KRZYSZTOF RYKACZEWSKI

STEROWALNOŚĆ I APROKSYMACYJNA STEROWALNOŚĆ INKLUZJI EWOLUCYJNYCH

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA

Rozprawa doktorska napisana pod kierunkiem dra hab. Grzegorza Gabora
Katedra Nieliniowej Analizy Matematycznej i Topologii
Wydział Matematyki i Informatyki
28 stycznia 2015

Krzysztof Rykaczewski:
Sterowalność i aproksymacyjna sterowalność inkluzji ewolucyjnych, Uniwersytet Mikołaja Kopernika

STRONA INTERNETOWA: http://www.mat.umk.pl/~mozgun/

E-MAIL: mozgun@mat.umk.pl

SKŁAD: Praca złożona w systemie LaTeX 2ε z wykorzystaniem pakietu `classicthesis`. Podczas składu użyto wolnych czcionek *Linux Libertine* oraz matematycznych czcionek *Euler*.

RYSUNKI: **Ti*k*z**+**Inkscape**.

STRON: vi+65.

KONWENCJE TYPOGRAFICZNE

Podczas tworzenia niniejszego dokumentu dokonano subiektywnej interpretacji polskich zwyczajów typograficznych w przypadku składu matematycznego.

Wzory wystawione nie są wyśrodkowane, lecz przesunięte nieco w lewo, żeby czytanie było płynniejsze; wszystkie takie wzory są ponumerowane. Twierdzenia, fakty, wnioski, uwagi i przykłady są numerowane według schematu *[nr rozdziału].[nr podrozdziału].[nr twierdzenia]*. Jeśli nie będzie to prowadzić do nieporozumienia, będziemy unikać pisania nawiasów wokół argumentów operatorów.

Na końcu pracy znajdują się Bibliografia, Skorowidz, Lista osób oraz Lista symboli. Bibliografia została podzielona na dwie części: odnośniki do książek i odnośniki do artykułów. Powodem takiego stanu rzeczy jest to, że lista cytowanych książek jest niewielka, więc można ją podczas czytania pracy szybko przyswoić. W tym też celu w odniesieniu do książek zastosowano styl `BibTeX`-a `alphaclassic`, którego odnośniki są zestawieniami inicjałów (w przypadku kilku autorów) lub trzyliterowymi skrótami nazwisk (w przypadku jednego autora), co powinno ułatwić czytanie. Bibliografia, dla szybszego wyszukiwania, prócz danych bibliograficznych zawiera też stronę, na której dana pozycja została zacytowana. W rozprawie stosujemy precyzyjne odwołania do wyników z innych prac, czego wyrazem jest konwencja zapisu w postaci [Odnośnik, Nazwa twierdzenia].

SPIS TREŚCI

SPIS RYSUNKÓW

WSTĘP

Teoria sterowania jest interdyscyplinarną dziedziną matematyki, która obejmuje problemy i metody wyznaczania decyzji sterujących, realizowanych przez urządzenia techniczne. Sterowanie układem uzyskuje się zazwyczaj poprzez odpowiednie manipulowanie parametrem, którym jest funkcja zależna od czasu nazywana *strategią* lub *sterowaniem*.

Wiele problemów sterowania, pochodzących głównie z fizyki, modeluje się równaniami różniczkowymi. Ponadto wiele problemów społecznych, biologicznych i inżynieryjnych można efektywnie opisać przez równania różniczkowe cząstkowe i równania całkowe, a te z kolei mogą być przepisane jako równania różniczkowe w nieskończenie wymiarowych przestrzeniach Banacha.

Rozważmy przykładowy układ, który można opisać pewnym parametrem x. Jeżeli szybkość zmiany zmiennej x w czasie, tzn. wielkość $\dot{x} = dx/dt$, zależy tylko od stanu x, to ewolucja takiego układu może być przedstawiona równaniem różniczkowym zwyczajnym postaci

$$\dot{x} = f(x). \tag{W.1}$$

Znając stan układu $x(t_0)$ w pewnym momencie t_0, jego zachowanie dla $t > t_0$ można wyznaczyć rozwiązując problem (W.1). W przedstawionym modelu, nie mając możliwości wpływu na dynamikę, jesteśmy tylko obserwatorami modelowanego układu. Teoria sterowania daje nam możliwość badania interakcji z układem w czasie jego ewolucji poprzez zmianę parametru v należącego do dopuszczalnej rodziny sterowań $\mathcal{V}$. Dzięki temu wpływowi zamiast zagadnienia (W.1) możemy rozpatrzyć

$$\dot{x} = f(x, v), \quad \text{gdzie}\, v \in \mathcal{V}. \tag{W.2}$$

Przestając być biernym odbiorcą, mogąc oddziaływać na przebieg symulacji, możemy wziąć pod uwagę pewne dodatkowe własności, które chcemy, aby stan układu spełnił, na przykład: przejście z jednego stanu do drugiego (sterowalność), maksymalizacja/minimalizacja pewnej funkcji kosztu itd. Jeśli, powiedzmy, $v = (w, u) \in \mathcal{V} = \mathcal{W} \times \mathcal{U}$, to układ (W.2) można zapisać w postaci

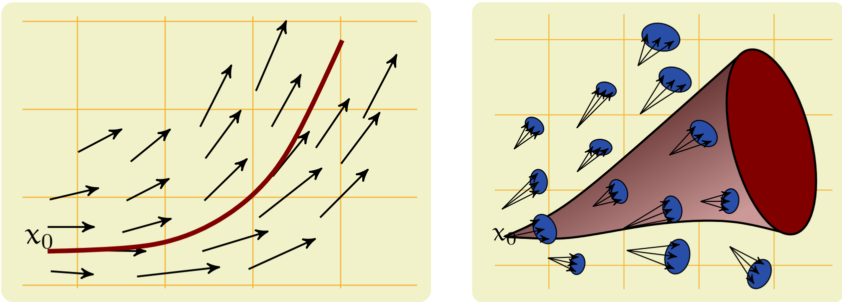
$$\dot{x} \in F(x, u), \quad \text{gdzie}\, u \in \mathcal{U}, \tag{W.3}$$

gdzie $F(x, u) := \{ f(x, w, u) \mid w \in \mathcal{W} \}$. Układy takiej postaci nazywamy *inkluzjami różniczkowymi*. Można je traktować jako uogólnienie równań różniczkowych zwyczajnych, przy czym po prawej stronie zamiast jednego wektora stycznego do rozwiązania stoi cały zbiór. Rysunek 1 poniżej porównuje dynamikę wygenerowaną przez równanie różniczkowe oraz inkluzję różniczkową. Układy postaci (W.3) badano już w latach trzydziestych XX wieku, ale prawdziwy asumpt do badań dał Tadeusz Ważewski stwierdzając ich powiązanie z układami sterowania postaci (W.2). Mianowicie pokazał on, że przy pewnych założeniach regularności na funkcję f układy (W.2) oraz (W.3) mają te same rozwiązania [45, Théorème 1].

Ponadto układy sterowania z dynamiką zadaną poprzez wielowartościowe prawe strony pojawiają się w naturalny sposób w fizyce matematycznej [Pan]. Dla przykładu rozważmy nieliniowe równanie ciepła, w którym występuje sterujący czynnik liniowy

$$y_t(x, t) = \Delta y(x, t) + f\big(t, x, v(t), y(x, t)\big) + Bu(t) \quad \text{dla p.w. } t \in \mathcal{J} := [0, T], \; x \in W, \tag{W.4}$$

gdzie y oznacza stan układu, W jest obszarem w $\mathbb{R}^n$, Δ jest operatorem Laplace'a z warunkami Dirichleta, $f\colon \mathcal{J} \times W \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest odwzorowaniem ciągłym, $u \in L^2(\mathcal{J}, \mathbb{U})$, zaś $v\colon \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ jest takie, że



Rysunek 1: Różne dynamiki różniczkowe.

$v(t) \in V\big(y(\cdot,t)\big)$, dla p.w. $t \in \mathcal{J}$, przy czym $V\colon L^2(W,\mathbb{R}) \to L^2(W,\mathbb{R})$ reprezentuje pewne sprzężenie zwrotne. Przez B oznaczyliśmy liniowy i ciągły operator z $\mathbb{U}$ do $\mathbb{H}$.

Powyższe równania można potraktować jako szczególny przypadek abstrakcyjnej inkluzji semiliniowej postaci

$$\dot{y}(t) \in Ay(t) + F\big(t, y(t)\big) + Bu(t) \quad \text{dla p.w. } t \in \mathcal{J}, \tag{W.5}$$

przyjmując, że $F(t,y) := f\big(t,\cdot,V(y(\cdot)),y(\cdot)\big)$ dla p.w. $t \in \mathcal{J}$ oraz $y \in \mathbb{H} := L^2(W,\mathbb{R})$, a operator $A\colon \mathscr{D}(A) \subset \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ jest generatorem C_0-półgrupy operatorów.

Teoria sterowania układów liniowych w przestrzeniach skończenie wymiarowych jest już dobrze rozwinięta, a szczegóły można znaleźć w wielu pracach i monografiach (patrz np. [8, CZ, BDPDM, Zab] i odwołania tamże). Wielu autorów starało się rozszerzyć koncepcje sterowalności na nieskończenie wymiarowe układy reprezentowane przez równania nieliniowe (por. [3, 32, 33, KOZ]), w badaniu których zazwyczaj używa się teorii punktów stałych. Badanie problemów w teorii sterowania poprzez punkty stałe ma już długą historię [8]. Ponadto późniejszy przegląd postępów w teorii sterowania układów nieliniowych osiągniętych przy użyciu punktów stałych, również z nieliniowymi układami z opóźnieniem, można znaleźć w artykule Balachandrana i Dauera [3]. Prace te używają głównie metrycznej teorii punktów stałych. Dalszy postęp dokonał się poprzez użycie teorii punktów stałych dla odwzorowań kondensujących: twierdzenia Browdera, Sadowskiego, Schaefera (por. [BGN, BHN]). Podejścia te pokazują, że teoria punktów stałych jest odpowiednia do rozwiązywania wielu problemów w teorii sterowania.

Motywacją autora do podjęcia badań w tej tematyce była praca Obukhovskiego i Zecci [33] z 2009 r. dotycząca problemu całkowitej sterowalności, w której autorzy rozważali problem sterowania inkluzją postaci (W.5), gdy operator A generuje C_0-półgrupę operatorów, zaś F jest odwzorowaniem kondensującym ze względu na miarę niezwartości Hausdorffa. Rezultaty w przypadku, gdy prawa strona inkluzji jest kondensującym zaburzeniem zależnej od czasu rodziny operatorów $\{A(t)\}_{t\geqslant 0}$ zostały zawarte w pracy [6].

Kluczowym założeniem, które przyjmuje się rozważając całkowitą sterowalność jest odwracalność operatora sterowalności $\mathcal{B}^T\colon L^2(\mathcal{J},\mathbb{U}) \to \mathbb{H}$ (zdefiniowanego w podrozdziale 2.2) stowarzyszonego z równaniem

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) \quad \text{dla p.w. } t \in \mathcal{J}, \tag{W.6}$$

co jest równoważne *warunkowi rzędu Kalmana* [Zab, Theorem I.1.2 (vi)] w przypadku skończenie wymiarowym. Takie założenie w naturalny sposób eliminuje *układy paraboliczne* (patrz uwaga 2.2.3). Niestety okazuje się, że w praktyce ten warunek jest raczej trudny do bezpośredniej weryfikacji ze względu na swoją ogólność. Dlatego zaczęto rozważać słabsze formy sterowalności.

Jedną ze słabszych postaci sterowalności jest *aproksymacyjna sterowalność*. Właściwość ta oznacza, że istnieje możliwość sterowania trajektorią układu z dowolnego punktu w dowolne otoczenie jakiegokolwiek innego punktu, lecz w ogólności nie musimy osiągnąć pożądanego punktu końcowego. Wynika to bezpośrednio z faktu, że w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych istnieją podprzestrzenie liniowe, które nie są domknięte (po raz pierwszy tę własność układów sterowania zaobserwował Triggiani [43, 44]). Taki typ sterowalności bardzo często wystarcza w zastosowaniach (zob. [5, 37, 38]). W przypadku ogólnych układów dynamicznych bezpośrednie sprawdzenie aproksymacyjnej sterowalności, o ile możliwe, jest bardzo trudne.

W przypadku gdy zaburzenie F jest odwzorowaniem jednowartościowym wyniki dotyczące aproksymacyjnej sterowalności zostały podane przez Sakthivela [35] oraz George'a [20]. Różnego rodzaju wyniki dotyczące aproksymacyjnej sterowalności semiliniowych układów sterowania można również znaleźć u Mahmudova [27], Dauera i Mahmudova [11, 12], Sukavanama [42], ale także w wielu innych pracach [30, 36, 39, 47].

Celem tej rozprawy jest badanie aproksymacyjnej sterowalności dla inkluzji różniczkowej postaci (W.5) przy założeniu pewnych naturalnych warunków na układ, w szczególności, założeniu aproksymacyjnej sterowalności stowarzyszonego układu liniowego (W.6), co jest spójne z klasyczną, skończenie wymiarową teorią układów sterowania (zob. [CZ] i bibliografia w tej książce). Ponadto motywacją autora było rozwinięcie podobnej teorii jak w [33] dla układów parabolicznych, w których założenia zwartości półgrupy i słabej ciągłości części nieliniowej pojawiają się w sposób naturalny.

Główna metoda dowodowa rozprawy inspirowana jest wynikami pracy [5], gdzie problem aproksymacyjnej sterowalności rozpatruje się się jako granicę optymalnych problemów sterowania (patrz lemat 2.3.3). Do tak przekształconego problemu stosujemy metody punktów stałych, przy założeniu że gęsto określony operator A generuje zwartą C_0-półgrupę. Jest to wynik Bashirova oraz Mahmudova, którzy w [5] pokazali, że odpowiednie założenie dotyczące rezolwenty operatora sterowalności dla semiliniowego układu jest równoważne odpowiedniemu typowi sterowalności stowarzyszonego układu liniowego (W.6). Warunek rezolwenty jest łatwy w użyciu i można go znaleźć w wielu pracach dotyczących aproksymacyjnej sterowalności dla nieliniowych równań różniczkowych (patrz na przykład [13, 26, 28, 29, 34, 37, 38, 41]).

Jednak mimo popularności tego tematu w ostatnich latach i dość szerokiej literatury, niewiele jest wyników w przypadku inkluzji różniczkowych.

Niniejsza rozprawa składa się z trzech rozdziałów. W pierwszym rozdziale podajemy podstawowe pojęcia i definicje dotyczące odwzorowań wielowartościowych, miar niezwartości, półgrup operatorów oraz twierdzeń o punktach stałych.

W drugim rozdziale badamy w przestrzeni Hilberta $\mathbb{H}$ układ postaci (W.5), gdzie $A\colon \mathscr{D}(A) \subset \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ jest gęsto określonym, liniowym operatorem generującym *zwartą* C_0-półgrupę operatorów, a $F\colon \mathcal{J} \times \mathbb{H} \multimap \mathbb{H}$ jest wielowartościowym zaburzeniem *u.h.c.* względem drugiej zmiennej o słabo zwartych wartościach. Założenia te są słabsze niż te, jakie zwykle spotyka się w literaturze na temat sterowalności (zob. [33, BGN], gdzie rozpatrywano sterowalność układów hiperbolicznych).

Trzeci rozdział poświęcony jest badaniu aproksymacyjnej sterowalności funkcyjnych, impulsowych, semiliniowych inkluzji różniczkowych o skończonym opóźnieniu w obecności liniowego czynnika sterującego w nieskończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta $\mathbb{H}$, tj. układu o następującej postaci

$$\begin{cases} \dot{y}(t) \in A(t)y(t) + F(t, y_t) + Bu(t) & \text{dla p.w. } t \in \mathcal{J},\ t \neq t_k,\ k = 1, \dots, p, \\ y(t) = \phi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad \tau > 0, \\ y(t_k^-) = y(t_k), \quad y(t_k^+) = y(t_k) + I_k(y_{t_k}), \quad k = 1, \dots, p, \end{cases} \tag{W.7}$$

gdzie $\{A(t)\}_{t \geqslant 0} \subset \mathscr{L}(\mathbb{H})$ jest rodziną gęsto określonych operatorów liniowych w $\mathbb{H}$ generującą *zwarty silny operator ewolucyjny*, $F\colon \mathcal{J} \times \mathbb{H} \multimap \mathbb{H}$ jest wielowartościowym odwzorowaniem, które jest mierzalne względem pierwszej zmiennej i górnie hemiciągłe ze względu na drugą zmienną, $\phi\colon [-\tau, 0] \to \mathbb{H}$ jest daną funkcją kawałkami ciągłą, $y_t(\theta) := y(t+\theta)$ dla $\theta \in [-\tau, 0]$, B jest ograniczonym operatorem liniowym oraz funkcje I_k, $k = 1, \ldots, p$, są funkcjami impulsowymi. Mimo iż problem ten wydaje się być analogiczny do poprzedniego, w jego rozwiązaniu występują pewne trudności, które rzutują na założenia poczynione na rezolwentę operatora sterowalności.

Zdaniem autora do najistotniejszych wyników rozprawy należą:

- wprowadzenie naturalnych założeń na układy sterowania pochodzące od inkluzji parabolicznych oraz zastosowanie metody rezolwenty i udowodnienie aproksymacyjnej sterowalności inkluzji semiliniowych (W.5) oraz (W.7), co można potraktować jako uzupełnienie prac [6, 33];
- wprowadzenie warunku (F3e), który poprawia rezultaty spotykane w literaturze również w przypadku równań różniczkowych;
- rozwiązanie problemu sterowalności aproksymacyjnej inkluzją semiliniową z niewypukłą prawą stroną (twierdzenie 2.5.9);

Chciałbym podziękować mojemu promotorowi dr. hab. Grzegorzowi Gaborowi za dyskusje i cenne uwagi dotyczące przedstawionych w pracy zagadnień.

Krzysztof Rykaczewski
Toruń, 28 stycznia 2015

1 PRELIMINARIA

Spis treści

CELEM tego rozdziału jest wprowadzenie pojęć, oznaczeń i wstępnych faktów, które są stosowane w tej rozprawie. Zaczynamy od definicji przestrzeni funkcyjnych oraz omówienia odwzorowań wielowartościowych na podstawie monografii [AE, AF, CV, GP, Gór, HP]. Następnie podajemy zarys teorii operatorów w oparciu o książki [CZ, DS, Paz, Ret]. Na zakończenie podamy potrzebne nam twierdzenia o punktach stałych, które szerzej omówione są w [GD, Gór, KOZ].

1.1 OZNACZENIA

Niech $(\mathbb{E}, \|\cdot\|)$ będzie rzeczywistą przestrzenią Banacha. *Domknięcie* i *brzeg* zbioru A oznaczamy przez $\overline{A}$ oraz ∂A, odpowiednio. Dla $\epsilon > 0$ oraz $a \in \mathbb{E}$ oznaczamy zbiór $\mathcal{B}(a, \epsilon) := \{ x \in \mathbb{E} \mid \|a - x\| < \epsilon \}$, tj. kulę otwartą o promieniu ϵ wokół punktu a. Kulę domkniętą o promieniu ϵ wokół punktu a oznaczamy symbolem $\mathcal{D}(a, \epsilon)$. Czasem, żeby nie było wątpliwości, możemy do tych oznaczeń dodać indeks wskazujący na konkretną przestrzeń. Symbolami $\operatorname{conv} A$ oraz $\overline{\operatorname{conv}}\, A$ oznaczamy *otoczkę wypukłą* oraz *domkniętą otoczkę wypukłą* zbioru A, odpowiednio.

Dla $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, niech $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{E})$ oznacza przestrzeń Banacha wszystkich funkcji ciągłych $u\colon [a, b] \to \mathbb{E}$ wyposażoną w normę zbieżności jednostajnej $\|u\|_{\mathcal{C}([a,b],\mathbb{E})} := \sup_{t \in [a,b]} \|u(t)\|$.

Funkcję $u\colon [a, b] \to \mathbb{E}$ nazywamy *silnie mierzalną*, jeśli istnieje ciąg funkcji prostych $(u_n)_{n \geqslant 1}$ (tzn. przyjmujących skończenie wiele wartości i mierzalnych, przy czym na odcinku $[a, b]$ rozpatrujemy σ-ciało zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a) takich, że $u_n(z) \to u(z)$ przy $n \to +\infty$ dla p.w. $z \in [a, b]$.

Niech $1 \leqslant p < \infty$. Przez $L^p([a, b], \mathbb{E})$ oznaczamy przestrzeń Banacha wszystkich całkowalnych w sensie Bochnera z p-tą potęgą (utożsamionych prawie wszędzie) funkcji $u\colon [a, b] \to \mathbb{E}$, tj. $u \in L^p([a, b], \mathbb{E})$ pod warunkiem, że funkcja u jest silnie mierzalna i zachodzi

$$\|u\|_{L^p} := \left(\int_{[a,b]} \|u(z)\|^p \, d\mu(z) \right)^{1/p} < +\infty. \tag{1.1}$$

Uwaga 1.1.1. Przypomnijmy, że silna mierzalność funkcji u jest równoważna mierzalności oraz słabej mierzalności (funkcja u jest *słabo mierzalna*, jeśli $\langle p, u(\cdot) \rangle\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ jest mierzalna dla każdego funkcjonału $p \in \mathbb{E}^*$, gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oznacza dualne parowanie w przestrzeni $\mathbb{E}$, patrz podrozdział 1.3) pod warunkiem, że przestrzeń $\mathbb{E}$ jest ośrodkowa (twierdzenie Pettisa [GP, Theorem 2.1.3]).

Symbolem $L^\infty([a,b], \mathbb{E})$ oznaczamy przestrzeń tych funkcji mierzalnych, które są *istotnie ograniczone*, tzn. $u \in L^\infty([a,b], \mathbb{E})$ pod warunkiem, że

$$\|u\|_{L^\infty} := \inf \left\{ M \geqslant 0 \;\middle|\; \|u(z)\| \leqslant M \;\text{ dla p.w. }\; z \in [a,b] \right\} < +\infty. \tag{1.2}$$

1.2 ODWZOROWANIA WIELOWARTOŚCIOWE

Wprowadzimy terminologię dotyczącą odwzorowań wielowartościowych. Dla danych dwóch przestrzeni topologicznych X oraz Y *odwzorowanie wielowartościowe* (czasem też *multioperator* lub *multifunkcja*) $\phi\colon X \multimap Y$ przypisuje każdemu punktowi $x \in X$ niepusty, domknięty podzbiór $\phi(x) \subset Y$. Odwzorowanie ϕ jest *górnie półciągłe* (ang. *upper semicontinuous* lub w skrócie *u.s.c.*), gdy zbiór $\phi^{-1}(A) := \{x \in X \mid \phi(x) \cap A \neq \varnothing\}$ jest domknięty dla każdego domkniętego zbioru $A \subset Y$; odwzorowanie ϕ jest *dolnie półciągłe* (*lower semicontinuous* lub *l.s.c.*), jeśli zbiór $\phi^{-1}(U) = \{x \in X \mid \phi(x) \cap U \neq \varnothing\}$ jest otwarty dla każdego zbioru otwartego $U \subset Y$.

Dla danego zbioru $K \subset \mathbb{E}$ funkcja $\sigma_K\colon \mathbb{E}^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, dana wzorem $\sigma_K(p) := \sup_{y \in K} \langle p, y \rangle$, nazywana jest *funkcją podpierającą* zbioru K. Multifunkcja $\phi\colon X \multimap \mathbb{E}$ jest *górnie hemiciągła* (*upper hemicontinuous* lub *u.h.c.*), gdy dla każdego funkcjonału $p \in \mathbb{E}^*$ funkcja $X \ni x \mapsto \sigma_{\phi(x)}(p) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ jest górnie półciągła (jako rozszerzona funkcja rzeczywista).

Fakt 1.2.1. *[Gór, Proposition 14.10] Jeśli $\phi\colon X \multimap Y$ oraz $\psi\colon Y \multimap Z$ są odwzorowaniami u.s.c. o zwartych wartościach, to ich złożenie $\psi \circ \phi\colon X \multimap Z$, zdefiniowane jako $(\psi \circ \phi)(x) := \bigcup_{y \in \phi(x)} \psi(y)$, jest odwzorowaniem u.s.c. o zwartych wartościach.*

Uwaga 1.2.2. Łatwo pokazać, że każde odwzorowanie u.s.c. jest u.h.c. Co więcej, jasnym jest, że jeśli $\phi\colon X \multimap \mathbb{E}$ jest słabo górnie półciągła, tj. $\phi\colon X \to \mathbb{E}_w$ (gdzie $\mathbb{E}_w$ jest przestrzenią $\mathbb{E}$ wyposażoną w słabą topologię) jest górnie półciągła, to jest też górnie hemiciągła. Z drugiej strony [AE, Theorem 3.2.10], jeśli $\phi\colon X \multimap \mathbb{E}$ jest górnie hemiciągła i ma słabo zwarte oraz wypukłe wartości, to jest słabo górnie półciągła. Zauważmy też, że jeśli $\phi\colon X \multimap \mathbb{E}$ jest słabo górnie półciągła i $K \subset X$ jest zwarty, to obraz $\phi(K) := \bigcup_{x \in K} \phi(x)$ jest słabo zwarty.

Wykres $\mathrm{Gr}(\phi) := \left\{(x,y) \in X \times \mathbb{E} \;\middle|\; y \in \phi(x)\right\}$ górnie hemiciągłej funkcji $\phi\colon X \multimap \mathbb{E}$ o domkniętych i wypukłych wartościach jest domknięty w $X \times \mathbb{E}_w$ [AE, Proposition 3.2.5]. Oczywiście multifunkcja $\phi\colon X \multimap \mathbb{E}$ o wypukłych i słabo zwartych wartościach jest słabo górnie półciągła wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $\big((x_n, y_n)\big)_{n \geqslant 1}$ z wykresu $\mathrm{Gr}(\phi)$ takiego, że $x_n \to x$ w X, istnieje podciąg $\big(y_{n_k}\big)_{k \geqslant 1}$ taki, że $y_{n_k} \rightharpoonup y \in \phi(x)$, gdzie symbolem $\rightharpoonup$ oznaczyliśmy słabą zbieżność w przestrzeni $\mathbb{E}$.

Mówimy, że multifunkcja $\phi\colon \mathbb{E} \multimap Y$ jest *pełnociągła*, jeżeli zbiór $\phi(B)$ jest relatywnie zwarty, gdy podzbiór B jest ograniczony w $\mathbb{E}$. Jeśli odwzorowanie wielowartościowe ϕ jest pełnociągłe o niepustych i zwartych wartościach, to ϕ jest u.s.c. wtedy i tylko wtedy, gdy ϕ ma *domknięty wykres*, tzn. jeśli $x_n \to x_0$, $y_n \in \phi(x_n)$ oraz $y_n \to y_0$, to $y_0 \in \phi(x_0)$. Odwzorowanie ϕ nazywa się *quasizwarte*, jeśli jego ograniczenie do dowolnego zbioru zwartego jest pełnociągłym odwzorowaniem. Przywołajmy pomocny fakt:

Twierdzenie 1.2.3. *[KOZ, Theorem 1.1.12] Niech X oraz Y będą przestrzeniami metrycznymi. Jeśli multifunkcja $Q\colon X \multimap Y$ o zwartych wartościach jest odwzorowaniem quasizwartym, to jest u.s.c.*

Niech $A \subset [a,b] \times \mathbb{E}$. Oznaczmy σ-ciało zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a na $[a,b]$ przez $\mathfrak{L}$, a $\mathfrak{B}(\mathbb{E})$ niech będzie σ-ciałem borelowskim w $\mathbb{E}$. Powiemy, że zbiór A jest $\mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\mathbb{E})$-*mierzalny*, jeśli A należy do σ-ciała generowanego przez zbiory postaci $J \times D$, gdzie $J \in \mathfrak{L}$ oraz $D \in \mathfrak{B}(\mathbb{E})$.

Multifunkcję $\phi\colon [a,b] \multimap \mathbb{E}$ o domkniętych wartościach nazywamy *mierzalną*, jeżeli $\phi^{-1}(A) \in \mathfrak{L}$ dla każdego domkniętego $A \subset \mathbb{E}$. W istocie jest to równoważne warunkowi, że dla każdego $y \in \mathbb{E}$ funkcja $[a,b] \ni t \mapsto d\big(y, \phi(t)\big) := \inf\big\{ \|y - z\| \;\big|\; z \in \phi(t) \big\}$ jest mierzalna oraz temu, że istnieje ciąg $(f_n)_{n\geqslant 1}$ funkcji mierzalnych $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{E}$ taki, że $\phi(t) = \overline{\{f_n(t)\}}_{n\geqslant 1}$ dla każdego $t \in [a,b]$ (tzw. *reprezentacja Michaela-Castaing*) [CV, Theorem III.9].

Odwzorowanie wielowartościowe $\phi\colon [a,b] \multimap \mathbb{E}$ jest *słabo mierzalne*, gdy dla każdego funkcjonału $p \in \mathbb{E}^*$ funkcja $t \mapsto \sigma_{\phi(t)}(p)$ jest mierzalna. Jest jasnym, że dla multifunkcji o domkniętych wartościach mierzalność implikuje słabą mierzalność (zauważmy, że dla każdego $p \in \mathbb{E}^*$, $\sigma_{\phi(t)}(p) = \sup_{n\geqslant 1}\langle p, f_n(t)\rangle$, gdzie $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{E}$ są funkcjami mierzalnymi pochodzącymi z reprezentacji Michaela-Castaing). Stwierdzenie odwrotne jest prawdziwe, jeżeli $\phi(\cdot)$ ma wypukłe, słabo zwarte wartości. Mówimy, że ϕ jest *wykresowo mierzalna*, jeśli $\mathrm{Gr}(\phi) \in \mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\mathbb{E})$.

Uwaga 1.2.4. Dla odwzorowania wielowartościowego o domkniętych wartościach mierzalność implikuje wykresową mierzalność. Rzeczywiście, niech $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{E}$, $n \geqslant 1$, będzie ciągiem funkcji mierzalnych takich, że $\phi(t) = \overline{\{f_n(t)\}}_{n\geqslant 1}$ dla każdego $t \in [a,b]$; zauważmy też, że $\mathrm{Gr}(\phi) = \big\{(t,y) \in [a,b] \times \mathbb{E} \;\big|\; d\big(y,\phi(t)\big) = 0\big\}$. Naturalnie, $d\big(y,\phi(t)\big) = \inf_{n\geqslant 1} \|y - f_n(t)\|$ i dla każdego $n \geqslant 1$ funkcja $(t,y) \mapsto \|y - f_n(t)\|$ jest mierzalna ze względu na t oraz ciągła ze względu na y, zatem funkcja $(t,y) \mapsto \|y - f_n(t)\|$ jest łącznie mierzalna, a więc funkcja $(t,y) \mapsto d\big(y,\phi(t)\big) = \inf_{n\geqslant 1} \|y - f_n(t)\|$ jest łącznie mierzalna oraz $\mathrm{Gr}(\phi) \in \mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\mathbb{E})$. Co więcej, dla multifunkcji o wypukłych i domkniętych wartościach implikacja przeciwna również jest prawdziwa [CV, Theorem III.30].

Mówimy, że odwzorowanie wielowartościowe $\phi\colon [a,b] \times \mathbb{E} \multimap \mathbb{E}$ jest *odwzorowaniem Carathéodory'ego*, jeśli:

1. $\phi(t,\cdot)\colon \mathbb{E} \multimap \mathbb{E}$ jest u.s.c. dla prawie wszystkich $t \in [a,b]$ oraz
2. $\phi(\cdot,x)\colon [a,b] \multimap \mathbb{E}$ jest mierzalna dla każdego $x \in \mathbb{E}$.

Jeśli $\mathbb{E}$ jest ośrodkową przestrzenią Banacha oraz ϕ o zwartych i wypukłych wartościach jest odwzorowaniem Carathéodory'ego lub jest łącznie mierzalne, a $u\colon [a,b] \to \mathbb{E}$ jest funkcją ciągłą, to odwzorowanie wielowartościowe $\phi\big(\cdot, u(\cdot)\big)\colon [a,b] \multimap \mathbb{E}$ posiada mierzalną *selekcję*, tzn. funkcję $f\colon [a,b] \to \mathbb{E}$ taką, że $f(t) \in \phi\big(t, u(t)\big)$ dla każdego $t \in [a,b]$, patrz [1, Remark 2.1].

Mówimy, że odwzorowanie wielowartościowe $\phi\colon [a,b] \multimap \mathbb{E}$ jest *całkowo ograniczone*, jeśli istnieje funkcja $\mu \in L^1\big([a,b],[0,+\infty)\big)$ taka, że

$$\|\phi(t)\| := \sup_{y\in\phi(t)} \|y\| \leqslant \mu(t) \quad \text{dla p.w. } t \in [a,b]. \tag{1.3}$$

Powiemy, ze rodzina $W \subset L^1\big([a,b],\mathbb{E}\big)$ jest *całkowo ograniczona*, jeśli multifunkcja $\mathcal{W}\colon [a,b] \multimap \mathbb{E}$, dana jako $\mathcal{W}(t) := \{w(t) \mid w \in W\}$, jest całkowo ograniczona.

Przez S^1_ϕ będziemy oznaczać zbiór selekcji całkowalnych odwzorowania ϕ, tj. $S^1_\phi := \big\{f \in L^1([a,b],\mathbb{E}) \;\big|\; f(t) \in \phi(t) \text{ dla p.w. } t \in [a,b]\big\}$. Zbiór ten w ogólności może być pusty.

Uwaga 1.2.5. Dla wykresowo mierzalnej multifunkcji zbiór S^1_ϕ jest niepusty wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $t \mapsto \inf\big\{ \|z\| \mid z \in \phi(t) \big\}$ należy do $L^1\big([a,b],[0,+\infty)\big)$. Zachodzi to gdy funkcja $t \mapsto \|\phi(t)\| = \sup\big\{ \|z\| \;\big|\; z \in \phi(t) \big\}$ jest całkowalna na $[a,b]$ i wtedy można pokazać, że multifunkcja ϕ jest całkowo ograniczona. Istotnie, dla wykresowo mierzalnej multifunkcji zbiór S^1_ϕ jest domknięty w $L^1([a,b],\mathbb{E})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi(\cdot)$ ma domknięte wartości, i jest wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi(\cdot)$ ma wypukłe wartości (zob. [CV, Theorem III.30], [HP, Chapter 2]).

Niech $\phi\colon [a,b]\times\mathbb{E}\multimap\mathbb{E}$ będzie odwzorowaniem wielowartościowym. Z tym odwzorowaniem możemy skojarzyć operator

$$P_\phi\colon \mathcal{C}([a,b],\mathbb{E})\multimap L^1([a,b],\mathbb{E}) \tag{1.4}$$

kładąc

$$P_\phi(y):=\left\{v\in L^1([a,b],\mathbb{E}) \;\middle|\; v(t)\in\phi\big(t,y(t)\big) \text{ dla p.w. } t\in[a,b]\right\}=S^1_{\phi(\cdot,y(\cdot))}. \tag{1.5}$$

Taki operator nazywamy *operatorem podstawienia* lub *operatorem Niemyckiego* stowarzyszonym z odwzorowaniem ϕ [GP, Section 3.4].

Dla pary niepustych podzbiorów A, B przestrzeni metrycznej (X,d) definiujemy *metrykę Hausdorffa*

$$\mathfrak{D}(A,B):=\max\left\{\,\partial(A,B),\partial(B,A)\,\right\}\leqslant+\infty, \tag{1.6}$$

gdzie $\partial(A,B):=\sup_{a\in A}d(a,B)$ oraz $d(a,B):=\inf_{b\in B}d(a,b)$. Jest znanym fakt, że $\mathfrak{D}$ jest metryką w przestrzeni wszystkich niepustych, domkniętych i ograniczonych podzbiorów przestrzeni X. Ponadto metryka ta jest zupełna, jeśli tylko zupełna jest przestrzeń X. Powiemy, że odwzorowanie $\phi\colon X\multimap Y$ jest *H-ciągłe*, jeśli jest ciągłe ze względu na metrykę $\mathfrak{D}$ w X. Odwzorowanie ϕ jest *H-górnie półciągłe w punkcie* $x_0\in X$, jeżeli dla każdego $\epsilon>0$ istnieje $\delta>0$ taka, że jeśli $x\in X$ oraz $d(x,x_0)<\delta$, to $\partial\big(\phi(x),\phi(x_0)\big)<\epsilon$. Oczywiście, powiemy, że ϕ is *H-górnie półciągłe*, jeśli jest H-górnie półciągłe w każdym punkcie $x_0\in X$. Między zdefiniowanymi rodzajami ciągłości odwzorowań wielowartościowych istnieją pewne zależności. Jeśli ϕ jest *górnie półciągłe w punkcie* x_0 (tzn. dla każdego otoczenia U zbioru $\phi(x_0)$ istnieje otoczenie V punktu x_0 takie, że $\phi(V)\subset U$), to jest H-górnie półciągłe w x_0. Odwrotna implikacja zachodzi w przypadku, gdy zbiór $\phi(x_0)$ jest zwarty.

Niech $k>0$. Wielowartościowe odwzorowanie $\phi\colon X\multimap X$ nazywamy k-*lipschitzowskim*, jeśli

$$\mathfrak{D}\big(\phi(x),\phi(y)\big)\leqslant kd(x,y), \tag{1.7}$$

dla każdych x, $y\in X$. Jeśli $k<1$, to ϕ nazywamy *wielowartościową* k-*kontrakcją* lub po prostu *kontrakcją*.

Wymienimy na koniec tego podrozdziału kilka twierdzeń, do których będziemy często się odwoływać. Następująca własność odwzorowań górnie hemiciągłych jest istotna przy dowodzeniu pewnych własności operatora Niemyckiego.

Twierdzenie 1.2.6 (Convergence Theorem). *[AE, Theorem 3.2.6] Załóżmy, że $1\leqslant p,q\leqslant\infty$. Niech $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ będą przestrzeniami Banacha, $\phi\colon[a,b]\times\mathbb{E}\multimap\mathbb{F}$ będzie odwzorowaniem wielowartościowym o domkniętych i wypukłych wartościach takim, że dla prawie wszystkich $t\in[a,b]$ odwzorowanie $\phi(t,\cdot)$ jest górnie hemiciągłe. Ponadto niech będą dane dwa ciągi $(u_n)\subset L^p([a,b],\mathbb{E})$ oraz $(v_n)\subset L^q([a,b],\mathbb{F})$ takie, że $u_n\to u$ w $L^p([a,b],\mathbb{E})$ i $v_n\rightharpoonup v$ w $L^q([a,b],\mathbb{F})$. Jeśli dla prawie wszystkich $t\in[a,b]$ i dla wszystkich $\epsilon>0$ istnieje $N\in\mathbb{N}$ takie, że $d\big((u_n(t),v_n(t)),\mathrm{Gr}(\phi(t,\cdot))\big)<\epsilon$ dla $n\geqslant N$, to $v(t)\in\phi\big(t,u(t)\big)$ dla prawie wszystkich $t\in[a,b]$.*

W dalszej części rozprawy potrzebujemy także kryterium zwartości Dunforda-Pettisa w L^1.

Twierdzenie 1.2.7 (Dunforda-Pettisa). *[15, Corollary 2.6] [14, Corollary 3] Niech zbiór $W\subset L^1\big([a,b],\mathbb{E}\big)$ będzie całkowo ograniczony. Jeśli dla każdego $t\in[a,b]$ istnieje relatywnie słabo zwarty zbiór $C(t)\subset\mathbb{E}$ taki, że $w(t)\in C(t)$ dla każdego $w\in W$, to zbiór W jest relatywnie słabo zwarty w $L^1\big([a,b],\mathbb{E}\big)$.*

Ponadto będziemy wielokrotnie korzystać z następującego dobrze znanego faktu.

Twierdzenie 1.2.8 (Kuratowskiego-Ryll-Nardzewskiego)**.** *[Gór, Theorem 19.7] Jeśli X jest przestrzenią polską (tzn. ośrodkową, metryzowalną w sposób zupełny przestrzenią topologiczną) oraz multifunkcja $\phi\colon X \multimap \mathbb{E}$ jest mierzalna, to istnieje jej mierzalna selekcja.*

Przypomnijmy też następujące ważne twierdzenie.

Twierdzenie 1.2.9 (Kreina-Šmuliana)**.** *[46] Domknięta wypukła otoczka słabo zwartego zbioru w przestrzeni Banacha jest słabo zwarta.*

1.3 TEORIA OPERATORÓW

W tym podrozdziale przybliżymy teorię operatorów liniowych określonych na przestrzeni Banacha.

Niech $(\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}})$ i $(\mathbb{F}, \|\cdot\|_{\mathbb{F}})$ będą przestrzeniami Banacha oraz $T\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ będzie odwzorowaniem liniowym. Mówimy, że T jest *ograniczone*, jeśli istnieje stała $M > 0$ taka, że

$$\|Tx\|_{\mathbb{F}} \leqslant M\|x\|_{\mathbb{E}} \quad \text{dla każdego } \ x \in \mathbb{E}. \tag{1.8}$$

Wiadomo, że operator liniowy $T\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ jest ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony. *Normą operatora* T nazywamy liczbę $\|T\| := \sup_{x\in\mathbb{E}, \|x\|_{\mathbb{E}}\leqslant 1} \|T(x)\|_{\mathbb{F}}$. Oznaczmy

$$\mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F}) := \{\, T\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F} \mid T \ \text{ jest liniowy i ograniczony} \,\}; \tag{1.9}$$

wówczas przestrzeń $(\mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F}), \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha. Przez $\mathscr{L}(\mathbb{E}) := \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E})$ oznaczamy przestrzeń Banacha wszystkich ograniczonych endomorfizmów w przestrzeni $\mathbb{E}$. Przestrzeń *funkcjonałów liniowych* na $\mathbb{E}$, czyli liniowych i ograniczonych odwzorowań z $\mathbb{E}$ do $\mathbb{R}$, oznaczamy przez $\mathbb{E}^*$; inaczej mówiąc $\mathbb{E}^* := \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{R})$. Dla danego $p \in \mathbb{E}^*$ i $x \in \mathbb{E}$ piszemy $p(x)$, $\langle p, x\rangle$ lub $\langle p, x\rangle_{\mathbb{E}}$, dla oznaczenia ewaluacji funkcjonału p na elemencie x. Przypomnijmy, że $\mathbb{E}^*$ jest przestrzenią Banacha z normą $\|p\|_{\mathbb{E}^*} := \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\langle p, x\rangle|$.

Dla operatora liniowego $T\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ oznaczamy jego jądro przez $\mathrm{Ker}(T) := \{\, x \in \mathbb{E} \mid Tx = 0 \,\}$, a jego obraz przez $\mathrm{Range}(T) := \{\, Tx \mid \ x \in \mathbb{E} \,\}$. Symbolem $\mathbb{I}_{\mathbb{E}}\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ oznaczamy *operator identycznościowy* w $\mathbb{E}$, a dla ograniczonego operatora liniowego $T\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ przez $T^*\colon \mathbb{F}^* \to \mathbb{E}^*$ rozumiemy operator liniowy zdefiniowany przez relację

$$\langle y, Tx\rangle_{\mathbb{F}} = \langle T^* y, x\rangle_{\mathbb{E}} \quad \text{dla wszystkich } \ x \in \mathbb{E}, y \in \mathbb{F}^*. \tag{1.10}$$

Można pokazać, że jest on dobrze określony. Operator ten nazywamy *sprzężonym* do T. Jeśli $\mathbb{E} = \mathbb{F}$ jest przestrzenią Hilberta (wtedy, dzięki twierdzeniu Riesza, przestrzeń $\mathbb{E}^*$ można utożsamiać z $\mathbb{E}$) oraz $T = T^*$, to operator T nazywamy *samosprzężonym*. Przydatnym będzie poniższy fakt.

Twierdzenie 1.3.1. *[Ret, Theorem VI.2, Corollary VI.3] Niech $(\mathbb{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ będzie przestrzenią Hilberta. Jeśli $T \in \mathscr{L}(\mathbb{H})$ jest samosprzężony oraz istnieje liczba $\alpha > 0$ taka, że $\langle Tx, x\rangle \geqslant \alpha\|x\|^2$ dla $x \in \mathbb{H}$, to operator T jest odwracalny. Ponadto $\|T^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\alpha}$.*

Niech $0 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$. Jeśli $1/p + 1/q = 1/r$, $u \in L^p([a, b], \mathbb{E})$ oraz $v \in L^q([a, b], \mathbb{E})$, to zachodzi *nierówność Höldera*

$$\|uv\|_{L^r} \leqslant \|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q}. \tag{1.11}$$

W szczególności dla $p = q = 2$ oraz $r = 1$ dostajemy *nierówność Cauchy'ego-Schwarza.*

Twierdzenie 1.3.2 (Pettisa)**.** *Niech* $1 \leqslant p < \infty$ *oraz* $1/p + 1/q = 1$. *Jeśli* $\mathbb{E}$ *jest ośrodkową lub refleksywną przestrzenią Banacha, to* $\left(L^p([a,b],\mathbb{E})\right)^*$ *można identyfikować z przestrzenią* $L^q([a,b],\mathbb{E}^*)$. *Inaczej mówiąc, dla każdego* $f \in \left(L^p([a,b],\mathbb{E})\right)^*$ *istnieje dokładnie jedna funkcja* $g \in L^q([a,b],\mathbb{E}^*)$ *taka, że*

$$\langle f, x\rangle = \int_{[a,b]} \langle g(t), x(t)\rangle \, dt \quad \textit{dla każdego } x \in L^p([a,b],\mathbb{E}). \tag{1.12}$$

Ponadto $\|f\|_{(L^p)^*} = \|g\|_{L^q}$.

Jako wniosek można otrzymać, że jeśli przestrzeń $\mathbb{E}$ jest refleksywna, to dla $1 < p < \infty$ przestrzenie $L^p([a,b],\mathbb{E})$ są refleksywne.

Twierdzenie 1.3.3 (Banacha-Steinhausa)**.** *Niech* $\mathbb{E}$ *będzie przestrzenią Banacha, a* $\mathbb{F}$ *przestrzenią unormowaną. Jeśli* $\{T_n \colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}\}$ *jest ciągiem ograniczonych operatorów takich, że dla każdego* $x \in \mathbb{E}$ *mamy* $\sup_{n\geqslant 1} \|T_n x\|_{\mathbb{F}} < +\infty$, *to* $\sup_{n\geqslant 1} \|T_n\| < +\infty$.

W jednym z rozdziałów użyjemy tego twierdzenia w postaci uwagi jak poniżej.

Uwaga 1.3.4. W sytuacji jak powyżej, jeśli $T_n x \to 0$ dla każdego $x \in \mathbb{E}$ oraz ciąg $(x_n)_{n\geqslant 1}$ jest zbieżny, to $T_n x_n \to 0$. Istotnie, niech $x_n \to x_0$. Wówczas

$$\|T_n x_n\|_{\mathbb{F}} \leqslant \|T_n(x_n - x_0)\|_{\mathbb{F}} + \|T_n x_0\|_{\mathbb{F}} \leqslant \sup_{n\geqslant 1} \|T_n\| \|x_n - x_0\|_{\mathbb{E}} + \|T_n x_0\|_{\mathbb{F}}. \tag{1.13}$$

Z twierdzenia Banacha-Steinhausa mamy $\sup_{n\geqslant 1} \|T_n\| < +\infty$. Dowodzi to, że prawa strona powyższej nierówności dąży do zera.

Fakt 1.3.5. *[26, Theorem 2.3] Niech* $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *będzie ośrodkową przestrzenią Hilberta oraz* $T \colon H \to H$ *będzie* symetryczny, *tzn.* $\langle z_1, T z_2\rangle = \langle z_2, T z_1\rangle$ *dla każdych* z_1, $z_2 \in H$. *Wówczas następujące dwa warunki są równoważne:*

1. *operator* T *jest* ściśle dodatnio określony, *tj.* $\langle z, Tz\rangle > 0$ *dla każdego* $z \in H$ *różnego od zera;*
2. *dla każdego* $h \in H$ *mamy, że* $z_\epsilon(h) := \epsilon(\epsilon \mathbb{I}_H + T)^{-1}(h)$ *dąży mocno do zera dla* $\epsilon \to 0^+$.

1.3.1 | ELEMENTY TEORII PÓŁGRUP OPERATORÓW

Poniżej podamy rezultaty dotyczące półgrup operatorów. Będą one nam potrzebne przy rozpatrywaniu problemów semiliniowych.

Rozważmy operator liniowy $A \colon \mathbb{E} \supset \mathscr{D}(A) \to \mathbb{E}$ określony na rzeczywistej przestrzeni Banacha $\mathbb{E}$. Mówimy, że operator A jest *gęsto określony*, jeżeli $\overline{\mathscr{D}(A)} = \mathbb{E}$. *Wykresem operatora* A nazywamy zbiór $\mathrm{Gr}(A) \subset \mathbb{E} \times \mathbb{E}$ określony jako $\mathrm{Gr}(A) := \{(x, Ax) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E} \mid x \in \mathscr{D}(A)\}$. Jeśli wykres $\mathrm{Gr}(A)$ operatora A jest domknięty, to powiemy, że operator A jest *domknięty*.

Rodzinę liniowych, ograniczonych operatorów $\{S(t) \colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}\}_{t\geqslant 0}$ nazywamy *półgrupą operatorów*, gdy spełnia następującą równość operatorową

$$S(t+s) = S(t)S(s), \quad t,\ s \geqslant 0, \quad S(0) = \mathbb{I}_{\mathbb{E}}. \tag{1.14}$$

Jeśli dodatkowo rodzina ta spełnia warunek

$$\lim_{t\to 0^+} S(t)x = x, \quad \text{dla każdego } x \in \mathbb{E}, \tag{1.15}$$

to nazywamy ją C_0-*półgrupą operatorów*. Taką półgrupę nazywamy *zwartą*, jeśli dla każdego $t \geqslant 0$ operator $S(t)\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ jest *pełnociągły*, tzn. $S(t)(B)$ jest relatywnie zwarty dla każdego zbioru ograniczonego $B \subset \mathbb{E}$.

Operator $A\colon \mathscr{D}(A) \subset \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ nazywa się *(infinitezymalnym) generatorem* C_0-półgrupy operatorów $\{S_A(t)\}_{t\geqslant 0}$, jeśli

$$Ax = \lim_{h\to 0^+} \frac{S_A(h)x - x}{h} \quad \text{dla każdego } x \in \mathscr{D}(A), \quad \text{gdzie} \tag{1.16}$$

$$\mathscr{D}(A) := \left\{ x \in \mathbb{E} \;\middle|\; \text{granica } \lim_{h\to 0^+} h^{-1}\big(S_A(h)x - x\big) \text{ istnieje} \right\}. \tag{1.17}$$

Można pokazać, że generator C_0-półgrupy jest zawsze domknięty i gęsto określony w $\mathbb{E}$.

Poniższe twierdzenie podaje ograniczenie na rząd wzrostu normy półgrupy operatorów.

Twierdzenie 1.3.6. *[Paz, Theorem 2.2] Niech $S(t)$, $t \geqslant 0$, będzie C_0-półgrupą operatorów. Wtedy istnieją stałe $M > 0$ i $\omega \in \mathbb{R}$ takie, że*

$$\|S(t)\| \leqslant Me^{\omega t} \quad \textit{dla każdego } t \geqslant 0. \tag{1.18}$$

Kluczowe własności półgrup operatorów są zebrane w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 1.3.7. *[Paz, Theorem 2.4] Niech operator A będzie generatorem C_0-półgrupy operatorów $\{S_A(t)\}_{t\geqslant 0}$ na przestrzeni Banacha $\mathbb{E}$. Wówczas zachodzą następujące stwierdzenia:*

1. *dla $x \in \mathbb{E}$ mamy $\int_0^t S_A(s)x\,ds \in \mathscr{D}(A)$ dla wszystkich $t \geqslant 0$ oraz*

$$A\left(\int_0^t S_A(s)x\,ds\right) = S_A(t)x - x; \tag{1.19}$$

2. *dla $x \in \mathscr{D}(A)$ mamy $S_A(t)x \in \mathscr{D}(A)$ dla dowolnego $t \geqslant 0$ oraz*

$$\frac{dS_A(t)}{dt} = AS_A(t) = S_A(t)A. \tag{1.20}$$

Definicja 1.3.8. *[Paz, Definition 2.3] Niech operator A będzie generatorem C_0-półgrupy operatorów $\{S_A(t)\}_{t\geqslant 0}$ oraz $f \in L^1\big([0,T], \mathbb{E}\big)$, gdzie $T > 0$. Rozważmy układ postaci*

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + f(t) & \textit{dla p.w. } t \in [0,T], \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{E}. \end{cases} \tag{1.21}$$

Funkcję $y \in \mathcal{C}([0,T], \mathbb{E})$ daną wzorem

$$y(t) = S_A(t)y_0 + \int_0^t S_A(t-s)f(s)\,ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.22}$$

nazywamy łagodnym rozwiązaniem *problemu* (1.21).

1.4 TWIERDZENIA O PUNKTACH STAŁYCH

Niech X oraz Y będą dowolnymi przestrzeniami topologicznymi. Mówimy, że $\phi\colon X \multimap Y$ *ma punkt stały*, jeśli $X \subset Y$ oraz istnieje $x \in X$ taki, że $x \in \phi(x)$. Przez $\mathrm{Fix}(\phi)$ oznaczamy zbiór punktów stałych odwzorowania ϕ. W dalszej części tego podrozdziału przez $\mathbb{E}$ oznaczamy przestrzeń Banacha.

Definicja 1.4.1. *Niech $(\mathcal{A}, \geqslant)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym, a $\mathcal{P}$ rodziną niepustych podzbiorów przestrzeni $\mathbb{E}$. Funkcja $\beta\colon \mathcal{P} \to \mathcal{A}$ nazywana jest* miarą niezwartości na $\mathcal{P}$, *jeśli*

$$\beta(\overline{\mathrm{conv}}\,\Omega) = \beta(\Omega) \quad \textit{dla każdego niepustego, ograniczonego podzbioru } \Omega \subset \mathbb{E}. \tag{1.23}$$

Klasycznym przykładem miary niezwartości jest *miara niezwartości Hausdorffa* $\chi_{\mathbb{E}}$, tj.

$$\chi_{\mathbb{E}}(\Omega) := \inf\left\{ \epsilon > 0 \;\middle|\; \text{istnieje podzbiór zwarty } K \subset \mathbb{E} \text{ taki, że } \Omega \subset K + \epsilon\mathcal{B}(0,1) \right\}. \tag{1.24}$$

Uwaga 1.4.2. Każdy operator pełnociągły jest $\chi_{\mathbb{E}}$-kondensujący.

Definicja 1.4.3. *Odwzorowanie $\phi\colon X \subset \mathbb{E} \multimap \mathbb{E}$ o zwartych wartościach nazywamy* $\chi_{\mathbb{E}}$-kondensującym, *gdy*

$$\chi_{\mathbb{E}}\big(\phi(\Omega)\big) < \chi_{\mathbb{E}}(\Omega) \tag{1.25}$$

dla każdego zbioru ograniczonego $\Omega \subset X$ niebędącego relatywnie zwartym.

W dalszym ciągu będziemy wykorzystywać następujące znane twierdzenie:

Twierdzenie 1.4.4 (Sadowskiego). *[KOZ, Corollary 3.3.1] Jeśli $\phi\colon C \multimap C$ jest odwzorowaniem u.s.c. o domkniętych, wypukłych i ograniczonych wartościach oraz jest $\chi_{\mathbb{E}}$-kondensujące, gdzie C jest domkniętym, wypukłym i ograniczonym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{E}$, to* $\mathrm{Fix}(\phi) \neq \emptyset$.

Twierdzenie 1.4.5 (Schaefera). *[KOZ, Corollary 3.3.3] Jeśli $V \subset \mathbb{E}$ jest ograniczonym otoczeniem zera w $\mathbb{E}$, zaś $\phi\colon \overline{V} \multimap \mathbb{E}$ jest u.s.c., ma wypukłe i zwarte wartości, jest $\chi_{\mathbb{E}}$-kondensujące oraz*

$$x \notin \lambda\phi(x) \quad \textit{dla wszystkich} \quad x \in \partial V,\;\; 0 < \lambda \leqslant 1, \tag{1.26}$$

to $\mathrm{Fix}(\phi) \neq \emptyset$.

Podzbiór $K \subset L^1([a,b], \mathbb{E})$ jest nazywany *rozkładalnym*, jeśli dla każdych dwóch funkcji $u, v \in K$ i mierzalnego podzbioru $A \subset [a,b]$ zachodzi

$$u \cdot \chi_A + v \cdot \chi_{[a,b]\setminus A} \in K, \tag{1.27}$$

gdzie χ_B oznacza funkcję charakterystyczną zbioru $B \subset [a,b]$, patrz [Fry, Definition 8.18]. Przez $\mathcal{D}$ oznaczamy rodzinę niepustych, ograniczonych, domkniętych i rozkładalnych podzbiorów przestrzeni $L^1([a,b], \mathbb{E})$. Własność rozkładalności stanowi analogon wypukłości w przestrzeni L^1.

Twierdzenie 1.4.6. *[7, Theorem 1] Jeśli odwzorowanie $\phi\colon L^1([a,b], \mathbb{E}) \multimap \mathcal{D}$ jest kontrakcją, to istnieje funkcja ciągła $g\colon L^1([a,b], \mathbb{E}) \to L^1([a,b], \mathbb{E})$ taka, że $g(u) \in \mathrm{Fix}(\phi)$ dla dowolnego $u \in L^1([a,b], \mathbb{E})$ oraz $g(u) = u$ dla $u \in \mathrm{Fix}(\phi)$. W szczególności* $\mathrm{Fix}(\phi) \neq \emptyset$.

1.5 STOPIEŃ DLA PÓL KONDENSUJĄCYCH

Poniżej przytoczymy definicję stopnia topologicznego dla pól kondensujących. Jego konstrukcję oraz pozostałe własności można znaleźć na przykład w [31, KOZ].

Niech $V \subset \mathbb{E}$ będzie otwartym i ograniczonym podzbiorem przestrzeni Banacha $\mathbb{E}$. Załóżmy, że $0 \leqslant k < 1$. Powiemy, że odwzorowanie wielowartościowe $\Gamma\colon \overline{V} \multimap \mathbb{E}$ jest k-*kondensujące*, jeśli

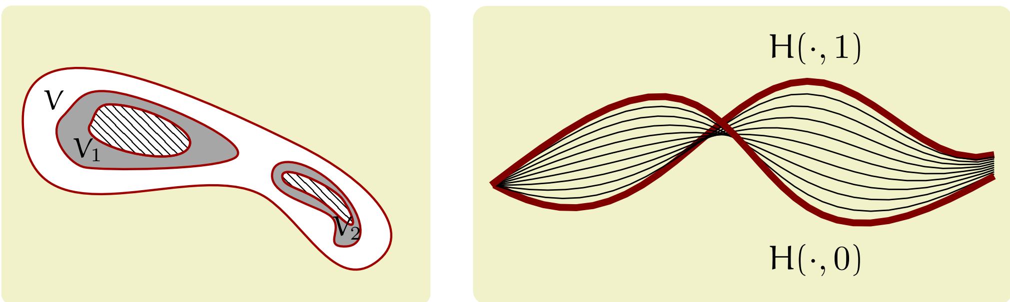
$$\chi_{\mathbb{E}}\big(\Gamma(\Omega)\big) \leqslant k\,\chi_{\mathbb{E}}(\Omega) \quad \text{dla każdego ograniczonego zbioru } \Omega \subset \overline{V}. \tag{1.28}$$

Ponadto odwzorowanie Γ nazwiemy *dopuszczalnym*, gdy nie ma punktów stałych na brzegu zbioru V, tzn. dla każdego $x \in \partial V$ zachodzi $x \notin \Gamma(x)$. Odwzorowanie $H\colon \overline{V} \times [0,1] \multimap \mathbb{E}$ nazywamy *dopuszczalną homotopią* k-*kondensującą*, jeśli $x \notin H(x,t)$ dla $(x,t) \in \partial V \times [0,1]$ oraz

$$\chi_{\mathbb{E}}\big(H(\Omega \times [0,1])\big) \leqslant k\,\chi_{\mathbb{E}}(\Omega) \quad \text{dla każdego ograniczonego } \Omega \subset \overline{V}. \tag{1.29}$$

Definicja 1.5.1. *[KOZ, Section 3.2] Niech $\mathbb{I}_{\mathbb{E}} - \Gamma\colon V \multimap \mathbb{E}$ będzie polem dopuszczalnym.* Stopniem topologicznym dla pól kondensujących *nazywamy przyporządkowanie polu $\mathbb{I}_{\mathbb{E}} - \Gamma$ liczby całkowitej $\deg(\mathbb{I}_{\mathbb{E}} - \Gamma, \overline{V})$ spełniającej warunki:*

1. (ISTNIENIE) *Jeśli* $\deg(\mathbb{I}_{\mathbb{E}} - \Gamma, \overline{V}) \neq 0$, *to* $\mathrm{Fix}(\Gamma) \neq \varnothing$.
2. (ADDYTYWNOŚĆ) *Niech $V_1, V_2 \subset V$ będą rozłącznymi i otwartymi podzbiorami zbioru V takimi, że* $\mathrm{Fix}(\Gamma) \subset V_1 \cup V_2$. *Wówczas*
$$\deg(\mathbb{I}_{\mathbb{E}} - \Gamma, \overline{V}) = \deg(\mathbb{I}_{\mathbb{E}} - \Gamma\lfloor_{V_1}, \overline{V_1}) + \deg(\mathbb{I}_{\mathbb{E}} - \Gamma\lfloor_{V_2}, \overline{V_2}). \tag{1.30}$$
3. (HOMOTOPIJNA NIEZMIENNICZOŚĆ) *Jeśli $H\colon \overline{V} \times [0,1] \multimap \mathbb{E}$ jest dopuszczalną homotopią k-kondensującą, to*
$$\deg\big(\mathbb{I}_{\mathbb{E}} - H(\cdot,0), \overline{V}\big) = \deg\big(\mathbb{I}_{\mathbb{E}} - H(\cdot,1), \overline{V}\big). \tag{1.31}$$
4. (NORMALIZACJA) *Jeśli* $y_0 \in V$, *to* $\deg(\mathbb{I}_{\mathbb{E}} - y_0, \overline{V}) = 1$.



Rysunek 2: Pierwsza ilustracja dotyczy własności addytywności stopnia (wszystkie punkty stałe operatora Γ leżą w zakreskowanym obszarze). Na drugiej ilustracji mamy poglądowe przedstawienie homotopii.

2 STEROWANIE APROKSYMACYJNE UKŁADEM SEMILINIOWYM

Spis treści

Rozdział ten zawiera wyniki opublikowane w artykule [34]. Rozpoczniemy od opisania rozważanego w tym rozdziale problemu i podamy założenia. W podrozdziale 2.2 wprowadzimy definicję aproksymacyjnej sterowalności. W końcu w podrozdziale 2.3 zdefiniujemy operatory Γ^α, których punkty stałe są rozwiązaniami zadanej inkluzji różniczkowej z warunkiem początkowym. Następnie będziemy rozważać własności operatorów Γ^α. W szczególności pokażemy, że są one pełnociągłe, co pozwoli nam badać problem aproksymacyjnej sterowalności badanego układu za pomocą teorii punktów stałych. W sytuacji, w której półgrupa jest zwarta pokażemy, że przy pewnych założeniach dotyczących nieliniowego czynnika inkluzji aproksymacyjna sterowalność układu liniowego pociąga za sobą aproksymacyjną sterowalność układu zaburzonego. Na zakończenie rozdziału podamy przykład ilustrujący otrzymane rezultaty.

2.1 STEROWANA INKLUZJA RÓŻNICZKOWA. WSTĘPNE ZAŁOŻENIA

W tym rozdziale $\mathbb{H}$ będzie zawsze przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $\langle\cdot,\cdot\rangle$ i normą $\|\cdot\| := \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$.

Interesuje nas problem sterowania następującej semiliniowej inkluzji różniczkowej

$$\begin{cases} \dot{y}(t) \in Ay(t) + F\big(t, y(t)\big) + Bu(t) \quad \text{dla p.w. } t \in \mathcal{J} := [0,T],\ T > 0, \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{H}, \end{cases} \tag{2.1}$$

gdzie

(A) $A\colon \mathscr{D}(A) \subset \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ jest domkniętym liniowym operatorem, gęsto określonym w $\mathbb{H}$, generującym zwartą C_0-półgrupę liniowych ograniczonych operatorów $\{S_A(t)\}_{t\geqslant 0}$. Na mocy twierdzenia 1.3.6 można oznaczyć

$$M_A := \sup_{t\in\mathcal{J}} \|S_A(t)\|. \tag{2.2}$$

Uwaga 2.1.1. W różnych układach sterowanie może być włączone na dwa różne sposoby: „w pętli otwartej”, tzn. jako funkcja $t \mapsto u(t)$, oraz „w pętli zamkniętej” (tzw. *feedback*), sprzężenie zwrotne, czyli w postaci funkcji zależnej od stanu układu, tj. $y \mapsto u(y)$. Jak łatwo zauważyć, w rozważanym przez nas układzie (2.1) sterowanie występuje jako liniowy czynnik w pętli otwartej.

Zakładamy odtąd, że wielowartościowe zaburzenie $F\colon \mathcal{J} \times \mathbb{H} \multimap \mathbb{H}$ spełnia następujące warunki (porównaj [18] oraz [33]):

(F0) F ma słabo zwarte i wypukłe wartości;

(F1) $F(\cdot, x)\colon \mathcal{J} \multimap \mathbb{H}$ ma mierzalną selekcję dla każdego $x \in \mathbb{H}$;

(F2) dla p.w. $t \in \mathcal{J}$ multifunkcja $F(t, \cdot)\colon \mathbb{H} \multimap \mathbb{H}$ jest u.h.c.;

(F3) dla każdego ograniczonego i niepustego zbioru $\Omega \subset \mathbb{H}$ istnieje funkcja $\mu_\Omega \in L^1\big(\mathcal{J}, [0, +\infty)\big)$ taka, że zachodzi następujące oszacowanie na wzrost odwzorowania F:

$$\|F(t,x)\| := \sup_{z\in F(t,x)} \|z\| \leqslant \mu_\Omega(t) \quad \text{dla p.w. } t \in \mathcal{J},\ x \in \Omega. \tag{2.3}$$

Uwaga 2.1.2. Jak można zauważyć, założenia nakładane na A oraz F są stosunkowo słabe oraz są spójne z założeniami rozważanymi w teorii równań parabolicznych [18].

Zwróćmy uwagę, że jeśli dla każdego $x \in \mathbb{H}$ multifunkcja $F(\cdot, x)\colon \mathcal{J} \multimap \mathbb{H}$ jest słabo mierzalna, to przy założeniu (F0) odwzorowania wielowartościowe $F(\cdot, x)\colon \mathcal{J} \multimap \mathbb{H}$ są mierzalne i, na mocy twierdzenia Kuratowskiego-Ryll-Nardzewskiego 1.2.8, założenie (F1) jest spełnione. Ponadto zauważmy, że jeśli $\mathbb{H}$ jest przestrzenią ośrodkową i dla każdego $x \in \mathbb{H}$ odwzorowanie $F(\cdot, x)$ jest u.h.c., to z twierdzenia Kuratowskiego-Ryll-Nardzewskiego oraz [AF, Theorem 8.2.14] wynika, że założenie (F1) również jest spełnione.

Niech $\mathbb{U}$ będzie przestrzenią Hilberta dopuszczalnych wartości wszystkich sterowań. Przyjmujemy, że sterowania dopuszczalne należą do przestrzeni $L^2(\mathcal{J}, \mathbb{U})$. O operatorze B zakładamy, co następuje:

(B) $B\colon \mathbb{U} \to \mathbb{H}$ jest liniowy i ciągły (oznaczmy $M_B := \|B\|$).

Wprowadźmy operator Niemyckiego $P_F\colon \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{H}) \multimap L^1(\mathcal{J}, \mathbb{H})$ wzorem (1.5), tzn.

$$P_F(y) := \big\{ f \in L^1(\mathcal{J}, \mathbb{H}) \;\big|\; f(t) \in F\big(t, y(t)\big) \text{ dla p.w. } t \in \mathcal{J} \big\}. \tag{2.4}$$

2.1.1 OPERATOR NIEMYCKIEGO I JEGO WŁASNOŚCI

Widzimy, że dzięki założeniu (F0) zbiór $P_F(y)$ jest wypukły dla każdego $y \in \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{H})$. Zbadamy teraz pozostałe własności operatora P_F.

Lemat 2.1.3. *Niech $y \in \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{H})$ i odwzorowanie $F\colon \mathcal{J} \times \mathbb{H} \multimap \mathbb{H}$ spełnia warunki (F0)–(F3). Istnieje wtedy przynajmniej jedna całkowalna (w sensie Bochnera) selekcja $w \in F\big(\cdot, y(\cdot)\big)$. W szczególności operator Niemyckiego dla każdego y ma niepuste wartości.*

Dowód. Niech $y\colon \mathcal{J} \to \mathbb{H}$ będzie funkcją ciągłą. Rozpatrzmy ciąg $(y_n)_{n\geqslant 1}$ funkcji schodkowych, który zbiega jednostajnie do y na $\mathcal{J}$ i niech w_n będzie mierzalną selekcją odwzorowania $F(\cdot, y_n(\cdot))$, która istnieje dzięki założeniu (F1).

Oznaczmy $\mathcal{W}(t) := \overline{\operatorname{conv}}\,\{w_n(t) \mid n \geqslant 1\} \subset \mathbb{H}$ dla $t \in \mathcal{J}$. Ponieważ funkcje $w_n(\cdot)$ są mierzalne, multifunkcja $t \multimap \{w_n(t) \mid n \geqslant 1\}$ jest mierzalna i stąd także $\mathcal{W}(\cdot)$ jest mierzalna [CV, Theorem III.9].

Ponadto $\mathcal{W}(t) \subset \overline{\operatorname{conv}}\; F(t, \mathcal{Y}(t))$, gdzie $\mathcal{Y}(t) := \{y_n(t) \mid n \geqslant 1\}$. Skoro $(y_n)_{n\geqslant 1}$ jest ciągiem zbieżnym, to zbiór $\mathcal{Y}(t)$ jest relatywnie zwarty. Dzięki twierdzeniu Kreina-Šmuliana i górnej hemiciągłości $F(t, \cdot)$, zbiór $\overline{\operatorname{conv}}\; F(t, \mathcal{Y}(t))$ jest słabo zwarty. Dlatego, z twierdzenia Dunforda-Pettisa 1.2.7, bez straty ogólności (przechodząc do podciągu, jeśli zachodzi potrzeba) możemy założyć, że $w_n \rightharpoonup w \in L^1(\mathcal{J}, \mathbb{H})$. Z twierdzenia 1.2.6 otrzymujemy, że $w(t) \in F(t, y(t))$ dla prawie wszystkich $t \in \mathcal{J}$. Dowodzi to tezy twierdzenia. □

Uwaga 2.1.4. Zauważmy, że jeśli dla każdego ograniczonego zbioru $\varnothing \neq \Omega \subset \mathbb{H}$ multifunkcja $t \mapsto F(\{t\} \times \Omega)$ jest wykresowo mierzalna, to warunek (F3) jest równoważny z tym, że operator P_F ma niepuste wartości (por. uwagi na stronie 7).

Twierdzenie 2.1.5. *Operator* P_F *jest ciągowo u.h.c. o słabo zwartych wartościach.*

Dowód. Dla $y \in \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{H})$ oraz każdego $t \in \mathcal{J}$ oznaczmy $C(t) := F(t, y(t))$. Zbiór $C(t)$ jest relatywnie słabo zwarty, więc zgodnie z twierdzeniem Dunforda-Pettisa zbiór $P_F(y)$ jest relatywnie słabo zwarty.

Jeśli $y_n \to y$ jednostajnie na $\mathcal{J}$ i $w_n \in P_F(y_n)$, to z relatywnej słabej zwartości wartości operatora P_F dla pewnego podciągu $w_{n_k} \rightharpoonup w \in L^1(\mathcal{J}, \mathbb{H})$. Dzięki twierdzeniu 1.2.6 mamy, że $w \in P_F(y)$. Stąd P_F jest ciągowo u.h.c. o słabo zwartych wartościach. □

2.2 APROKSYMACYJNA STEROWALNOŚĆ I SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

W ogólności inkluzja (2.1) może nie mieć klasycznych, tzn. różniczkowalnych, rozwiązań. Dlatego potrzebna jest inna definicja rozwiązania.

Definicja 2.2.1. *Poprzez rozwiązanie inkluzji* (2.1) *rozumiemy* łagodne rozwiązanie *(ang. mild solution), tj.* $y \in \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{H})$ *będące postaci*

$$y(t) = y(t; u) := S_A(t)y_0 + \int_0^t S_A(t-s)f(s)\,ds + \int_0^t S_A(t-s)Bu(s)\,ds, \quad t \in \mathcal{J}, \tag{2.5}$$

gdzie $f \in P_F(y)$ *oraz* $u \in L^2(\mathcal{J}, \mathbb{U})$. *Inaczej mówiąc, rozwiązanie układu* (2.1) *jest punktem stałym operatora* $K_u \circ P_F(\cdot)$, *gdzie afiniczny operator* $K_u\colon L^1(\mathcal{J}, \mathbb{H}) \to \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{H})$ *jest dany wzorem*

$$K_u(w)(t) := S_A(t)y_0 + \int_0^t S_A(t-s)w(s)\,ds + \int_0^t S_A(t-s)Bu(s)\,ds, \quad t \in \mathcal{J},\ w \in L^1(\mathcal{J}, \mathbb{H}). \tag{2.6}$$

Ponadto potrzebujemy następujących dwóch fundamentalnych definicji (zobacz przykładową wizualizację obu tych pojęć na rysunku 3).

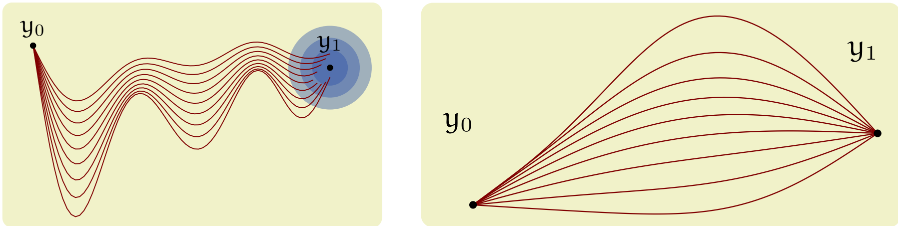
Definicja 2.2.2. *[CP, Definition 3.1, 3.10]*

1. *Mówimy, że układ* (2.1) *jest* całkowicie sterowalny (*ang.* exactly controllable) na $\mathcal{J}$, *jeśli dla każdych dwóch punktów* $y_0, y_1 \in \mathbb{H}$ *istnieje funkcja* $u \in L^2(\mathcal{J}, \mathbb{U})$ *taka, że łagodne rozwiązanie równania* (2.1) *spełnia* $y(0; u) = y_0$ *oraz* $y(T; u) = y_1$.

2. *Układ* (2.1) *nazywamy* aproksymacyjnie sterowalnym na odcinku $\mathcal{J}$, *o ile dla każdego punktu* $y_0 \in \mathbb{H}$ *mamy*

$$\overline{\mathcal{R}(T, y_0)} = \mathbb{H}, \tag{2.7}$$

gdzie $\mathcal{R}(T, y_0) := \{ y(T; u) \mid u \in L^2(\mathcal{J}, \mathbb{U}),\ y(0; u) = y_0 \} \subset \mathbb{H}$ *jest* zbiorem osiągalnym *dla układu* (2.1) *przy początkowej wartości* y_0 *i czasie końcowym* T.



Rysunek 3: Aproksymacyjna sterowalność w odróżnieniu od całkowitej sterowalności.

W przestrzeniach skończenie wymiarowych pojęcie sterowalności odgrywa kluczową rolę [Zab], więc jest naturalnym uogólnić je na przestrzenie nieskończenie wymiarowe. Całkowita sterowalność jest własnością oznaczającą możliwość przejścia między dwoma dowolnymi punktami w przestrzeni stanu (por. [33, BGN] i odwołania tamże). Aproksymacyjna sterowalność oznacza, że z każdego punktu startowego $y_0 \in \mathbb{H}$ możemy dojść wzdłuż trajektorii do każdego otoczenia dowolnego stanu końcowego $y_1 \in \mathbb{H}$, ale na ogół nigdy nie będziemy w stanie tego punktu osiągnąć. Mówi o tym poniższa uwaga.

Uwaga 2.2.3. Triggiani w pracach [43, 44] udowodnił, że jeśli $\mathbb{H}$ jest nieskończenie wymiarową przestrzenią Banacha oraz (*a*) B jest zwartym operatorem lub (*b*) półgrupa $\{S_A(t)\}_{t \geqslant 0}$ jest zwarta, to układ (2.1) nie może być całkowicie sterowalny.

Z powyższej uwagi wynika, że w nieskończenie wymiarowych przestrzeniach koncepcja całkowitej sterowalności jest zazwyczaj zbyt silna. Mimo wszystko, jeśli nie założymy zwartości półgrupy S_A ani operatora B, to możemy otrzymać pewne wyniki: na przykład w pracy [33] zostały sformułowane warunki wystarczające na to, aby układ (2.1) był całkowicie sterowalny. Aproksymacyjna sterowalność jest jednak w wielu problemach bardziej adekwatna i dlatego bardzo często wystarczy w zastosowaniach [GLH]. Na przykład klasa układów nie będących całkowicie sterowalnymi zawiera w sobie paraboliczne równania różniczkowe.

Uwaga 2.2.4. W polskim wydaniu swojej książki Zabczyk zdefiniowaną powyżej aproksymacyjną sterowalność nazywa *aproksymatywną sterowalnością* [Zab, § IV.2.3].

Sformułujemy teraz problem, który będzie przedmiotem naszego zainteresowania w dalszej części rozdziału.

Problem 2.2.5. Dla dowolnych punktów $y_0, y_1 \in \mathbb{H}$ oraz dowolnego $\epsilon > 0$ znaleźć sterowanie $u \in L^2(\mathcal{J}, \mathbb{U})$ oraz łagodne rozwiązanie układu (2.1) spełniające warunki: $y(0) = y_0$ oraz $\|y(T) - y_1\| < \epsilon$.

Dążymy do otrzymania wyniku dotyczącego aproksymacyjnej sterowalności układu (2.1). Żeby to osiągnąć, musimy wpierw wprowadzić pomocnicze pojęcia i operatory. W celu osiągnięcia głównego wyniku w tym rozdziale, używając teorii punktów stałych, pokażemy istnienie rodziny rozwiązań problemu Cauchy'ego (2.1). Następnie udowodnimy, że przy pewnych założeniach aproksymacyjna sterowalność układu (2.1) wynika z aproksymacyjnej sterowalności *stowarzyszonego z* (2.1) *układu liniowego*, tj.

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) & \text{dla p.w. } t \in \mathcal{J}, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Uwaga 2.2.6. W pracy [33] rozważano całkowitą sterowalność układu hiperbolicznego postaci (2.1) w ośrodkowej przestrzeni Banacha bez założenia zwartości półgrupy $\{S_A(t)\}_{t\geqslant 0}$, ale przy założeniu zwartych wartości odwzorowania F. W szczególności sformułowane są tam pewne warunki, przy których całkowita sterowalność układu semiliniowego (2.1) jest implikowana przez całkowitą sterowalność układu liniowego (2.8). Nie zakłada się zwartości C_0-półgrupy generowanej przez operator liniowy A, a dociekania są prowadzone przy użyciu teorii punktów stałych dla odwzorowań kondensujących. Wyniki zawarte w tym rozdziale wydają się być komplementarne do wspomnianej pracy, gdyż mamy następujący wynik dotyczący istnienia rozwiązań równań semiliniowych:

Twierdzenie 2.2.7. *Niech $\mathbb{E}$ będzie ośrodkową przestrzenią Banacha. Załóżmy warunek (A) oraz niech odwzorowanie $F\colon \mathcal{J} \times \mathbb{E} \multimap \mathbb{E}$ ma subliniowy wzrost. Wówczas dla każdych $y_0 \in \mathbb{E}$ oraz $t_0 \in \mathcal{J}$ zagadnienie początkowe*

$$\begin{cases} \dot{y}(t) \in Ay(t) + F\big(t, y(t)\big) & \textit{dla p.w. } t \in \mathcal{J}, \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.9}$$

ma łagodne rozwiązanie, o ile:

(a) *[KOZ, Theorem 5.2.2, Corollary 5.2.2] odwzorowanie F ma zwarte i wypukłe wartości, spełnia (F1) dla p.w. $t \in \mathcal{J}$ multifunkcja $F(t,\cdot)\colon \mathbb{E} \multimap \mathbb{E}$ jest u.s.c. oraz istnieje funkcja $k \in L^1\big(\mathcal{J}, [0,+\infty)\big)$ taka, że dla każdego zbioru ograniczonego $\Omega \subset \mathbb{E}$ zachodzi*

$$\chi_{\mathbb{E}}\big(F(\{t\} \times \Omega)\big) \leqslant k(t)\chi_{\mathbb{E}}(\Omega) \quad \textit{dla p.w. } t \in \mathcal{J}, \tag{2.10}$$

natomiast $\chi_{\mathbb{E}}$ oznacza miarę niezwartości Hausdorffa w przestrzeni $\mathbb{E}$; lub

(b) *[18, Proposition 3.6] odwzorowanie F spełnia warunki (F0), (F1), (F2) oraz półgrupa $\{S_A(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest zwarta.*

Co więcej, w obydwu tych przypadkach odwzorowanie wielowartościowe $L\colon \mathbb{E} \times \mathcal{J} \multimap \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{E})$, które przyporządkowuje każdemu $(y_0, t_0) \in \mathbb{E} \times \mathcal{J}$ zbiór wszystkich łagodnych rozwiązań problemu początkowego (2.9)*, jest u.s.c. o niepustych oraz zwartych wartościach.*

Uwaga 2.2.8. W powyższym twierdzeniu zakłada się ośrodkowość przestrzeni Banacha. Założenie to jest potrzebne tylko w przypadku (a).

Warunek *subliniowego wzrostu* oznacza, że istnieje funkcja $\beta \in L^1\big(\mathcal{J}, [0,+\infty)\big)$ taka, że $\|F(t,x)\| \leqslant \beta(t)(1 + \|x\|)$ dla p.w. $t \in \mathcal{J}$ i każdego $x \in \mathbb{E}$.

W dalszej części rozdziału pokażemy, że w przypadku układu sterowania zwartość nieliniowej części inkluzji może być zamieniona na zwartość półgrupy. Będziemy rozważać więc przypadek „paraboliczny”, w odróżnieniu od przypadku „hiperbolicznego”, rozpatrywanego w [33].

2.3 POMOCNICZE OPERATORY. WARUNEK REZOLWENTY

Podejście tu zawarte zostało zaczerpnięte z pracy [11]. Podzieliliśmy na kilka kroków dowód aproksymacyjnej sterowalności układu (2.1). Na początku definiujemy rodzinę operatorów, których punkty stałe są łagodnymi rozwiązaniami układu (2.1). W kroku 2.4.1 pokazujemy, że każdy operator z tej rodziny ma w istocie punkt stały. W kroku 2.5.1 używamy założenia o zwartości półgrupy, żeby pokazać główny wynik tego rozdziału.

Wprowadzamy operator $H_B^T \colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ wzorem

$$H_B^T := \int_0^T S_A(T-s)BB^*S_A^*(T-s)\,ds \tag{2.11}$$

oraz operator rezolwenty $R(\alpha, H_B^T) \colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ wzorem

$$R(\alpha, H_B^T) := (\alpha I_{\mathbb{H}} + H_B^T)^{-1}. \tag{2.12}$$

Zauważmy, że operator H_B^T jest samosprzężony oraz spełnia następujące oszacowanie $\langle(\alpha I_{\mathbb{H}} + H_B^T)x, x\rangle \geqslant \alpha\|x\|^2$, więc dzięki twierdzeniu 1.3.1 operator $R(\alpha, H_B^T)$ jest poprawnie zdefiniowany oraz zachodzi $\|R(\alpha, H_B^T)\| \leqslant \frac{1}{\alpha}$. Pomoże nam to przekształcić pytanie o aproksymacyjną sterowalność rozważanego układu na zagadnienie zbieżności jednoparametrycznej rodziny rozwiązań pewnych problemów optymalnego sterowania.

Zdefiniujmy *operator sterowalności* dla układu (2.1) na $\mathcal{J}$ jako ograniczony operator liniowy $\mathcal{B}^T \colon L^2(\mathcal{J}, \mathbb{U}) \to \mathbb{H}$ wzorem

$$\mathcal{B}^T u := \int_0^T S_A(T-s)Bu(s)\,ds \quad \text{dla } u \in L^2(\mathcal{J}, \mathbb{U}). \tag{2.13}$$

Lemat 2.3.1. *[CZ, Lemma 4.1.4] Mamy następujące własności:*

(a) $([\mathcal{B}^T]^*z)(s) = B^*S_A^*(T-s)z$ *dla* $s \in [0, T]$;

(b) H_B^T *ma przedstawienie* $H_B^T = \mathcal{B}^T(\mathcal{B}^T)^*$.

Dowód. Operator sprzężony do operatora $\mathcal{B}^T$ jest ograniczony, więc

$$\begin{aligned} \langle u, [\mathcal{B}^T]^*z\rangle_{L^2} &= \langle \mathcal{B}^T u, z\rangle_{\mathbb{H}} = \left\langle \int_0^T S_A(T-s)Bu(s)\,ds, z \right\rangle_{\mathbb{H}} \\ &= \int_0^T \langle S_A(T-s)Bu(s), z\rangle_{\mathbb{H}}\,ds = \int_0^T \langle u(s), B^*S_A^*(T-s)z\rangle_{\mathbb{H}}\,ds, \end{aligned} \tag{2.14}$$

a to dowodzi punktu (a). Przedstawienie z punktu (b) wynika wprost z równości (2.14). □

Jako bezpośrednią konsekwencję tego rezultatu otrzymujemy następującą uwagę.

Uwaga 2.3.2. [Zab, Theorem IV.2.5] Ze względu na równość $(\mathrm{Ker}([\mathcal{B}^T]^*))^\perp = \overline{\mathrm{Range}(\mathcal{B}^T)}$ i reprezentację rozwiązania łatwo zauważyć, że aproksymacyjna sterowalność układu (2.1) jest równoważna równości $\mathrm{Ker}([\mathcal{B}^T]^*) = \{0\}$. Ponadto stosując lemat 2.3.1 p. (a) widzimy, że jest to równoważne implikacji: jeśli $B^*S_A^*(s)z = 0$ dla każdego $s \in [0, T]$, to $z \equiv 0$. Z kolei ten ostatni warunek jest stosunkowo łatwy do sprawdzenia w praktyce, a więc daje skuteczną metodę określania aproksymacyjnej sterowalności.

Poniższy lemat stanowi podstawę dla naszych dalszych rozważań.

Lemat 2.3.3. *[5, Lemma 2] Dla danych $h \in \mathbb{H}$ oraz $\alpha > 0$ istnieje dokładnie jedno sterowanie $v^\alpha \in L^2(\mathcal{J}, \mathbb{U})$, dla którego funkcjonał kosztu*

$$J^\alpha(v) := \|y^v(T) - h\|^2 + \alpha \int_0^T \|v(t)\|^2 \, dt, \tag{2.15}$$

gdzie y^v jest łagodnym rozwiązaniem układu (2.8) dla $u = v$, przyjmuje wartość minimalną. Ponadto

$$v^\alpha(t) = -B^* S_A^*(T-t) R(\alpha, H_B^T)\big(S_A(T)y_0 - h\big), \quad t \in \mathcal{J}, \quad \text{oraz} \tag{2.16}$$

$$y^{v^\alpha}(T) - h = \alpha R(\alpha, H_B^T)\big(S_A(T)y_0 - h\big). \tag{2.17}$$

Dowód. Dowód istnienia i jedyności można znaleźć w [CP, Lemma 4.5]. W celu otrzymania drugiej tezy lematu policzmy wariację funkcjonału (2.15) w punkcie v^α danym wzorem (2.16):

$$\begin{aligned}
\Delta J^\alpha(v^\alpha)(\delta) &= J^\alpha(v^\alpha + \delta) - J^\alpha(v^\alpha) \\
&= \|y^{v^\alpha+\delta}(T) - h\|^2 + \alpha \int_0^T \|v^\alpha(s) + \delta(s)\|^2 \, ds \\
&- \|y^{v^\alpha}(T) - h\|^2 - \alpha \int_0^T \|v^\alpha(s)\|^2 \, ds \\
&= 2 \left\langle y^{v^\alpha}(T) - h, \int_0^T S_A(T-s)B\delta(s) \, ds \right\rangle + \left\| \int_0^T S_A(T-s)B\delta(s) \, ds \right\|^2 \\
&+ \alpha \int_0^T \left(2\langle v^\alpha(s), \delta(s)\rangle + \|\delta(s)\|^2 \right) \, ds \\
&= \left\| \int_0^T S_A(T-s)B\delta(s) \, ds \right\|^2 + \alpha \int_0^T \|\delta(s)\|^2 \, ds.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Stąd $J^\alpha(v^\alpha + \delta) - J^\alpha(v^\alpha) \geqslant 0$ dla każdego δ, zatem v^α jest poszukiwanym minimum. Wystarczy tylko sprawdzić równość (2.17). Przy pomocy wzoru (2.16) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
y^{v^\alpha}(T) &= S_A(T)y_0 + \int_0^T S_A(T-s)Bv^\alpha(s) \, ds \\
&= S_A(T)y_0 - \int_0^T S_A(T-s)BB^*S_A^*(T-s)R(\alpha, H_B^T)\big(S_A(T)y_0 - h\big) \, ds \\
&= S_A(T)y_0 - L_B^T R(\alpha, H_B^T)\big(S_A(T)y_0 - h\big).
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Następnie do ostatniej równości dodajmy i odejmijmy czynnik $\alpha R(\alpha, H_B^T)\big(S_A(T)y_0 - h\big)$. Po skróceniu otrzymamy

$$y^{v^\alpha}(T) - h = \alpha R(\alpha, H_B^T)\big(S_A(T)y_0 - h\big), \tag{2.20}$$

co w połączeniu z równością (2.16) da pożądaną równość. □

Uwaga 2.3.4. Zwróćmy uwagę, że jeżeli $\alpha \to 0^+$, to wartość funkcjonału J^α zbliża się do wielkości $\|y^v(T) - h\|^2$. Innymi słowy, próbujemy jednocześnie zmniejszyć odległość końca trajektorii od punktu końcowego h oraz normę sterowania v w L^2.

Przy pomocy powyższych lematów pokażemy główne twierdzenie tego podrozdziału. Wyraża ono, mówiąc nie do końca precyzyjnie, fakt, że aproksymacyjna sterowalność może być postrzegana jako własność graniczna pewnego ciągu optymalnych problemów sterowania.

Twierdzenie 2.3.5. *[5, Theorem 2] Przy założeniach (A) oraz (B) układ* (2.8) *jest aproksymacyjnie sterowalny na $\mathcal{J}$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

(R) $\alpha R(\alpha, H_B^T) \to 0$ *w* silnej topologii operatorowej *(tzn. punktowo) przy* $\alpha \to 0^+$.

Dowód. Niech $\eta > 0$ oraz $h \in \mathbb{H}$. Załóżmy, że $\alpha R(\alpha, H_B^T) \to 0$ w silnej topologii operatorowej, gdy $\alpha \to 0^+$. Wybierając liczbę $\alpha > 0$ dostatecznie małą mamy

$$\|y^{v^\alpha}(T) - h\| = \left\|\alpha R(\alpha, H_B^T)\big(S_A(T)y_0 - h\big)\right\| < \eta. \tag{2.21}$$

Dlatego układ (2.8) jest aproksymacyjnie sterowalny.

Z drugiej strony załóżmy, że układ (2.8) jest aproksymacyjnie sterowalny oraz $h \in \mathbb{H}$. Dlatego istnieje ciąg sterowań $(v^n)_{n\geqslant 1} \subset L^2(\mathcal{J}, \mathbb{U})$ taki, że

$$\|y^{v^n}(T) - h\| \to 0 \quad \text{dla } \ n \to +\infty. \tag{2.22}$$

Weźmy rodzinę optymalnych rozwiązań jak w lemacie 2.3.3. W związku z tym, że v^α minimalizuje funkcjonał J^α, mamy

$$\|y^{v^\alpha}(T) - h\|^2 \leqslant \|y^{v^\alpha}(T) - h\|^2 + \alpha\int_0^T \|v^\alpha(s)\|^2\,ds \leqslant \|y^{v^n}(T) - h\|^2 + \alpha\int_0^T \|v^n(s)\|^2\,ds. \tag{2.23}$$

Niech $\epsilon > 0$ oraz ustalmy wskaźnik $n \in \mathbb{N}$ taki, że $\|y^{v^n}(T) - h\| < \epsilon/\sqrt{2}$. Jeśli liczba δ jest wystarczająco mała i α jest taka, że $0 < \alpha < \delta$, to

$$\alpha\int_0^T \|v^n(s)\|^2\,ds < \frac{\epsilon^2}{2}. \tag{2.24}$$

Stąd $\|y^{v^\alpha}(T) - h\| < \epsilon$ dla $0 < \alpha < \delta$. Dzięki reprezentacji (2.20) z dowolności wyboru h mamy, że $\alpha R(\alpha, H_B^T) \to 0$ w silnej topologii operatorowej dla $\alpha \to 0^+$. Twierdzenie zostało więc udowodnione. □

Uwaga 2.3.6. Wykorzystując fakt 1.3.5 można pokazać, że jeśli $\dim \mathbb{H} < +\infty$, to warunek (R) jest równoważny warunkowi Kalmana.

2.4 PRZEFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Przepiszemy problem 2.2.5 na pewien układ równań. Mianowicie dla danych $y_0, y_1 \in \mathbb{H}$ i dla każdego $\alpha > 0$ będziemy szukać pary funkcji $(y, u) \in \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{H}) \times L^2(\mathcal{J}, \mathbb{U})$ takiej, że spełnione są następujące równania

$$u(t) = u^\alpha_{y_1,f}(t) := B^*S_A^*(T-t)R(\alpha, H_B^T)p(f), \tag{2.25}$$

$$y(t) = y^\alpha(t) := S_A(t)y_0 + \int_0^t S_A(t-s)f(s)\,ds + \int_0^t S_A(t-s)Bu^\alpha_{y_1,f}(s)\,ds, \tag{2.26}$$

gdzie

$$p(f) := y_1 - S_A(T)y_0 - \int_0^T S_A(T-s)f(s)\,ds \quad \text{dla } \ f \in P_F(y). \tag{2.27}$$

Poniżej pokażemy rozwiązalność powyższego układu równań.

Uwaga 2.4.1. W podrozdziale 2.5.1 zostanie pokazane przy użyciu metody punktów stałych, że przy pewnych założeniach aproksymacyjna sterowalność układu liniowego (2.8) implikuje aproksymacyjną sterowalność układu semiliniowego (2.1). Pomocne nam wtedy będą reprezentacje (2.25) i (2.26).

Nim to nastąpi, potrzebnych nam będzie jeszcze kilka definicji. Dla $\alpha > 0$ definiujemy operator $\mathfrak{S}^\alpha \colon L^1(\mathcal{J}, \mathbb{H}) \to \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{H})$ wzorem

$$\big(\mathfrak{S}^\alpha f\big)(t) := S_A(t)y_0 + \int_0^t S_A(t-s)f(s)\,ds + \int_0^t S_A(t-s)Bu^\alpha_{y_1,f}(s)\,ds \tag{2.28}$$

dla $f \in L^1(\mathcal{J}, \mathbb{H})$ oraz liniowy operator $W^\alpha \colon \mathbb{H} \to L^2(\mathcal{J}, \mathbb{U})$ następująco

$$W^\alpha(x)(s) := B^* S_A^*(T-s)R(\alpha, H_B^T)(x) \quad \text{dla } x \in \mathbb{H},\ s \in \mathcal{J}. \tag{2.29}$$

Jasnym jest, że skoro $\|R(\alpha, H_B^T)\| \leqslant \frac{1}{\alpha}$, to operator W^α jest ograniczony i możemy oznaczyć $M^\alpha := \|W^\alpha\|$ dla każdego $\alpha > 0$. Jeśli $\mathbb{H} = \mathbb{R}^m$, to istnieje stała $\mathcal{M}$, że dla wszystkich $\alpha > 0$ zachodzi $M^\alpha \leqslant \mathcal{M} < +\infty$ (fakt 1.3.5).

W celu rozwiązania problemu 2.2.5 użyjemy narzędzi analizy wielowartościowej. Rozważmy rodzinę multioperatorów $\Gamma^\alpha \colon \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{H}) \multimap \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{H})$ zdefiniowanych jako

$$\Gamma^\alpha(y) := \Big\{ z \in \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{H}) \;\Big|\; z(t) = \big(\mathfrak{S}^\alpha f\big)(t) \ \text{ dla p.w. } t \in \mathcal{J}, \text{ dla pewnego } \ f \in P_F(y) \Big\}, \tag{2.30}$$

gdzie $y \in \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{H})$ dla wszystkich $\alpha > 0$. Naszym celem jest pokazanie, że operatory Γ^α mają punkty stałe.

Lemat 2.4.2. *Dla danego całkowo ograniczonego ciągu $(f_n)_{n \geqslant 1}$ w $L^1(\mathcal{J}, \mathbb{H})$, ciąg o wyrazach $v_n := \mathfrak{S}^\alpha(f_n) \in \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{H})$ jest relatywnie zwarty.*

Dowód. Zauważmy, że na podstawie założenia dla prawie wszystkich $t \in \mathcal{J}$ mamy $\|f_n(t)\| \leqslant \sigma(t)$, dla pewnego $\sigma \in L^1\big(\mathcal{J}, [0, +\infty)\big)$. Niech $t \in \mathcal{J}$ będzie taki, że $t > 0$. Weźmy $\epsilon > 0$ i wybierzmy $\delta \in (0, t)$ takie, że $M_A \int_{t-\delta}^t \sigma(s)\,ds < \frac{\epsilon}{2}$ oraz $M_A M^\alpha\big(\|y_1\| + M_A\|y_0\| + M_A \int_0^T \sigma(s)\,ds\big)\delta < \frac{\epsilon}{2}$, gdzie, przypomnijmy, $M_A = \sup_{t \in \mathcal{J}} \|S_A(t)\|$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} v_n(t) = S_A(t)y_0 + S_A(\delta)\left(\int_0^{t-\delta} S_A(t-\delta-s)\big(f_n(s) + u_{y_1,f_n}(s)\big)\,ds\right) \\ + \int_{t-\delta}^t S_A(t-s)f_n(s)\,ds + \int_{t-\delta}^t S_A(t-s)u_{y_1,f_n}(s)\,ds. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Dlatego

$$\big\{v_n(t)\big\}_{n \geqslant 1} \subset S_A(t)y_0 + S_A(\delta)\left\{\int_0^{t-\delta} S_A(t-\delta-s)\big(f_n(s) + u_{y_1,f_n}(s)\big)\,ds\right\}_{n \in \mathbb{N}} \tag{2.32}$$

$$+ \mathcal{B}(0, \epsilon), \tag{2.33}$$

ponieważ $\| \int_{t-\delta}^t S_A(t-s)\big(f_n(s) + u_{y_1,f_n}(s)\big)\,ds\| < \epsilon$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Zwartość $S_A(\delta)$ implikuje, że zbiór $\big\{v_n(t)\big\}_{n \geqslant 1} \subset \mathbb{H}$ jest relatywnie zwarty.

W celu pokazania, że rodzina $\{v_n\}_{n \geqslant 1}$ jest równociągła, ustalmy $t_0 \in \mathcal{J}$, $\epsilon > 0$ oraz weźmy $\delta_1 > 0$ takie, że $M_A \int_B \sigma(s)\,ds < \frac{\epsilon}{4}$, jeśli tylko zbiór $B \subset \mathcal{J}$ jest miary Lebesgue'a $\lambda(B) < 2\delta_1$. Takie δ_1 istnieje z absolutnej ciągłości całki. Oznaczmy $z := \max\{0, t_0 - \delta_1\}$; wtedy $t_0 - z \leqslant \delta_1$. Ponieważ zbiór $\{v_n(z)\}_{n\geqslant 1}$ jest relatywnie zwarty, rodzina $\{S_A(t)v_n(z)\}_{n\geqslant 1}$ jest równociągła, tj. istnieje $0 < \delta_2 < \delta_1$ takie, że dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $t \in \mathcal{J}$ mamy $\|S_A(t-z)v_n(z) - S_A(t_0-z)v_n(z)\| \leqslant \frac{\epsilon}{4}$, o ile $|t - t_0| < \delta_2$. Weźmy liczbę $0 < \delta < \delta_2$ spełniającą $2M_A M^\alpha\big(\|y_1\| + M_A\|y_0\| + M_A\int_0^T \sigma(s)\,ds\big)\delta < \frac{\epsilon}{8}$ oraz niech $t \in \mathcal{J}$ będzie takie, że $|t-t_0| < \delta$. Własność półgrupowa daje nam

$$\begin{aligned}\|v_n(t) - v_n(t_0)\| &\leqslant \|S_A(t-z)v_n(z) - S_A(t_0-z)v_n(z)\| \\ &+ \left\|\int_z^t S_A(t-s)\big(f_n(s) + u_{y_1,f_n}(s)\big)\,ds\right\| \\ &+ \left\|\int_z^{t_0} S_A(t_0-s)\big(f_n(s) + u_{y_1,f_n}(s)\big)\,ds\right\| \\ &\leqslant \|S_A(t-z)v_n(z) - S_A(t_0-z)v_n(z)\| \\ &+ M_A\int_z^t \sigma(s)\,ds + M_A\int_z^{t_0}\sigma(s)\,ds \\ &+ 4M_A M^\alpha\left(\|y_1\| + M_A\|y_0\| + M_A\int_0^T \sigma(s)\,ds\right)\delta < \epsilon. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Dowiedliśmy więc równociągłości rodziny $\{v_n\}_{n\geqslant 1}$. Na mocy twierdzenia Arzeli-Ascolego otrzymujemy tezę. □

Uwaga 2.4.3. Widzimy, że multioperator $\mathfrak{S}^\alpha \circ P_F$ jest pełnociągły, tj. zbiór $\mathfrak{S}^\alpha \circ P_F(U)$ jest relatywnie zwarty, jeśli pozdbiór $U \subset \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{H})$ jest ograniczony. Istotnie, ograniczoność zbioru U implikuje, że przy założeniu (F3) zbiór $W := P_F(U)$ jest całkowo ograniczony, a stąd $\mathfrak{S}^\alpha(W)$ jest relatywnie zwarty na mocy tych samych argumentów jak powyżej. W szczególności operator $\mathfrak{S}^\alpha \circ P_F$ jest quasizwarty.

Dzięki powyższej uwadze oraz faktowi 1.2.3, w celu udowodnienia, że dla $\alpha > 0$ odwzorowanie Γ^α jest u.s.c., musimy tylko pokazać, że ma ono zwarte wartości.

Fakt 2.4.4. *Dla danego $\alpha > 0$ operator $\Gamma^\alpha = \mathfrak{S}^\alpha \circ P_F$ jest u.s.c. i ma zwarte wartości.*

Dowód. Wiemy, że wartości odwzorowania Γ^α są relatywnie zwarte. Pokażemy, że są domknięte. Niech $x_0 \in \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{H})$, $(y_n)_{n\geqslant 1} \subset \Gamma^\alpha(x_0)$ oraz $y_n \to y_0 \in \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{H})$. Pokażemy, że $y_0 \in \Gamma^\alpha(x_0)$. Wykorzystamy w tym celu twierdzenie 2.1.5. Niech $y_n = \mathfrak{S}^\alpha(w_n)$, gdzie $(w_n)_{n\geqslant 1} \subset P_F(x_0)$, wówczas ze słabej zwartości zbioru $P_F(x_0)$, z dokładnością do podciągu, $w_n \rightharpoonup w_0 \in P_F(x_0)$. Dzięki zwartości półgrupy, z dokładnością do podciągu, $\mathfrak{S}^\alpha(w_n) \to \mathfrak{S}^\alpha(w_0)$. Stąd $y_0 = \mathfrak{S}^\alpha(w_0) \in \Gamma^\alpha(x_0)$. Dowodzi to, że odwzorowanie Γ^α ma domknięte wartości. □

Uwaga 2.4.5. Zauważmy, że pełnociągłe odwzorowanie wielowartościowe jest najprostszym przykładem odwzorowania kondensującego.

2.4.1 | WARUNKI WYSTARCZAJĄCE NA ISTNIENIE PUNKTÓW STAŁYCH OPERATORÓW Γ^α

Przypomnijmy, że stopień topologiczny dla odwzorowań kondensujących oznaczamy przez deg. Mamy wszystkie składniki, aby sformułować następujące ogólne twierdzenie.

Twierdzenie 2.4.6. *Weźmy $\alpha > 0$ i załóżmy, że zachodzą (A), (B), (F0), (F1), (F2) oraz (F3). Niech $V^\alpha \subset \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{H})$ będzie ograniczonym zbiorem otwartym takim, że dla wszystkich $z \in \partial V^\alpha$ mamy $z \notin \Gamma^\alpha(z)$. Jeśli $\deg(\mathbb{I} - \Gamma^\alpha, \overline{V^\alpha}) \neq 0$, to istnieje punkt stały y^α operatora Γ^α taki, że $y^\alpha \in V^\alpha$.*

W szczególności otrzymujemy poniższą uwagę.

Uwaga 2.4.7. Rozważmy operator $\Gamma_0^\alpha\colon \mathcal{C}(\mathcal{J},\mathbb{H}) \multimap \mathcal{C}(\mathcal{J},\mathbb{H})$ dany wzorem

$$\Gamma_0^\alpha(y)(t) := S_A(t)y_0 + \int_0^t S_A(t-s)B\big(W^\alpha(y_1 - S_A(T)y_0)\big)(s)\,ds, \quad t \in \mathcal{J}. \tag{2.35}$$

Ma on dokładnie jeden punkt stały i jest on łagodnym rozwiązaniem układu (2.8) przy sterowaniu $u = W^\alpha(y_1 - S_A(T)y_0)$. Przy założeniach jak w twierdzeniu 2.4.6, niech $\delta_\alpha := d(\mathrm{Fix}\,\Gamma_0^\alpha, \partial V^\alpha) > 0$ oraz $\deg(\mathbb{I} - \Gamma_0^\alpha, V^\alpha) \neq 0$. Za V^α możemy przyjąć kulę wokół punktu $\mathrm{Fix}\,\Gamma_0^\alpha$. Wtedy, w szczególności, układ liniowy (2.8) jest aproksymacyjnie sterowalny.

Zdefiniujmy homotopię $H\colon \overline{V^\alpha} \times [0,1] \multimap \mathcal{C}(\mathcal{J},\mathbb{H})$ wzorem

$$H(y,\lambda) := \Gamma_0^\alpha(y) + \lambda\Gamma_1^\alpha(y) \quad \text{dla } y \in \overline{V^\alpha},\ \lambda \in [0,1], \tag{2.36}$$

gdzie

$$\Gamma_1^\alpha(y) := \left\{ \int_0^{\cdot} S_A(\cdot - s)\left(f(s) - B\left(W^\alpha\left(\int_0^T S_A(T-\tau)f(\tau)\,d\tau\right)\right)(s)\right) ds \;\middle|\; f \in P_F(y)\right\}. \tag{2.37}$$

Wówczas mamy

$$\mathfrak{D}\big(\mathrm{Fix}\,H(\cdot,\lambda), \mathrm{Fix}\,H(\cdot,0)\big) \leqslant M_A(1 + M_A M_B M^\alpha T)\|\mu_{V^\alpha}\|_{L^1} =: \eta_\alpha. \tag{2.38}$$

Jeśli istnieje liczba α_0 taka, że dla wszystkich $0 < \alpha < \alpha_0$ mamy $\eta_\alpha < \delta_\alpha$, to H jest dopuszczalną homotopią łączącą odwzorowania Γ_0^α oraz Γ^α. Jako wniosek z niezmienniczości homotopijnej stopnia topologicznego otrzymujemy, że $\deg(\mathbb{I} - \Gamma^\alpha, \overline{V^\alpha}) \neq 0$.

Powyższe twierdzenie wynika wprost z własności istnienia dla stopnia pól kondensujących (patrz definicja 1.5.1 p. 1) i nie daje nam konkretnych warunków gwarantujących rozwiązalność rozważanego problemu. Powodem jest to, że warunek wzrostu (F3) jest zbyt ogólny, ażeby zapewnić istnienie rozwiązań układu (2.1). Używając twierdzenia Schaefera oraz twierdzenia Sadowskiego można pokazać następujące szczególne przypadki:

Twierdzenie 2.4.8. *Przy założeniach (A), (B), (F0), (F1) oraz (F2), zastąpmy warunek (F3) jednym z następujących warunków:*

(F3A) *istnieje ciąg funkcji* $(\omega_n)_{n\geqslant 1} \subset L^1\big(\mathcal{J}, [0,+\infty)\big)$ *taki, że*

$$\sup_{\|x\|\leqslant n} \|F(t,x)\| \leqslant \omega_n(t) \quad \textit{dla p.w. } t \in \mathcal{J},\ n = 1,2,\ldots, \tag{2.39}$$

spełniający warunek

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\int_0^T \omega_n(s)\,ds = 0; \tag{2.40}$$

(F3B) *istnieje funkcja* $p \in L^1\big(\mathcal{J}, [0,+\infty)\big)$ *oraz niemalejąca funkcja* $\psi\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ *taka, że*

$$\|F(t,x)\| \leqslant p(t)\,\psi\big(\|x\|\big) \quad \textit{dla p.w. } t \in \mathcal{J}, \tag{2.41}$$

oraz dla każdego $\alpha > 0$ *istnieje stała* $L^\alpha > 0$ *taka, że*

$$\frac{L^\alpha}{C_1^\alpha + C_2^\alpha \psi(L^\alpha)\int_0^T p(\tau)\,d\tau} > 1, \tag{2.42}$$

gdzie stałe C_1^α i C_2^α są dane przez następujące formuły

$$C_1^\alpha := M_A\|y_0\| + M_A M_B M^\alpha \sqrt{T}\big(\|y_1\| + M_A\|y_0\|\big), \tag{2.43}$$
$$C_2^\alpha := M_A\left(1 + M_A M_B M^\alpha\sqrt{T}\right); \tag{2.44}$$

(F3c) *dla każdego $\alpha > 0$ istnieje $\beta^\alpha \in L^1\big(\mathcal{J}, [0, +\infty)\big)$ taka, że spełniony jest warunek subliniowego wzrostu, tzn.*

$$\|F(t,x)\| \leqslant \beta^\alpha(t)\big(1 + \|x\|\big) \quad \textit{dla p.w. } t \in \mathcal{J} \textit{ i każdego } x \in \mathbb{H},$$

oraz ma miejsce następująca nierówność

$$(C_2^\alpha - M_A)e^{M_A\int_0^T \beta^\alpha(s)\,ds}\int_0^T \beta^\alpha(t)e^{-M_A\int_0^t \beta^\alpha(\tau)\,d\tau}\,dt < 1, \tag{2.45}$$

gdzie stała C_2^α jest dana równością (2.44);

(F3d) *istnieją rodziny funkcji $\xi_i\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ oraz $\lambda_i \in L^1\big(\mathcal{J}, [0,+\infty)\big)$, $i = 1,\dots,q$, takie, że*

$$\|F(t,x)\| \leqslant \sum_{i=1}^{q}\lambda_i(t)\,\xi_i\big(\|x\|\big) \quad \textit{dla p.w. } t \in \mathcal{J} \textit{ oraz wszystkich } x \in \mathbb{H}, \tag{2.46}$$

oraz dla każdego $\alpha > 0$ mamy równość

$$\limsup_{r\to\infty}\left(r - \sum_{i=1}^{q} g_i\frac{\xi_i(r)}{\alpha}\right) = +\infty, \tag{2.47}$$

gdzie stałe są dane wzorami:

$$g_i := \max\{3M_A\|\lambda_i\|_{L^1}, 3\kappa M_A^2 M_B\|\lambda_i\|_{L^1}\}, \quad \textit{gdzie} \tag{2.48}$$
$$\kappa := \max\{1, M_A, M_A M_B T\}. \tag{2.49}$$
$$\tag{2.50}$$

Wtedy dla każdego $\alpha > 0$ odwzorowanie Γ^α ma punkt stały.

Dowód. Rozumowanie dla warunków (F3a)–(F3c) można poprowadzić dokładnie w taki sam sposób jak w przypadku hiperbolicznym, zobacz [33, Theorem 4, Theorem 5, Theorem 6]. Pokażemy dowód przy warunku (F3d). Dowiedziemy, że istnieją: liczba $r = r(\alpha)$ oraz kula domknięta $\mathcal{D}(0,r)$ takie, że odwzorowanie Γ^α przekształca zbiór $\mathcal{D}(0,r)$ w siebie. Oznaczmy

$$d_1 := 3M_A\|y_0\|, \quad d_2 := 3\kappa M_A M_B(\|y_1\| + M_A\|y_0\|), \quad d := \max\{d_1, d_2\}. \tag{2.51}$$

Na mocy założenia (F3d) istnieje liczba $r > 0$ taka, że

$$\frac{d}{\alpha} + \sum_{i=1}^{q} g_i\frac{\xi_i(r)}{\alpha} \leqslant r. \tag{2.52}$$

Wtedy dla każdych $y \in \mathcal{D}(0, r)$, $z \in \Gamma^\alpha(y)$ oraz p.w. $t \in \mathcal{J}$ otrzymamy z (2.25) i (2.27):

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &\leqslant \frac{1}{\alpha} M_A M_B \left(\|y_1\| + M_A \|y_0\| + M_A \int_0^T \sum_{i=1}^q \lambda_i(s) \xi_i(\|y(s)\|)\, ds \right) \\ &\leqslant \frac{1}{\alpha} M_A M_B (\|y_1\| + M_A \|y_0\|) + \frac{1}{\alpha} M_A^2 M_B \sum_{i=1}^q \|\lambda_i\|_{L^1} \xi_i(r) \\ &\leqslant \frac{d}{3\kappa\alpha} + \frac{1}{3\kappa} \sum_{i=1}^q \frac{g_i}{\alpha} \xi_i(r) \leqslant \frac{r}{3\kappa} \end{aligned} \tag{2.53}$$

oraz

$$\begin{aligned} \|z(t)\| &\leqslant M_A \|y_0\| + M_A \int_0^T \sum_{i=1}^q \lambda_i(s) \xi_i(\|y(s)\|)\, ds + M_A M_B \sqrt{T} \|u\|_{L^2} \\ &\leqslant \frac{d}{3} + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^q g_i \xi_i(r) + M_A M_B \sqrt{T} \cdot \sqrt{T} \frac{r}{3\kappa} \leqslant \frac{2r}{3} < r. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Skoro operator Γ^α jest pełnociagły, to z twierdzenia Sadowskiego otrzymujemy tezę. □

Chociaż warunki (F3a)–(F3d) wystarczają zwykle do istnienia rozwiązań równań i inkluzji, a także w kontekście badania całkowitej sterowalności układu (2.1) [33, KOZ], to okazują się nadal niewystarczające do zapewnienia aproksymacyjnej sterowalności układu (2.1). Celem następnego podrozdziału jest pokazanie warunków wystarczających na aproksymacyjną sterowalność rozważanego w tym rozdziale układu.

2.5 GŁÓWNE REZULTATY

2.5.1 KRYTERIUM W PRZYPADKU WYPUKŁEJ PRAWEJ STRONY

Twierdzenie 2.5.1. *Załóżmy, że założenia (A), (B), (F0), (F1) oraz (F2) są spełnione. Niech ponadto*

(F3E) *istnieje funkcja* $\rho \in L^1(\mathcal{J}, [0, +\infty))$ *taka, że*

$$\sup_{x \in \mathbb{H}} \|F(t, x)\| \leqslant \rho(t) \quad \text{dla p.w. } t \in \mathcal{J}. \tag{2.55}$$

Wówczas, jeśli aproksymacyjnie sterowalny na odcinku $\mathcal{J}$ jest układ (2.8), to układ (2.1) również jest aproksymacyjnie sterowalny na $\mathcal{J}$.

Uwaga 2.5.2. Zauważmy, że warunek (F3e) pociąga za sobą każdy z warunków (F3a)–(F3d) (precyzyjniej, trzeba by zapisać warunek (F3c) w postaci $\beta^\alpha(t) + \gamma^\alpha(t)\|x\|$).

Dowód. Niech y^α będzie punktem stałym odwzorowania Γ^α w kuli $\mathcal{D}(0, r(\alpha)) = \{x \in \mathbb{H} \mid \|x\| \leqslant r(\alpha)\}$. Łatwo widać, że jest on łagodnym rozwiązaniem (2.1) na $\mathcal{J}$ ze sterowaniem

$$u^\alpha_{y_1, f^\alpha}(t) = B^* S_A^*(T - t) R(\alpha, H_B^T) p(f^\alpha), \quad t \in \mathcal{J}, \tag{2.56}$$

dla pewnego $f^\alpha \in P_F(y^\alpha)$. Krótki rachunek pozwala nam otrzymać równość

$$y^\alpha(T) = y_1 - \alpha R(\alpha, H_B^T) p(f^\alpha). \tag{2.57}$$

Ponadto ze względu na założenie (F3e) i twierdzenie Dunforda-Pettisa otrzymujemy, że zbiór $\{f^\alpha\}_{\alpha>0}$ jest słabo zwarty w $L^1(\mathcal{J}, \mathbb{H})$, więc istnieje ciąg $(f^{\alpha_n})_{n\geqslant 1}$ w tym zbiorze, gdzie $\alpha_n \to 0^+$, który słabo zbiega do pewnego f_0 w $L^1(\mathcal{J}, \mathbb{H})$. Oznaczmy

$$h := y_1 - S_A(T)y_0 - \int_0^T S_A(T-s)f_0(s)\, ds. \tag{2.58}$$

Z lematu 2.4.2 operator $g \mapsto \int_0^{\cdot} S_A(\cdot - s)g(s)\, ds \colon L^1(\mathcal{J}, \mathbb{H}) \to \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{H})$ przekształca ciągi całkowo ograniczone na relatywnie zwarte i dzięki temu otrzymamy, że

$$\begin{aligned} \|p(f^{\alpha_n}) - h\| &= \left\| \int_0^T S_A(T-s)\big(f^{\alpha_n}(s) - f_0(s)\big)\, ds \right\| \\ &\leqslant \int_0^T \big\| S_A(T-s)\big(f^{\alpha_n}(s) - f_0(s)\big)\big\|\, ds \to 0. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Wtedy z równości (2.57) dostajemy

$$\begin{aligned} \|y^{\alpha_n}(T) - y_1\| &= \|\alpha_n R(\alpha_n, H_B^T)p(f^{\alpha_n})\| \\ &\leqslant \|\alpha_n R(\alpha_n, H_B^T)(h)\| + \|\alpha_n R(\alpha_n, H_B^T)\big(p(f^{\alpha_n}) - h\big)\| \\ &\leqslant \|\alpha_n R(\alpha_n, H_B^T)(h)\| + \|p(f^{\alpha_n}) - h\| \to 0. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Dowodzi to aproksymacyjnej sterowalności układu (2.1). □

Uwaga 2.5.3. Zauważmy, że żaden z warunków (F3a)–(F3d) nie implikuje, że zbiór $\{f^\alpha\}_{\alpha>0}$ jest ograniczony i przez to powyższego dowodu nie można powtórzyć przy ich założeniu. Natomiast jeśli przyjąć jakikolwiek z tych warunków, to przy założeniu aproksymacyjnej sterowalności układu liniowego otrzymamy *aproksymacyjną osiągalność* punktów w każdym ograniczonym zbiorze stanów $K \subset \mathbb{H}$, tzn. dla każdego $\epsilon > 0$ i każdych $y_0, y_1 \in K$ istnieje takie sterowanie $u \in L^2(\mathcal{J}, \mathbb{U})$, że spełnione są warunki $y(0; u) = y_0$ oraz $\|y(T; u) - y_1\| < \epsilon$.

Uwaga 2.5.4. Powyższy wynik zakłada, że liniowy czynnik równania generuje zwartą półgrupę operatorów, więc układ (2.1) z nieliniowością o słabo zwartych wartościach na pewno nie jest całkowicie sterowalny. Dlatego (jak wiemy z uwagi 2.2.3) twierdzenia 2.5.1 nie można poprawić do analogicznego wyniku dotyczącego całkowitej sterowalności.

Uwaga 2.5.5. Zauważmy, że w pracy [38] autorzy zakładają, że funkcja $f \colon \mathcal{J} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ jest taka, że $\|f(t, x)\| \leqslant K$ dla prawie wszystkich $t \in \mathcal{J}$ i dla każdego $x \in \mathbb{H}$ oraz dla pewnego $K > 0$. Z tego względu otrzymaliśmy wynik silniejszy niż we wspomnianym artykule, nawet w przypadku jednowartościowym.

Możemy też sformułować następujący *lokalny warunek aproksymacyjnej sterowalności.*

Twierdzenie 2.5.6. *Niech założenia (A), (B), (F0), (F1), (F2) oraz (F3) będą spełnione. Załóżmy, że* $V \subset \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{H})$ *jest ograniczonym, otwartym zbiorem takim, że dla wszystkich* $z \in \partial V$ *mamy* $z \notin \Gamma^\alpha(z)$*, gdzie* $\alpha > 0$ *jest dowolna. Ponadto zakładamy, że układ liniowy* (2.8) *jest aproksymacyjnie sterowalny na* $\mathcal{J}$. *Jeśli* $\deg(\mathbb{I} - \Gamma^\alpha, \overline{V}) \neq 0$ *dla każdego* $\alpha > 0$, *to układ* (2.1) *jest aproksymacyjnie sterowalny na odcinku* $\mathcal{J}$.

2.5.2 PRZYPADEK NIEWYPUKŁY

Na użytek poniższego twierdzenia przypomnimy następujące pojęcie:

Definicja 2.5.7. *[KOZ, Theorem 1.3.4] Powiemy, że odwzorowanie wielowartościowe* $\phi\colon [a,b]\times \mathbb{H} \multimap \mathbb{H}$ *jest* superpozycyjnie mierzalne *(ang.* superpositionally measurable*), jeśli dla każdej mierzalnej funkcji* $y\colon \mathcal{J} \to \mathbb{H}$ *odwzorowanie wielowartościowe* $\phi_y\colon \mathcal{J} \multimap \mathbb{H}$*, zdefiniowane jako złożenie* $\phi_y(t) := \phi\big(t, y(t)\big)$ *dla p.w.* $t \in \mathcal{J}$*, jest mierzalne.*

Uwaga 2.5.8. [KOZ, Proposition 1.3.1] Jeśli odwzorowanie $\phi\colon [a,b]\times \mathbb{H} \multimap \mathbb{H}$ ma zwarte wartości i jest u.s.c. lub l.s.c., to jest superpozycyjnie mierzalne.

Warunek dotyczący wypukłych wartości odwzorowania F można osłabić jak w następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 2.5.9. *Załóżmy (A), (B) oraz (F3e). Niech, dodatkowo,*

(F0A) *odwzorowanie* $F\colon \mathcal{J}\times\mathbb{H} \multimap \mathbb{H}$ *ma domknięte wartości;*

(F1A) F *jest superpozycyjnie mierzalna;*

(F2A) *istnieje funkcja* $k \in L^1\big(\mathcal{J}, [0,+\infty)\big)$ *taka, że odwzorowanie* F *jest* $k(\cdot)$*-lipschitzowskie ze względu na drugą zmienną, tzn.*

$$\mathfrak{D}_{\mathbb{H}}\big(F(t,x), F(t,y)\big) \leqslant k(t)\|x-y\|_{\mathbb{H}} \quad \textit{dla wszystkich } x,\, y \in \mathbb{H} \textit{ i p.w. } t \in \mathcal{J}. \tag{2.61}$$

Jeśli dla każdego $\alpha > 0$ *mamy* $L^\alpha := M_A \int_0^T k(s)\,ds \left(1 + M_A M_B M^\alpha \sqrt{T}\right) < 1$ *oraz układ liniowy (2.8) jest aproksymacyjnie sterowalny na* $\mathcal{J}$*, to aproksymacyjnie sterowalny na* $\mathcal{J}$ *jest układ (2.1).*

Dowód. Niech

$$\mathfrak{U}^\alpha(f) := \left\{ g \in L^1(\mathcal{J},\mathbb{H}) \;\middle|\; g(t) \in F\big(t, y_f^\alpha(t)\big), \ \text{dla p.w. } t \in \mathcal{J} \right\}, \tag{2.62}$$

gdzie y_f^α jest dane przez równania (2.25), (2.26) oraz (2.27) dla $f \in L^1(\mathcal{J},\mathbb{H})$. Zauważmy, że wartości odwzorowania $\mathfrak{U}^\alpha$ są rozkładalne, tzn. $\mathfrak{U}^\alpha\colon L^1(\mathcal{J},\mathbb{H}) \multimap \mathcal{D}$. Skorzystamy z twierdzenia 1.4.6, żeby pokazać, że dla ustalonego $\alpha > 0$ operator $\mathfrak{U}^\alpha$ ma punkt stały w $L^1(\mathcal{J},\mathbb{H})$. Punkty te dają nam rozwiązania rozważanego układu.

Pokażemy, że dla każdego $\alpha > 0$ operator $\mathfrak{U}^\alpha\colon L^1(\mathcal{J},\mathbb{H}) \multimap L^1(\mathcal{J},\mathbb{H})$ jest ciągły w sensie metryki Hausdorffa. Na początek wykażemy, że jest on górnie półciągły. Dla otrzymania sprzeczności załóżmy, że istnieje $\epsilon > 0$ i ciągi $f_n \to f_0 \in L^1(\mathcal{J},\mathbb{H})$ oraz $g_n \in \mathfrak{U}^\alpha(f_n)$, które spełniają

$$d\big(g_n, \mathfrak{U}^\alpha(f_0)\big) \geqslant \epsilon \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}, \tag{2.63}$$

gdzie d oznacza odległość punktu od zbioru w przestrzeni $L^1(\mathcal{J},\mathbb{H})$.

Dla $n \in \mathbb{N}$ definiujemy operator $\Phi_n\colon \mathcal{J} \multimap \mathbb{H}$ wzorem

$$\Phi_n(t) := F\big(t, y_{f_0}^\alpha(t)\big) \cap \mathcal{B}_{\mathbb{H}}\left(g_n(t), d_{\mathbb{H}}\big(g_n(t), F(t, y_{f_0}^\alpha(t))\big) + \frac{\epsilon}{2T}\right), \quad t \in \mathcal{J}. \tag{2.64}$$

Jest to odwzorowanie mierzalne, gdyż Φ_n ma $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{H})$-mierzalny wykres, gdzie $\mathfrak{L}$ oznacza σ-ciało podzbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a na odcinku $\mathcal{J}$ oraz $\mathfrak{B}(\mathbb{H})$ oznacza σ-ciało zbiorów borelowskich w $\mathbb{H}$. Z twierdzenia Kuratowskiego-Ryll-Nardzewskiego istnieje mierzalna selekcja odwzorowania Φ_n, tj. $\tilde{g}_n \in \mathfrak{U}^\alpha(f_0)$, spełniająca

$$\|g_n(t) - \tilde{g}_n(t)\|_{\mathbb{H}} \leqslant d_{\mathbb{H}}\big(g_n(t), F(t, y^\alpha_{f_0}(t))\big) + \frac{\epsilon}{2T} \quad \text{dla p.w. } t \in \mathcal{J}. \tag{2.65}$$

Biorąc pod uwagę to, że $g_n(t) \in F(t, y^\alpha_{f_n}(t))$ dla p.w. $t \in \mathcal{J}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^T \|g_n(t) - \tilde{g}_n(t)\|_{\mathbb{H}}\, dt &\leqslant \int_0^T \mathfrak{D}\big(F(t, y^\alpha_{f_n}(t)), F(t, y^\alpha_{f_0}(t))\big)\, dt + \int_0^T \frac{\epsilon}{2T}\, dt \\ &\leqslant \int_0^T \mathfrak{D}\big(F(t, y^\alpha_{f_n}(t)), F(t, y^\alpha_{f_0}(t))\big)\, dt + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned} \tag{2.66}$$

Stąd

$$\|g_n - \tilde{g}_n\|_{L^1} \leqslant \int_0^T k(t)\|y^\alpha_{f_n}(t) - y^\alpha_{f_0}(t)\|_{\mathbb{H}}\, dt + \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.67}$$

Zróbmy w tym miejscu uwagę ogólną, którą wykorzystamy za moment w dowodzie.

Uwaga 2.5.10. Oznaczmy przez $y^\alpha_{f_1}, y^\alpha_{f_2}$ rozwiązania układu (2.25)–(2.27) stowarzyszone z f_1 oraz f_2, odpowiednio. Wtedy dla $t \in \mathcal{J}$ mamy nierówność

$$\|y^\alpha_{f_1}(t) - y^\alpha_{f_2}(t)\|_{\mathbb{H}} \leqslant \int_0^t M_A\|f_1(s) - f_2(s)\|_{\mathbb{H}}\, ds + M_A^2 M_B M^\alpha \sqrt{T} \int_0^T \|f_1(s) - f_2(s)\|_{\mathbb{H}}\, ds. \tag{2.68}$$

Z uwagi 2.5.10 oraz nierówności (2.67) istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $\|g_n - \tilde{g}_n\|_{L^1} < \frac{3\epsilon}{4}$ dla $n \geqslant n_0$. Ostatecznie

$$d\big(g_n, \mathfrak{U}^\alpha(f_0)\big) < \epsilon \quad \text{dla każdego } n \geqslant n_0, \tag{2.69}$$

co przeczy nierówności (2.63).

Dowód tego, że $\mathfrak{U}^\alpha$ jest dolnie półciągła, jest analogiczny i dlatego opuścimy go. W konsekwencji $\mathfrak{U}^\alpha$ jest ciągła w sensie metryki Hausdorffa.

Teraz pokażemy, że dla każdych $f_1, f_2 \in L^1(\mathcal{J}, \mathbb{H})$ mamy

$$\mathfrak{D}_{L^1}\big(\mathfrak{U}^\alpha(f_1), \mathfrak{U}^\alpha(f_2)\big) \leqslant L^\alpha \|f_1 - f_2\|_{L^1}. \tag{2.70}$$

Niech $g_1 \in \mathfrak{U}^\alpha(f_1)$ oraz $\epsilon > 0$ będą dowolne. Ponieważ odwzorowanie wielowartościowe $\Psi_n \colon \mathcal{J} \multimap \mathbb{H}$ dane jako

$$\Psi_n(t) := F\big(t, y^\alpha_{f_2}(t)\big) \cap \mathcal{B}_{\mathbb{H}}\left(g_1(t), d_{\mathbb{H}}\big(g_1(t), F(t, y^\alpha_{f_2}(t))\big) + \frac{\epsilon}{T}\right) \tag{2.71}$$

jest mierzalne, to z twierdzenia Kuratowskiego-Ryll-Nardzewskiego istnieje $g_2 \in \mathfrak{U}^\alpha(f_2)$ taka, że

$$\|g_1(t) - g_2(t)\|_{\mathbb{H}} \leqslant d_{\mathbb{H}}\big(g_1(t), F(t, y^\alpha_{f_2}(t))\big) + \frac{\epsilon}{T} \quad \text{dla p.w. } t \in \mathcal{J}. \tag{2.72}$$

Dzięki uwadze 2.5.10 oraz temu, że $g_2(t) \in F(t, y^\alpha_{f_2}(t))$ dla p.w. $t \in \mathcal{J}$, dostajemy

$$\begin{aligned} \|g_1 - g_2\|_{L^1} &\leqslant \int_0^T \mathfrak{D}_{\mathbb{H}}\big(F(t, y^\alpha_{f_1}(t)), F(t, y^\alpha_{f_2}(t))\big)\,dt + \int_0^T \frac{\epsilon}{T}\,dt \\ &\leqslant \int_0^T k(t)\|y^\alpha_{f_1}(t) - y^\alpha_{f_2}(t)\|_{\mathbb{H}}\,dt + \epsilon \\ &\leqslant \int_0^T k(t)\left(\int_0^t M_A\|f_1(s) - f_2(s)\|_{\mathbb{H}}\,ds\right)dt \\ &+ \int_0^T k(t) M_A^2 M_B M^\alpha \sqrt{T}\left(\int_0^T \|f_1(s) - f_2(s)\|_{\mathbb{H}}\,ds\right)dt + \epsilon \\ &\leqslant L^\alpha \|f_1 - f_2\|_{L^1} + \epsilon. \end{aligned} \tag{2.73}$$

Ponieważ ϵ było dowolne, otrzymujemy lipschitzowość (kontraktywność) operatora $\mathfrak{U}^\alpha$.

Dzięki twierdzeniu 1.4.6, odwzorowanie $\mathfrak{U}^\alpha$ ma punkt stały, powiedzmy f^α, w $L^1(\mathcal{J}, \mathbb{H})$. Z założenia (F3e) zbiór $\{f^\alpha\}_{\alpha>0}$ jest relatywnie słabo zwarty, co wynika z twierdzenia Dunforda-Pettisa. Konkludując jak w dowodzie twierdzenia 2.5.1, otrzymujemy tezę. □

2.6 PRZYKŁAD

W tym podrozdziale pokażemy przykład układu sterowania, który można opisać równaniem różniczkowym cząstkowym, i do którego stosują się rezultaty opisane powyżej. Jest on inspirowany przykładem [11, Example 2].

Niech $\mathcal{J} := [0, T]$ oraz $W := [0, \pi]$.

Rozważamy równanie reakcji-dyfuzji. Oznaczmy przez $y(t, z)$ stężenie pewnej substancji w czasie $t \in \mathcal{J}$, w punkcie $z \in W$. Zakładamy, że sterowanie, które wpływa na układ może być podzielone na dwa rodzaje: feedback (czyli w pętli zamkniętej) i „absolutne".

Sterowanie typu feedback jest charakteryzowane przez egzogeniczne zaburzenie stężenia danej substancji, którego wielkość zależy od stanu układu. Zakładamy, że gęstość substancji można opisać funkcją $\phi\colon \mathcal{J} \times W \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a intensywność źródła reakcji może być regulowana przez funkcję $v\colon \mathcal{J} \to L^2(W, \mathbb{R})$, tzn. mierzalną funkcję spełniającą warunek sprzężenia zwrotnego

$$v(t) \in V\big(y(t, \cdot)\big) \quad \text{dla p.w. } t \in \mathcal{J}, \tag{2.74}$$

gdzie $V\colon L^2(W, \mathbb{R}) \multimap L^2(W, \mathbb{R})$ jest odwzorowaniem u.s.c. o wypukłych i zwartych wartościach, które jest globalnie ograniczone:

$$\|V(y)\| \leqslant Q \quad \text{dla każdego } y \in L^2(W, \mathbb{R}), \text{ gdzie } Q > 0. \tag{2.75}$$

Definiujemy nieskończenie wymiarową przestrzeń $\mathbb{U}$ przez

$$\mathbb{U} := \left\{u = \textstyle\sum_{n=2}^\infty u_n e_n(\cdot) \;\middle|\; \sum_{n=2}^\infty u_n^2 < \infty\right\} \subset L^2(W, \mathbb{R}), \tag{2.76}$$

gdzie $e_n(\theta) := \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(n\theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $n \in \mathbb{N}$. Norma w $\mathbb{U}$ jest zdefiniowana jako $\|u\| := \sqrt{\sum_{n=2}^\infty u_n^2}$.

Absolutne sterowanie jest zdefiniowane przez liniowy ograniczony operator $B\colon \mathbb{U} \to L^2(W, \mathbb{R})$ za pomocą wzoru

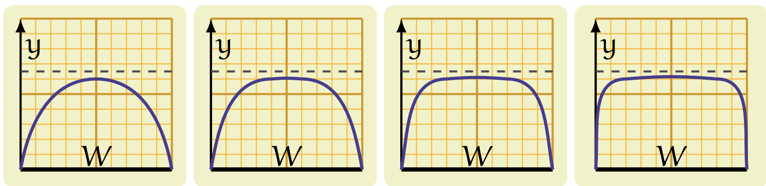
$$(Bu)(\theta) := 2u_2 e_1(\theta) + \sum_{n=2}^\infty u_n e_n(\theta) \quad \text{dla } u = \sum_{n=2}^\infty u_n e_n \in \mathbb{U},\ \theta \in W. \tag{2.77}$$

Przeskalowując wszystkie fizyczne stałe możemy opisać rozważany model jako następujący układ sterowania typu reakcji-dyfuzji z warunkami brzegowymi Dirichleta zdefiniowany na $\mathcal{J} \times W$:

$$\begin{cases} \frac{\partial y(t,z)}{\partial t} = \frac{\partial^2 y(t,z)}{\partial z^2} + \phi\big(t,z,y(t,z),v(t,z)\big) + Bu(t,z) & \text{dla p.w. } t \in \mathcal{J},\ z \in W, \\ y(0,z) = y_0(z) & \text{na } \{0\} \times W, \\ y(t,z) = 0 & \text{na } \mathcal{J} \times \partial W, \\ v(t) \in V\big(y(t,\cdot)\big) & \text{dla } t \in \mathcal{J}, \end{cases} \tag{2.78}$$

gdzie $u(\cdot) \in L^2(\mathcal{J}, \mathbb{U})$.

Pytanie o sterowalność powyższego układu można potocznie sformułować następująco: czy jest możliwe dosterowanie ze stanu y_0 do każdego wybranego z góry stanu stężenia substancji y_1 za pomocą sterowań $v(\cdot)$ oraz $u(\cdot)$ tak, aby znaleźć się dowolnie blisko stanu y_1, na przykład do profilu jednorodnej koncentracji substancji na odcinku W? Oczywiście, ze względu na warunek $y(t,z) = 0$ na $\mathcal{J} \times \partial W$, nigdy nie osiągniemy takiego stanu, co ilustruje rysunek 4.



Rysunek 4: Rozwiązanie układu dyfuzyjnego zbliża się do jednorodnego stężenia substancji.

Zakładamy, że funkcja ϕ spełnia następujące warunki:

(ϕ1) $\phi(\cdot,\cdot,y,v)\colon \mathcal{J} \times W \to \mathbb{R}$ jest mierzalna dla każdych $y, v \in \mathbb{R}$,

(ϕ2) $|\phi(t,z,y,v)| \leqslant \gamma(t,z) + \beta(t,z)|v|$ dla prawie wszystkich $t \in \mathcal{J}$, $z \in W$ oraz $y, v \in \mathbb{R}$, gdzie γ, $\beta \in L^2\big(\mathcal{J} \times W, [0,+\infty)\big)$,

(ϕ3) $(y,v) \mapsto \phi(t,z,y,v)$ jest ciągła dla p.w. $t \in \mathcal{J}$, $z \in W$,

(ϕ4) $v \mapsto \phi(t,z,y,v)$ jest wypukła dla p.w. $t \in \mathcal{J}$, $z \in W$ oraz każdego $y \in \mathbb{R}$.

Udowodnimy teraz, że odwzorowanie $h\colon \mathcal{J} \times L^2(W,\mathbb{R}) \times L^2(W,\mathbb{R}) \to L^2(W,\mathbb{R})$, określone jako

$$h(t,y,v)(z) := \phi\big(t,z,y(z),v(z)\big), \tag{2.79}$$

jest (ciągowo) ciągłe jako funkcja (przy ustalonym t) z $L^2(W,\mathbb{R}) \times G_Q$ do przestrzeni $L^2(W,\mathbb{R})$ wyposażonej w słabą topologię, gdzie $G_Q := \{v \in L^2(W,\mathbb{R}) \mid \|v(z)\| \leqslant Q,\ z \in W\}$. Inaczej mówiąc pokażemy, że $h(t,y_n,v_n) \rightharpoonup h(t,y,v)$ gdy $y_n \to y$ i $v_n \to v$. Wtedy zbiór $h\big(t,y,G_Q\big)$ jest wypukły i (dzięki założeniu (ϕ2)) relatywnie słabo zwarty w $L^2(W,\mathbb{R})$ dla każdego $t \in \mathcal{J}$ oraz wszystkich $y \in L^2(W,\mathbb{R})$.

Niech więc $y_n \to y$, $v_n \to v$ w $L^2(W,\mathbb{R})$, wtedy dla każdego $\psi \in L^2(W,\mathbb{R})$ mamy:

$$\langle \psi, h(t,y_n,v_n)\rangle_{L^2} = \int_W \psi(z)\big(h(t,y_n,v_n)\big)(z)\,dz = \int_W \psi(z)\phi\big(t,z,y_n(z),v_n(z)\big)\,dz. \tag{2.80}$$

Zauważmy, że ze względu na założenie (ϕ2) obraz $h(t,\cdot,\cdot)$ jest zawarty w słabo zwartym podzbiorze $L^2(W,\mathbb{R})$. Z tego względu (ciągowa) ciągłość funkcji h jest równoważna domkniętości wykresu tej funkcji [AE, Corollary 3.1.9]. Jeśli założymy, że istnieje funkcja $g\colon \mathcal{J} \to L^2(W, \mathbb{R})$ taka, że dla każdego $\psi \in L^2(W, \mathbb{R})$ mamy $\langle \psi, h(t, y_n, v_n)\rangle \to \langle \psi, g(t)\rangle$, to oczywiście $g(t) = h(t, y, v)$ będzie słabą granicą tego ciągu. Rzeczywiście, przechodząc do podciągu (jeśli potrzeba) możemy założyć, że $y_n(z) \to y(z)$ oraz $v_n(z) \to v(z)$ p.w. Wtedy z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej otrzymamy

$$\int_W \psi(z)\phi\big(t, z, y_n(z), v_n(z)\big)\, dz \to \int_W \psi(z)\phi\big(t, z, y(z), v(z)\big)\, dz, \tag{2.81}$$

więc

$$h(t, y_n, v_n) \rightharpoonup h(t, y, v) \quad \text{w } L^2(W, \mathbb{R}). \tag{2.82}$$

Ponadto z twierdzenia Fubiniego odwzorowanie

$$t \mapsto \langle \psi, h(t, y_n, v_n)\rangle_{L^2} = \int_W \psi(z)\phi\big(t, z, y_n(z), v_n(z)\big)\, dz \tag{2.83}$$

jest mierzalne, a więc również mierzalna jest funkcja graniczna $t \mapsto \langle \psi, h(t, y, v)\rangle$. Ponieważ przestrzeń $L^2(W, \mathbb{R})$ jest ośrodkowa, to możemy stąd wnioskować na mocy twierdzenia Pettisa, że funkcja $t \mapsto h(t, y, v)$ jest mierzalna.

Zdefiniujmy $\mathbb{H} := L^2(W, \mathbb{R})$, $\langle \cdot, \cdot\rangle := \langle \cdot, \cdot\rangle_{L^2}$ oraz $Az := \ddot{z}$ z dziedziną

$$\mathscr{D}(A) := \big\{ z \in \mathbb{H} \;\big|\; z, \dot{z} \text{ są absolutnie ciągłe}, \ddot{z} \in \mathbb{H}, z(0) = z(\pi) \big\} = H_0^2(W) \cap H^1(W), \tag{2.84}$$

gdzie $H_0^2(W)$ oraz $H^1(W)$ to przestrzenie Sobolewa (patrz [Eva, Chapter 5]). Wtedy można sprawdzić, że mamy następującą reprezentację:

$$Az = \sum_{n=1}^{\infty} (-n^2)\langle z, e_n\rangle e_n, \quad z \in \mathscr{D}(A). \tag{2.85}$$

Jest dobrze znanym [CZ, Example 2.3.7], że w takiej sytuacji operator A generuje zwartą C_0-półgrupę operatorów $\{S_A(t)\}_{t>0}$ na $\mathbb{H}$, która ma następujące przedstawienie:

$$S_A(t)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t}\langle z, e_n\rangle e_n, \quad z \in \mathbb{H},\ t \geqslant 0. \tag{2.86}$$

Używając warunku (ϕ2) i własności odwzorowania V możemy sprawdzić, że odwzorowanie wielowartościowe $F\colon \mathcal{J} \times L^2(W, \mathbb{R}) \multimap L^2(W, \mathbb{R})$, dane wzorem

$$F(t, y) := h\big(t, y, V(y)\big) \quad \text{dla p.w. } t \in \mathcal{J},\ y \in \mathbb{H}, \tag{2.87}$$

spełnia warunek (F3e). Oczywiście ma ono wypukłe wartości. Ponieważ funkcja $h(t, y, \cdot)\colon L^2(W, \mathbb{R}) \to L^2(W, \mathbb{R})_w$ jest ciągła, a odwzorowanie V jest u.s.c., to $F(t, \cdot)$ jest u.s.c. jako odwzorowanie $L^2(W, \mathbb{R}) \multimap L^2(W, \mathbb{R})_w$ (patrz [AF, Proposition 1.4.14] lub fakt 1.2.1). Skoro odwzorowanie F ma słabo zwarte i wypukłe wartości, to jest u.h.c. (patrz uwaga 1.2.2). Ponadto z własności funkcji h odwzorowanie $F(\cdot, x)$ jest mierzalne dla każdego $x \in \mathbb{H}$.

Możemy teraz przepisać nasz układ jako sterowaną inkluzję ewolucyjną w przestrzeni Hilberta $\mathbb{H}$:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) \in Ay(t) + F\big(t, y(t)\big) + Bu(t) & \text{dla p.w. } t \in \mathcal{J}, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{2.88}$$

Skoro operator A jest laplasjanem, to nie mamy wątpliwości, że stowarzyszone z układem (2.88) równanie liniowe

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) & \text{dla p.w. } t \in \mathcal{J}, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{2.89}$$

nie jest całkowicie sterowalne. Z drugiej strony, bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że

$$(B^*v)(\theta) = (2v_1 + v_2)e_2(\theta) + \sum_{n=3}^{\infty} v_n e_n(\theta), \tag{2.90}$$

$$\big(B^*S_A^*(t)x\big)(\theta) = (2x_1e^{-t} + x_2e^{-4t})e_2(\theta) + \sum_{n=3}^{\infty} e^{-n^2t}x_n e_n(\theta), \tag{2.91}$$

gdzie $v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n e_n(\cdot)$ oraz $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n(\cdot)$ są elementami przestrzeni $\mathbb{H}$. Ponieważ $\{e_n\}_{n\geqslant 1}$ jest układem ortogonalnym, to z powyższej reprezentacji łatwo zobaczyć, że warunek

$$\|B^*S_A^*(t)x\|_{\mathbb{H}} = 0, \quad t \in \mathcal{J}, \tag{2.92}$$

implikuje, że $x = 0$.

Dzięki uwadze 2.3.2 układ liniowy (2.89) stowarzyszony z układem (2.88) jest aproksymacyjnie sterowalny na $\mathcal{J}$. W konsekwencji otrzymujemy

Twierdzenie 2.6.1. *Przy założeniach jak wyżej, układ* (2.78) *jest aproksymacyjnie sterowalny na odcinku $\mathcal{J}$.*

Uwaga 2.6.2. Warto zauważyć, że nie opieramy się w tym przykładzie na nieuchwytnej informacji dotyczącej odwracalności operatora $\mathcal{B}^T$, jak to jest powszechne w kontekście układów całkowicie sterowalnych (por. [33]).

3 STRATEGIE APROKSYMACYJNE W UKŁADZIE IMPULSOWYM

Spis treści

Rozdział ten poświęcony jest badaniu aproksymacyjnej sterowalności semiliniowego układu impulsowego z opóźnieniem i zawiera rezultaty przedstawione w artykule [21]. W podrozdziale 3.1 opiszemy problem i przedstawimy przyjęte założenia. W podrozdziale 3.2 podamy podstawowe wyniki dotyczące aproksymacyjnej sterowalności i przedstawimy pokrótce zastosowane metody. Następnie w podrozdziale 3.3 zdefiniujemy operatory Γ^{α}, których punkty stałe są rozwiązaniami inkluzji różniczkowej. Dalej zbadamy właściwości operatorów Γ^{α}. W szczególności pokażemy, że są one pełnociągłe, a to pozwoli nam badać problem aproksymacyjnej sterowalności układu (W.7) za pomocą twierdzeń o punktach stałych. Wreszcie w podrozdziale 3.5 znajduje się przykład ilustrujący zastosowanie uzyskanych wyników.

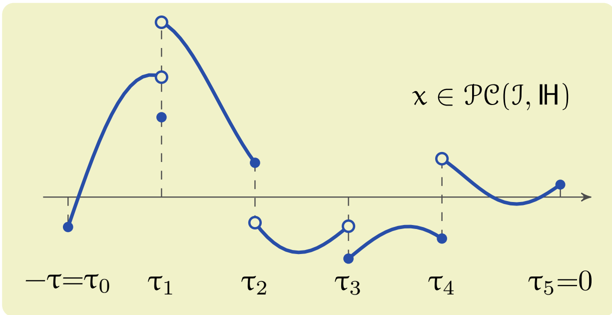
3.1 MODEL I PRZESTRZEŃ ROZWIĄZAŃ. ZAŁOŻENIA

W rozdziale poprzednim widzieliśmy, jak można uzyskać aproksymacyjną sterowalność układu semiliniowego, zakładając aproksymacyjną sterowalność stowarzyszonego układu liniowego. W tym rozdziale rozwiążemy podobny problem dla semiliniowego układu impulsowego.

W ostatnich latach wzrosło zainteresowanie impulsowymi układami sterowania ze względu na ich znaczenie teoretyczne i praktyczne (patrz np. [2, 9, 19, 25, BHN]). Mimo to niewiele prac omawia temat sterowalności dla impulsowych równań różniczkowych w nieskończenie wymiarowej przestrzeni Banacha [35, 37]. Impulsowe problemy mogą pojawić się np. przy rozważaniu decyzji inwestycyjnych w ekonomii, w modelach układów chaotycznych. Wiele układów dynamicznych w fizyce i biologii ma zachowanie impulsowe z powodu nagłych skoków w pewnych momentach w trakcie ewolucji. Przykładów dostarczają: farmakokinetyka, promieniowanie fal elektromagnetycznych, dynamika populacji systemów biologicznych, biotechnologia itp. (patrz [27]). Szczególnie równania z opóźnieniem wykorzystywane są w modelowaniu ewolucyjnych zjawisk biologicznych, gdyż na wzrost populacji wpływ ma stan tej populacji w momencie przeszłości potrzebnej na osiągnięcie odpowiedniej dojrzałości osobników.

Nim przejdziemy do sformułowania problemu, scharakteryzujemy przestrzeń rozwiązań w zagadnieniach impulsowych. Rozwiązaniami rozważanego przez nas w tym rozdziale układu są funkcje, które mogą nie być ciągłe w pewnych ustalonych czasach. Poniżej podajemy konstrukcję przestrzeni, która zawiera wszystkie te funkcje.

Niech $\tau > 0$ oraz $T > 0$ będą ustalone. W całym tym rozdziale używamy następujących oznaczeń na odcinki: $\mathcal{I} := [-\tau, 0]$, $\mathcal{J} := [0, T]$. Od teraz oznaczamy też przez $\mathfrak{X} := \mathcal{PC}(\mathcal{I}, \mathbb{H})$ przestrzeń funkcji kawałkami ciągłych z ustaloną skończoną liczbą punktów możliwej nieciągłości $\{\tau_1, \dots, \tau_l\} \subset [-\tau, 0]$, $-\tau =: \tau_0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_l < \tau_{l+1} := 0$, takich, że $x(t_i^+) := \lim_{h \to 0^+} x(t_i + h)$ oraz $x(t_i^-) := \lim_{h \to 0^-} x(t_i + h)$, $i = 1, \dots, p$, są skończone dla $-\tau < t < 0$. Norma w tej przestrzeni dana jest przez $\|x\|_{\mathfrak{X}} := \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{0} \|x(t)\|_{\mathbb{H}}\, dt$. Potrzeba wprowadzenia takiej normy zostanie wyjaśniona w uwadze 3.1.6. Przestrzeń $\mathfrak{X}$ jest przestrzenią trajektorii początkowych, z których startują rozwiązania układu (3.1).

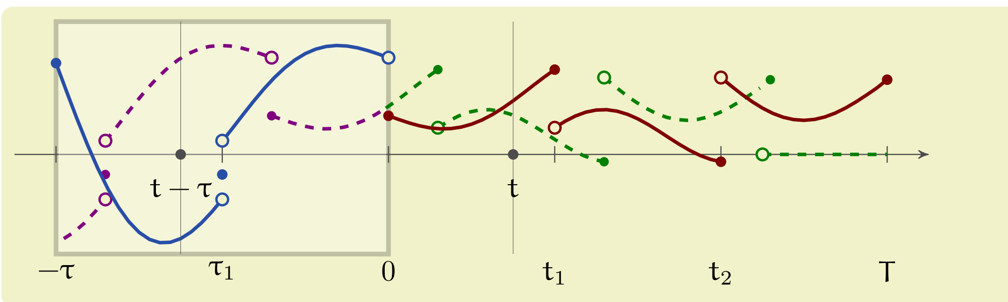


Rysunek 5: Przykład funkcji w przestrzeni $\mathcal{PC}(\mathcal{I}, \mathbb{H})$.

Ponadto dla skończonej liczby ustalonych punktów nieciągłości $\{t_1, \dots, t_p\} \subset [0, T]$, $0 =: t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_p < t_{p+1} := T$, przez $\mathcal{PC}(\mathcal{J}, \mathbb{H})$ oznaczamy przestrzeń Banacha funkcji $z \colon \mathcal{J} \to \mathbb{H}$, które są ciągłe dla $t \in \mathcal{J} \setminus \{t_1, \dots, t_p\}$ i takie, że granice lewostronna i prawostronna, odpowiednio $z(t_k^-)$ oraz $z(t_k^+)$, istnieją oraz $z(t_k^-) = z(t_k)$, $k = 1, \dots, p$. W tej przestrzeni rozważamy normę Czebyszewa $\|z\|_{\mathcal{PC}(\mathcal{J},\mathbb{H})} := \sup\{\, \|z(t)\| \mid t \in \mathcal{J} \,\}$.

Przez $\mathcal{PC}([-\tau, T], \mathbb{H})$ oznaczymy przestrzeń funkcji $y \colon [-\tau, T] \to \mathbb{H}$ takich, że $y\lfloor_{\mathcal{I}} \in \mathcal{PC}(\mathcal{I}, \mathbb{H})$ oraz $y\lfloor_{\mathcal{J}} \in \mathcal{PC}(\mathcal{J}, \mathbb{H})$. Zauważmy, że tak skonstruowana przestrzeń jest „sklejona” z dwóch przestrzeni, w których występują odmienne topologie. Na przykład funkcje z przestrzeni $\mathcal{PC}(\mathcal{J}, \mathbb{H})$ są lewostronnie ciągłe, podczas gdy funkcja z przestrzeni $\mathcal{PC}(\mathcal{I}, \mathbb{H})$ może wyglądać jak na rysunku 5.

Zwróćmy uwagę, że mimo korzystania z podobnych oznaczeń na podane powyżej przestrzenie Czytelnik powinien mieć na uwadze, że każda z nich ma inne własności.



Rysunek 6: Ciągłe linie oznaczają trajektorię y, natomiast linie przerywane oznaczają funkcję y przesuniętą w lewo o t. W związku z tym przerywany wykres (w ramce) wyznacza funkcję y_t.

Załóżmy, że $\mathbb{H}$, $\mathbb{U}$ są rzeczywistymi przestrzeniami Hilberta. Przestrzeń $\mathbb{U}$ jest przestrzenią wartości wszystkich sterowań, natomiast $\mathbb{H}$ to przestrzeń wszystkich możliwych stanów. W całym rozdziale zakładamy, że wszystkie sterowania dopuszczalne $u \colon \mathcal{J} \to \mathbb{U}$ należą do przestrzeni $L^2(\mathcal{J}, \mathbb{U})$. Dla każdego $y \in \mathcal{PC}([-\tau, T], \mathbb{H})$ oraz $t \in \mathcal{J}$ definiujemy funkcję $y_t \in \mathfrak{X}$ wzorem $y_t(\theta) := y(t+\theta)$ dla $\theta \in \mathcal{I}$. Funkcja ta reprezentuje historię stanu y od czasu $t-\tau$ do chwili obecnej t (zob. rysunek 6).

Przedmiotem naszego zainteresowania w tym rozdziale jest układ sterowania postaci:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) \in A(t)y(t) + F(t, y_t) + Bu(t) & \text{dla p.w. } t \in \mathcal{J},\ t \neq t_k,\ k = 1, \dots, p, \\ y(t) = \phi(t), & t \in \mathcal{I}, \\ y(t_k^-) = y(t_k), \quad y(t_k^+) = y(t_k) + I_k(y_{t_k}), & k = 1, \dots, p, \end{cases} \tag{3.1}$$

gdzie ϕ, F, B są danymi funkcjami, które zostaną określone poniżej, a

(A) $\{A(t) \colon \mathcal{D}(A) \subset \mathbb{H} \to \mathbb{H}\}_{t \in \mathcal{J}}$ jest rodziną operatorów liniowych i domkniętych, która generuje zwarty silny operator ewolucyjny $\mathcal{U} : \Delta \to \mathcal{L}(\mathbb{H})$ (patrz definicja poniżej), gdzie $\Delta := \{(t, s) \in \mathcal{J} \times \mathcal{J} \mid 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T\}$, natomiast dziedzina $\mathcal{D}(A) \subset \mathbb{H}$ jest gęsta w $\mathbb{H}$ i nie zależy od t.

Ponadto przyjmujemy następujące założenie:

(I) odwzorowania $I_k \colon \mathfrak{X} \to \mathbb{H}$, $k = 1, \dots, p$, są funkcjami pełnociągłymi.

Dokładniej, każda z funkcji I_k określa wielkość skoku w konkretnym punkcie nieciągłości. Na tym etapie to założenie jest dość słabe i w celu uzyskania aproksymacyjnej sterowalności musi zostać wzmocnione (patrz podrozdział 3.3.1).

Przypomnijmy za [10, Definition 1.3] pojęcie zwartego silnego operatora ewolucyjnego:

Definicja 3.1.1. *Operator* $\mathcal{U} : \Delta \to \mathcal{L}(\mathbb{H})$ *nazywa się* zwartym silnym operatorem ewolucyjnym, *o ile:*

(a) $\mathcal{U}(s, s) = \mathbb{I}_{\mathbb{H}}$ *jest operatorem identycznościowym na* $\mathbb{H}$ *dla każdego* $s \in \mathcal{J}$*;*

(b) $\mathcal{U}(t, r)\mathcal{U}(r, s) = \mathcal{U}(t, s)$, *jeśli* $0 \leqslant s \leqslant r \leqslant t \leqslant T$*;*

(c) $\mathcal{U}$ *jest silnie ciągły na* Δ, *tj. dla każdego* $x \in \mathbb{H}$ *funkcja* $\Delta \ni (t, s) \mapsto \mathcal{U}(t, s)x$ *jest ciągła;*

(d) zachodzą następujące równości:

$$\frac{\partial \mathcal{U}(t, s)}{\partial t} = A(t)\mathcal{U}(t, s), \quad \frac{\partial \mathcal{U}(t, s)}{\partial s} = -\mathcal{U}(t, s)A(s) \quad \textit{dla} \ (t, s) \in \Delta; \tag{3.2}$$

(e) operatory liniowe $\mathcal{U}(t, s)$ *są pełnociągłe dla* $(t, s) \in \Delta$.

Uwaga 3.1.2. Można podać warunki wystarczające, które gwarantują istnienie silnego operatora ewolucyjnego $\mathcal{U}$ z wyżej wymienionymi własnościami. Gdy układ (3.1) reprezentuje paraboliczne równanie różniczkowe cząstkowe, standardowe warunki są takie, że w przypadku niezależnym od czasu operator A musi być infinitezymalnym generatorem silnie ciągłej zwartej półgrupy operatorów (jak w rozdziale drugim), a w przypadku zależności od czasu zobacz, na przykład, [24, CP].

Zakładając (A), można łatwo pokazać (podobnie jak dla półgrupy), że istnieje stała $M_{\mathcal{U}}$ (zob. [Paz, Theorem 6.1]) taka, że

$$\|\mathcal{U}(t, s)\| \leqslant M_{\mathcal{U}} \quad \text{dla} \ (t, s) \in \Delta. \tag{3.3}$$

Przyjmijmy, że $M_{\mathcal{U}} := \sup_{(t,s) \in \Delta} \|\mathcal{U}(t, s)\|$.

Zrobimy krótką uwagę dotyczącą istnienia rozwiązań układu semiliniowego z operatorem liniowym zależnym od czasu. Rozważmy następujące abstrakcyjne impulsowe równanie ewolucyjne na $\mathbb{H}$:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A(t)y(t) + f(t) & \text{dla p.w. } t \in \mathcal{J},\ t \neq t_k,\ k = 1, \dots, p, \\ y(t) = \phi(t), & t \in \mathfrak{I}, \\ y(t_k^-) = y(t_k), \quad y(t_k^+) = y(t_k) + I_k(y_{t_k}), & k = 1, \dots, p, \end{cases} \tag{3.4}$$

gdzie operatory $A(t)$, $t \in \mathcal{J}$, spełniają założenie (A), a odwzorowania I_k spełniają założenie (I). Opierając się na [BHN, Theorem 3.3] bardzo łatwo pokazać następujący fakt.

Twierdzenie 3.1.3. *Przy założeniach jak powyżej niech* f *będzie funkcją całkowalną. Wówczas równanie* (3.4) *ma dokładnie jedno rozwiązanie, które spełnia równość*

$$y(t) = \mathscr{U}(t, 0)\phi(0) + \sum_{0<t_k<t} \mathscr{U}(t, t_k)I_k(y_{t_k}) + \int_0^t \mathscr{U}(t, s)f(s)\, ds, \quad t \in \mathcal{J}. \tag{3.5}$$

Taką funkcję y nazywamy *łagodnym* (lub *całkowym*) *rozwiązaniem* układu (3.4).

Uwaga 3.1.4. Na pierwszy rzut oka mogłoby się wydawać, że w naszych rozważaniach wystarczy powtórzyć rozdział drugi. Zwróćmy jednak uwagę, że łagodne rozwiązanie układu (3.4), w przeciwieństwie do łagodnego rozwiązania układu z poprzedniego rozdziału, jest dane w sposób uwikłany, gdyż funkcja y występuje zarówno po lewej, jak i po prawej stronie równości (3.5).

Naszym głównym celem jest udowodnienie aproksymacyjnej sterowalności układu (3.1) (pojęcie to w tym kontekście wprowadzamy w definicji 3.2.1). W tym celu udowodnimy istnienie rodziny rozwiązań układu (3.1) stosując twierdzenia o punktach stałych (otrzymamy twierdzenia 3.3.7, 3.3.8, 3.3.9 oraz 3.3.10).

Przyjmujemy następujące warunki dotyczące wielowartościowego zaburzenia $F\colon \mathcal{J} \times \mathfrak{X} \multimap \mathbb{H}$:

(F0) F ma słabo zwarte i wypukłe wartości;

(F1) $F(\cdot, z)\colon \mathcal{J} \multimap \mathbb{H}$ ma mierzalną selekcję dla każdego $z \in \mathfrak{X}$;

(F2) dla p.w. $t \in \mathcal{J}$ multifunkcja $F(t, \cdot)\colon \mathfrak{X} \multimap \mathbb{H}$ jest u.h.c.;

(F3) dla każdego ograniczonego zbioru $\varnothing \neq \Omega \subset \mathfrak{X}$ istnieje $\mu_\Omega \in L^1(\mathcal{J}, [0, +\infty))$ taka, że

$$\|F(t, z)\| := \sup_{x \in F(t,z)} \|x\| \leqslant \mu_\Omega(t) \quad \text{dla p.w. } t \in \mathcal{J} \text{ oraz } z \in \Omega. \tag{3.6}$$

Definicja 3.1.5. *Funkcja* $y \in \mathcal{PC}([-\tau, T], \mathbb{H})$ *jest* łagodnym rozwiązaniem *układu* (3.1)*, o ile*

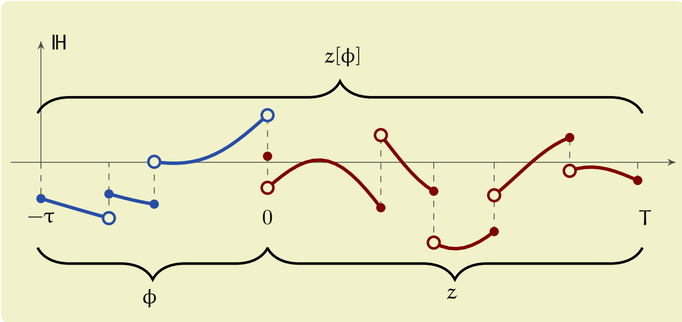
$$y(t) = \mathscr{U}(t, 0)\phi(0) + \sum_{0<t_k<t} \mathscr{U}(t, t_k)I_k(y_{t_k}) + \int_0^t \mathscr{U}(t, s)f(s)\, ds + \int_0^t \mathscr{U}(t, s)Bu(s)\, ds \tag{3.7}$$

dla $t \in \mathcal{J}$*, dla pewnego* $f \in L^1(\mathcal{J}, \mathbb{H})$ *takiego, że* $f(s) \in F(s, y_s)$ *dla prawie wszystkich* $s \in \mathcal{J}$*, oraz* $y(t) = \phi(t)$ *dla* $t \in \mathfrak{I}$.

Od teraz przez rozwiązanie układu (3.1) rozumiemy łagodne rozwiązanie.

Oznaczmy $\mathcal{K} := \{ z \in \mathcal{PC}(\mathcal{J}, \mathbb{H}) \mid z(0) = \phi(0) \}$. Jest jasnym, że jest to zbiór wypukły. Zauważmy, że rozwiązanie układu (3.1) jest określone na przedziale $[-\tau, T]$, natomiast bardzo często dalsze rozważania będą prowadzone w przestrzeni $\mathcal{PC}(\mathcal{J}, \mathbb{H})$. Aby uporać się z tą dwuznacznością, dla każdego $z \in \mathcal{K}$ definiujemy $z[\phi]\colon [-\tau, T] \to \mathbb{H}$ przez

$$z[\phi](t) := \begin{cases} \phi(t) & \text{dla } t \in \mathfrak{I}, \\ z(t) & \text{dla } t \in \mathcal{J}. \end{cases} \tag{3.8}$$



Rysunek 7: Połączenie funkcji z oraz ϕ: $z[\phi]$.

Jest to po prostu połączenie dwóch funkcji: ϕ oraz z (zob. rysunek 7).

Dla operatora B przyjmujemy następujące założenie:

(B) $B\colon \mathbb{U} \to \mathbb{H}$ jest ciągłym operatorem liniowym; przyjmijmy $M_B := \|B\|$.

Jak w poprzednim rozdziale, wprowadzimy operator Niemyckiego $P_F\colon \mathcal{PC}(\mathcal{J}, \mathbb{H}) \multimap L^1(\mathcal{J}, \mathbb{H})$ wzorem

$$P_F(z) := \left\{ f \in L^1(\mathcal{J}, \mathbb{H}) \;\middle|\; f(t) \in F\big(t, z[\phi]_t\big) \text{ dla p.w. } t \in \mathcal{J} \right\}. \tag{3.9}$$

Łatwo pokazać, że przy powyższych założeniach zbiór $P_F(z)$ jest wypukły dla każdego $z \in \mathcal{PC}(\mathcal{J}, \mathbb{H})$. Poniżej podamy kilka prostych twierdzeń dotyczących własności operatora P_F.

Uwaga 3.1.6. Niepustość wartości operatora Niemyckiego jest zagadnieniem, które jest często pomijane przez autorów. Okazuje się, że bez odpowiedniego założenia o normie w $\mathcal{PC}(\mathcal{I}, \mathbb{H})$, operator $t \multimap F(t, z[\phi]_t)$ może nie mieć mierzalnej selekcji. Szczególnie podkreślamy tutaj wynik Gueddy z pracy [22], który wydaje się być stosunkowo nieznany. Szczęśliwie problem ten został we wspomnianym artykule ostatecznie rozwiązany. Ponadto z normą, która została określona na $\mathcal{PC}(\mathcal{I}, \mathbb{H})$, funkcja $\mathcal{J} \ni s \mapsto z[\phi]_s \in \mathfrak{X}$ jest ciągła.

Poniższe fakty, mówiące o ważnych własnościach operatora P_F, są kluczowe dla dalszych rozważań.

Lemat 3.1.7. *Niech $y \in \mathcal{PC}(\mathcal{J}, \mathbb{H})$ oraz multifunkcja $F\colon \mathcal{J} \times \mathfrak{X} \multimap \mathbb{H}$ spełnia założenia (F0)–(F3). Wtedy istnieje co najmniej jedna całkowalna w sensie Bochnera selekcja $w(\cdot) \in F\big(\cdot, y[\phi]_{(\cdot)}\big)$. W szczególności operator Niemyckiego ma niepuste wartości.*

Dowód. Niech $y \in \mathcal{PC}(\mathcal{J}, \mathbb{H})$, a więc $y\colon \mathcal{J} \to \mathbb{H}$ jest kawałkami ciągła. Ponieważ punkty nieciągłości są ustalone, możemy znaleźć ciąg $(y_n)_{n \geqslant 1} \subset \mathcal{PC}(\mathcal{J}, \mathbb{H})$ funkcji prostych zbiegający jednostajnie do funkcji y na odcinku $\mathcal{J}$. Dzięki założeniu (F1) dla każdego $n \geqslant 1$ istnieje mierzalna selekcja $w_n(t) \in F\big(t, y_n[\phi]_t\big)$, $t \in \mathcal{J}$. Dlatego odwzorowanie $t \multimap \{w_n(t) \mid n \geqslant 1\}$ jest mierzalne, więc $t \multimap \overline{\text{conv}}\,\{w_n(t) \mid n \geqslant 1\}$ jest również mierzalne.

Z jednostajnej zbieżności $y_n[\phi] \to y[\phi]$ na $[-\tau, T]$ mamy jednostajną zbieżność ciągu funkcji $t \mapsto y_n[\phi]_t$ do funkcji $t \mapsto y[\phi]_t$, gdyż

$$\begin{aligned} \sup_{t \in \mathcal{J}} \|y_n[\phi]_t - y[\phi]_t\|_{\mathfrak{X}} &= \sup_{t \in \mathcal{J}} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{0} \|y_n[\phi]_t(s) - y[\phi]_t(s)\|\, ds \\ &\leqslant \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{0} \sup_{t \in \mathcal{J}} \|y_n[\phi](t+s) - y[\phi](t+s)\|\, ds \to 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Oznaczmy $\mathcal{X}(t) := \{y_n[\phi]_t \mid n \geqslant 1\} \subset \mathfrak{X}$ dla $t \in \mathcal{J}$. Zbiór $\mathcal{X}(t)$ jest relatywnie zwarty, ponieważ $t \mapsto y_n[\phi]_t$ zbiega do $t \mapsto y[\phi]_t$ jednostajnie na $\mathcal{J}$.

Z twierdzenia Kreina-Šmuliana i górnej hemiciągłości $F(t, \cdot)$ otrzymujemy, że zbiór $\overline{\text{conv}}\, F\big(t, \mathcal{X}(t)\big)$ jest słabo zwarty.

Powołując się na twierdzenie Dunforda-Pettisa, bez straty ogólności (przechodząc do podciągu, jeśli jest to konieczne) możemy założyć, że $w_n \rightharpoonup w \in L^1(\mathcal{J}, \mathbb{H})$. Z twierdzenia 1.2.6 wnosimy, że $w(t) \in F\big(t, y[\phi]_t\big)$ dla prawie wszystkich $t \in \mathcal{J}$, więc $w \in P_F(y)$. □

Twierdzenie 1.2.6 może zostać użyte jak w rozdziale 2, *mutatis mutandis*, do udowodnienia następującego faktu.

Twierdzenie 3.1.8. *Operator* P_F *jest ciągowo u.h.c. o wartościach słabo zwartych.*

3.2 RÓŻNE POJĘCIA STEROWALNOŚCI. PROBLEM STEROWANIA IMPULSOWEGO

W podrozdziale tym zwrócimy uwagę na aproksymacyjną sterowalność układów semiliniowych z zależną od czasu częścią liniową i zbadamy właściwości takich układów. Wprowadzimy definicję aproksymacyjnej sterowalności i operatora sterowalności dla układu (3.1).

Definicja 3.2.1. *Dla nieliniowego układu z impulsami* (3.1) *definiujemy następujące pojęcia:*

1. operator sterowalności *dla układu* (3.1) *na* $\mathcal{J}$ *jest operatorem liniowym* $\mathcal{B}^T : L^2(\mathcal{J}, \mathbb{U}) \to \mathbb{H}$, *danym jako*

$$\mathcal{B}^T u := \int_0^T \mathcal{U}(T,s)Bu(s)\,ds \quad dla\;\; u \in: L^2(\mathcal{J}, \mathbb{U}); \tag{3.11}$$

2. *[6, Section 3] układ* (3.1) *jest* całkowicie sterowalny na $\mathcal{J}$, *jeśli dla każdych punktów* $y_0, y_1 \in \mathbb{H}$ *istnieje sterowanie* $u \in L^2(\mathcal{J}, \mathbb{U})$ *takie, że łagodne rozwiązanie* (3.1) *spełnia warunki:* $y(0; u) = y_0$, $y(T; u) = y_1$;
3. *[37, Definition 2.1] układ sterowania* (3.1) *jest* aproksymacyjnie sterowalny na $\mathcal{J}$, *jeśli dla każdych* $y_0, y_1 \in \mathbb{H}$ *i dla dowolnego* $\epsilon > 0$ *istnieje sterowanie* $u \in L^2(\mathcal{J}, \mathbb{U})$ *takie, że łagodne rozwiązanie* y *problemu Cauchy'ego* (3.1) *spełnia* $y(0) = y_0$ *oraz* $\|y(T) - y_1\| < \epsilon$; *równoważnie możemy powiedzieć, że* zbiór osiągalny *dla układu* (3.1) *z początkowej wartości* y_0 *w czasie końcowym* T, *tj.* $\mathcal{R}(T, y_0) := \{\, y(T; u) \mid u \in L^2(\mathcal{J}, \mathbb{U}), y(0; u) = y_0 \,\}$, *jest gęsty w* $\mathbb{H}$;
4. gramian sterowalności $L_B^T \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ *dla układu* (3.1) *jest zdefiniowany jako*

$$L_B^T := \mathcal{B}^T(\mathcal{B}^T)^*. \tag{3.12}$$

Uwaga 3.2.2. Istnieją liczne publikacje dotyczące całkowitej sterowalności (por. [6, BHN] i odwołania tamże), ale w związku z wynikami otrzymanymi przez Triggianiego (patrz uwaga 2.2.3) w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych semiliniowe układy impulsowe nie muszą być całkowicie sterowalne.

Jak wspomniano we wstępie, naszym głównym celem jest rozwiązanie następującego problemu:

Problem 3.2.3. Dla dowolnych y_0, $y_1 \in \mathbb{H}$ pokazać istnienie ciągu sterowań $(u_n)_{u \geqslant 1} \subset L^2(\mathcal{J}, \mathbb{U})$ takiego, że łagodne rozwiązanie układu (3.1) spełnia warunki: $y(0; u_n) = y_0$ oraz $y(T; u_n) \to y_1$.

Pytania tego typu, ale technicznie bardzo różne, rozważane były w [8, 16, 17, 23, 33, 40, 41, BGN].

Poniżej prezentujemy dowody prostych faktów, które będą nam potrzebne w celu pokazania aproksymacyjnej sterowalności dla impulsowych układów semiliniowych w przypadku operatora liniowego zależnego od czasu (dla przypadku niezależnego od czasu zobacz [4, 5, 11] lub wyniki rozdziału drugiego).

Lemat 3.2.4. *Zachodzą następujące stwierdzenia:*

(a) $([\mathcal{B}^T]^* z)(s) = B^* \mathcal{U}^*(T, s) z$ *dla* $s \in [0, T]$*;*

(b) operator L_B^T *ma przedstawienie:*

$$L_B^T z = \int_0^T \mathcal{U}(T, s) B B^* \mathcal{U}^*(T, s) z \, ds, \quad \textit{gdzie } z \in \mathbb{H}, \tag{3.13}$$

co, w szczególności, daje $L_B^T \geqslant 0$*.*

Dowód. Proste rachunki pokazują, że

$$\begin{aligned} \langle u, [\mathcal{B}^T]^* z \rangle_{L^2} = \langle \mathcal{B}^T u, z \rangle_{\mathbb{H}} &= \left\langle \int_0^T \mathcal{U}(T, s) B u(s) \, ds, z \right\rangle_{\mathbb{H}} \\ &= \int_0^T \langle \mathcal{U}(T, s) B u(s), z \rangle_{\mathbb{H}} \, ds = \int_0^T \langle u(s), B^* \mathcal{U}^*(T, s) z \rangle_{\mathbb{H}} \, ds, \end{aligned} \tag{3.14}$$

a to dowodzi (a) oraz pociąga za sobą równość (3.13). □

Jako wniosek otrzymujemy:

Uwaga 3.2.5. Ponieważ $(\mathrm{Ker}([\mathcal{B}^T]^*))^\perp = \overline{\mathrm{Range}(\mathcal{B}^T)}$, więc jeśli założyć ograniczoność impulsów, to aproksymacyjna sterowalność układu

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A(t) y(t) + B u(t) & \text{dla p.w. } t \in \mathcal{J},\ t \neq t_k,\ k = 1, \ldots, p, \\ y(t) = \phi(t), & t \in \mathcal{J}, \\ y(t_k^-) = y(t_k), \quad y(t_k^+) = y(t_k) + I_k(y_{t_k}), & k = 1, \ldots, p, \end{cases} \tag{3.15}$$

jest równoważna temu, że $\mathrm{Ker}([\mathcal{B}^T]^*) = \{0\}$. Natomiast z lematu 3.2.4 p. (a) widzimy, że jest to równoważne implikacji: jeśli $B^* \mathcal{U}^*(T, s) z = 0$ dla każdego $s \in [0, T]$, to $z \equiv 0$. Doszliśmy więc do analogonu uwagi 2.3.2 dla układów impulsowych. Pomimo wielu analogii w tym i w poprzednim rozdziale, niektóre z twierdzeń nie mają swojego odpowiednika tutaj, dlatego problem 3.2.3 zasługuje na dokładną analizę.

Ponieważ $L_B^T \geqslant 0$, więc operator rezolwenty

$$R(\alpha, L_B^T) := (\alpha I_{\mathbb{H}} + L_B^T)^{-1} : \mathbb{H} \to \mathbb{H} \tag{3.16}$$

jest dobrze określony dla wszystkich $\alpha > 0$. Jeśli $L_B^T > 0$, to $R(\alpha, L_B^T)$ jest zdefiniowany również dla $\alpha = 0$ (zobacz podobne uwagi w rozdziale drugim).

Musimy poczynić następujące kluczowe założenie:

(R) $\alpha R(\alpha, H_B^T) \to 0$ w silnej topologii operatorowej, gdy $\alpha \to 0^+$.

Uwaga 3.2.6. Założenie o aproksymacyjnej sterowalności układu (3.15) nie musi pociągać za sobą warunku (R). Głównym problemem, wielokrotnie przemilczanym w literaturze (patrz np. [9, 16, 37]), jest powtórzenie lematu 2.3.3. Wiele publikacji przyjmuje ten fakt jako coś oczywistego, nie tłumacząc się z dowodu.

Warunek (R) oznacza, że układ

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A(t)y(t) + Bu(t) & \text{dla p.w. } t \in \mathcal{J}, \\ y(t) = \phi(0), \end{cases} \tag{3.17}$$

jest aproksymacyjnie sterowalny.

3.3 OPERATORY POMOCNICZE I ICH WŁASNOŚCI

W tej części pokażemy, że dla każdego $y_0 \in \mathbb{H}$, wybierając odpowiednie sterowanie u^α dla każdego $\alpha > 0$, istnieje łagodne rozwiązanie $y(\cdot; y_0, u^\alpha) \in \mathcal{PC}([-\tau, T], \mathbb{H})$ układu (3.1), pozwalające w kolejnym podrozdziale uzyskać zbieżność $y^\alpha(T; y_0, u^\alpha) \to y_1 \in \mathbb{H}$ gdy $\alpha \to 0^+$.

Zgodnie z koncepcją zawartą w rozdziale drugim, dla $\alpha > 0$ definiujemy operator liniowy $W^\alpha \colon \mathbb{H} \to L^2(\mathcal{J}, \mathbb{U})$ wzorem

$$W^\alpha(x)(s) := B^* \mathscr{U}^*(T, s) R(\alpha, L_B^T)(x) \quad \text{dla } x \in \mathbb{H},\ s \in \mathcal{J}. \tag{3.18}$$

Operator W^α jest ograniczony, ponieważ $\|R(\alpha, L_B^T)\| \leqslant \frac{1}{\alpha}$. Dla każdego $\alpha > 0$ oznaczmy $M^\alpha := \|W^\alpha\|$.

Dalsze rozważania wymagają przedefiniowania aproksymacyjnej sterowalności na pewien wygodny układ równań. Mianowicie dla wszystkich $\alpha > 0$ będziemy szukali funkcji $(y, u) \in \mathcal{PC}(\mathcal{J}, \mathbb{H}) \times L^2(\mathcal{J}, \mathbb{U})$ spełniających następujący układ równań

$$u(t) = u^\alpha_{y_1, f, y}(t) := W^\alpha\big(p(f, y)\big)(t), \tag{3.19}$$

$$y(t) = y^\alpha(t) := \mathscr{U}(t, 0)\phi(0) + \int_0^t \mathscr{U}(t, s) f(s)\, ds + \int_0^t \mathscr{U}(t, s) B u^\alpha_{y_1, f, y}(s)\, ds \tag{3.20}$$

dla $t \in \mathcal{J}$, gdzie

$$p(f, y) := y_1 - \mathscr{U}(T, 0)\phi(0) - \sum_{0 < t_k < T} \mathscr{U}(T, t_k) I_k(y[\phi]_{t_k}) - \int_0^T \mathscr{U}(T, s) f(s)\, ds \tag{3.21}$$

oraz $f \in P_F(y)$.

W dalszej części charakteryzujemy rozwiązania powyższych równań. Za [21] wprowadzimy teraz pomocnicze operatory.

Dla $\alpha > 0$ definiujemy operator $\mathfrak{T}^\alpha \colon L^1(\mathcal{J}, \mathbb{H}) \times \mathcal{PC}(\mathcal{J}, \mathbb{H}) \to \mathcal{PC}(\mathcal{J}, \mathbb{H})$ wzorem

$$\begin{aligned} \big(\mathfrak{T}^\alpha(f, y)\big)(t) := \mathscr{U}(t, 0)\phi(0) &+ \sum_{0 < t_k < t} \mathscr{U}(t, t_k) I_k(y[\phi]_{t_k}) \\ &+ \int_0^t \mathscr{U}(t, s) f(s)\, ds + \int_0^t \mathscr{U}(t, s) B u^\alpha_{y_1, f, y}(s)\, ds \quad \text{dla } f \in L^1(\mathcal{J}, \mathbb{H}). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Teraz możemy rozważyć rodzinę odwzorowań $\Gamma^\alpha \colon \mathcal{K} \multimap \mathcal{K}$ danych przez

$$\Gamma^\alpha(y) := \big\{ z \in \mathcal{PC}(\mathcal{J}, \mathbb{H}) \bigm| z(t) = \big(\mathfrak{T}^\alpha(f, y)\big)(t),\ \text{dla } f \in P_F(y) \big\}, \quad \text{gdzie } \alpha > 0,\ y \in \mathcal{K}. \tag{3.23}$$

W celu rozwiązania układu (3.19)–(3.20) stosujemy technikę punktów stałych dla odwzorowań wielowartościowych. Ze sposobu, w jaki multifunkcje Γ^α zostały zdefiniowane, widzimy, że punkty stałe odwzorowania Γ^α są łagodnymi rozwiązaniami układu (3.1).

W celu pokazania, że odwzorowania Γ^α są u.s.c., wystarczy tylko dowieść (por. strony 23–24), że ich wykresy są domknięte, ponieważ, jak zobaczymy poniżej, operatory te są pełnociągłe. Dla wygody możemy rozważyć następujący warunek dla abstrakcyjnego operatora $S\colon L^1(\mathcal{J},\mathbb{H}) \to \mathcal{PC}(\mathcal{J},\mathbb{H})$:

(S) dla każdego ciągu całkowo ograniczonego $(f_n)_{n\geqslant 1} \subset L^1(\mathcal{J},\mathbb{H})$, ciąg $\big(S(f_n)\big)_{n\geqslant 1}$ jest relatywnie zwarty w $\mathcal{PC}(\mathcal{J},\mathbb{H})$.

Będziemy używać następującego operatora.

Definicja 3.3.1. *Operator* $\mathbb{G}\colon L^1(\mathcal{J},\mathbb{H}) \to \mathcal{PC}(\mathcal{J},\mathbb{H})$ *zdefiniowany jako*

$$(\mathbb{G}f)(t) := \int_0^t \mathscr{U}(t,s)f(s)\,ds, \quad f \in L^1(\mathcal{J},\mathbb{H}), \tag{3.24}$$

nazywa się uogólnionym operatorem Cauchy'ego.

Stwierdzenie 3.3.2. *Przy założeniu (A) uogólniony operator Cauchy'ego spełnia warunek (S).*

Dowód. Załóżmy, że dla prawie każdego $t \in \mathcal{J}$ mamy $\|f_n(t)\| \leqslant \sigma(t)$, dla pewnego $\sigma \in L^1\big(\mathcal{J},[0,+\infty)\big)$. Niech $t \in \mathcal{J}$, $t > 0$, $\epsilon > 0$ oraz wybierzmy $\delta \in (0,t)$ takie, że $M_{\mathscr{U}} \int_{t-\delta}^t \sigma(s)\,ds < \epsilon$. Połóżmy $v_n(t) := (\mathbb{G}f_n)(t)$ i zauważmy, że dla $t \in \mathcal{J}$ mamy

$$v_n(t) = \mathscr{U}(t,t-\delta)\left(\int_0^{t-\delta} \mathscr{U}(t-\delta,s)f_n(s)\,ds\right) + \int_{t-\delta}^t \mathscr{U}(t,s)f_n(s)\,ds. \tag{3.25}$$

Dlatego

$$\{v_n(t)\}_{n\geqslant 1} \subset \mathscr{U}(t,t-\delta)\left\{\int_0^{t-\delta} \mathscr{U}(t-\delta,s)f_n(s)\,ds\right\}_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{B}(0,\epsilon),$$

gdyż $\|\int_{t-\delta}^t \mathscr{U}(t,s)f_n(s)\,ds\| < \epsilon$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Pełnociągłość $\mathscr{U}(t,t-\delta)$ implikuje, że $\big(v_n(t)\big)_{n\geqslant 1}$ jest relatywnie zwarty.

W celu pokazania, że zbiór $\{v_n\}_{n\geqslant 1}$ jest równociągły, ustalmy $t_0 \in \mathcal{J}$, $\epsilon > 0$ oraz weźmy liczbę $\delta_1 > 0$ taką, że $M_{\mathscr{U}} \int_P \sigma(s)\,ds < \frac{\epsilon}{3}$, gdy tylko $P \subset \mathcal{J}$ jest miary $\lambda(P) < 2\delta_1$ (gdzie λ oznacza miarę Lebesgue'a na $\mathbb{R}$). Niech $z := \max\{0, t_0 - \delta_1\}$; wtedy $t_0 - z \leqslant \delta_1$. Ponieważ zbiór $\{v_n(z)\}_{n\geqslant 1}$ jest relatywnie zwarty, rodzina $\{\mathscr{U}(t,s)v_n(z)\}_{n\geqslant 1}$ jest równociągła, tj. istnieje $0 < \delta_2 < \delta_1$ taka, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz $t \in \mathcal{J}$ zachodzi $\|\mathscr{U}(t,z)v_n(z) - \mathscr{U}(t_0,z)v_n(z)\| \leqslant \frac{\epsilon}{3}$, o ile $|t - t_0| < \delta_2$. Niech teraz $t \in \mathcal{J}$ będzie taki, że $|t - t_0| < \delta_2$. Własność półgrupy i nierówność trójkąta dają nam, że dla wszystkich n mamy

$$\begin{aligned}
&\|v_n(t) - v_n(t_0)\| \\
&\leqslant \left\|\mathscr{U}(t,z)v_n(z) - \mathscr{U}(t_0,z)v_n(z) + \int_z^t \mathscr{U}(t,s)f_n(s)\,ds - \int_z^{t_0} \mathscr{U}(t_0,s)f_n(s)\,ds\right\| \\
&\leqslant \|\mathscr{U}(t,z)v_n(z) - \mathscr{U}(t_0,z)v_n(z)\| + M_{\mathscr{U}}\int_z^t \sigma(s)\,ds + M_{\mathscr{U}}\int_z^{t_0}\sigma(s)\,ds < \epsilon.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

W związku z tym ciąg $(v_n)_{n\geqslant 1}$ jest relatywnie zwarty w $\mathcal{PC}(\mathcal{J},\mathbb{H})$. □

Uwaga 3.3.3. Dokładnie jak powyżej można pokazać, że zbiór $\mathbb{G}(U)$ jest relatywnie zwarty, jeśli $U \subset L^1(\mathcal{J}, \mathbb{H})$ jest ograniczony.

Zwróćmy uwagę na bezpośrednią konsekwencję stwierdzenia 3.3.2.

Twierdzenie 3.3.4. *Niech* $S\colon L^1(\mathcal{J}, \mathbb{H}) \to \mathcal{PC}(\mathcal{J}, \mathbb{H})$ *będzie operatorem spełniającym warunek (S). Wtedy złożenie*

$$S \circ P_F \colon \mathcal{PC}(\mathcal{J}, \mathbb{H}) \multimap \mathcal{PC}(\mathcal{J}, \mathbb{H}) \tag{3.27}$$

jest domkniętym multioperatorem o zwartych wartościach.

Dowód. Niech $(y_n)_{n\geqslant 1}$, $(z_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathcal{PC}(\mathcal{J}, \mathbb{H})$, $y_n \to y_0$, $z_n \in S \circ P_F(y_n)$, $n \geqslant 1$, oraz $z_n \to z_0$. Weźmy dowolny ciąg $(f_n)_{n\geqslant 1} \subset L^1(\mathcal{J}, \mathbb{H})$ taki, że $f_n \in P_F(y_n)$, $z_n = S(f_n)$, $n \geqslant 1$. Ciąg $(y_n[\phi]_t)_{n\geqslant 1}$ jest ograniczony w normie przestrzeni $\mathfrak{X}$, ponieważ

$$\begin{aligned} \|y_n[\phi]_t\|_{\mathfrak{X}} &= \frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^{0} \|y_n[\phi](t+s)\|\,ds \\ &\leqslant \frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^{-t} \|y_n[\phi](t+s)\|\,ds + \frac{1}{\tau}\int_{-t}^{0} \|y_n[\phi](t+s)\|\,ds \\ &\leqslant \frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{0} \|\phi(s)\|\,ds + \frac{1}{\tau}\int_{0}^{T} \|y_n(s)\|\,ds < +\infty, \end{aligned} \tag{3.28}$$

gdyż $y_n \to y_0$ implikuje ograniczoność $\|y_n\|_{\mathcal{PC}(\mathcal{J},\mathbb{H})}$. Z założenia (F3) wynika, że ciąg $(f_n)_{n\geqslant 1}$ jest całkowo ograniczony. Ponieważ wartości odwzorowania F są słabo zwarte i $f_n(t) \in F(t, y_n[\phi]_t)$, zatem z twierdzenia Dunforda-Pettisa zbiór $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ jest relatywnie słabo zwarty. Można więc założyć bez straty ogólności, że $f_n \rightharpoonup f_0$. Uwaga 3.3.3 pociąga za sobą, że $S(f_n) \to S(f_0) = z_0$ (z dokładnością do podciągu). Z drugiej strony, dzięki twierdzeniu o zwartości 1.2.6 mamy, że $f_0 \in P_F(y_0)$ i dlatego $z_0 \in S \circ P_F(y_0)$, tj. odwzorowanie $S \circ P_F$ jest domknięte. Zwartość zbioru $S \circ P_F(y)$, dla $y \in \mathcal{PC}(\mathcal{J}, \mathbb{H})$, wynika z jego domkniętości i stwierdzenia 3.3.2. □

Z twierdzenia 1.2.3 otrzymujemy

Wniosek 3.3.5. *Przy powyższych założeniach dotyczących* F *oraz* S *multioperator* $S \circ P_F$ *jest u.s.c.*

Dowód. Rozpatrzmy zbieżny ciąg $(y_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathcal{PC}(\mathcal{J}, \mathbb{H})$ i dowolny ciąg $(f_n)_{n\geqslant 1} \subset L^1(\mathcal{J}, \mathbb{H})$ taki, że $f_n \in P_F(y_n)$, $n \geqslant 1$. Z założenia (F3) wynika, że zbiór $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ jest słabo zwarty. Przeto z uwagi 3.3.3 zbiór $\big\{S(f_n)\big\}_{n\geqslant 1} \subset \mathcal{PC}(\mathcal{J}, \mathbb{H})$ jest relatywnie zwarty, a stąd operator $S \circ P_F$ jest quasizwarty, wobec tego jest u.s.c. z twierdzenia 1.2.3. □

Następująca własność operatora Γ^α jest zasadniczym wynikiem niezbędnym do udowodnienia aproksymacyjnej sterowalności dla układu (3.1).

Wniosek 3.3.6. *Przy założeniach (A), (B), (I), (F0), (F1), (F2) oraz (F3) dla* $\alpha > 0$*, operator* $\Gamma^\alpha\colon \mathcal{K} \multimap \mathcal{K}$ *jest pełnociągły, u.s.c. i ma zwarte wartości.*

Dowód. Dla $f \in L^1(\mathcal{J}, \mathbb{H})$ oznaczmy

$$q_{T,f} := y_1 - \mathscr{U}(T,0)\phi(0) - \int_0^T \mathscr{U}(T,\eta)f(\eta)\,d\eta. \tag{3.29}$$

Dla każdego $\alpha > 0$ operator Γ^α możemy rozłożyć w następujący sposób

$$\Gamma^\alpha(y) = \Gamma_1^\alpha(y) + \Gamma_2^\alpha(y) + \Gamma_3^\alpha(y), \quad y \in \mathcal{PC}(\mathcal{J}, \mathbb{H}), \tag{3.30}$$

gdzie

$$\begin{aligned}\Gamma_1^\alpha(y) := \Big\{z \in \mathcal{K} \mid z(t) = \mathcal{U}(t,0)\phi(0) + \int_0^t \mathcal{U}(t,s)f(s)\,ds \\ + \int_0^t \mathcal{U}(t,s)BW^\alpha(q_{T,f})(s)\,ds, f \in P_F(y)\Big\},\end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\Gamma_2^\alpha(y) := -\int_0^t \mathcal{U}(t,s)BW^\alpha\left(\sum_{k=1}^{p} \mathcal{U}(T,t_k)I_k(y[\phi]_{t_k})\right)(s)\,ds, \tag{3.32}$$

$$\Gamma_3^\alpha(y) := \sum_{0<t_k<T} \mathcal{U}(T,t_k)I_k(y[\phi]_{t_k}). \tag{3.33}$$

Wypukłość wartości operatora Γ^α jest oczywista. Ponadto jednowartościowe operatory Γ_2^α oraz Γ_3^α są ciągłe, ponieważ funkcje skoku $I_k\colon \mathfrak{X} \to \mathbb{H}$, $k = 1, \ldots, p$, i operatory liniowe B, W^α są ciągłe oraz mamy nierówność (3.28). Aby zakończyć tę część dowodu musimy pokazać, że operator $\Gamma_1^\alpha\colon \mathcal{K} \multimap \mathcal{K}$ jest u.s.c.

Operator Γ_1^α jest złożeniem operatora P_F z $S := S_1 + S_2\colon L^1(\mathcal{J}, \mathbb{H}) \to \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{H})$, gdzie

$$(S_1 f)(t) := \mathcal{U}(t,0)\phi(0) + \int_0^t \mathcal{U}(t,s)f(s)\,ds, \tag{3.34}$$

$$(S_2 f)(t) := \int_0^t \mathcal{U}(t,s)BW^\alpha(q_{T,f})(s)\,ds. \tag{3.35}$$

Ze stwierdzenia 3.3.2 operator S_1 spełnia warunek (S). Pokażemy, że S_2 również spełnia założenie (S). Łatwo dostrzec, że $S_2 f = \mathbb{G}(BW^\alpha(y_1 - \mathcal{U}(T,0)\phi(0) - \zeta_T\mathbb{G}(f)))$, gdzie $\zeta_T\colon \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{H}) \to \mathbb{H}$ jest liniową i ciągłą funkcją ewaluacji zadaną jako $\zeta_T(y) := y(T)$. Korzystamy teraz z wniosku 3.3.5, dzięki któremu mamy, że operator Γ_1^α jest u.s.c. Dlatego operator Γ^α, będąc sumą odwzorowania u.s.c. oraz przekształceń ciągłych, sam jest u.s.c. Ponadto, z twierdzenia 3.3.4, odwzorowanie Γ^α ma zwarte wartości.

Weźmy dowolny zbiór ograniczony $U \subset \mathcal{K}$. Wówczas zbiór $W := P_F(U)$ jest relatywnie słabo zwarty dzięki twierdzeniu Dunforda-Pettisa. Ponieważ operator S spełnia warunek (S), to zbiór $\Gamma_1^\alpha(U)$ jest relatywnie zwarty. Ponadto funkcje $I_k\colon \mathfrak{X} \to \mathbb{H}$, $k = 1, \ldots, p$, są pełnociągłe. W związku z tym zbiór $\Gamma^\alpha(U)$ jest relatywnie zwarty jako suma trzech zbiorów relatywnie zwartych. Stąd odwzorowanie Γ^α jest quasizwarte, a z twierdzenia 1.2.3 jest u.s.c. □

3.3.1 KRYTERIA WYSTARCZAJĄCE DLA ISTNIENIA PUNKTÓW STAŁYCH OPERATORÓW Γ^α

Wydaje się, że w naszym kontekście warunek (F3) jest zbyt ogólny, aby zapewnić istnienie rozwiązań układu (3.1). Dlatego, aby zagwarantować istnienie łagodnych rozwiązań, nakładamy kilka silniejszych ograniczeń na odwzorowanie F. Następnie, używając twierdzenia Schaefera i twierdzenia Sadowskiego, uzyskamy warunki wystarczające na niepustość zbioru rozwiązań.

Sformułujemy jednak wpierw następujący ogólny fakt:

Twierdzenie 3.3.7. *Weźmy $\alpha > 0$ i przyjmijmy, że założenia (A), (B), (F0), (F1), (F2), (F3) oraz (I) są spełnione. Niech $V^\alpha \subset \mathcal{K}$ będzie ograniczonym, (relatywnie względem $\mathcal{K}$) otwartym zbiorem takim, że dla wszystkich $z \in \partial V^\alpha$ mamy $z \notin \Gamma^\alpha(z)$. Jeśli $\deg(\mathbb{I} - \Gamma^\alpha, \overline{V^\alpha}) \neq 0$, to istnieje punkt stały y^α operatora Γ^α taki, że $y^\alpha \in V^\alpha$; przez* deg *oznaczyliśmy stopień topologiczny dla odwzorowań kondensujących.*

Podamy teraz warunki, przy których zbiór punktów stałych odwzorowania Γ^α jest niepusty.

Twierdzenie 3.3.8. *Przy założeniach (A), (B), (I), (F0), (F1) oraz (F2) przyjmijmy, że warunek (F3) zastąpimy następującym:*

(F3A) *istnieje ciąg funkcji $(\omega_n)_{n \geqslant 1} \subset L^1(\mathcal{J}, [0 + \infty))$ taki, że*

$$\sup_{\|z\|_{\mathfrak{X}} \leqslant n} \|F(t,z)\| \leqslant \omega_n(t) \quad \text{dla p.w. } t \in \mathcal{J},\ n = 1, 2, \ldots, \tag{3.36}$$

oraz

(IA) *istnieje ciąg $(H_n)_{n \geqslant 1}$ liczb nieujemnych takich, że:*

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant p} \left(\sup_{\|z\|_{\mathfrak{X}} < n} \|I_k(z)\| \right) < H_n. \tag{3.37}$$

Wtedy, jeśli

$$\liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \int_0^T \omega_n(s)\, ds = 0 \tag{3.38}$$

oraz

$$\liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} H_n = 0, \tag{3.39}$$

to dla $\alpha > 0$ istnieje liczba $r = r(\alpha) > 0$ taka, że $\Gamma^\alpha(\mathcal{D}(0,r)) \subset \mathcal{D}(0,r)$. W konsekwencji odwzorowanie Γ^α ma punkt stały.

Twierdzenie 3.3.9. *Przy założeniach (A), (B), (I), (F0), (F1) oraz (F2) niech warunek (F3) zostanie zastąpiony przez następujący:*

(F3B) *istnieje funkcja $k \in L^1(\mathcal{J}, [0, +\infty))$ oraz niemalejąca funkcja $\psi \colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ taka, że*

$$\|F(t,z)\| \leqslant k(t)\psi(\|z\|_{\mathfrak{X}}) \quad \text{dla p.w. } t \in \mathcal{J},\ z \in \mathfrak{X}, \tag{3.40}$$

oraz

(IB)

$$\|I_n(z)\| \leqslant \psi(\|z\|_{\mathfrak{X}}) \quad \text{dla } n = 1, \ldots, p, \quad \text{oraz } z \in \mathfrak{X}. \tag{3.41}$$

Ponadto załóżmy, że dla każdego $\alpha > 0$ istnieje stała $L^\alpha > 0$ taka, że

$$\frac{L^\alpha}{C_1^\alpha + C_2^\alpha \psi(L^\alpha + \|\phi\|_{\mathfrak{X}}) \left(p + \int_0^T k(\tau)\, d\tau\right) + \|\phi(0)\|} > 1, \tag{3.42}$$

gdzie stałe C_1^α oraz C_2^α są dane przez

$$C_1^\alpha := M_{\mathscr{U}}\|\phi(0)\| + M_{\mathscr{U}} M_B M^\alpha \sqrt{T}\big(\|y_1\| + M_{\mathscr{U}}\|\phi(0)\|\big), \tag{3.43}$$

$$C_2^\alpha := M_{\mathscr{U}}\left(1 + M_{\mathscr{U}} M_B M^\alpha \sqrt{T}\right), \tag{3.44}$$

oraz przypomnijmy, że $M_{\mathscr{U}} = \sup_{(s,t)\in\Delta}\|\mathscr{U}(t,s)\|$, $M_B = \|B\|$, $M^\alpha = \|W^\alpha\|$. *Wtedy dla* $\alpha > 0$ *istnieje* $r = r(\alpha) > 0$ *takie, że* $\Gamma^\alpha\big(\mathcal{D}(0,r)\big) \subset \mathcal{D}(0,r)$.

Twierdzenie 3.3.10. *Przy warunkach (A), (B), (I), (F0), (F1) oraz (F2) załóżmy, że warunek (F3) jest zastąpiony przez następujący:*

(F3C) *dla każdego* $\alpha > 0$ *istnieje funkcja* $\beta^\alpha \in L^1\big(\mathcal{J}, [0, +\infty)\big)$ *taka, że spełniony jest warunek subliniowego wzrostu, tzn.*

$$\|F(t,z)\| \leqslant \beta^\alpha(t)\big(1 + \|z\|_{\mathfrak{X}}\big) \quad \text{dla p.w. } t \in \mathcal{J},\ z \in \mathfrak{X}, \tag{3.45}$$

a ponadto załóżmy

(I0) *odwzorowania* $I_k\colon \mathfrak{X} \to \mathbb{H}$, $k = 1,\dots,p$, *są funkcjami ograniczonymi, tzn. istnieją stałe* $d_k > 0$ *takie, że*

$$\|I_k(z)\| \leqslant d_k \quad \text{dla } z \in \mathfrak{X}. \tag{3.46}$$

Jeśli

$$M_{\mathscr{U}}^2 M_B M^\alpha \sqrt{T} e^{\int_0^T \beta^\alpha(s)\,ds} \int_0^T \beta^\alpha e^{-M_{\mathscr{U}}\int_0^t \beta^\alpha(s)\,ds}\,dt < 1, \quad \alpha > 0, \tag{3.47}$$

to dla każdego $\alpha > 0$ *istnieje* $r = r(\alpha) > 0$ *takie, że* $\Gamma^\alpha\big(\mathcal{D}(0,r)\big) \subset \mathcal{D}(0,r)$.

Dowód trzech wyżej wymienionych warunków jest taki sam jak ten, który pojawił się w [6], więc go pominiemy.

Twierdzenie 3.3.11. *Niech*

$$\kappa := \max\left\{1, M_{\mathscr{U}}, M_{\mathscr{U}} M_B \sqrt{T}\right\}, \tag{3.48}$$

$$e_i := 3M_{\mathscr{U}}\|\lambda_i\|_{L^1}, \quad f_i := 3\kappa M_{\mathscr{U}}^2 M_B \|\lambda_i\|_{L^1}, \tag{3.49}$$

$$g_i := \max\{e_i, f_i\}. \tag{3.50}$$

Przy założeniach (A), (B), (I0), (F0), (F1) oraz (F2), jeśli założymy, że

(F3D) *istnieją rodziny funkcji* $\xi_i\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ *oraz* $\lambda_i \in L^1\big(\mathcal{J}, [0,+\infty)\big)$, $i = 1,\dots,q$, *takie, że*

$$\|F(t,z)\| \leqslant \sum_{i=1}^{q} \lambda_i(t)\xi_i\big(\|z\|_{\mathfrak{X}}\big) \quad \text{dla } z \in \mathfrak{X}, \text{ dla p.w. } t \in \mathcal{J}, \tag{3.51}$$

oraz dla każdego $\alpha > 0$ *mamy*

$$\limsup_{r\to\infty}\left(r - \sum_{i=1}^{q} g_i \frac{\xi_i(\|\phi\|_{\mathfrak{X}} + r)}{\alpha}\right) = +\infty, \tag{3.52}$$

to istnieje punkt stały operatora Γ^α *dla* $\alpha > 0$.

Dowód powyższego twierdzenia jest podobny jak w rozdziale drugim. Jedyne co trzeba zauważyć, to nierówność

$$\|y[\phi]_s\|_{\mathfrak{X}} \leqslant \|\phi\|_{\mathfrak{X}} + \frac{T}{\tau}\|y\|_{\mathcal{PC}(\mathcal{J},\mathbb{H})}, \tag{3.53}$$

która wynika z nierówności (3.28).

Uwaga 3.3.12. Praca [37] błędnie podaje, że jest to warunek wystarczający do aproksymacyjnej sterowalności układu (3.1).

Niemniej jednak, warunki (F3a)–(F3d) są nadal niewystarczające, aby zapewnić aproksymacyjną sterowalność układu (3.1). W takim razie warunek (F3) musi zostać zastąpiony silniejszym.

3.4 ROZWIĄZANIE PROBLEMU STEROWALNOŚCI INKLUZJĄ Z IMPULSAMI

Mając na uwadze powyższe twierdzenia możemy teraz sformułować i udowodnić główny wynik tego rozdziału.

Twierdzenie 3.4.1. *Załóżmy, że (A), (B), (R), (I), (I0), (F0), (F1) oraz (F2) są spełnione. Poza tym, niech*

(F3E) *istnieje multifunkcja* $H\colon \mathcal{J} \multimap \mathbb{H}$ *o słabo zwartych wartościach, która jest całkowo ograniczona i taka, że*

$$F(t,z) \subset H(t) \quad \textit{dla p.w. } t \in \mathcal{J} \textit{ i dla wszystkich } z \in \mathfrak{X}. \tag{3.54}$$

Wówczas układ (3.1) *jest aproksymacyjnie sterowalny na* $\mathcal{J}$.

Uwaga 3.4.2. Zwróćmy uwagę, że warunek (F3e) implikuje (F3a)–(F3d), a stąd Γ^α ma punkt stały dla każdego $\alpha > 0$.

Dowód. Niech y^α będzie punktem stałym odwzorowania $\Gamma^\alpha\colon \mathcal{K} \multimap \mathcal{K}$ w kuli $\{ z \in \mathcal{PC}(\mathcal{J},\mathbb{H}) \mid z(0) = \phi(0), \|z\| \leqslant r(\alpha) \} \subset \mathcal{K}$. Każdy taki punkt jest łagodnym rozwiązaniem układu (3.1) na $\mathcal{J}$ przy sterowaniu

$$u^\alpha_{y_1,f^\alpha,y^\alpha}(t) = B^*\mathscr{U}^*(T,t)R(\alpha, L_B^T)p(f^\alpha,y^\alpha), \quad t \in \mathcal{J}, \tag{3.55}$$

dla pewnego $f^\alpha \in P_F(y^\alpha)$. Ponadto y^α spełnia równanie

$$y^\alpha(T) = y_1 - \alpha R(\alpha, L_B^T)p(f^\alpha,y^\alpha). \tag{3.56}$$

Istotnie, zauważmy, że

$$\begin{aligned} y^\alpha(T) &= \mathscr{U}(T,0)\phi(0) + \sum_{0<t_k<T} \mathscr{U}(T,t_k)I_k(y^\alpha[\phi]_{t_k}) + L_B^T R(\alpha, L_B^T)p(f^\alpha,y^\alpha) \\ &\quad + \int_0^T \mathscr{U}(T,s)f^\alpha(s)\,ds = y_1 - p(f^\alpha,y^\alpha) + L_B^T R(\alpha, L_B^T)p(f^\alpha,y^\alpha) \\ &\quad = \alpha R(\alpha, L_B^T)p(f^\alpha,y^\alpha) + L_B^T R(\alpha, L_B^T)p(f^\alpha,y^\alpha) - p(f^\alpha,y^\alpha) \\ &\quad + y_1 - \alpha R(\alpha, L_B^T)p(f^\alpha,y^\alpha). \end{aligned} \tag{3.57}$$

Z założenia (F3e) oraz twierdzenia Dunforda-Pettisa dostajemy, że zbiór $\{f^\alpha\}_{\alpha>0}$ jest słabo zwarty w przestrzeni $L^1(\mathcal{J}, \mathbb{H})$. Istnieje więc ciąg, powiedzmy $(f^{\alpha_n})_{n\geqslant 1}$, $\alpha_n \to 0^+$, słabo zbieżny do pewnego f w $L^1(\mathcal{J}, \mathbb{H})$. Oznaczmy

$$h_n := y_1 - \mathscr{U}(T,0)\phi(0) - \sum_{0<t_k<T} \mathscr{U}(T,t_k)I_k(y^{\alpha_n}[\phi]_{t_k}) - \int_0^T \mathscr{U}(T,s)f(s)\,ds. \tag{3.58}$$

Ponieważ $f^{\alpha_n} \rightharpoonup f$, więc ciąg $(y^{\alpha_n}[\phi]_{t_i})_{n\geqslant 1}$ jest ograniczony, $i = 1,\dots,p$, dlatego ciąg $(h_n)_{n\geqslant 1}$ jest zwarty. Niech $h_{n_k} \to h$. Wynika stąd, że

$$\begin{aligned}\|p(f^{\alpha_{n_k}}, y^{\alpha_{n_k}}) - h_{n_k}\| &= \left\|\int_0^T \mathscr{U}(T,s)\big(f^{\alpha_{n_k}}(s) - f(s)\big)\,ds\right\| \\ &\leqslant \int_0^T \left\|\mathscr{U}(T,s)\big(f^{\alpha_{n_k}}(s) - f(s)\big)\right\|\,ds \to 0,\end{aligned} \tag{3.59}$$

gdy $k \to +\infty$, ze względu na pełnociągłość operatora Cauchy'ego $\mathbb{G}\colon L^1(\mathcal{J}, \mathbb{H}) \to \mathcal{PC}(\mathcal{J}, \mathbb{H})$. Następnie, dzięki ograniczoności impulsów oraz uwadze 1.3.4, przy pomocy równości (3.56) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\|y^{\alpha_{n_k}}(T) - y_1\| &= \|\alpha_{n_k} R(\alpha_{n_k}, L_B^T) p(f^{\alpha_{n_k}}, y^{\alpha_{n_k}})\| \\ &\leqslant \|\alpha_{n_k} R(\alpha_{n_k}, L_B^T)(h_{n_k})\| + \|\alpha_{n_k} R(\alpha_{n_k}, L_B^T)\big(p(f^{\alpha_{n_k}}, y^{\alpha_{n_k}}) - h_{n_k}\big)\| \\ &\leqslant \|\alpha_{n_k} R(\alpha_{n_k}, L_B^T)(h_{n_k})\| + \|p(f^{\alpha_{n_k}}, y^{\alpha_{n_k}}) - h_{n_k}\| \to 0,\end{aligned} \tag{3.60}$$

gdy $k \to +\infty$. Dowodzi to aproksymacyjnej sterowalności układu (3.1). □

Uwaga 3.4.3. Zauważmy, że dowód twierdzenia jest konstruktywny i dlatego ciekawy zarówno z punktu widzenia teoretycznego, jak i numerycznego. Jedynym kłopotliwym krokiem jest pokazanie warunku (R).

Nasze rozważania podsumujmy, wypowiadając następujący abstrakcyjny fakt:

Twierdzenie 3.4.4. *Załóżmy, że założenia (A), (B), (R), (F0), (F1), (F2), (F3), (I0) oraz (I) są spełnione. Niech $V \subset \mathcal{K}$ będzie ograniczonym, (relatywnie) otwartym zbiorem takim, że dla wszystkich $z \in \partial V$ mamy $z \notin \Gamma^\alpha(z)$, gdzie $\alpha > 0$ jest dowolne. Jeśli $\deg(\mathbb{I} - \Gamma^\alpha, \overline{V}) \neq 0$ dla $\alpha > 0$, to układ (3.1) jest aproksymacyjnie sterowalny na $\mathcal{J}$.*

Zwróćmy uwagę, że przy założeniach jak w twierdzeniu 3.4.4, zbiór $\{f^\alpha\}_{\alpha>0} \subset \mathcal{B}(0, \mu_V)$, gdzie μ_V pochodzi z warunku (F3), jest relatywnie słabo zwarty, a więc zbiór $\{y^\alpha\}_{\alpha>0} \subset V$ jest relatywnie zwarty. Ponieważ każda dolnie półciągła funkcja na zbiorze zwartym osiąga minimum [Aub, Corollary 1.2], dlatego możemy wywnioskować następującą aproksymacyjną zasadę optymalizacji.

Twierdzenie 3.4.5. *Niech $j\colon \mathcal{PC}(\mathcal{J}, \mathbb{H}) \to [0, +\infty)$ będzie dowolnym dolnie półciągłym funkcjonałem. Przy warunkach twierdzenia 3.4.4 istnieje ciąg liczb dodatnich $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ zbieżny do zera taki, że granica $\vartheta := \lim_{n\to\infty} j(y^{\alpha_n})$ istnieje oraz dla wszystkich trajektorii y startujących z ϕ mamy $j(y) \geqslant \vartheta$.*

Uwaga 3.4.6. Zauważmy, że skoro czasy skoków są ustalone, to pomiędzy każdymi sąsiednimi układ niczym się nie różni od układu z rozdziału drugiego. Dlatego można też łatwo udowodnić poniższy fakt.

Twierdzenie 3.4.7. *Załóżmy, że spełnione są warunki (A), (B), (F0), (F1), (F2), (F3e), (I0) oraz*

(RA) *operator liniowy*

$$R\left(\alpha, L_B^{[t_p,T]}\right) := \left(\alpha \mathbb{I}_{\mathbb{H}} + \int_{t_p}^{T} \mathscr{U}(T,s)BB^*\mathscr{U}^*(T,s)\,ds\right)^{-1} : \mathbb{H} \to \mathbb{H} \tag{3.61}$$

spełnia $\alpha R(\alpha, L_B^{[t_p,T]}) \to 0$ *w silnej topologii operatorowej, gdy* $\alpha \to 0^+$.

Wówczas układ (3.1) *jest aproksymacyjnie sterowalny na* $\mathcal{J}$.

Dowód. Wybierzmy jakiekolwiek sterowanie u_1 na odcinku $[0, t_p]$ i znajdźmy punkt η, do którego dotrze rozwiązanie układu

$$\begin{cases} \dot{y}(t) \in A(t)y(t) + F(t, y_t) + Bu_1(t) & \text{dla p.w. } t \in [0, t_p],\ t \neq t_k,\ k = 1, \ldots, p, \\ y(t) = \phi(t), & t \in \mathfrak{I}, \\ y(t_k^-) = y(t_k), \quad y(t_k^+) = y(t_k) + I_k(y_{t_k}), & k = 1, \ldots, p, \end{cases} \tag{3.62}$$

tzn. $\eta := y(t_p; u_1) + I_p(y_{t_p})$. Jako wniosek z rozdziału drugiego otrzymujemy, że na odcinku $[t_p, T]$ układ (3.1) jest aproksymacyjnie sterowalny. Tak więc istnieje ciąg sterowań u_2^α taki, że rozwiązanie układu

$$\begin{cases} \dot{y}(t) \in A(t)y(t) + F(t, y_t) + Bu_2^\alpha(t) & \text{dla p.w. } t \in [t_p, T], \\ y(t_p) = \eta, \end{cases} \tag{3.63}$$

spełnia $y(T; u_2^\alpha) \to y_1$. W końcu weźmy $u^\alpha := u_1\chi_{[0,t_p]} + u_2^\alpha\chi_{[t_p,T]}$, gdzie χ_B to funkcja charakterystyczna zbioru $B \subset \mathcal{J}$; wtedy rozwiązanie układu (3.1) przy tym sterowaniu spełnia $y(T; u^\alpha) \to y_1$. □

3.5 PRZYKŁAD

Poniższy przykład ilustruje twierdzenie 3.4.1.

Niech $W := [0, \pi]$, $\tau > 0$, $\mathfrak{I} := [-\tau, 0]$, $T > 0$, $\mathcal{J} := [0, T]$. Rozpatrzmy cienki, wąski, jednorodny, ciągły pas W, w którym będzie znajdować się pewna substancja. Zakładamy, że mogą następować nagłe zmiany stężenia substancji w pewnych ustalonych punktach czasu. Stężenie w układzie może być modelowane równaniem reakcji-dyfuzji w obecności sterowania i impulsów. Oznaczamy przez $z(t, x)$ stężenie substancji w punkcie $x \in W$ w czasie $t \in \mathcal{J}$ i zakładamy, że początkowe stężenie jest dane przez funkcję ϕ na przedziale $\mathfrak{I}$.

W określonych momentach czasu $t \in \{t_1, \ldots, t_p\}$ wartości $y(t) := z(t, \cdot)$ mogą zmieniać się gwałtownie (następuje gwałtowna egzogeniczna ingerencja w układ). Zmiany te są określone przez dane funkcje impulsowe

$$I_k \colon \mathcal{PC}\big(\mathfrak{I}, L^2(\mathcal{J}, W)\big) \to L^2(\mathcal{J}, W), \quad k = 1, \ldots, p, \tag{3.64}$$

gdzie w przestrzeni $\mathfrak{X} := \mathcal{PC}\big(\mathfrak{I}, L^2(\mathcal{J}, W)\big)$ rozpatrujemy normę $\|x\|_{\mathfrak{X}} := \frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^{0} \|x(t)\|_{\mathbb{H}}\,dt$.

Zakładamy, że sterowanie może być podzielone na dwa rodzaje: zwrotne (feedback) oraz absolutne. Sterowanie w pętli zwrotnej charakteryzuje całkowalna funkcja $f\colon \mathcal{J} \to L^2(\mathcal{J}, W)$ spełniającą zwrotną relację

$$f(t) \in F(t, y_t) \quad \text{dla p.w. } t \in \mathcal{J}, \tag{3.65}$$

gdzie $F\colon \mathcal{J} \times \mathcal{PC}(\mathcal{I}, L^2(\mathcal{J}, W)) \multimap L^2(\mathcal{J}, W)$ jest odwzorowaniem spełniającym założenia (F0)–(F2).

Absolutne sterowanie jest reprezentowane przez ograniczony operator liniowy $B\colon \mathbb{U} \to L^2(\mathcal{J}, W)$ na przestrzeni Hilberta wartości sterowań $\mathbb{U}$:

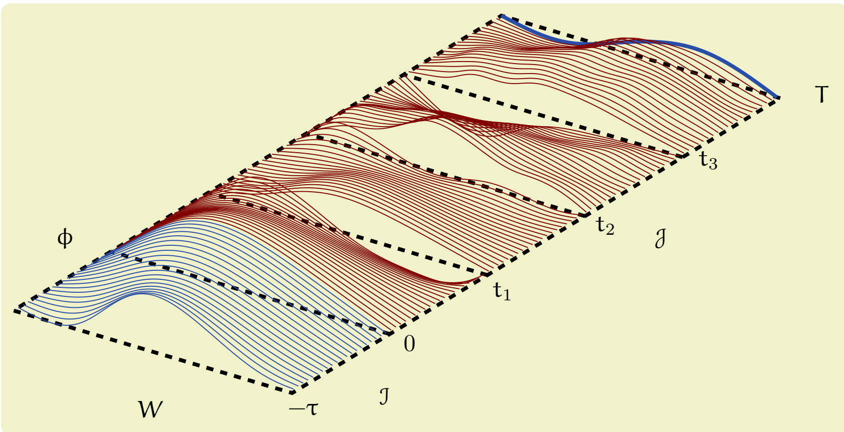
$$B(\nu)(\theta) := 2\nu_2 e_1(\theta) + \sum_{n=2}^{\infty} \nu_n e_n(\theta) \quad \text{dla } \nu = \sum_{n=2}^{\infty} \nu_n e_n \in \mathbb{U},\ \theta \in W, \tag{3.66}$$

gdzie $\mathbb{U} := \{ \sum_{n=2}^{\infty} u_n e_n \mid \sum_{n=2}^{\infty} u_n^2 < \infty \}$ oraz $e_n(\theta) := (2/\pi)^{1/2} \sin(n\theta)$, $n \in \mathbb{N}$, dla $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Podamy teraz konkretny model, który wpisuje się w teorię jak powyżej. Rozważmy następujący układ równań różniczkowych cząstkowych:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} z(t,x) = a(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} z(t,x) + f(t) + B\big(u(t)\big)(x) & \text{dla p.w. } t \in \mathcal{J}_p,\ x \in W, \\ f(t) \in F(t, y_t) & \text{dla p.w. } t \in \mathcal{J}, \\ z(t,x) = \phi(t,x), & t \in \mathcal{I},\ x \in W, \\ z(t_k^-, x) = z(t_k, x), \quad y(t_k^+) = y(t_k) + I_k(y_{t_k}), & k = 1, \ldots, p,\ x \in W, \\ z(t,0) = z(t,\pi) = 0, & t \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J}, \end{cases} \tag{3.67}$$

gdzie $\mathcal{J}_p := \{ t \in \mathcal{J} \mid t \neq t_k,\ k = 1, \ldots, p \}$, $u \in L^2(\mathcal{J}, \mathbb{U})$, $y(t) = z(t, \cdot)$, natomiast $a(\cdot)$ jest funkcją jednostajnie hölderowską taką, że $a(t) \neq 0$ dla p.w. $t \in \mathcal{J}$. Niech $\mathbb{H} := L^2(W, \mathbb{R})$, $\langle \cdot, \cdot \rangle := \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ oraz



Rysunek 8: Przykładowe rozwiązanie układu (3.67).

niech operatory $A(t)$ będą zdefiniowane jako

$$A(t)y := a(t)\ddot{y}, \quad t \in \mathcal{J},\ y \in \mathscr{D}(A) \tag{3.68}$$

ze wspólną dziedziną

$$\mathscr{D}(A) := \{ y \in \mathbb{H} \mid y, \dot{y} \text{ są absolutnie ciągłe}, \ddot{y} \in \mathbb{H},\ y(0) = y(\pi) = 0 \} = H_0^2(W) \cap H^1(W). \tag{3.69}$$

Znanym jest fakt (patrz [Paz, Theorem 5.2]), że rodzina operatorów $\{A(t)\}_{t \in \mathcal{J}}$ generuje zwarty silny operator ewolucyjny $\{ \mathscr{U}(t,s) \}_{(t,s) \in \Delta}$ na $\Delta = \{(t,s) \in \mathcal{J} \times \mathcal{J} \mid 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T\}$, spełniający założenia (a)–(e) z definicji 3.1.1. Można go *explicite* określić przez szereg

$$\mathscr{U}(t,s)y = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \int_s^t a(\tau)\, d\tau} \langle y, e_n \rangle e_n \quad \text{dla } y \in \mathscr{D}(A),\ (t,s) \in \Delta. \tag{3.70}$$

Możemy teraz przepisać nasz model jako układ sterowania funkcyjną inkluzją różniczkową z impulsami i opóźnieniem:

$$\begin{cases} y'(t) \in A(t)y(t) + F(t, y_t) + Bu(t) & \text{dla p.w. } t \in \mathcal{J}_p, \\ y(t) = \phi(t), & t \in \mathfrak{I}, \\ y(t_k^-) = y(t_k), \quad y(t_k^+) = y(t_k) + I_k(y_{t_k}), & k = 1, \dots, p. \end{cases} \tag{3.71}$$

Korzystając z reprezentacji układu ewolucyjnego $\mathscr{U}$ i tego, że

$$(B^*v)(\theta) = (2v_1 + v_2)e_2(\theta) + \sum_{n=3}^{\infty} v_n e_n(\theta) \quad \text{dla } \theta \in W, \tag{3.72}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left(B^*\mathscr{U}^*(T,s)z\right)(\theta) = {}& \left(2z_1 e^{-\int_s^T a(\tau)d\tau} + z_2 e^{-4\int_s^T a(\tau)d\tau}\right) e_2(\theta) \\ &+ \sum_{n=3}^{\infty} e^{-n^2 \int_s^T a(\tau)d\tau} z_n e_n(\theta) \end{aligned} \tag{3.73}$$

dla $\theta \in W$, $z \in \mathbb{H}$ oraz $s \in \mathcal{J}$. Dzięki przedstawieniom (3.66) oraz (3.70) dostajemy ostatecznie

$$\alpha R\left(\alpha, L_B^{[t_p,T]}\right) y = (z_1, z_2, z_3, \dots), \tag{3.74}$$

gdzie

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-\alpha^2 y_1 + 2\alpha y_2 \varkappa(5) - \alpha y_2 \varkappa(8)}{-\alpha^2 - 4\alpha\varkappa(2) - \alpha\varkappa(8) - 4\varkappa(2)\varkappa(8) + 4\varkappa(5)^2}, \\ z_2 &= \frac{\alpha^2 y_2 - 2\alpha y_1 \varkappa(5) + 4\alpha y_1 \varkappa(2)}{-\alpha^2 - 4\alpha\varkappa(2) - \alpha\varkappa(8) - 4\varkappa(2)\varkappa(8) + 4\varkappa(5)^2}, \\ z_i &= \frac{\alpha y_i}{\alpha + \varkappa(2i^2)}, \qquad i \geqslant 3, \end{aligned} \tag{3.75}$$

oraz dla wygody przyjęliśmy $\varkappa(k) := \int_{t_p}^T \exp\left(-k\int_s^T a(\tau)\,d\tau\right) ds$, $k \in \mathbb{N}$. Ponieważ z założenia $\int_t^T a(s)\,ds \neq 0$, więc z nierówności Cauchy'ego-Schwarza mamy $\varkappa(2)\varkappa(8) > \varkappa(5)^2$. Dlatego gdy $\alpha \to 0$ otrzymujemy warunek rezolwenty (Ra). Dzięki temu mamy następujący fakt:

Twierdzenie 3.5.1. *Przy założeniach jak wyżej układ* (3.67) *jest aproksymacyjnie sterowalny na* $\mathcal{J}$.

BIBLIOGRAFIA

WYKAZ CYTOWANYCH ARTYKUŁÓW

[1] Andres, J. (2006), «Topological principles for ordinary differential equations», in «Handbook of differential equations: ordinary differential equations. Vol. III», Handbook of Differential Equations, str. 1–101, Elsevier/North-Holland, Amsterdam. (Cytowane na stronie 7.)

[2] Baghli, S., Benchohra, M. oraz Ezzinbi, K. (2009), «Controllability results for semilinear functional and neutral functional evolution equations with infinite delay», *Surveys in Mathematics and its Applications*, vol. 4, str. 15–39. (Cytowane na stronie 35.)

[3] Balachandran, K. oraz Dauer, J. P. (2002), «Controllability of Nonlinear Systems in Banach Spaces: A Survey», *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 115 (1), str. 7–28. (Cytowane na stronie 2.)

[4] Bashirov, A. E. oraz Kerimov, K. R. (1997), «On Controllability Conception for Stochastic Systems», *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 35 (2), str. 384–398. (Cytowane na stronie 41.)

[5] Bashirov, A. E. oraz Mahmudov, N. I. (1999), «On Concepts of Controllability for Deterministic and Stochastic Systems», *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 37 (6), str. 1808–1821. (Cytowane na stronach 3, 21, 22, oraz 41.)

[6] Benedetti, I., Obukhovskiĭ, V. V. oraz Zecca, P. (2011), «Controllability for impulsive semilinear functional differential inclusions with a non-compact evolution operator», *Discussiones Mathematicae Differential Inclusions, Control and Optimization*, vol. 31, str. 39–69. (Cytowane na stronach 2, 4, 40, oraz 47.)

[7] Bressan, A., Cellina, A. oraz Fryszkowski, A. (1991), «A class of absolute retracts in spaces of integrable functions», *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 384, str. 413–418. (Cytowane na stronie 12.)

[8] Carmichael, N. oraz Quinn, M. D. (1984), *Distributed Parameter Systems Lecture Notes in Control and Information Sciences*, vol. 75, chap. Fixed point methods in nonlinear control, str. 24–51, Springer-Verlag, Berlin. (Cytowane na stronach 2 oraz 41.)

[9] Chen, L. oraz Li, G. (2010), «Approximate Controllability of Impulsive Differential Equations with Nonlocal Conditions», *International Journal of Nonlinear Science*, vol. 10 (4), str. 438–446. (Cytowane na stronach 35 oraz 42.)

[10] Curtain, R. F. oraz Pritchard, A. J. (1976), «The Infinite-Dimensional Riccati Equation for Systems Defined by Evolution Operators», *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 14 (5), str. 951–983. (Cytowane na stronie 37.)

[11] Dauer, J. P. oraz Mahmudov, N. I. (2002), «Approximate controllability of semilinear functional equations in Hilbert spaces», *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 273, str. 310–327. (Cytowane na stronach 3, 20, 31, oraz 41.)

[12] Dauer, J. P. oraz Mahmudov, N. I. (2004), «Controllability of stochastic semilinear functional differential equations in Hilbert spaces», *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 290 (2), str. 373–394. (Cytowane na stronie 3.)

[13] Dauer, J. P., Mahmudov, N. I. oraz Matar, M. M. (2006), «Approximate controllability of backward stochastic evolution equations in Hilbert spaces», *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 323 (1), str. 42–56. (Cytowane na stronie 3.)

[14] Diestel, J. (1977), «Remarks on weak compactness in $L_1(\mu, X)$», *Glasgow Mathematical Journal*, vol. 18, str. 87–91. (Cytowane na stronie 8.)

[15] Diestel, J., Ruess, W. M. oraz Schachermayer, W. (1993), «Weak compactness in $L^1(\mu, X)$», *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 118, str. 447–453. (Cytowane na stronie 8.)

[16] Fu, X. (2011), «Approximate controllability for neutral impulsive differential inclusions with nonlocal conditions», *Journal of Dynamical and Control Systems*, vol. 17, str. 359–386. (Cytowane na stronach 41 oraz 42.)

[17] Fu, X. oraz Mei, K. (2009), «Approximate controllability of semilinear partial functional differential systems», *Journal of Dynamical and Control Systems*, vol. 15 (3), str. 425–443. (Cytowane na stronie 41.)

[18] Gabor, D. oraz Kryszewski, W. (2010), «A global bifurcation index for set-valued perturbations of Fredholm operators», *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, vol. 73 (8), str. 2714–2736. (Cytowane na stronach 16 oraz 19.)

[19] Gabor, G. oraz Grudzka, A. (2012), «Structure of the solution set to impulsive functional differential inclusions on the half-line», *NoDEA. Nonlinear Differential Equations and Applications*, vol. 19 (5), str. 609–627. (Cytowane na stronie 35.)

[20] George, R. K. (1995), «Approximate controllability of nonautonomous semilinear systems», *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, vol. 24, str. 1377–1393. (Cytowane na stronie 3.)

[21] Grudzka, A. oraz Rykaczewski, K. (2014), «On approximate controllability of functional impulsive evolution inclusions in a Hilbert space», *Journal of Optimization Theory and Applications*, str. 1–26. (Cytowane na stronach 35 oraz 42.)

[22] Guedda, L. (2011), «Some remarks in the study of impulsive differential equations and inclusions with delay», *Fixed Point Theory*, vol. 12 (2), str. 349–354. (Cytowane na stronie 39.)

[23] Hu, J. oraz Li, Y. (2011), «Approximate controllability of stochastic integrodifferential system with nonlocal condition», in «2011 International Conference on Electric Information and Control Engineering, ICEICE 2011 – Proceedings», str. 3036–3039. (Cytowane na stronie 41.)

[24] Kato, T. (1961), «Abstract evolution equations of parabolic type in Banach and Hilbert spaces», *Nagoya Mathematical Journal*, vol. 19, str. 93–125. (Cytowane na stronie 37.)

[25] Li, M., Kou, C. oraz Duan, Y. (2008), «Controllability of Semilinear Impulsive Differential Equations with Nonlocal Conditions», in «Proceedings of the 4th international conference on Intelligent Computing: Advanced Intelligent Computing Theories and Applications – with Aspects of Theoretical and Methodological Issues», ICIC '08, str. 755–762, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. (Cytowane na stronie 35.)

[26] Mahmudov, N. I. (2003), «Approximate Controllability of Semilinear Deterministic and Stochastic Evolution Equations in Abstract Spaces», *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 42 (5), str. 1604–1622. (Cytowane na stronach 3 oraz 10.)

[27] Mahmudov, N. I. (2008), «Approximate controllability of evolution systems with nonlocal conditions», *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, vol. 68, str. 536–546. (Cytowane na stronach 3 oraz 35.)

[28] Mahmudov, N. I. oraz McKibben, M. A. (2006), «Approximate controllability of second-order neutral stochastic evolution equations», *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B: Applications and Algorithms*, vol. 13 (5), str. 619–634. (Cytowane na stronie 3.)

[29] Mahmudov, N. I. oraz Zorlu, S. (2003), «Approximate controllability of semilinear neutral systems in Hilbert spaces», *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, vol. 16 (3), str. 233–242. (Cytowane na stronie 3.)

[30] Muslim, M., Agarwal, R. P. oraz Mahmudov, N. I. (2011), «Approximate controllability of integro-differential equations in a Hilbert space with nonlocal conditions», *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis*, vol. 18 (2), str. 269–283. (Cytowane na stronie 3.)

[31] Nussbaum, R. D. (1971), «The fixed point index for local condensing maps», *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, vol. 89, str. 217–258. (Cytowane na stronie 13.)

[32] Obukhovskiĭ, V. V. oraz Rubbioni, P. (2000), «On a controllability problem for systems governed by semilinear functional differential inclusions in Banach spaces», *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, vol. 15 (1), str. 141–151. (Cytowane na stronie 2.)

[33] Obukhovskiĭ, V. V. oraz Zecca, P. (2009), «Controllability for systems governed by semilinear differential inclusions in a Banach space with a noncompact semigroup», *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, vol. 70 (9), str. 3424–3436. (Cytowane na stronach 2, 3, 4, 16, 18, 19, 26, 27, 34, oraz 41.)

[34] Rykaczewski, K. (2012), «Approximate controllability of differential inclusions in Hilbert spaces», *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, vol. 75 (5), str. 2701–2712. (Cytowane na stronach 3 oraz 15.)

[35] Sakthivel, R. (2009), «Approximate controllability of impulsive stochastic evolution equations», *Funkcialaj Ekvacio*, vol. 52, str. 381–393. (Cytowane na stronach 3 oraz 35.)

[36] Sakthivel, R., Anandhi, E. R. oraz Mahmudov, N. I. (2008), «Approximate controllability of second-order systems with state-dependent delay», *Numerical Functional Analysis and Optimization*, vol. 29 (11–12), str. 1347–1362. (Cytowane na stronie 3.)

[37] Sakthivel, R., Mahmudov, N. I. oraz Kim, J. H. (2007), «Approximate controllability of nonlinear impulsive differential systems», *Reports on Mathematical Physics*, vol. 60 (1), str. 85–96. (Cytowane na stronach 3, 35, 40, 42, oraz 48.)

[38] Sakthivel, R., Nieto, J. J. oraz Mahmudov, N. I. (2010), «Approximate Controllability of Nonlinear Deterministic and Stochastic Systems with Unbounded Delay», *Taiwanese Journal of Mathematics*, vol. 14 (5), str. 1777–1797. (Cytowane na stronach 3 oraz 28.)

[39] Sakthivel, R., Ren, Y. oraz Mahmudov, N. I. (2011), «On the approximate controllability of semilinear fractional differential systems», *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 62 (3), str. 1451–1459, special Issue on Advances in Fractional Differential Equations II. (Cytowane na stronie 3.)

[40] Selvi, S. oraz Arjunan, M. M. (2012), «Controllability results for impulsive differential systems with finite delay», *Journal of Nonlinear Science and Applications*, vol. 5 (3), str. 206–219. (Cytowane na stronie 41.)

[41] Shen, L. oraz Sun, J. (2011), «Approximate controllability of stochastic impulsive systems with control-dependent coefficients», *IET Control Theory and Applications*, vol. 5 (16), str. 1889–1894. (Cytowane na stronach 3 oraz 41.)

[42] Sukavanam, N. (2000), «Solvability of Semilinear Operator Equations with Growing Nonlinearity», *Journal of Mathematical Analysis and Application*, vol. 241, str. 39–45. (Cytowane na stronie 3.)

[43] Triggiani, R. (1977), «A note on the lack of exact controllability for mild solutions in Banach spaces», *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 15 (3), str. 407–411. (Cytowane na stronach 3 oraz 18.)

[44] Triggiani, R. (1980), «Addendum: "A note on the lack of exact controllability for mild solutions in Banach spaces"», *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 18 (1), str. 98–99. (Cytowane na stronach 3 oraz 18.)

[45] Ważewski, T. (1961), «Systèmes de commande et équations au contingent», *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences. Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques*, vol. 9, str. 151–155. (Cytowane na stronie 1.)

[46] Whitley, R. J. (1986), «The Krein-Šmulian Theorem», *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 97 (2), str. 376–377. (Cytowane na stronie 9.)

[47] Zhou, X.-H. (1983), «Approximate controllability for a class of semilinear abstract equations», *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 21, str. 551–565. (Cytowane na stronie 3.)

WYKAZ CYTOWANYCH KSIĄŻEK

[Aub] Aubin, J.-P. (1998), *Optima and equilibria*, vol. 140 of *Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, str. xviii+429, second ed., An introduction to nonlinear analysis, Translated from the French by Stephen Wilson. (Cytowane na stronie 49.)

[AE] Aubin, J.-P. oraz Ekeland, I. I. (1984), *Applied nonlinear analysis*, Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons Inc., New York, str. xi+518, A Wiley-Interscience Publication. (Cytowane na stronach 5, 6, 8, oraz 33.)

[AF] Aubin, J.-P. oraz Frankowska, H. (1990), *Set-Valued Analysis*, vol. 2 of *Systems & Control: Foundations & Applications*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, str. xx+461. (Cytowane na stronach 5, 16, oraz 33.)

[BGN] Benchohra, M., Górniewicz, L. oraz Ntouyas, S. K. (2003), *Controllability of Some Nonlinear Systems in Banach spaces: The fixed point theory approach*, Pawel Wlodkowicz University College, Plock, str. 261. (Cytowane na stronach 2, 3, 18, oraz 41.)

[BHN] Benchohra, M., Henderson, J. oraz Ntouyas, S. K. (2006), *Impulsive Differential Equations and Inclusions*, vol. 2 of *Contemporary Mathematics and Its Applications*, Hindawi Publishing Corporation, New York, str. xiv+366, URL: http://dx.doi.org/10.1155/9789775945501. (Cytowane na stronach 2, 35, 38, oraz 40.)

[BDPDM] Bensoussan, A., Da Prato, G., Delfour, M. C. oraz Mitter, S. K. (1993), *Representation and control of infinite-dimensional systems. Vol. II*, Systems & Control: Foundations & Applications, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, str. xviii+345, URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-2750-2. (Cytowane na stronie 2.)

[CV] Castaing, C. oraz Valadier, M. (1977), *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 580, Springer-Verlag, Berlin, Germany, str. vii+278. (Cytowane na stronach 5, 7, 8, oraz 17.)

[CP] Curtain, R. F. oraz Pritchard, A. J. (1978), *Infinite Dimensional Linear Systems Theory*, vol. 8 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer-Verlag, Berlin, str. vii+297. (Cytowane na stronach 17, 21, oraz 37.)

[CZ] Curtain, R. F. oraz Zwart, H. J. (1995), *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory*, vol. 21 of *Texts in Applied Mathematics*, Springer-Verlag, New York, str. xviii+698, URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-4224-6. (Cytowane na stronach 2, 3, 5, 20, oraz 33.)

[DS] Dunford, N. oraz Schwartz, J. T. (1988), *Linear operators. Part I*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, str. xiv+858, General theory, with the assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle, Reprint of the 1958 original, A Wiley-Interscience Publication. (Cytowane na stronie 5.)

[Eva] Evans, L. C. (1998), *Partial differential equations*, vol. 19 of *Graduate Studies in Mathematics*, American Mathematical Society, Providence, RI, str. xviii+662. (Cytowane na stronie 33.)

[Fry] Fryszkowski, A. (2004), *Fixed Point Theory for Decomposable Sets*, vol. 2, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, str. xii+209. (Cytowane na stronie 12.)

[GP] Gasiński, L. oraz Papageorgiou, N. S. (2006), *Nonlinear Analysis*, vol. 9 of *Series in Mathematical Analysis and Applications*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, str. xii+971. (Cytowane na stronach 5, 6, oraz 8.)

[GLH] Glowinski, R., Lions, J.-L. oraz He, J. (2008), *Exact and approximate controllability for distributed parameter systems*, vol. 117 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, str. xii+458, a numerical approach. (Cytowane na stronie 18.)

[Gór] Górniewicz, L. (2006), *Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings*, vol. 4 of *Topological Fixed Point Theory and Its Applications*, Springer, Dordrecht, str. xiv+539, second ed. (Cytowane na stronach 5, 6, oraz 9.)

[GD] Granas, A. oraz Dugundji, J. (2003), *Fixed point theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, New York, str. xvi+690. (Cytowane na stronie 5.)

[HP] Hu, S. oraz Papageorgiou, N. S. (1997), *Handbook of Multivalued Analysis. Vol. I*, vol. 419 of *Mathematics and its Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, str. xvi+964, Theory. (Cytowane na stronach 5 oraz 8.)

[KOZ] Kamenskiĭ, M. I., Obukhovskiĭ, V. V. oraz Zecca, P. (2001), *Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach space*, vol. 7 of *De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications*, Walter de Gruyter & Co., Berlin, str. xii+231, URL: http://dx.doi.org/10.1515/9783110870893. (Cytowane na stronach 2, 5, 6, 12, 13, 19, 27, oraz 29.)

[Pan] Panagiotopoulos, P. D. (1985), *Inequality Problems in Mechanics and Applications*, Birkhäuser Boston Inc., Basel/Boston, str. xx+412, URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-5152-1, Convex and nonconvex energy functions. (Cytowane na stronie 1.)

[Paz] Pazy, A. (1974), *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Applied Mathematical Sciences*, Department of Mathematics, University of Maryland, College Park, Md., str. iii+171, Department of Mathematics, University of Maryland, Lecture Note, No. 10. (Cytowane na stronach 5, 11, 37, oraz 51.)

[Ret] Retherford, J. R. (1993), *Hilbert space: compact operators and the trace theorem*, vol. 27 of *London Mathematical Society Student Texts*, Cambridge University Press, Cambridge, str. xii+131. (Cytowane na stronach 5 oraz 9.)

[Zab] Zabczyk, J. (1992), *Mathematical control theory: an introduction*, Systems & Control: Foundations & Applications, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, str. x+260. (Cytowane na stronach 2, 18, oraz 20.)

A. SKOROWIDZ

B. LISTA OSÓB

– B –

– D –

– G –

– M –

– O –

– S –

– T –

– W –

– Z –

C. LISTA SYMBOLI

$\mathcal{C}([a,b],\mathbb{H})$ – przestrzeń Banacha funkcji ciągłych na odcinku $[a,b]$, podrozdział 1.1, str. 5.

$\chi_{\mathbb{H}}$ – miara niezwartości Hausdorffa w $\mathbb{H}$, podrozdział 1.4, str. 12.

$\operatorname{conv} A$ – otoczka wypukła zbioru A, podrozdział 1.1, str. 5.

$\overline{\operatorname{conv}}\, A$ – domknięta otoczka wypukła zbioru A, podrozdział 1.1, str. 5.

$\deg(\mathbb{I}_{\mathbb{H}} - \Gamma, \overline{V})$ – stopień topologiczny dla pól kondensujących, podrozdział 1.5, str. 13.

Δ – operator Laplace'a z warunkami brzegowymi Dirichleta, wstęp, str. 1.

$\mathscr{D}(A)$ – dziedzina operatora liniowego A, podrozdział 1.3, str. 10.

$\mathbb{H}_w$ – przestrzeń $\mathbb{H}$ wyposażona w słabą topologię, podrozdział 1.2, str. 6.

$\operatorname{Fix}(\phi)$ – zbiór punktów stałych odwzorowania ϕ, podrozdział 1.4, str. 12.

Γ^α – multioperator, którego punkty stałe są łagodnymi rozwiązaniami problemu sterowania, podrozdział 2.4, str. 23.

Γ^α – multioperator, którego punkty stałe są łagodnymi rozwiązaniami problemu sterowania, podrozdział 3.3, str. 42.

$\mathcal{I}$ – przedział $[-\tau, 0]$, podrozdział 3.1, str. 36.

$\mathbb{I}_{\mathbb{H}}$ – operator identycznościowy na $\mathbb{H}$, podrozdział 1.3, str. 9.

$\mathcal{J}$ – przedział $[0, T]$, podrozdział 3.1, str. 36.

$\operatorname{Ker}(T)$ – jądro operatora T, podrozdział 1.3, str. 9.

$\lambda(B)$ – miara Lebesgue'a zbioru B, podrozdział 2.4, str. 23.

$\langle p, x\rangle$, $\langle p, x\rangle_{\mathbb{H}}$, $p(x)$ – działanie funkcjonału $p \in \mathbb{H}^*$ na elemencie $x \in \mathbb{H}$, podrozdział 1.3, str. 9.

$\mathscr{L}(\mathbb{H})$ – przestrzeń Banacha ograniczonych endomorfizmów w $\mathbb{H}$, podrozdział 1.3, str. 9.

$\mathbb{G}$ – uogólniony operator Cauchy'ego, podrozdział 3.3, str. 43.

$\mathscr{B}^T$ – operator sterowalności, podrozdział 2.3, str. 20.

$\mathscr{B}^T$ – operator sterowalności, podrozdział 3.2, str. 40.

$\mathcal{D}$ – rodzina niepustych, ograniczonych, domkniętych i rozkładalnych podzbiorów przestrzeni $L^1([a,b],\mathbb{H})$, podrozdział 1.4, str. 12.

$\mathcal{B}(a,\epsilon)$ – kula otwarta o środku a i promieniu ϵ, podrozdział 1.1, str. 5.

$\mathcal{D}(a,\epsilon)$ – kula domknięta o środku a i promieniu ϵ, podrozdział 1.1, str. 5.

$\mathcal{K}$ – zbiór $\mathcal{K}$, podrozdział 3.1, str. 38.

$\mathcal{R}(T, y_0)$ – zbiór osiągalny przy początkowej wartości y_0 i czasie końcowym T, podrozdział 2.2, str. 18.

$\mathcal{R}(T, y_0)$ – zbiór osiągalny przy początkowej wartości y_0 i czasie końcowym T, podrozdział 3.2, str. 40.

$\mathbb{E}$ – przestrzeń Banacha, podrozdział 1.1, str. 5.

$\mathbb{H}$ – przestrzeń Hilberta, podrozdział 2.1, str. 15.

$\mathbb{U}$ – przestrzeń Hilberta dopuszczalnych wartości wszystkich sterowań, podrozdział 2.1, str. 16.

$\mathfrak{S}^\alpha$ – operator zadający postać łagodnego rozwiązania w problemie sterowania, podrozdział 2.4, str. 23.

$\mathfrak{T}^\alpha$ – operator zadający postać łagodnego rozwiązania w problemie sterowania z impulsami i opóźnieniem, podrozdział 3.3, str. 42.

$\mathfrak{B}(\mathbb{H})$ – σ-ciało zbiorów borelowskich w $\mathbb{H}$, podrozdział 1.2, str. 7.

$\mathfrak{D}(A,B)$ – odległość Hausdorffa zbiorów A oraz B, podrozdział 1.2, str. 8.

$\mathfrak{d}(A,B)$ – półmetryka Hausdorffa, podrozdział 1.2, str. 8.

$\mathfrak{L}$ – σ-ciało zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a, podrozdział 1.2, str. 7.

$\mathfrak{U}^{\alpha}$ – operator, którego punktów stałych szukamy w przypadku niewypukłym, podrozdział 2.5, str. 29.

$\mathrm{Gr}(\phi)$ – wykres (multi)funkcji ϕ, podrozdział 1.2, str. 6.

$\mathrm{Gr}(A)$ – wykres operatora A, podrozdział 1.3, str. 10.

$\mathrm{Range}(T)$ – obraz operatora T, podrozdział 1.3, str. 9.

$\mathscr{L}(\mathbb{H},\mathbb{F})$ – przestrzeń Banacha ograniczonych przekształceń liniowych z $\mathbb{H}$ do $\mathbb{F}$, podrozdział 1.3, str. 9.

$\overline{A}$ – domknięcie zbioru A, podrozdział 1.1, str. 5.

∂A – brzeg zbioru A, podrozdział 1.1, str. 5.

$\mathcal{PC}([-\tau,T],\mathbb{H})$ – przestrzeń takich funkcji, że obcięte do $\mathcal{I}$ należą do $\mathcal{PC}(\mathcal{I},\mathbb{H})$, a obcięte do $\mathcal{J}$ należą do $\mathcal{PC}(\mathcal{J},\mathbb{H})$, podrozdział 3.1, str. 36.

$\mathcal{PC}(\mathcal{I},\mathbb{H})$ – przestrzeń funkcji kawałkami ciągłych na $\mathcal{I}$, podrozdział 3.1, str. 36.

$\mathcal{PC}(\mathcal{J},\mathbb{H})$ – przestrzeń funkcji kawałkami ciągłych na $\mathcal{J}$, podrozdział 3.1, str. 36.

$\phi\colon X \multimap Y$ – odwzorowanie wielowartościowe ϕ, podrozdział 1.2, str. 6.

$\phi(K)$ – obraz zbioru K przez odwzorowanie wielowartościowe ϕ, podrozdział 1.2, str. 6.

$\phi^{-1}(A)$ – duży przeciobraz zbioru A przez odwzorowanie wielowartościowe ϕ, podrozdział 1.2, str. 6.

$\psi \circ \phi$ – złożenie dwóch multifunkcji, podrozdział 1.2, str. 6.

$\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ – zbióry liczb rzeczywistych i naturalnych, wstęp, str. 1.

$y\lfloor_{\mathcal{I}}$ – obcięcie funkcji y do $\mathcal{I}$, podrozdział 3.1, str. 36.

σ_K – funkcja podpierająca zbioru K, podrozdział 1.2, str. 6.

$\to$ – zbieżność względem normy, podrozdział 1.1, str. 5.

$\rightharpoonup$ – słaba zbieżność, podrozdział 1.2, str. 6.

$\mathfrak{X}$ – z definicji to $\mathcal{PC}(\mathcal{I},\mathbb{H})$, podrozdział 3.1, str. 36.

$\{\mathscr{U}(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta} \subset \mathscr{L}(\mathbb{H})$ – operator ewolucyjny, podrozdział 3.1, str. 37.

B – liniowy czynnik sterujący, podrozdział 2.1, str. 16.

B – liniowy czynnik sterujący, podrozdział 3.1, str. 39.

$d(a,B)$ – odległość punktu a od zbioru B, podrozdział 1.2, str. 8.

$H^1(W)$ – przestrzeń Sobolewa, podrozdział 2.6, str. 33.

$H^2_0(W)$ – przestrzeń Sobolewa, podrozdział 2.6, str. 33.

H^T_B – gramian sterowalności w przypadku niezależnym od czasu, podrozdział 2.3, str. 20.

I_k – funkcje skoku, podrozdział 3.1, str. 37.

J^{α} – funkcjonał kosztu, podrozdział 2.3, str. 21.

$L^{[t_p,T]}_B$ – gramian sterowalności na odcinku $[t_p,T]$, podrozdział 3.4, str. 50.

$L^{\infty}([a,b],\mathbb{H})$ – przestrzeń Banacha funkcji istotnie ograniczonych, podrozdział 1.1, str. 6.

$L^p([a,b],\mathbb{H})$ – przestrzeń Banacha funkcji mierzalnych, całkowalnych z p-tą potęgą, podrozdział 1.1, str. 5.

L^T_B – gramian sterowalności w przypadku zależnym od czasu, podrozdział 3.2, str. 40.

M^{α} – norma operatora W^{α}, podrozdział 2.4, str. 23.

M^α – norma operatora W^α, podrozdział 3.3, str. 42.

M_A – ograniczenie półgrupy S_A, podrozdział 2.1, str. 16.

M_B – norma operatora B, podrozdział 2.1, str. 16.

M_B – norma operatora B, podrozdział 3.1, str. 39.

$M_{\mathscr{U}}$ – ograniczenie operatora ewolucji $\mathscr{U}$, podrozdział 3.1, str. 37.

$p(f)$ – różnica między y_1 a końcem trajektorii odpowiadającej selekcji f, podrozdział 2.4, str. 22.

$p(f, y)$ – różnica między y_1 a końcem trajektorii y odpowiadającej selekcji f w problemie impulsowym z opóźnieniem, podrozdział 3.3, str. 42.

P_F – operator Niemyckiego stowarzyszony z odwzorowaniem F dla układu z opóźnieniem, podrozdział 3.1, str. 39.

P_F – operator Niemyckiego stowarzyszony z odwzorowaniem F, podrozdział 2.1, str. 16.

P_ϕ – operator Niemyckiego, podrozdział 1.2, str. 8.

$q_{T,f}$ – różnica między y_1 a końcem trajektorii z zaburzeniem f po czasie T, podrozdział 3.3, str. 44.

$R(\alpha, H_B^T)$ – rezolwenta operatora H_B^T, podrozdział 2.3, str. 20.

$R(\alpha, L_B^T)$ – rezolwenta operatora L_B^T, podrozdział 3.2, str. 41.

S_ϕ^1 – zbiór całkowalnych selekcji odwzorowania ϕ, podrozdział 1.2, str. 7.

T^* – operator sprzężony do operatora T, podrozdział 1.3, str. 9.

$u_{y_1,f,y}^\alpha$ – sterowanie odpowiadające y_1, y oraz f, podrozdział 3.3, str. 42.

$u_{y_1,f}^\alpha$ – sterowanie odpowiadające y_1 i f, podrozdział 2.4, str. 22.

W^α – operator zadający postać sterowania, podrozdział 2.4, str. 23.

W^α – operator zadający postać sterowania, podrozdział 3.3, str. 42.

$x(t^+), x(t^-)$ – granica prawostronna i lewostronna $x(t)$ w t, odpowiednio, podrozdział 3.1, str. 36.

$y(\cdot; u)$ – trajektoria odpowiadająca sterowaniu u, podrozdział 2.2, str. 17.

$y(\cdot; y_0, u)$ – trajektoria odpowiadająca sterowaniu u startująca z punktu y_0, podrozdział 3.3, str. 42.

y^α – trajektoria odpowiadająca $u_{y_1,f,y}^\alpha$, podrozdział 3.3, str. 42.

y^α – trajektoria odpowiadająca $u_{y_1,f}^\alpha$, podrozdział 2.4, str. 22.

y_t – funkcja $y_t \in \mathfrak{X}$ zdefiniowana jako $y_t(\theta) := y(t+\theta)$, podrozdział 3.1, str. 37.

$z[\phi](t)$ – konkatenacja funkcji ϕ oraz z, podrozdział 3.1, str. 38.

dla p.w. – dla prawie wszystkich, wstęp, str. 1.

l.s.c. – odwzorowanie dolnie półciągłe, ang. *lower semicontinuous*, podrozdział 1.2, str. 6.

u.h.c. – odwzorowanie górnie hemiciągłe, ang. *upper hemicontinuous*, podrozdział 1.2, str. 6.

u.s.c. – odwzorowanie górnie półciągłe, ang. *upper semicontinuous*, podrozdział 1.2, str. 6.

O AUTORZE

KRZYSZTOF RYKACZEWSKI urodził się w 1984 r. w Iławie. Ukończył liceum ogólnokształcące w Lubawie i studia na kierunku matematyka na Uniwersytecie Mikołaja Kopernika w Toruniu. W trakcie studiów był współzałożycielem *Koła Naukowego Matematyków*. Z ważniejszych osiągnięć: finalista LIV Olimpiady Matematycznej (2003), stypendysta ministra nauki i szkolnictwa wyższego (2007/2008) oraz marszałka województwa kujawsko-pomorskiego (2008). Ponadto w roku akademickim 2009/2010 był stypendystą projektu „Krok w przyszłość — Stypendia dla doktorantów III edycja", a w roku akademickim 2013/2014 stypendystą projektu „Krok w przyszłość — Stypendia dla doktorantów V edycja". Brał udział w kilku interdyscyplinarnych projektach.

Wyniki przedstawione w rozprawie autor prezentował na konferencjach: *Sixth Symposium on Nonlinear Analysis* (2011), *Calculus of Variations and PDEs* (2012).