X^n_t = X^n_{k/n}$, $t \in [k/n, (k+1)/n)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie 5.9. *Załóżmy* (H1) *dla pewnego* $p \in (1/H, 2)$ *oraz ciągłość funkcji* f. *Wtedy ciąg* $\{(X^n, Y^{H,n})\}$ *jest jednostajnie* $\mathcal{C}$*-jędrny. Jeżeli dodatkowo* $Y^{H,n} \xrightarrow{\mathcal{D}_f} Y^H$, *to każdy jego punkt skupienia jest słabym rozwiązaniem równania* (5.17) *o lokalnie skończonej* p*-wariacji.*

Dowód. Ustalmy $T \in \mathbb{R}^+$. Pokażemy najpierw, że dla każdego $p > 1/H$ ciąg $\{\bar{V}_p(Y^{H,n})_T\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa. Załóżmy najpierw dodatkowo, że funkcja σ jest ograniczona. Dzięki (5.18) dla każdego $r > 0$ istnieje $c(r) > 0$ takie, że $E|Y^{H,n}_t - Y^{H,n}_s|^r \leqslant c(r)|[nt]/n - [ns]/n|^{rH}$, $s, t \leqslant T$, $n \in \mathbb{N}$. Niech $r > 1/H$, $p^* \in (0, H - 1/r)$ oraz

$$M^n_{p^*} = \sup_{s,t \leqslant T,\, [nt] \neq [ns]} \frac{|Y^{H,n}_t - Y^{H,n}_s|}{|[nt]/n - [ns]/n|^{p^*}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Powtarzając argumenty z dowodu kryterium ciągłości Kołmogorowa (patrz np. [64, Chapter 1 Theorem 2.1]), można pokazać, że $\sup_n \|M^n_{p^*}\|_r < \infty$. Ponieważ

$$|Y^{H,n}_t - Y^{H,n}_s| \leqslant M^n_{p^*} |[nt]/n - [ns]/n|^{p^*}, \quad s, t \leqslant T,\, n \in \mathbb{N}, \tag{5.20}$$

więc ciąg $\{V_p(Y^{H,n})_T\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa dla dowolnego $p > r/(Hr - 1)$. Przechodząc do granicy z $r \to \infty$, uzyskujemy ograniczoność według prawdopodobieństwa ciągu $\{V_p(Y^{H,n})_T\}$ dla $p > 1/H$. W ogólnym przypadku zamiast (5.20) możemy wykorzystać [33, Theorem 3.1].

Na mocy twierdzenia 1.34 $\{Y^{H,n}\}$ jest jednostajnie jędrny w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, co pociąga, że $Y^{H,n} \xrightarrow{\mathcal{D}} Y^H$. Ponieważ proces Y^Hma ciągłe trajektorie, więc ciąg $\{Y^{H,n}\}$ jest jednostajnie $\mathcal{C}$-jędrny. Zauważmy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ X^n jest rozwiązaniem równania

$$X^n_t = X_0 + \int_0^t f(\varrho^n_{s-}, X^n_{s-})\, db^n_s + \int_0^t g(\varrho^n_{s-}, X^n_{s-})\, dY^{H,n}_s, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

gdzie $b^n_t = b_{k/n}$, $\varrho^n_t = k/n$, $t \in [k/n, (k+1)/n)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$. Niech

$$\tau^u_n = \inf\{t\, ;\, \max\{V_1(b^n)_t, V_p(Y^{H,n})_t, \} > u\}, \quad n, u \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ $V_1(b^n)_T \leqslant V_1(b)_T < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, więc $\lim_u \limsup_n P(\tau_n^u \leqslant T) = 0$. Ponadto na zbiorze $T < \tau_n^u$ zachodzi oszacowanie $\max\{V_1(b^n)_T, V_p(Y^{H,n})_T\} \leqslant u$, więc powtarzając argumenty z dowodu (2.42), uzyskujemy, że dla każdego $M > 0$

$$P(\bar{V}_p(X^n)_T > M) \leqslant P(\tau_n^u \leqslant T) + P(D = D(d,p,\alpha,\beta,X_0,C_g^T,C_f,u) \geqslant M).$$

Zatem ciąg $\{\bar{V}_p(X^n)_T\}$ jest również ograniczony według prawdopodobieństwa. Dalsza część dowodu przebiega podobnie jak dowód wniosku 3.11. Najpierw definiujemy:

$$\bar{X}_t^n = X_0 + \int_0^t f(s, X_{s-}^n)\, db_s^n + \int_0^t g(s, X_{s-}^n)\, dY_s^{H,n}, \quad t \in \mathbb{R}^+,\ n \in \mathbb{N} \tag{5.21}$$

oraz korzystając z (2.50) i (2.51), otrzymujemy

$$\sup_{t \leqslant T} |X_t^n - \bar{X}_t^n| \xrightarrow{\mathcal{P}} 0, \quad T \in \mathbb{R}^+. \tag{5.22}$$

Następnie wykorzystując łączną zbieżność: $(b^n, Y^{H,n}) \xrightarrow{\mathcal{D}} (b, Y^H)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d+1})$, twierdzenie 3.1 oraz (5.22), otrzymujemy jednostajną jędrność ciągu $\{(X^n, b^n, Y^{H,n})\}$. Zakładając, że $(Y^{H,n}, X^n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (Y^H, X)$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$ i korzystając z twierdzenia 3.2 w sposób podobny jak w dowodzie twierdzenia 2.23, dostajemy

$$\begin{aligned}&\Big(X^n, \int_0^\cdot f(\varrho_{s-}^n, X_{s-}^n)\, db_s^n + \int_0^\cdot g(\varrho_{s-}^n, X_{s-}^n)\, dY_s^{H,n}\Big)\\ &\qquad \xrightarrow{\mathcal{D}} \Big(X, \int_0^\cdot f(s, X_s)\, db_s + \int_0^\cdot g(s, X_s)\, dY^H\Big) \quad \text{w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d}),\end{aligned}$$

co pociąga, że X jest słabym rozwiązaniem (5.17). Ponieważ proces graniczny posiada ciągłe trajektorie, ciąg $\{(X^n, Y^{H,n})\}$ jest jednostajnie $\mathcal{C}$-jędrny, co kończy dowód twierdzenia. □

Wniosek 5.10. *Jeżeli f i g spełniają* (H1) *dla pewnego $p \in (1/H, 2)$ oraz dodatkowo f jest funkcją ciągłą, to równanie* (5.17) *posiada słabe rozwiązanie o lokalnie skończonej p-wariacji.*

Dowód. Niech $W^1, \ldots, W^d$ będą niezależnymi procesami Wienera oraz dla każdego $i = 1, \ldots, d$ $\{Y^{H,n,i}\}$ będzie ciągiem procesów rozważanym w przykładzie 5.4. Wówczas $\{Y^{H,n} = (Y^{H,n,1}, \ldots, Y^{H,n,d})\}$ spełnia założenia twierdzenia 5.9. □

Twierdzenie 5.11. *Załóżmy* (H1) *dla pewnego $p \in (1/H, 2)$,* (H2) *oraz dodatkowo, że f jest funkcją ciągłą. Niech $\{Y^{H,n}\}$ będzie ciągiem procesów gaussowskich takim jak w twierdzeniu 5.9 oraz $\{X^n\}$ będzie ciągiem zdefiniowanym w* (5.19).

(i) *Jeżeli $Y^{H,n} \xrightarrow{\mathcal{D}_f} Y^H$, to $X^n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.*

(ii) *Jeżeli $Y_t^{H,n} \xrightarrow{\mathcal{P}} Y_t^H$ dla każdego $t \in \mathbb{R}^+$, to*

$$\sup_{t \leqslant T} |X_t^n - X_t| \xrightarrow{\mathcal{P}} 0, \quad T \in \mathbb{R}^+.$$

Powyżej X oznacza jednoznaczne mocne rozwiązanie równania (5.17) *o lokalnie skończonej p-wariacji.*

Dowód. (i) wynika z twierdzenia 5.9 oraz jednoznaczności rozwiązań równania (5.17).

Niech $\{\bar{X}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ będzie procesem zdefiniowanym w (5.21). Dzięki zbieżności (5.22) dla dowodu wystarczy pokazać, że $\sup_{t\leqslant T}|\bar{X}^n_t - X_t| \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$, $T\in\mathbb{R}^+$. Na mocy twierdzenia 5.9 ciąg $\{Y^{H,n}\}$ jest jednostajnie jędrny, co razem z twierdzeniem 1.30 pociąga zbieżność: $\sup_{t\leqslant T}|Y^{H,n}_t - Y^H_t| \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$, $T\in\mathbb{R}^+$. Mając na uwadze twierdzenie Riesza, bez zmniejszenia ogólności rozważań, możemy założyć, że $\sup_{t\leqslant T}|Y^{H,n}_t - Y^H_t| \to 0$ P-p.w. dla każdego $T\in\mathbb{R}^+$. Analogicznie do dowodu twierdzenia 2.23 stosując fakt 2.22, dostajemy

$$\bar{X}^n \longrightarrow X_0 + \int_0^{\cdot} f(s,X_s)\,db_s + \int_0^{\cdot} g(s,X_s)\,dY^H_s \quad P\text{-p.w. w } \mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}).$$

Ponieważ proces graniczny posiada ciągłe trajektorie, więc $\sup_{t\leqslant T}|\bar{X}^n_t - X_t| \to 0$ P-p.w. dla dowolnego $T\in\mathbb{R}^+$, co kończy dowód (ii) i całego twierdzenia. □

5.3 Aproksymacja rozwiązań srr z barierami względem ułamkowego ruchu Browna

Niech $B^H = (B^{H,1},\ldots,B^{H,d})$, gdzie $B^{H,1},\ldots,B^{H,d}$ są niezależnymi ułamkowymi ruchami Browna zdefiniowanymi na przestrzeni $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+},P)$ oraz $Y^H = (Y^{H,1},\ldots,Y^{H,d})$, gdzie dla każdego $i=1,\ldots,d$ proces $Y^{H,i}$ jest całką Wienera: $Y^{H,i} = \int_0^{\cdot}\sigma^i_s\,dB^{H,i}_s$ dla $\sigma^i\in\mathbb{L}^{1/H}_{loc}$. Ponadto niech L, U będą d-wymiarowymi procesami o ciągłych trajektoriach takimi, że $L\leqslant U$. Rozważmy następujące równanie z barierami:

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s,X_s)\,db_s + \int_0^t g(s,X_s)\,dY^H_s + K_t, \quad t\in\mathbb{R}^+, \tag{5.23}$$

gdzie X_0 jest $\mathcal{F}_0$-mierzalną, d-wymiarową zmienną losową, $L_0\leqslant X_0\leqslant U_0$, $b:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, $f:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$, $g:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{M}^d$. Na mocy faktu 1.18 równanie (5.23) jest szczególnym przypadkiem równania (3.9).

Twierdzenie 5.12. *Załóżmy* (H1) *dla pewnego $p\in(1/H,2)$,* (H2) *oraz dodatkowo, że istnieje $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptowany proces H o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^d)$ i lokalnie skończonej p-wariacji, spełniający warunek: $L\leqslant H\leqslant U$. Wówczas równanie* (5.23) *posiada jednoznaczne mocne rozwiązanie (X,K) wśród procesów o lokalnie skończonej p-wariacji. Ponadto, jeżeli dla każdego $n\in\mathbb{N}$ $X^n_0 = X_0$ oraz (X^n,K^n) dany jest wzorem:*

$$(X^n_t,\,K^n_t) = (X^n_{k/n},\,K^n_{k/n}),\quad t\in[k/n,\,(k+1)/n),\ k\in\mathbb{N}\cup\{0\},$$

gdzie

$$\begin{cases} Y^n_{(k+1)/n} &= Y^n_{k/n} + f(k/n,X^n_{k/n})(b_{(k+1)/n}-b_{k/n}) + g(k/n,X^n_{k/n})(Y^H_{(k+1)/n}-Y^H_{k/n}),\\ X^n_{(k+1)/n} &= \max\{\min\{X^n_{k/n} + (Y^n_{(k+1)/n}-Y^n_{k/n}),\,U_{(k+1)/n}\},\,L_{(k+1)/n}\Big\},\\ K^n_{(k+1)/n} &= K^n_{k/n} + (X^n_{(k+1)/n}-X^n_{k/n}) - (Y^n_{(k+1)/n}-Y^n_{k/n}),\end{cases}$$

to dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ zachodzi zbieżność:

$$\sup_{t\leqslant T}(|X_t^n - X_t| + |K_t^n - K_t|) \longrightarrow 0 \quad P\text{-}p.w.$$

Dowód. Wynika z wniosku 3.6 (ii), ciągłości funkcji b oraz ciągłości trajektorii procesów Y^H, L i U. □

Twierdzenie 5.13. *Załóżmy* (H1) *dla pewnego $p \in (1/H, 2)$ oraz* (H2). *Niech $\{B^n\}$ będzie ciągiem procesów $\{\mathcal{F}_t^n\}$-adaptowanych o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ takim, że dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ ciąg $\{V_1(B^n)_T\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa oraz $\{Y^{H,n}\}$ będzie ciągiem d-wymiarowych, dyskretnych, $\{\mathcal{F}_t^n\}$-adaptowanych procesów gaussowskich spełniającym warunek* (5.18). *Ponadto niech $\{L^n\}$, $\{U^n\}$, $\{H^n\}$ będą ciągami procesów $\{\mathcal{F}_t^n\}$-adaptowanych o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ takimi, że $L^n \leqslant H^n \leqslant U^n$, $n \in \mathbb{N}$ oraz $\{V_p(H^n)_T\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa, $T \in \mathbb{R}^+$. Jeżeli dla każdego $n \in \mathbb{N}$ $L_0^n \leqslant X_0^n \leqslant U_0^n$,*

$$(X^n, K^n) = ESP\left(X_0^n + \int_0^{\cdot} f(s, X_{s-}^n)\, dB_s^n + \int_0^{\cdot} g(s, X_{s-}^n)\, dY_s^{H,n},\, L^n,\, U^n\right), \tag{5.24}$$

$X_0^n \xrightarrow{\mathcal{P}} X_0$, $Y_t^{H,n} \xrightarrow{\mathcal{P}} Y_t^H$ dla każdego $t \in \mathbb{R}^+$ oraz

$$\sup_{t\leqslant T}(|B_t^n - b_t| + |L_t^n - L_t| + |U_t^n - U_t) \xrightarrow{\ \mathcal{P}\ } 0, \quad T \in \mathbb{R}^+,$$

to

$$\sup_{t\leqslant T}(|X_t^n - X_t| + |K_t^n - K_t|) \xrightarrow{\ \mathcal{P}\ } 0, \quad T \in \mathbb{R}^+,$$

gdzie (X, K) jest jednoznacznym mocnym rozwiązaniem (5.23) *wśród procesów o lokalnie skończonej p-wariacji.*

Dowód. Wiemy, że $\sup_{t\leqslant T}|Y_t^{H,n} - Y_t^H| \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$, $T \in \mathbb{R}^+$ (patrz dowód twierdzenia 5.11) oraz że dla $p > 1/H$ ciąg $\{\bar{V}_p(Y^{H,n})_T\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa (patrz dowód twierdzenia 5.9). Teza twierdzenia jest więc konsekwencją wniosku 3.7 (ii). □

Wniosek 5.14. *Załóżmy* (H1) *dla pewnego $p \in (1/H, 2)$ oraz dodatkowo, że f jest ciągła. Niech $\{B^n\}$ będzie ciągiem $\{\mathcal{F}_t^n\}$-adaptowanych procesów o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ takim, że dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$ ciąg $\{V_1(B^n)_T\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa oraz $\{Y^{H,n}\}$ będzie ciągiem d-wymiarowych, dyskretnych, $\{\mathcal{F}_t^n\}$-adaptowanych procesów gaussowskich spełniającym warunek* (5.18). *Ponadto niech $\{L^n\}$, $\{U^n\}$, $\{H^n\}$ będą ciągami procesów $\{\mathcal{F}_t^n\}$-adaptowanych o trajektoriach w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ takimi, że $L^n \leqslant H^n \leqslant U^n$, $n \in \mathbb{N}$ oraz $\{V_p(H^n)_T\}$ jest ograniczony według prawdopodobieństwa, $T \in \mathbb{R}^+$. Jeżeli $L_0^n \leqslant X_0^n \leqslant U_0^n$, $n \in \mathbb{N}$ oraz*

$$(\,X_0^n,\, B^n,\, Y^{H,n},\, L^n,\, U^n\,) \xrightarrow{\ \mathcal{D}\ } (\,X_0,\, b,\, Y^H,\, L,\, U\,) \text{ w } \mathbb{R} \times \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{3d+1}),$$

to ciąg $\{(X^n, K^n)\}$ zadany wzorem (5.24) *jest jednostajnie jędrny oraz każdy jego punkt skupienia jest słabym rozwiązaniem równania* (5.23) *o lokalnie skończonej p-wariacji. Jeśli* *dodatkowo równanie* (5.23) *posiada własność jednoznaczności trajektorii, to* $(X^n, K^n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X, K)$ *w* $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$*, gdzie* (X, K) *jest jednoznacznym słabym rozwiązaniem* (5.23) *wśród procesów o lokalnie skończonej p-wariacji.*

Dowód. Wystarczy skorzystać z twierdzenia 3.10. □

Niech $W = (W^1, \dots, W^d)$ będzie d-wymiarowym procesem Wienera względem filtracji $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ oraz Y^H będzie $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptowanym procesem takim jak w równaniu (5.23). Rozważmy równanie:

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_{s-})\, dW_s + \int_0^t g(s, X_{s-})\, dY_s^H + K_t, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{5.25}$$

gdzie X_0 jest $\mathcal{F}_0$-mierzalną, d-wymiarową zmienną losową, $L_0 \leqslant X_0 \leqslant U_0$, $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{M}^d$, $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{M}^d$. Oczywiście równanie (5.25) jest szczególnym przypadkiem równania (4.8).

Wniosek 5.15. *Załóżmy* (G1) *dla pewnego* $q \in (2, 1/(1-H))$. *Niech* $\{Y^{H,n}\}$ *będzie ciągiem dyskretnych procesów gaussowskich spełniających warunek* (5.18)*, a* $\{W^n\}$ *będzie ciągiem lokalnych martyngałów spełniającym warunek* (UT)*. Ponadto niech* $\{L^n\}$, $\{U^n\}$, $\{H^n\}$ *będą ciągami procesów o trajektoriach w* $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ *takimi, że* $L^n \leqslant H^n \leqslant U^n$, $n \in \mathbb{N}$ *oraz* $\{\bar{V}_q(H^n)_T\}$ *jest ograniczony według prawdopodobieństwa,* $T \in \mathbb{R}^+$. *Jeżeli* $(X^n, K^n) = ESP(X_0^n + \int_0^{\cdot} f(s, X_{s-}^n)\, dW_s^n + \int_0^{\cdot} g(s, X_{s-}^n)\, dY_s^{H,n}, L^n, U^n)$, $L_0^n \leqslant X_0^n \leqslant U_0^n$, $n \in \mathbb{N}$ *oraz*

$$(\, X_0^n,\, W^n,\, Y^{H,n},\, L^n,\, U^n\,) \xrightarrow{\ \mathcal{D}\ } (\, X_0,\, W,\, Y^H,\, L,\, U\,) \text{ w } \mathbb{R} \times \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{4d}),$$

to ciąg (X^n, K^n) *jest jednostajnie jędrny oraz każdy jego punkt skupienia jest słabym rozwiązaniem równania* (5.25) *o lokalnie skończonej q-wariacji. Jeśli dodatkowo równanie* (5.25) *posiada własność jednoznaczności trajektorii, to* $(X^n, K^n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X, K)$ *w* $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2d})$*, gdzie* (X, K) *jest jednoznacznym słabym rozwiązaniem* (5.25) *wśród procesów o lokalnie skończonej q-wariacji.*

Dowód. Teza wynika z twierdzenia 4.13. □

5.4 Zastosowania w matematyce finansowej

W ostatnich latach ułamkowy ruch Browna był dość często wykorzystywany w modelach rynków finansowych. Ponieważ proces ten nie jest semimartyngałem, na rynkach z ułamkowym ruchem Browna występuje arbitraż (patrz [65]) i klasyczne podejście Blacka-Scholesa do wyceny opcji nie znajduje zastosowania.

Istnieje wiele różnych podejść do tego problemu. Cheridido [12] pokazał, że ograniczając dopuszczalną klasę strategii do procesów dyskretnych o dowolnie małym, ale ustalonym minimalnym odstępie czasu między skokami, możemy pozbyć się arbitrażu. Niestety przy tym ograniczeniu najtańszą strategią zabezpieczającą europejską opcje kupna jest strategia polegająca na kupieniu akcji w chwili zero i trzymaniu jej aż do chwili realizacji opcji.

Innym sposobem uniknięcia arbitrażu jest dodanie do modelu kosztów transakcji. Tym zagadnieniem zajmował się Guasoni [28, 29]. Zastosowanie tzw. *produktu Wicka* do wyceny opcji badali m.in. Bender i Parczewski [4], Elliott i van der Hoek [22] oraz Mishura [50]. W pracy [85] Valkeila zaproponował zdefiniowanie ceny sprawiedliwej jako wartości oczekiwanej względem pewnej nowej miary probabilistycznej, którą autor nazwał *average risk neutral measure* (patrz również [80, 81]).

Zajmiemy się zastosowaniem tzw. *aktuarialnej wyceny opcji* wprowadzonej w [8]. Niech $\mu, \sigma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ będą zadanymi funkcjami deterministycznymi, $\mu \in \mathbb{L}^1_{loc}$, $\sigma \in \mathbb{L}^{1/H}_{loc}$. W rozważanym przez nas modelu dostępne są dwa aktywa, akcje $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ oraz obligacje $\{B_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ modelowane za pomocą procesów danych wzorami:

$$B_t = \exp(rt), \quad S_t = S_0 \exp\Big(\int_0^t \mu_s\, ds + \int_0^t \sigma_s\, dB^H_s\Big), \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{5.26}$$

gdzie S_0, $r \geqslant 0$, $Y^H = \int_0^t \sigma_s\, dB^H_s$, $t \in \mathbb{R}^+$. Korzystając z twierdzenia 5.7 oraz wzoru Itô dla procesu Y^H (patrz np. [51, Section 2.7.2]) można pokazać, że proces $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ jest jednoznacznym mocnym rozwiązaniem równania (5.17) dla $b_t = \int_0^t \mu_s\, ds$ oraz $f(t,x) = g(t,x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^+$.

Definicja 5.16 (Bladt, Rydberg [8]). Rozważmy opcje postaci $F_T = F_T(S,K)$, gdzie $F_T : \mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest taka, że $F_T(x,y) = F_T(x^T,y)$, $x^T_t = x_{t\wedge T}$ dla wszystkich $x \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$, $y \in \mathbb{R}$. *Aktuarialna cena* $\Psi(F_T)$ opcji dana jest wzorem

$$\Psi(F_T) = E(F_T(\tilde{S},\tilde{K})), \tag{5.27}$$

gdzie $\tilde{S}_t = S_t \exp(-\int_0^t \nu_s\, ds)$, $t \in [0,T]$, $\tilde{K} = Ke^{-rT}$ oraz $\nu : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ jest tzw. *oczekiwaną stopą zwrotu* procesu S zdefiniowaną następująco: $\exp\left(\int_0^t \nu_s\, ds\right) = S_0^{-1} E S_t,\ t \in [0,T]$.

Twierdzenie 5.17. *Jeżeli $F_T(S,K) = f(S_T,K)$ dla pewnej $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takiej, że $f(cx,cy) = cf(x,y)$, $c \in \mathbb{R}^+$, $x,y \in \mathbb{R}$, to*

$$\Psi(F_T) = \exp(-rT) E f\left(S_0 \exp\left(rT - \frac{\langle\sigma,\sigma\rangle^H_T}{2} + \int_0^T \sigma_s\, dB^H_s\right), K\right),$$

gdzie nawias $\langle\sigma,\sigma\rangle^H_T$ jest zdefiniowany w (1.5).

Dowód. Korzystając z twierdzenia Fubiniego dla dowolnego $\sigma \in \mathbb{L}^{1/H}_{loc}$, mamy

$$\begin{aligned}
&2\int_0^t |\sigma_s|\Big(\int_0^s |\sigma_r|(s-r)^{2H-2}\, dr\Big) ds \\
&\quad= \int_0^t |\sigma_s|\left(\int_0^s |\sigma_r|(s-r)^{2H-2}\, dr\right) ds + \int_0^t |\sigma_r|\left(\int_0^r |\sigma_s|(r-s)^{2H-2} ds\right) dr \\
&\quad= \int_0^t |\sigma_s|\left(\int_0^s |\sigma_r|(s-r)^{2H-2}\, dr\right) ds + \int_0^t |\sigma_s|\left(\int_s^t |\sigma_r|(r-s)^{2H-2}\, dr\right) ds \\
&\quad= \int_0^t \int_0^t |\sigma_s||\sigma_r||s-r|^{2H-2}\, dr\, ds = \frac{1}{H(2H-1)}\langle|\sigma|,|\sigma|\rangle^H_T.
\end{aligned}$$

Zatem na mocy (1.6) funkcja $g_s = H(2H-1)\sigma_s \left(\int_0^s \sigma_r (s-r)^{2H-2}\, dr\right)$, $s \in [0,T]$, jest całkowalna na $[0,T]$. Stosując ponownie twierdzenie Fubiniego, otrzymujemy

$$\int_0^t g_s\, ds = \frac{H(2H-1)}{2} \int_0^t \int_0^t \sigma_s \sigma_r |s-r|^{2H-2}\, dr\, ds = \frac{\langle \sigma, \sigma \rangle_t^H}{2}, \quad t \in [0,T].$$

Ponieważ

$$S_0^{-1} E S_t = \exp\left(\int_0^t \mu_s\, ds\right) E\left(\exp \int_0^t \sigma_s\, dB_s^H\right), \quad t \in [0,T]$$

oraz na mocy (1.4) $E \exp(\int_0^t \sigma_s dB_s^H) = \exp(\frac{\langle \sigma,\sigma \rangle_t^H}{2})$, więc jest jasne, że

$$\nu_t = \mu_t + g_t, \quad t \in [0,T]. \tag{5.28}$$

W konsekwencji $\tilde{S}_t = S_0 \exp(-\frac{\langle \sigma,\sigma \rangle_t^H}{2} + \int_0^t \sigma_s\, dB_s^H)$, $t \in [0,T]$. Wreszcie z własności funkcji f:

$$\begin{aligned} Ef(\tilde{S}_T, \tilde{K}) &= Ef\left(S_0 \exp\left(-\frac{\langle \sigma,\sigma \rangle_T^H}{2} + \int_0^T \sigma_s\, dB_s^H\right), \exp(-rT)K\right) \\ &= \exp(-rT) Ef\left(S_0 \exp\left(rT - \frac{\langle \sigma,\sigma \rangle_T^H}{2} + \int_0^T \sigma_s\, dB_s^H\right), K\right), \end{aligned}$$

co kończy dowód twierdzenia. □

Wniosek 5.18. *Cena aktuarialna europejskiej opcji kupna o terminie realizacji T i cenie wykupu K dana jest wzorem:*

$$\Psi((S_T - K)^+) = S_0 \mathcal{N}(y_1) - K e^{-rT} \mathcal{N}(y_2), \tag{5.29}$$

gdzie

$$y_1 = \frac{\log \frac{S_0}{K} + rT + \frac{1}{2}\langle \sigma,\sigma \rangle_T^H}{\sqrt{\langle \sigma,\sigma \rangle_T^H}}, \quad y_2 = \frac{\log \frac{S_0}{K} + rT - \frac{1}{2}\langle \sigma,\sigma \rangle_T^H}{\sqrt{\langle \sigma,\sigma \rangle_T^H}},$$

a $\mathcal{N}$ oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego.

Dowód. Wystarczy zastosować twierdzenie 5.17 dla $f(x,y) = (x-y)^+$ oraz wykonać elementarne operacje z dowodu klasycznej formuły Blacka-Scholesa. □

Powyższe wyniki dotyczą opcji zależnych od wartości procesu cen w momencie wykonania. Do wyceny opcji zależnych od całej trajektorii procesu cen wykorzystamy rezultaty dotyczące aproksymacji rozwiązań równań względem ułamkowego ruchu Browna. Rozważmy następujący ciąg aproksymacji procesu S: $S_0^n = S_0$,

$$S_{k+1/n}^n = S_{k/n}^n + S_{k/n}^n \int_{k/n}^{(k+1)/n} \mu_s\, ds + S_{k/n}^n (Y_{(k+1)/n}^{H,n} - Y_{k/n}^{H,n}) \tag{5.30}$$

oraz $S_t^n = S_{k/n}^n$, $t \in [k/n, (k+1)/n)$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, gdzie $\{Y^{H,n}\}$ jest ciągiem dyskretnych procesów gaussowskich spełniających warunek (5.18).

Twierdzenie 5.19. *Niech* $\tilde{S}^n_t = S^n_t \exp(-\int_0^t \nu_s\, ds)$, $t \in [0,T]$, $n \in \mathbb{N}$. *Jeżeli* $Y^{H,n} \xrightarrow{\mathcal{D}_f} Y^H$, $F_T : \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest ciągła oraz ciąg* $\{F_T(\tilde{S}^n, \tilde{K})\}$ *jest jednostajnie całkowalny, to*

$$\Psi(F_T) = E(F_T(\tilde{S}, \tilde{K})) = \lim_{n\to\infty} E(F_T(\tilde{S}^n, \tilde{K})).$$

Dowód. Stosując twierdzenie 5.11 dla $b_t = \int_0^t \mu_s\, ds$ oraz $f(t,x) = g(t,x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^+$, otrzymujemy, że $S^n \xrightarrow{\mathcal{D}} S$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Stąd $\tilde{S}^n \xrightarrow{\mathcal{D}} \tilde{S}$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Ponieważ F_T jest ciągła, również $F_T(\tilde{S}^n, \tilde{K}) \xrightarrow{\mathcal{D}} F_T(\tilde{S}, \tilde{K})$. Teza wynika więc z faktu, że ciąg $\{F_T(\tilde{S}^n, \tilde{K})\}$ jest jednostajnie całkowalny. □

Przykład 5.20 (Azjatycka opcja kupna). Jako przykład zastosowania powyższego twierdzenia pokażemy, że jeżeli

$$F_T(x,y) = \left(\frac{1}{T}\int_0^T x_t dt - y\right)^+, \quad x \in \mathbb{D}([0,T], \mathbb{R}),\ y \in \mathbb{R}, \tag{5.31}$$

to

$$\Psi(F_T) = \lim_{n\to\infty} E(F_T(\tilde{S}^n, \tilde{K})), \tag{5.32}$$

gdzie $\{\tilde{S}^n\}$ jest ciągiem procesów zdefiniowanym w (5.30). Istotnie, ponieważ $x \mapsto \frac{1}{T}\int_0^T x_s ds$ jest ciągła, również F_T jest ciągła. Dokładniej, jeżeli $x^n \to x$ w $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, to $x^n_t \to x_t$ dla prawie wszystkich $t \in \mathbb{R}^+$ względem miary Lebesgue'a oraz ciąg $\{\sup_{t\leqslant T} |x^n_t|\}$ jest ograniczony. Korzystając z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej, mamy

$$F_T(x^n, y) = \left(\frac{1}{T}\int_0^T x^n_t\, dt - y\right)^+ \longrightarrow \left(\frac{1}{T}\int_0^T x_t\, dt - y\right)^+ = F_T(x,y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Ponadto

$$\left(\frac{1}{T}\int_0^T \tilde{S}^n_t dt - \tilde{K}\right)^+ \leqslant \frac{C_T}{T}\int_0^T S^n_t\, dt,$$

gdzie $C_T = \sup_{t\leqslant T} \exp(-\int_0^t \nu_s\, ds)$. W konsekwencji dla $p \in (1/H, 2)$, $n \in \mathbb{N}$

$$E|F_T(\tilde{S}^n, \tilde{K})|^p \leqslant \frac{C_T^{1/H}}{T}\int_0^T E(S^n_t)^p\, dt.$$

Zauważmy, że

$$\sup_{t\leqslant T} \|S^n_t\|_p \leqslant \sup_{t\leqslant T} \|S^n_t - S_0\|_p + \|S_0\|_p \leqslant \widetilde{V}_p(S^n)_T + \|S_0\|_p\,,$$

gdzie $\widetilde{V}_p(X)_T = \sup\{(\sum_{i=1}^n E|X_{t_i} - X_{t_{i-1}}|^p)^{1/p}\,;\, 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T\}$ oznacza tzw. q-wariację całkową procesu $X = \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ na $[0,T]$. Pokażemy, że

$$\sup_n \widetilde{V}_p(S^n)_T < \infty, \quad T \in \mathbb{R}^+. \tag{5.33}$$

W tym celu korzystając ze stochastycznej nierówności Younga (patrz [77, Lemma 2.3]) dla $q < 1/(1-H)$, uzyskujemy

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_p(S^n)_t &\leqslant \sup_{s\leqslant t}\|S^n_s\|_p \int_0^{[nt]/n} \mu_s\,ds + C(p,q,H)\|\sigma\|_{\mathbb{L}^{1/H}_{[0,t]}}\left(\widetilde{V}_q(S^n)_t + \|S_0\|_q\right)\\ &\leqslant \left(\int_0^t \mu_s\,ds + C(p,q,H)\|\sigma\|_{\mathbb{L}^{1/H}_{[0,t]}}\right)\left(\widetilde{V}_p(S^n)_t + \|S_0\|_p\right), \quad t\in\mathbb{R}^+.\end{aligned}$$

Określając $t_1 = \inf\{t>0\,;\,\int_0^t \mu_s\,ds > 1/4 \text{ lub } C(p,q,H)\|\sigma\|_{\mathbb{L}^{1/H}_{[0,t]}} > 1/4\}\wedge T$, otrzymujemy

$$\widetilde{V}_p(X^n)_{t_1} \leqslant \frac{1}{2}\left(\widetilde{V}_p(X^n)_{t_1} + \|X_0\|_p\right).$$

Zatem $\sup_n \widetilde{V}_p(X^n)_{t_1} < \infty$. Powtarzając powyższe rozumowanie dla przedziałów $[t_1,t_2]$, $[t_2,t_3]$, ..., w skończenie wielu krokach pokażemy (5.33). Korzystając z (5.33), dostajemy oszacowanie $\sup_n E|F_T(\tilde{S}^n,\tilde{K})|^p < \infty$. Zatem $\{F_T(\tilde{S}^n,\tilde{K})\}$ jest jednostajnie całkowalny, co kończy dowód (5.32).

Uwaga 5.21. Korzystając z faktu 5.5 oraz uwagi 5.6, możemy obliczyć cenę azjatyckiej opcji kupna z określonym błędem. W tym celu rozważmy aproksymacje postaci:

$$X^n_t = S_0\exp(\int_0^t \mu_s\,ds + Y^{H,n}_t) \text{ oraz } \bar{X}^n_t = S_0\exp(\int_0^t \mu_s\,ds + \bar{Y}^{H,n}_t), \quad t\in[0,T],\ n\in\mathbb{N}.$$

Niech F_T będzie dana wzorem (5.31), $\tilde{X}^n_t = X^n_t\exp(-\int_0^t \nu_s\,ds)$ i $\hat{X}^n_t = \bar{X}^n_t\exp(-\int_0^t \nu_s\,ds)$ $t\in[0,T]$, $n\in\mathbb{N}$. Pokażemy, że istnieje stała $C>0$ dla której

$$\begin{aligned}\left|EF_T(\tilde{X}^n,\tilde{K}) - \Psi(F_T)\right| \leqslant C\Big((\varepsilon_n(\sigma,T))^{1/2} &+ \|\sigma - h\|_{\mathbb{L}^{1/H}_{[0,T]}}\\ &+ (V_1(h)_T + |h_0|)\sup_{t\leqslant T}(E|B^{H,n}_t - B^{H,(n)}_t|^2)^{1/2}\Big),\end{aligned} \tag{5.34}$$

gdzie $\varepsilon_n(\sigma,T)$ jest zdefiniowane w (5.10), $h\in\mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ jest dowolną funkcją o skończonej wariacji na $[0,T]$ oraz że

$$E|F_T(\hat{X}^n,\tilde{K}) - \Psi(F_T)| \leqslant C(\varepsilon_n(\sigma,T))^{1/2}. \tag{5.35}$$

Aby udowodnić (5.34), zauważmy najpierw, że na mocy lipschitzowskości F_T oraz twierdzenia Fubiniego mamy

$$\begin{aligned}\left|EF_T(\tilde{X}^n,\tilde{K}) - \Psi(F_T)\right| &= \left|EF_T(\tilde{X}^n,\tilde{K}) - EF_T(\tilde{S},\tilde{K})\right|\\ &\leqslant E|F_T(\tilde{X}^n,\tilde{K}) - F_T(\tilde{S},\tilde{K})|\\ &\leqslant \frac{1}{T}\int_0^T E|\tilde{X}^n_t - \tilde{S}_t|\,dt.\end{aligned} \tag{5.36}$$

Ponieważ $\tilde{X}^n_t = S_0\exp(-\frac{\langle\sigma,\sigma\rangle^H_t}{2} + Y^{H,n}_t)$ oraz $\tilde{S}_t = S_0\exp(-\frac{\langle\sigma,\sigma\rangle^H_t}{2} + Y^H_t)$, jest jasne, że

$$\tilde{X}^n_t - \tilde{S}_t = S_0\exp\left(-\frac{\langle\sigma,\sigma\rangle^H_t}{2}\right)\left(\exp(Y^{H,n}_t - Y^H_t) - 1\right)\exp(Y^H_t).$$

Stąd oraz z nierówności $|e^x - 1| \leqslant |x|e^{|x|}$ uzyskujemy, że

$$\begin{aligned} I_t^n = E\left|\tilde{X}_t^n - \tilde{S}_t\right| &\leqslant S_0 \exp\left(-\frac{\langle\sigma,\sigma\rangle_t^H}{2}\right) E\left(|Y_t^{H,n} - Y_t^H| \exp(|Y_t^{H,n} - Y_t^H| + Y_t^H)\right) \\ &\leqslant S_0 \exp\left(-\frac{\langle\sigma,\sigma\rangle_t^H}{2}\right) E\Big(|Y_t^{H,n} - Y_t^H| \exp(|Y_t^{H,n}|) \exp(2|Y_t^H|)\Big). \end{aligned}$$

W konsekwencji, korzystając z nierówności Schwarza, otrzymujemy

$$I_t^n \leqslant S_0 \exp\left(-\frac{\langle\sigma,\sigma\rangle_t^H}{2}\right) (E|Y_t^{H,n} - Y_t^H|^2)^{1/2} (E\exp(4|Y_t^{H,n}|))^{1/4} (E\exp(8|Y_t^H|))^{1/4}.$$

Ponieważ Y^H i $Y^{H,n}$ są procesami gaussowskimi oraz $\sup_{t\leqslant T}\sup_n E|Y_t^{H,n}|^2 < \infty$, istnieje stała $c_T > 0$ taka, że $I_t^n \leqslant c_T(E|Y_t^{H,n} - Y_t^H|^2)^{1/2}$, co razem z (5.36) pociąga, że

$$|EF_T(\tilde{X}^n, \tilde{K}) - \Psi(F_T)| \leqslant c_T \sup_{t\leqslant T}(E|Y_t^{H,n} - Y_t^H|^2)^{1/2}.$$

Z powyższej nierówności oraz z faktu 5.5 wnioskujemy (5.34). Podobnie korzystając z uwagi 5.6, uzyskujemy (5.35).

Bibliografia

[1] V. Acary, O. Bonnefon, B. Brogliato. *Nonsmooth modeling and simulation for switched circuits.* Springer, Dordrecht, 2011.

[2] S. Asmussen. Queueing simulation in heavy traffic. *Math. Oper. Res.*, 17(1):84–111, 1992.

[3] H. Benabdellah. Existence of solutions to the nonconvex sweeping process. *J. Differential Equations*, 164(2):286–295, 2000.

[4] C. Bender, P. Parczewski. On the connection between discrete and continuous Wick calculus with an application to the fractional Black-Scholes model. *Stochastic Processes, Filtering, Control and Their Applications, World Scientific*, 2012.

[5] F. Bernicot, J. Venel. Stochastic perturbation of sweeping process and a convergence result for an associated numerical scheme. *J. Differential Equations*, 251(4-5):1195–1224, 2011.

[6] M. Besalú, C. Rovira. Stochastic delay equations with non-negativity constraints driven by fractional Brownian motion. *Bernoulli*, 18(1):24–45, 2012.

[7] P. Billingsley. *Convergence of probability measures.* John Wiley & Sons, Inc., New York, wydanie drugie, 1999.

[8] M. Bladt, T. H. Rydberg. An actuarial approach to option pricing under the physical measure and without market assumptions. *Insurance Math. Econom.*, 22(1):65–73, 1998.

[9] K. Burdzy, W. Kang, K. Ramanan. The Skorokhod problem in a time-dependent interval. *Stochastic Process. Appl.*, 119(2):428–452, 2009.

[10] C. Castaing, T. X. Dúc Hā, M. Valadier. Evolution equations governed by the sweeping process. *Set-Valued Anal.*, 1(2):109–139, 1993.

[11] C. Castaing, M. D. P. Monteiro Marques. BV periodic solutions of an evolution problem associated with continuous moving convex sets. *Set-Valued Anal.*, 3(4):381–399, 1995.

[12] P. Cheridito. Arbitrage in fractional Brownian motion models. *Finance Stoch.*, 7(4):533–553, 2003.

[13] G. Colombo, V. V. Goncharov. The sweeping processes without convexity. *Set-Valued Anal.*, 7(4):357–374, 1999.

[14] G. Colombo, M. D. P. Monteiro Marques. Sweeping by a continuous prox-regular set. *J. Differential Equations*, 187(1):46–62, 2003.

[15] L. Decreusefond, A. S. Üstünel. Stochastic analysis of the fractional Brownian motion. *Potential Anal.*, 10(2):177–214, 1999.

[16] P. Drábek, P. Krejčí, P. Takáč. *Nonlinear differential equations.* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 1999.

[17] R. Dudley, R. M. Norvaiša. *An Introduction to P-variation and Young Integrals.* Lecture Notes No. 1. MaPhySto, Department of Mathematical Sciences, University of Aarhus, 1999.

[18] R. M. Dudley. Picard iteration and p-variation: The work of Lyons (1994). *Mini-proceedings: Workshop on Product Integrals and Pathwise Integration, MaPhySto*, 1999.

[19] R. M. Dudley, R. Norvaiša. *Concrete functional calculus.* Springer, New York, 2011.

[20] P. Dupuis, H. Ishii. On Lipschitz continuity of the solution mapping to the Skorokhod problem, with applications. *Stochastics Stochastics Rep.*, 35(1):31–62, 1991.

[21] P. Dupuis, K. Ramanan. A multiclass feedback queueing network with a regular Skorokhod problem. *Queueing Syst.*, 36(4):327–349, 2000.

[22] R. J. Elliott, J. van der Hoek. A general fractional white noise theory and applications to finance. *Math. Finance*, 13(2):301–330, 2003.

[23] A. Falkowski. Actuarial approach to option pricing in a fractional Black-Scholes model with time-dependent volatility. *Bull. Pol. Acad. Sci. Math.*, 61(2):181–193, 2013.

[24] A. Falkowski, L. Słomiński. SDEs with constraints driven by processes with bounded p-variation. przyjęte do druku w *Probab. Math. Statist.* `arXiv:1405.3853 [math.PR]`, 2015.

[25] A. Falkowski, L. Słomiński. Sweeping processes with stochastic perturbations generated by a fractional Brownian motion. `arXiv:1505.01315 [math.CA]`, 2015.

[26] A. Falkowski, L. Słomiński, B. Ziemkiewicz. Weak and strong discrete-time approximation of fractional sdes. *Lithuanian Math. J.*, 54(4):409–428, 2014.

[27] M. Ferrante, C. Rovira. Stochastic differential equations with non-negativity constraints driven by fractional Brownian motion. *J. Evol. Equ.*, 13(3):617–632, 2013.

[28] P. Guasoni. No arbitrage under transaction costs, with fractional Brownian motion and beyond. *Math. Finance*, 16(3):569–582, 2006.

[29] P. Guasoni, M. Rásonyi, W. Schachermayer. Consistent price systems and face-lifting pricing under transaction costs. *Ann. Appl. Probab.*, 18(2):491–520, 2008.

[30] J. Guerra, D. Nualart. Stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion and standard Brownian motion. *Stoch. Anal. Appl.*, 26(5):1053–1075, 2008.

[31] I. Gyöngy, N. Krylov. Existence of strong solutions for Itô's stochastic equations via approximations. *Probab. Theory Related Fields*, 105(2):143–158, 1996.

[32] J. Jacod, A. N. Shiryaev. *Limit theorems for stochastic processes.* Springer-Verlag, Berlin, wydanie drugie, 2003.

[33] N. C. Jain, D. Monrad. Gaussian measures in B_p. *Ann. Probab.*, 11(1):46–57, 1983.

[34] A. Jakubowski. A non-Skorohod topology on the Skorohod space. *Electron. J. Probab.*, 2(4):1–21, 1997.

[35] A. Jakubowski, J. Mémin, G. Pagès. Convergence en loi des suites d'intégrales stochastiques sur l'espace $\mathbf{D}^1$ de Skorokhod. *Probab. Theory Related Fields*, 81(1):111–137, 1989.

[36] P. Krée, C. Soize. *Mathematics of random phenomena.* D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1986.

[37] K. Kubilius. The existence and uniqueness of the solution of the integral equation driven by fractional Brownian motion. *Lithuanian Math. J.*, 40(Special Issue):104–110, 2000.

[38] K. Kubilius. The existence and uniqueness of the solution of an integral equation driven by a p-semimartingale of special type. *Stochastic Process. Appl.*, 98(2):289–315, 2002.

[39] K. Kubilius. On weak and strong solutions of an integral equation driven by a continuous p-semimartingale. *Lithuanian Math. J.*, 43(1):38–58, 2003.

[40] K. Kubilius. On weak solutions of an integral equation driven by a p-semimartingale of special type. *Proceedings of the Eighth Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics, Part I*, 78:233–242, 2003.

[41] K. Kubilius. On the convergence of stochastic integrals with respect to p-semimartingales. *Statist. Probab. Lett.*, 78(15):2528–2535, 2008.

[42] K. Kubilius. On tightness of solutions of stochastic integral equations driven by p-semimartingales. *Lith. Math. J.*, 49(3):271–286, 2009.

[43] S. J. Lin. Stochastic analysis of fractional Brownian motions. *Stochastics Stochastics Rep.*, 55(1-2):121–140, 1995.

[44] T. Lindvall. Weak convergence of probability measures and random functions in the function space $D(0, \infty)$. *J. Appl. Probability*, 10:109–121, 1973.

[45] P.-L. Lions, A.-S. Sznitman. Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 37(4):511–537, 1984.

[46] T. Lyons. Differential equations driven by rough signals. I. An extension of an inequality of L. C. Young. *Math. Res. Lett.*, 1(4):451–464, 1994.

[47] J. Mémin, Y. Mishura, E. Valkeila. Inequalities for the moments of wiener integrals with respect to a fractional brownian motion. *Statist. Probab. Lett.*, 51(2):197–206, 2001.

[48] J. Mémin, L. Słomiński. Condition UT et stabilité en loi des solutions d'équations différentielles stochastiques. *Séminaire de Probabilités, XXV, Lecture Notes in Math.*, 1485:162–177, 1991.

[49] M. Métivier. *Semimartingales - a Course on Stochastic Processes.* Walter de Gruyter & Co., Berlin-New York, 1982.

[50] Y. Mishura. Fractional stochastic integration and Black-Scholes equation for fractional Brownian model with stochastic volatility. *Stoch. Stoch. Rep.*, 76(4):363–381, 2004.

[51] Y. S. Mishura. *Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes.* Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[52] M. D. P. Monteiro Marques. *Differential inclusions in nonsmooth mechanical problems.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.

[53] J. J. Moreau. Rafle par un convexe variable. I. *Séminaire d'Analyse Convexe, Vol. I, Exp. No. 15*, 1971.

[54] J. J. Moreau. Rafle par un convexe variable. II. *Séminaire d'Analyse Convexe, Vol. II, Exp. No. 3*, 1972.

[55] J.-J. Moreau. Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space. *J. Differential Equations*, 26(3):347–374, 1977.

[56] A. Nieminen. Fractional Brownian motion and martingale-differences. *Statist. Probab. Lett.*, 70(1):1–10, 2004.

[57] R. Norvaiša. Nonlinear integral equations with respect to functions having bounded p-variation. *Lith. Math. J.*, 53(3):324–335, 2013.

[58] R. Norvaiša. Quadratic variation, p-variation and integration with applications to stock price modelling. `arXiv:math/0108090 [math.CA]` , 2001.

[59] D. Nualart, A. Răşcanu. Differential equations driven by fractional Brownian motion. *Collect. Math.*, 53(1):55–81, 2002.

[60] P. Parczewski. A fractional Donsker theorem. *Stoch. Anal. Appl.*, 32(2):328–347, 2014.

[61] V. Pipiras, M. S. Taqqu. Are classes of deterministic integrands for fractional Brownian motion on an interval complete? *Bernoulli*, 7(6):873–897, 2001.

[62] P. Protter. *Stochastic integration and differential equations: A New Approach*. Springer-Verlag, Berlin, wydanie drugie, 1992.

[63] R. Rebolledo. Central limit theorems for local martingales. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 51(3):269–286, 1980.

[64] D. Revuz, M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*. Springer-Verlag, Berlin, wydanie trzecie, 1999.

[65] L. C. G. Rogers. Arbitrage with fractional Brownian motion. *Math. Finance*, 7(1):95–105, 1997.

[66] A. Rozkosz. On a decomposition of symmetric diffusions with reflecting boundary conditions. *Stochastic Process. Appl.*, 103(1):101–122, 2003.

[67] M. Rutkowski. Stochastic integral equations with a reflecting barrier. *Demonstratio Math.*, 13(2):483–507, 1980.

[68] A. A. Ruzmaikina. Stieltjes integrals of Hölder continuous functions with applications to fractional Brownian motion. *J. Statist. Phys.*, 100(5-6):1049–1069, 2000.

[69] Y. Saisho. Stochastic differential equations for multidimensional domain with reflecting boundary. *Probab. Theory Related Fields*, 74(3):455–477, 1987.

[70] M. A. Shashiashvili. On the variation of the difference of singular components in the Skorokhod problem and on stochastic differential systems in a half-space. *Stochastics*, 24(3):151–169, 1988.

[71] L. A. Shepp, A. N. Shiryaev. A new look at the "Russian option". *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 39(1):130–149, 1994.

[72] A. V. Skorochod. Limit theorems for stochastic processes. *Theory Probab. Appl.*, 1:261–290, 1956.

[73] A. V. Skorochod. Stochastic equations for diffusion processes in a bounded region. *Theory Probab. Appl.*, 6,7:264–274, 1961.

[74] L. Słomiński. Stability of strong solutions of stochastic differential equations. *Stochastic Process. Appl.*, 31(2):173–202, 1989.

[75] L. Słomiński. On existence, uniqueness and stability of solutions of multidimensional SDEs with reflecting boundary conditions. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 29(2):163–198, 1993.

[76] L. Słomiński, T. Wojciechowski. Stochastic differential equations with time-dependent reflecting barriers. *Stochastics*, 85(1):27–47, 2013.

[77] L. Słomiński, B. Ziemkiewicz. Inequalities for the $\mathbb{L}^p$ norms of integrals with respect to a fractional Brownian motion. *Statist. Probab. Lett.*, 73(1):79–90, 2005.

[78] L. Słomiński, B. Ziemkiewicz. On weak approximations of integrals with respect to fractional Brownian motion. *Statist. Probab. Lett.*, 79(4):543–552, 2009.

[79] T. Sottinen. Fractional Brownian motion, random walks and binary market models. *Finance Stoch.*, 5(3):343–355, 2001.

[80] T. Sottinen, E. Valkeila. Fractional brownian motion as a model in finance. Raport instytutowy Preprint 302 16str, University of Helsinki, Department of Mathematics, 1999.

[81] T. Sottinen, E. Valkeila. On arbitrage and replication in the fractional Black-Scholes pricing model. *Statist. Decisions*, 21(2):93–107, 2003.

[82] C. Stone. Weak convergence of stochastic processes defined on semi-infinite time intervals. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 14:694–696, 1963.

[83] H. Tanaka. Stochastic differential equations with reflecting boundary condition in convex regions. *Hiroshima Math. J.*, 9(1):163–177, 1979.

[84] L. Thibault. Sweeping process with regular and nonregular sets. *J. Differential Equations*, 193(1):1–26, 2003.

[85] E. Valkeila. On some properties of geometric fractional brownian motions. Raport instytutowy Preprint 224 12 str, University of Helsinki, Department of Mathematics, 1999.

[86] T. Yamada, S. Watanabe. On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations. *J. Math. Kyoto Univ.*, 11:155–167, 1971.

[87] B. Ziemkiewicz. *Aproksymacja całki i rozwiązań równań różniczkowych względem ułamkowego procesu Wienera.* Praca doktorska, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, 2006.

Skorowidz oznaczeń

$\mathbb{N}$	zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$
$\mathbb{R}$	zbiór liczb rzeczywistych
$\mathbb{R}^+$	zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych
$\mathbb{R}^d$	zbiór d-wymiarowych wektorów rzeczywistych, $d \in \mathbb{N}$
$\mathbb{M}^d$	zbiór $d \times d$-wymiarowych macierzy rzeczywistych, $d \in \mathbb{N}$
$\lvert x\rvert$	norma Euklidesowa dla $x \in \mathbb{R}^d$ (norma macierzowa dla $x \in \mathbb{M}^d$)
$[x]$	część całkowita $x \in \mathbb{R}$
$(x)^+$	$\max\{0, x\}$ dla $x \in \mathbb{R}$
$(x)^-$	$\max\{0, -x\}$ dla $x \in \mathbb{R}$
$t \wedge s$	$\min\{t, s\}$ dla $t, s \in \mathbb{R}$
$t \vee s$	$\max\{t, s\}$ dla $t, s \in \mathbb{R}$
$\beta(a, b)$	$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ funkcja beta Eulera
$\zeta(x)$	$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^x$ funkcja zeta Riemanna
$\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$	przestrzeń funkcji càdlàg, $x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^d$
Δx_t	$x_t - x_{t-}$ skok funkcji $x \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ w $t \in \mathbb{R}^+$
x_-	funkcja $t \mapsto x_{t-}$
$\mathrm{Osc}(x)_{[a,b]}$	$\sup\{\lvert x_t - x_s\rvert\,;\, a \leqslant t, s \leqslant b\}$
$V_p(x)_{[a,b]}$	p-wariacja funkcji x na $[a, b]$
$\bar{V}_p(x)_{[a,b]}$	$V_p(x)_{[a,b]} + \lvert x_a\rvert$ norma p-wariacyjna
$\mathcal{W}_p([a, b], \mathbb{R}^d)$	zbiór funkcji $x : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ o skończonej p-wariacji
$\mathbb{L}^{1/H}_{[0,T]}$	przestrzeń funkcji $x : [0, T] \to \mathbb{R}$ spełniających warunek $\int_0^T \lvert x_s\rvert^{1/H}\, ds < \infty$
$\mathbb{L}^{1/H}_{loc}$	przestrzeń funkcji $x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ spełniających warunek $\int_0^T \lvert x_s\rvert^{1/H}\, ds < \infty$ dla każdego $T \in \mathbb{R}^+$
$\lVert x\rVert_{\mathbb{L}^{1/H}_{[0,T]}}$	$(\int_0^T \lvert x_s\rvert^{1/H}\, ds)^H$ norma w przestrzeni $\mathbb{L}^{1/H}_{[0,T]}$
$\langle x, y\rangle^H_T$	$H(2H-1)\int_0^T\int_0^T x_t y_s \lvert t-s\rvert^{2H-2}\, ds\, dt$ iloczyn skalarny w przestrzeni $\mathbb{L}^{1/H}_{[0,T]}$
$\varepsilon_n(\sigma, T)$	$\lVert\sigma^n - \sigma\rVert^2_{\mathbb{L}^{1/H}_{[0,T]}} + \sup_{t\leqslant T}(\int_{([nt]/n)}^t \lvert\sigma_s\rvert^{1/H}\, ds)^{2H}$, gdzie $\sigma^n_t = n\int_{(k-1)/n}^{k/n} \sigma_s\, ds$, $t \in [(k-1)/n, k/n)$

$\nabla_x g(t,x)$	$(\nabla_x g^{i,j}(t,x))_{i,j=1,\dots,d}$, gdzie $\nabla_x g^{i,j}(t,x) = (\frac{\partial g^{i,j}}{\partial x_1}(t,x),\dots,\frac{\partial g^{i,j}}{\partial x_d}(t,x))$
$\{\pi^n\}$	$\pi^n = \{0 = t_{n,0} < t_{n,1} < t_{n,2} < \dots\}$ ciąg podziałów $[0,\infty)$
$\operatorname{diam}(\pi_n)$	$\max_{k\in\mathbb{N}}(t_{n,k} - t_{n,k-1})$ średnica podziału π^n
ϱ^n_t	$\varrho^n_t = t_{n,k}$, $t \in [t_{n,k}, t_{n,k+1})$, $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $n \in \mathbb{N}$
$\varrho^\star_n(t)$	$\min\{t_{n,k}; t_{n,k} \geqslant t\}$
$\{\{\delta_{k,i}\}\}$	tablica stałych $\{\delta_{k,i}\,;\, k\in\mathbb{N},\, i \in \mathbb{N}\cup\{0\}\}$
$SP_l(y)$	rozwiązanie problemu Skorochoda stowarzyszonego z $y \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^d)$ oraz dolną barierą $l \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^d)$
$SP^u(y)$	rozwiązanie problemu Skorochoda stowarzyszonego z $y \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^d)$ oraz górną barierą $u \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^d)$
$ESP(y,l,u)$	rozwiązanie problemu Skorochoda stowarzyszonego z $y \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^d)$ oraz dwiema barierami $l,\, u \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^d)$, $l \leqslant u$
$(\Omega,\mathcal{F},P)$	przestrzeń probabilistyczna
$\mathcal{N}$	dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego
EX	wartość oczekiwana zmiennej losowej X
$\|X\|_2$	$(E\|X\|^2)^{1/2}$
$\mathbb{L}^2$	przestrzeń zmiennych losowych spełniających warunek $E\|X\|^2 < \infty$ z normą $\|\cdot\|_2$
$\{\{X_{n,k}\}\}$	tablica zmiennych losowych $\{X_{n,k}\,;\, n\in\mathbb{N},\, k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$
$\{\{\mathcal{F}_{n,k}\}\}$	tablica σ-algebr $\{\mathcal{F}_{n,k}\,;\, n\in\mathbb{N},\, k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$
$X = \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$	proces stochastyczny na przestrzeni $(\Omega,\mathcal{F},P)$
$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$	filtracja
$\{X^n\}$	ciąg procesów stochastycznych, $X^n = \{X^n_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ dla $n \in \mathbb{N}$
$[X]$	$[X]_t = \sum_{i=1}^d [X^i]_t$, gdzie $X = (X^1,\dots,X^d)$ oraz $\{[X^i]_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ oznacza wariację kwadratową procesu X^i
$\langle X\rangle$	$\langle X\rangle = \sum_{i=1}^d \langle X^i\rangle_t$, gdzie $X = (X^1,\dots,X^d)$ oraz $\{\langle X^i\rangle_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ oznacza kompensator prognozowalny wariacji kwadratowej procesu X^i
$\mathcal{L}(X)$	rozkład procesu X
$\widetilde{V}_p(X)_T$	$\sup\{\sum_{i=1}^n E\|X_{t_i} - X_{t_{i-1}}\|^p)^{1/p}\,;\, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ p-wariacja całkowa procesu $X = \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ na $[0,T]$
W	proces Wienera
B^H	ułamkowy ruch Browna
Y^H	$Y^H_t = \int_0^t \sigma_s\, dB^H$ dla $t \in \mathbb{R}^+$, gdzie $\sigma \in \mathbb{L}^{1/H}_{loc}$
$\xrightarrow{\mathcal{P}}$	zbieżność według prawdopodobieństwa
$\xrightarrow{\mathcal{D}}$	zbieżność według rozkładu
$\xrightarrow{\mathcal{D}_f}$	zbieżność rozkładów skończenie wymiarowych
$F_T = F_T(S,K)$	opcja $F_T : \mathbb{D}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\Psi(F_T)$	aktuarialna cena opcji

Indeks