

Problem rozłączności potoku ergodycznego z potokiem odwrotnym

Przemysław Berk

*Praca doktorska napisana
w Katedrze Teorii Ergodycznej
i Układów Dynamicznych pod kierunkiem
prof. dr. hab. Krzysztofa Frączka*

TORUŃ 2018

Spis treści

Rozdział 1. Wstęp	3
Rozdział 2. Wiadomości wstępne	9
2.1. Połączenia	9
2.2. Potoki specjalne.	13
2.3. Przestrzeń potoków	14
2.4. Przekładania odcinków	15
2.5. Powierzchnie translacyjne i przestrzeń moduli	16
2.6. Indukcja Rauzy'ego-Veecha	20
Rozdział 3. Granice wykresowych połączeń potoków specjalnych	45
Rozdział 4. Następstwa postaci połączeń granicznych	59
Rozdział 5. Dozwolone permutacje	69
Rozdział 6. Rozłączność potoków specjalnych nad przekładaniami odcinków z ich potokami odwrotnymi	73
6.1. Funkcje kawałkami absolutnie ciągłe	73
6.2. Kawałkami liniowe funkcje dachowe	79
6.3. Kawałkami stałe funkcje dachowe	83
Rozdział 7. Miary na powierzchniach	101
Rozdział 8. Lokalne ciągłe włożenie przestrzeni moduli	123
Rozdział 9. Potoki translacyjne rozłączne ze swoimi odwrotnymi są G_δ -gęste	137
Bibliografia	145

ROZDZIAŁ 1

Wstęp

Tematem niniejszej rozprawy jest problem izomorfizmu układów dynamicznych z układami odwrotnymi. Niech (X, \mathcal{B}, μ) będzie probabilistyczną standardową przestrzenią z miarą. Niech $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ będzie potokiem na X zachowującym miarę μ . Mówimy, że potok \mathcal{T} jest izomorficzny ze swoim odwrotnym, jeżeli istnieje zachowujący miarę μ mierzalny automorfizm $S : X \rightarrow X$ taki, że

$$T_t \circ S = S \circ T_{-t} \text{ dla każdego } t \in \mathbb{R}.$$

Analogiczną definicję stosuje się również dla automorfizmów zachowujących miarę.

Problem istnienia izomorfizmu układu dynamicznego ze swoim układem odwrotnym był studiowany już przez Halmosa i von Neumanna w [17]. W [17] autorzy wyznaczyli pełen zestaw niezmienników izomorfizmu dla układów dynamicznych z dyskretnym widmem, którym jest grupa wartości własnych. Jako prosty wniosek z głównego rezultatu pracy otrzymali, że każdy układ dynamiczny z prostym widmem jest izomorficzny ze swoim odwrotnym. Co więcej, Halmos i von Neumann sformułowali przypuszczenie, że ten fakt rozszerza się na dowolne układy dynamiczne. Pierwszy kontrprzykład na ich hipotezę został podany przez Anzaja w [3]. Był to tzw. produkt skośny Anzaja. Ów przykład dał początek badaniom układów dynamicznych ze względu na ich relację z układami odwrotnymi. Jak pokazano w [9] (dla automorfizmów) oraz w [8] (dla potoków), własność bycia nieizomorficznym ze swoim układem odwrotnym jest typowa (tj. zbiór układów posiadających tą własność zawiera podzbiór G_δ -gęsty) w przestrzeni wszystkich automorfizmów zachowujących miarę oraz w przestrzeni wszystkich potoków zachowujących miarę (obie przestrzenie posiadają naturalne topologie, z którymi stanowią przestrzenie polskie; w przypadku przestrzeni potoków topologia ta jest przedstawiona w podrozdziale 2.3). W powyższych pracach jest de facto pokazana silniejsza własność niż brak izomorfizmu, mianowicie, że zbiór słabo mieszających automorfizmów i potoków zachowujących miarę, które są rozłączne w sensie Furstenberga ze swoimi odpowiednio automorfizmami i potokami odwrotnymi, stanowi podzbiór G_δ -gęsty w odpowiednich przestrzeniach.

Mimo, że typowy potok jest rozłączny ze swoim odwrotnym, to pytanie o odwracalność pozostaje dalece nietrywialne, gdy zadaje je się w kontekście konkretnych klas układów dynamicznych. Warto zaznaczyć, że dla wielu takich klas, wszystkie potoki są izomorficzne ze swoimi odwrotnymi. Wspomnieliśmy już o potokach z dyskretnym widmem. Dodatkowo wszystkie potoki gaussowskie oraz potoki Bernoulli'ego są izomorficzne ze swoimi potokami odwrotnymi. W pierwszym przypadku izomorfizm uzyskiwany jest poprzez odpowiedniość rozkładów spektralnych, natomiast w drugim dzięki twierdzeniu Ornsteina o izomorfizmie dla potoków Bernoulli'ego. Także niektóre potoki horocykli na $\Gamma \backslash PSL_2(\mathbb{R})$ są izomorficzne ze swoimi odwrotnymi. Ścisłej mówiąc, ma to miejsce, dokładnie wtedy gdy krata Γ jest niezmiennicza ze względu na sprzężenie macierzą $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Izomorficzny ze swoim

odwrotnym jest również potok geodezyjny na dowolnej zwartej rozmaitości Riemanna. Przestrzenią konfiguracji jest w tym przypadku jednostkowa wiązka styczna, a izomorfizm potoku geodezyjnego ze swoim odwrotnym zadany jest przez odwzorowanie $(x, v) \mapsto (x, -v)$. Dokładniejszy zarys historyczny problemu istnienia izomorfizmu potoku z potokiem odwrotnym w konkretnych klasach potoków przedstawiony jest w pracy [12].

Głównym celem tej rozprawy jest zrozumienie problemu istnienia izomorfizmu potoku z potokiem odwrotnym w klasie potoków translacyjnych na zwartych powierzchniach translacyjnych. Niech M będzie zwartą spójną orientowalną powierzchnią topologiczną oraz niech $\Sigma \subset M$ będzie skończonym podzbiorem punktów osobliwych. Na M rozpatruje się tzw. *strukturę translacyjną* ζ , tzn. atlas na $M \setminus \Sigma$ taki, że każde odwzorowanie przejścia pomiędzy układami współrzędnych jest translacją. Parę (M, ζ) nazywamy powierzchnią translacyjną. Przestrzeń wszystkich struktur translacyjnych na ustalonej powierzchni M , modulo pewna naturalna relacja równoważności struktur, stanowi tzw. *przestrzeń moduli* $\mathcal{M}(M)$ (patrz podrozdział 2.5). Każdej strukturze translacyjnej ζ przyporządkowana jest miara Lebesgue'a λ_ζ na M . Co więcej, dla dowolnego kierunku rozważa się potok kierunkowy z prędkością jednostkową, który zachowuje miarę λ_ζ . Każdy taki potok można rozpatrywać jako potok pionowy na obróconej powierzchni translacyjnej. W istocie, wystarczy wszystkie mapy atlasu translacyjnego złożyć z odpowiednim obrotem. Warto zaznaczyć, że badanie potoków translacyjnych jest w dużej mierze inspirowane problemami dla bilardów na wielokątach o wymiernych kątach (patrz [10, 18, 35]).

Na przestrzeni moduli $\mathcal{M}(M)$ istnieje naturalna topologia, patrz podrozdział 2.5. Możemy zadać zatem pytanie, jak duży w topologicznym sensie jest zbiór powierzchni translacyjnych, dla których pionowy potok translacyjny jest izomorficzny ze swoim odwrotnym.

Powyżej przedstawiony problem będziemy rozpatrywać osobno na każdej składowej spójności przestrzeni moduli $\mathcal{M}(M)$, gdyż jak się okazuje, odpowiedź zależy od wyboru składowej. Owe składowe spójności zostały precyzyjnie opisane i sklasyfikowane w pracach [30] oraz [23]. Wśród nich wyróżnia się tzw. *hipereliptyczne* składowe spójności. Każda taka składowa C jest wyposażona w uniwersalną inwolucję $\phi_C : M \rightarrow M$ taką, że dla każdej struktury $\zeta \in C$ mamy $\phi_C^* \zeta = -\zeta$. W szczególności, dla każdego $\zeta \in C$ odwzorowanie ϕ_C zadaje izomorfizm pomiędzy pionowym potokiem translacyjnym na (M, ζ) a potokiem do niego odwrotnym. Na składowych niehipereliptycznych brak uniwersalnej inwolucji powoduje zupełnie inne własności potoków translacyjnych. Dokładniej, zachodzi następujące twierdzenie będące głównym rezultatem tej rozprawy.

TWIERDZENIE 1.1. *W każdej niehipereliptycznej składowej spójności przestrzeni moduli, zbiór takich struktur translacyjnych, że stowarzyszony pionowy potok translacyjny nie jest izomorficzny ze swoim potokiem odwrotnym jest zbiorem typowym, tj. zawiera gęsty podzbiór typu G_δ .*

Co więcej, zachodzi silniejsze twierdzenie, w którym warunek braku izomorfizmu zastąpiony jest rozłącznością (patrz twierdzenie 9.6). Twierdzenie 1.1 implikuje, że na niehipereliptycznych składowych spójności przestrzeni moduli $\mathcal{M}(M)$, zbiór tych struktur translacyjnych, dla których stowarzyszony potok pionowy translacyjny jest izomorficzny ze swoim potokiem odwrotnym, jest zbiorem pierwszej kategorii. Okazuje się jednak, że zachodzi także komplementarny rezultat stanowiący o nietrywialności tego zbioru.

TWIERDZENIE 1.2. *W każdej niehipereliptycznej składowej spójności przestrzeni moduli, zbiór tych struktur translacyjnych dla których pionowy potok translacyjny jest izomorficzny ze swoim potokiem odwrotnym jest podzbiorem gęstym.*

W celu udowodnienia twierdzenia 1.1 potraktujemy warunki G_δ i gęstości osobno. Wykazanie warunku G_δ w przypadku badania braku izomorfizmu potoku z potokiem odwrotnym jest zadaniem bardzo trudnym i karkołomnym. Zaskakująco, zadanie to upraszcza się, gdy zastąpimy brak izomorfizmu warunkiem silniejszym, tzn. rozłącznością w sensie Furstenberga. Takie postępowanie rzeczywiście przynosi wymierne rezultaty. Udowodnimy, że zbiór tych struktur translacyjnych, dla których stowarzyszony potok pionowy jest słabo mieszający i rozłączny ze swoim potokiem odwrotnym jest typu G_δ w każdej składowej spójności przestrzeni moduli $\mathcal{M}(M)$. Jedną ze składowych dowodu tego faktu jest wspomniane już twierdzenie Danilenki i Rzyżkowa w [8]. Natomiast drugim elementem dowodu warunku G_δ jest twierdzenie 8.4 mówiące o tym, że każdą składową spójności przestrzeni moduli $\mathcal{M}(M)$ można lokalnie włożyć w przestrzeń metryczną potoków zachowujących miarę. Warto zaznaczyć, że owo włożenie ma tę własność, że obraz każdej struktury translacyjnej ζ poprzez to włożenie jest potokiem izomorficznym z potokiem pionowym na (M, ζ) . Dowód omawianego twierdzenia o istnieniu włożenia stanowi jeden z ważniejszych i trudniejszych elementów dowodu głównego twierdzenia, a zarazem tej rozprawy.

Aby wykazać warunek gęstości w twierdzeniu 1.1 wykorzystuje się tzw. reprezentacje specjalne potoków. Okazuje się, że pionowe potoki translacyjne na powierzchniach mają reprezentacje specjalne nad przekładaniami odcinków pod kawałkami stałymi funkcjami dachowymi. Dla takich potoków, ale nad obrotami (czyli przekładaniami dwóch odcinków), w pracy [12] przedstawiono metody, które dają możliwość dowodzenia braku izomorfizmu potoku specjalnego z potokiem odwrotnym. Wspomniane metody bazują na teorii 3-połączeń, a dokładniej, na badaniu granic 3-połączeń wykresowych. W rozprawie udoskonalono te metody w dwojaki sposób. Po pierwsze pokazano, że badając granice 3-połączeń wykresowych, można osądzać nie tylko o braku izomorfizmu, ale i o rozłączności potoków. Po drugie pokazano, że metody te można stosować do potoków specjalnych nad automorfizmami częściowo sztywnymi. Między innymi takimi automorfizmami są przekładania odcinków. W rozprawie udowodniono twierdzenie 4.5 bazujące na wspomnianych wyżej metodach, które jest efektywnym kryterium dającym możliwość wykazywania rozłączności potoków specjalnych. Ponadto okazuje się, że zbiór struktur translacyjnych, dla których reprezentacja specjalna pionowego potoku posiada pewną szczególną postać, do której jesteśmy w stanie zastosować twierdzenie 4.5 jest gęsty w niehipereliptycznych składowych spójności przestrzeni moduli $\mathcal{M}(M)$. W ten sposób uzyskano gęstość struktur translacyjnych, dla których pionowy potok jest rozłączny ze swoim odwrotnym. Warto także dodać, że również korzystając z narzędzia jakim są granice 3-połączeń wykresowych, wykazano słabe mieszane tychże potoków. Stąd wynika, że w każdej niehipereliptycznej składowej spójności przestrzeni moduli $\mathcal{M}(M)$ zbiór struktur translacyjnych, dla których pionowy potok translacyjny jest słabo mieszający i rozłączny ze swoim odwrotnym, stanowi zbiór gęsty, a jak wspomnieliśmy wcześniej, także zbiór typu G_δ . To implikuje twierdzenie 1.1.

Teraz przedstawimy zawartość poszczególnych rozdziałów.

Rozdział 2 stanowi wprowadzenie podstawowych pojęć używanych w rozprawie. Dzieli się na sześć podrozdziałów. Pierwszy przybliża pojęcie połączenia układów dynamicznych. Przedstawione są tam główne własności zbioru wszystkich połączeń,

jak i interpretacja operatorowa połączenia układów dynamicznych. W drugim podrozdziale zaprezentowano definicję potoku specjalnego i reprezentacji specjalnej. W trzecim podrozdziale przybliżono pojęcie przestrzeni potoków zachowujących miarę. Szczególny nacisk położony jest na topologię tej przestrzeni oraz na sformułowanie warunku umożliwiającego sprawdzenie ciągłości funkcji działającej do tejże przestrzeni. W czwartym podrozdziale sformułowane są definicje przekładania odcinków oraz podstawowych obiektów z tymże przekładaniem stowarzyszonych. Piąty podrozdział poświęcony jest powierzchniom translacyjnym i przestrzeni moduli. Przedstawiono tam definicje powyższych pojęć a także wprowadzono potoki translacyjne na powierzchniach. Zaprezentowano także podstawowe własności struktur translacyjnych a także topologię na przestrzeni moduli. Ponadto przedstawiono w tym rozdziale reprezentacje wielokątne i poprzez spinane prostokąty dla powierzchni translacyjnych. Omówiono również, w jaki sposób z każdą składową spójności przestrzeni moduli $\mathcal{M}(M)$ stowarzysza się pewną klasę permutacji, zwaną rozszerzonym grafem Rauzy'ego. Ostatni podrozdział poświęcony jest indukcji Rauzy'ego-Veecha - zarówno jednowymiarowej, jak i wielokątnej. Oprócz definicji przedstawiono także konstrukcję miary niezmienniczej dla tejże indukcji oraz zaprezentowano wiele klasycznych rezultatów dotyczących tego pojęcia.

Rozdział 3 poświęcony jest badaniu granic 3-połączeń wykresowych potoków specjalnych. Najważniejszym rezultatem tego rozdziału jest twierdzenie 3.9, które daje możliwość badania postaci granic 3-połączeń wykresowych. Wyniki zaprezentowane w tym rozdziale zostały opublikowane w pracy [5]. Jednakże warto zaznaczyć, że inspiracją tych rezultatów były metody rozwinięte w [12].

W rozdziale 4 zbadano konsekwencje jakie niosą pewne postaci połączeń granicznych (połączenia całkowite) uzyskanych w poprzednim rozdziale. Najważniejszym rezultatem jest tutaj twierdzenie 4.5, będące kryterium orzekającym kiedy potok specjalny jest rozłączny ze swoim odwrotnym. Kluczowym warunkiem jest asymetria połączenia granicznego, a dokładniej pewnej miary na \mathbb{R} stowarzyszonej z tym połączeniem. Warto podkreślić również wagę lematu 4.7 orzekającego jak wnioskować słabe mieszanie potoku z postaci jego połączenia granicznego. Twierdzenie 4.5 jest uogólnieniem podobnego kryterium znajdującego się w pracy [5], które orzekało w analogicznej sytuacji jedynie o braku izomorfizmu potoku z jego potokiem odwrotnym. Kryterium w nowej wersji pojawia się jednak w pracy [6].

Rozdział 5 jest w całości poświęcony permutacjom. Konkretniej, w twierdzeniu 5.1 dla każdego grafu Rauzy'ego stowarzyszonego z niehipereliptyczną składową spójności udowodniono istnienie permutacji spełniającej pewien specjalny warunek. Jest to ważny warunek, który pozwala w rozdziale 3 wygenerować asymetrię (niezbędną do zastosowania twierdzenia 4.5) w reprezentacjach specjalnych potoków pionowych dla struktur translacyjnych należących do niehipereliptycznych składowych spójności.

W rozdziale 6 zaprezentowano kilka rezultatów dotyczących rozłączności potoku za swoim odwrotnym, które opierają się na kryterium 4.5 zastosowanym do potoków specjalnych nad przekładaniami odcinków pod różnego rodzaju funkcjami dachowymi. Najważniejszym z punktu widzenia dowodu głównego twierdzenia 1.1 jest twierdzenie 6.7 dotyczące rozłączności potoków specjalnych pod funkcjami kawałkami stałymi z ich potokami odwrotnymi, gdyż, jak wspomnieliśmy wcześniej, tego typu potoki są reprezentacjami specjalnymi pionowych potoków translacyjnych

na powierzchniach. W twierdzeniu 6.7 asymetrię w połączeniu granicznym uzyskuje się dzięki dodatkowym punktom nieciągłości funkcji dachowej, w których skoki mają niesymetryczne wartości. Podano także rezultat dotyczący potoków specjalnych pod funkcjami kawałkami absolutnie ciągłymi o niezerowej sumie skoków, patrz twierdzenie 6.1. W tym przypadku asymetria połączenia granicznego jest spowodowana asymetrią funkcji dachowej wynikającą z założenia o niezerowej sumie skoków.

Wszystkie wyniki zaprezentowane w tym rozdziale są wzmocnieniem rezultatów przedstawionych w pracy [5], które w podobnej wersji orzekały jedynie o braku izomorfizmu, a nie o rozłączności rozważanych potoków. W stosunku do wyników ze wspomnianej pracy, opisane w rozprawie rezultaty działają dla większej klasy funkcji dachowych potoków specjalnych.

Rozdziały 7 i 8 poświęcone są konstrukcji lokalnego ciągłego włożenia dowolnej składowej spójności C przestrzeni moduli $\mathcal{M}(M)$ w przestrzeń potoków zachowujących miarę. Owa konstrukcja przedstawiona jest w kilku krokach. Najpierw w rozdziale 7 zaprezentowano jak dla ustalonej powierzchni translacyjnej (M, ζ) oraz dowolnej miary z gęstością $\mu = f d\lambda_\zeta$, gdzie λ_ζ oznacza miarę Lebesgue'a na (M, ζ) , skonstruować homeomorfizm \mathcal{H}_f zależny w sposób ciągły od f taki, że $(\mathcal{H}_f)_*\mu = \lambda_\zeta$. Następnie w rozdziale 8 podano konstrukcję samego włożenia. Największą przeszkodą w tejże konstrukcji jest fakt, że dla różnych struktur translacyjnych ζ_1 i ζ_2 należących do C , stowarzyszone miary Lebesgue'a λ_{ζ_1} i λ_{ζ_2} mogą być różne. Pierwszym krokiem w konstrukcji jest wskazanie otwartego otoczenia $\zeta \in U_\zeta \subset C$ takiego, że dla każdego $\omega \in U_\zeta$, powierzchnia (M, ω) jest przekształcana poprzez kawałkami afiniczny homeomorfizm, zależny w sposób ciągły od $\omega \in U_\zeta$, w (M, ζ) . Obrazem miary λ_ω poprzez to odwzorowanie jest miara z gęstością $f_\omega d\lambda_\zeta$. Następnie korzystając z wyników poprzedniego rozdziału, otrzymuje się kolejny homeomorfizm na (M, ζ) , również zależny w sposób ciągły od $\omega \in U_\zeta$, który przekształca miarę $f_\omega d\lambda_\zeta$ w miarę λ_ζ . Na koniec pokazano, że potok będący obrazem pionowego potoku na (M, ω) poprzez złożenie dwóch wymienionych homeomorfizmów zależy w sposób ciągły od $\omega \in U_\zeta$. Otrzymuje się tym samym ostateczny rezultat rozdziałów 7 oraz 8 jakim jest twierdzenie 8.4. Na zakończenie rozdziału lemat 8.5 pokazuje, że lokalność skonstruowanego włożenia wystarcza, aby przetransportować warunek G_δ z przestrzeni potoków zachowujących miarę na dowolną składową C .

Rozdział 9 poświęcono dowodom głównych rezultatów. Sformułowano w nim twierdzenie 9.6, które mówi o tym, że w dowolnej niehipereliptycznej składowej spójności C przestrzeni moduli $\mathcal{M}(M)$, zbiór struktur translacyjnych dla których potok pionowy jest słabo mieszający i rozłączny ze swoim odwrotnym, stanowi zbiór gęsty typu G_δ . Bezpośrednią konsekwencją tego rezultatu jest twierdzenie 1.1. Najpierw korzystając z twierdzenia Danilenki i Rzyżkowa 9.1, lematu 8.5 oraz twierdzenia 8.4 wnioskuje się, że warunek G_δ w twierdzeniu 9.6 jest spełniony dla każdej składowej spójności przestrzeni moduli $\mathcal{M}(M)$, nie tylko hipereliptycznej. Następnie udowodniono twierdzenie 1.2, które korzysta w dużej mierze z lematu 2.40. Lemat 2.40 mówi, że w ustalonej składowej spójności dla gęstego zbioru struktur translacyjnych istnieje reprezentacja wielokątna, której wiele krawędzi jest równoległych do kierunku potoku. To powoduje uproszczenie reprezentacji specjalnej potoku, a w przypadku niehipereliptycznych składowych spójności daje możliwość wygenerowania dodatkowych punktów nieciągłości funkcji dachowej. Istnienie takich dodatkowych punktów nieciągłości umożliwia zastosowanie twierdzenia 6.7. W ten sposób wykazuje się gęstość zbioru struktur translacyjnych, dla których odpowiadający pionowy potok jest

słabo mieszający i rozłączny z odwrotnym. To kończy dowód twierdzenia 9.6, gdyż warunek G_δ został już wykazany wcześniej w tym rozdziale.

Tak jak wspomnieliśmy wcześniej, większość wyników zawartych w rozprawie została spisana w pracach [5] oraz [6].

Autor rozprawy dziękuje swojemu promotorowi prof. dr. hab. Krzysztofowi Frączkowi za długoletnią współpracę oraz za ogromny wysiłek włożony w edukację jego osoby. Autor dziękuje także prof. dr. hab. Mariuszowi Lemańczykowi oraz prof. Thierremu de la Rue za współpracę oraz cenne konsultacje, zwłaszcza w zakresie teorii połączeń. Ponadto autor chciałby podziękować wszystkim osobom, które wsparły go w jego drodze do napisania tej rozprawy. Współpraca międzynarodowa i wyjazdy na konferencje, które przysłużyły się uzyskaniu wyników rozprawy, zostały dofinansowane z grantu OPUS 7 Narodowego Centrum Nauki o numerze 2014/13/B/ST1/03153, kierowanego przez prof. dr. hab. Y. Tomilova.

ROZDZIAŁ 2

Wiadomości wstępne

W tym rozdziale przedstawimy podstawowe informacje dotyczące pojęć matematycznych, których będziemy używać, tj. połączeń, przestrzeni potoków, przekładających odcinków, powierzchni translacyjnych oraz przestrzeni moduli.

2.1. Połączenia

Niech (X, \mathcal{B}, μ) będzie standardową przestrzenią borelowską z miarą skończoną. Rodzinę automorfizmów $\{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ na (X, \mathcal{B}, μ) nazywamy potokiem zachowującym miarę μ jeżeli

- (1) odwzorowanie $X \times \mathbb{R} \ni (x, t) \mapsto T_t(x)$ jest mierzalne;
- (2) $T_0(x) = x$ dla μ -prawie każdego $x \in X$;
- (3) $T_{t+s}(x) = T_t \circ T_s(x)$ dla każdego $t, s \in \mathbb{R}$ oraz dla μ -prawie każdego $x \in X$;
- (4) $\mu(T_t A) = \mu(A)$ dla każdego $A \in \mathcal{B}$ oraz $t \in \mathbb{R}$.

Warto zaznaczyć, że w tej rozprawie większość równości należy rozumieć jako równości „prawie wszędzie”. Będziemy również rozważać układy dynamiczne postaci (X, \mathcal{B}, μ, T) , gdzie $T : X \rightarrow X$ jest mierzalnym automorfizmem zachowującym miarę μ , tzn. istnieje zbiór $X_0 \subseteq X$ taki, że $T : X_0 \rightarrow X_0$ jest bijekcją oraz $\mu(X_0^c) = 0$. Warto zaznaczyć, że w przypadku takich układów dynamicznych będziemy również rozważać przypadek, gdy μ jest miarą nieskończoną. Przez *ergodyczność* rozumiemy, że dla $A \in \mathcal{B}$ warunek $T^{-1}(A) = A$ implikuje, że $\mu(A) = 0$ lub $\mu(A^c) = 0$. Natomiast (X, \mathcal{B}, μ, T) nazywamy układem *powracającym*, gdy dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{B}$ dodatniej miary i dla μ -prawie każdego elementu $x \in A$, zachodzi $T^n(x) \in A$ dla nieskończenie wielu liczb $n \geq 0$ (jest to warunek równoważny tzw. *konserwatywności* układu, patrz Theorem 1.1.1 w [1]). Warto zaznaczyć, że ze względu na lemat Poincarégo o powracaniu, każdy automorfizm zachowujący miarę skończoną jest powracający.

LEMAT 2.1 (Proposition 1.2.2 w [1]). *Jeśli (X, \mathcal{B}, μ, T) jest układem ergodycznym i powracającym, to dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{B}$ dodatniej miary μ i dla μ -prawie każdego $x \in X$ mamy $T^n(x) \in A$ dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$.*

Z potokiem $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ na (X, \mathcal{B}, μ) możemy stowarzyszyć rodzinę *operatorów Koopmana* tj. operatorów $\mathcal{U}_t^{\mathcal{T}} : L^2(X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ danych wzorem $\mathcal{U}_t^{\mathcal{T}}(f) = f \circ T_{-t}$ dla $t \in \mathbb{R}$. Warto zaznaczyć, że odwzorowanie $t \mapsto \mathcal{U}_t^{\mathcal{T}}$ jest ciągłą reprezentacją unitarną. Jeśli nie będzie to doprowadzało do nieporozumień, będziemy używać oznaczenia T_{-t} zamiast $\mathcal{U}_t^{\mathcal{T}}$.

Niech (Y, \mathcal{C}, ν) również będzie standardową przestrzenią borelowską z miarą skończoną. Powiemy, że miara skończona ν na Y jest *obrazem miary μ na X* poprzez odwzorowanie mierzalne $F : (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (Y, \mathcal{C}, \nu)$ jeżeli dla każdego $C \in \mathcal{C}$ zachodzi $\nu(C) = \mu(F^{-1}C)$. Miarę ν oznaczamy wtedy przez $F_*\mu$. Mówimy, że dwa potoki zachowujące skończone miary $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ na (X, \mathcal{B}, μ) oraz $\mathcal{S} = \{S_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ na (Y, \mathcal{C}, ν)

są *izomorficzne*, jeżeli istnieje mierzalna bijekcja $F : (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (Y, \mathcal{C}, \nu)$ taka, że

$$T_t = F^{-1} \circ S_t \circ F \text{ dla } t \in \mathbb{R} \quad \text{oraz} \quad F_*\mu = \frac{\mu(X)}{\nu(Y)}\nu.$$

Pojęcia, które teraz zostaną omówione, zdefiniowane są dla probabilistycznych standardowych przestrzeni borelowskich. Warto jednak zaznaczyć, że mogą być one zdefiniowane również dla dowolnych standardowych przestrzeni borelowskich z miarą skończoną, poprzez odpowiednie przeskalowania i w dalszej części pracy będziemy się również posługiwać ich wersjami dla miar skończonych, jeżeli znajdzie taka potrzeba.

Niech $K > 0$ będzie liczbą naturalną. Dla dowolnego $1 \leq i \leq K$ rozważmy potok $\mathcal{T}^i = \{T_t^i\}_{t \in \mathbb{R}}$ zachowujący miarę na probabilistycznej standardowej przestrzeni borelowskiej $(X^i, \mathcal{B}^i, \mu^i)$. Mówimy, że miara λ na $(X^1 \times \dots \times X^K, \mathcal{B}^1 \otimes \dots \otimes \mathcal{B}^K)$ jest *K-połączeniem potoków* jeżeli jest $\mathcal{T}^1 \times \dots \times \mathcal{T}^K$ -niezmiennicza oraz rzutuje się na X^i jako μ^i dla każdego $i = 1, \dots, K$, tj.

$$\lambda(X^1 \times \dots \times X^{i-1} \times A \times X^{i+1} \times \dots \times X^K) = \mu^i(A) \text{ dla dowolnego } A \in \mathcal{B}^i.$$

Oznaczamy przez $J(\mathcal{T}^1, \dots, \mathcal{T}^K)$ zbiór wszystkich połączeń pomiędzy potokami \mathcal{T}^i dla $i = 1, \dots, K$ a przez $J^e(\mathcal{T}^1, \dots, \mathcal{T}^K)$ podzbiór połączeń ergodycznych. Jeżeli $(X^i, \mathcal{B}^i, \mu^i, \mathcal{T}^i)$ dla $i = 1, \dots, K$ są kopiami tego samego potoku, to powiemy, że λ jest *K-samopowiązaniem*. Oznaczamy zbiór *K-samopowiązania* potoku \mathcal{T} przez $J_K(\mathcal{T})$, natomiast zbiór ergodycznych *K-samopowiązania* przez $J_K^e(\mathcal{T})$.

Dla każdego $i = 1, \dots, K$ niech $\{A_n^i\} \in \mathcal{B}_i$ będzie ciągiem gęstym względem pseudometryki $d_{\mu^i}(A, B) = \mu^i(A \Delta B)$. Wtedy na $J(\mathcal{T}^1, \dots, \mathcal{T}^K)$ definiujemy metrykę ρ daną wzorem

$$\rho(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{n_1, \dots, n_K} \frac{1}{2^{n_1 + \dots + n_K}} |\lambda_1(A_{n_1}^1 \times \dots \times A_{n_K}^K) - \lambda_2(A_{n_1}^1 \times \dots \times A_{n_K}^K)|.$$

Wówczas ciąg elementów $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset J(\mathcal{T}^1, \dots, \mathcal{T}^K)$ jest zbieżny do połączenia $\lambda \in J(\mathcal{T}^1, \dots, \mathcal{T}^K)$ względem metryki ρ , jeżeli dla dowolnych $A^i \in \mathcal{B}^i$, gdzie $i = 1, \dots, K$, zachodzi

$$\lambda_n(A^1 \times \dots \times A^K) \rightarrow \lambda(A^1 \times \dots \times A^K).$$

UWAGA 2.2. Załóżmy, że dla każdego $i = 1, \dots, K$ przestrzeń X^i jest wyposażona w metrykę taką, że \mathcal{B}_i jest σ -algebrą zbiorów borelowskich dla tej metryki. Wówczas zbieżność w $J(\mathcal{T}^1, \dots, \mathcal{T}^K)$ pokrywa się ze słabą zbieżnością miar na $X^1 \times \dots \times X^K$.

Jeżeli $\mathcal{T}^1, \dots, \mathcal{T}^K$ są potokami ergodycznymi, to zachodzą poniższe fakty.

LEMAT 2.3. *Zbiór $J(\mathcal{T}^1, \dots, \mathcal{T}^K)$ jest zwartym sympleksem a zbiór punktów ekstremalnych $\text{ext}(J(\mathcal{T}^1, \dots, \mathcal{T}^K))$ jest równy $J^e(\mathcal{T}^1, \dots, \mathcal{T}^K)$.*

LEMAT 2.4 (Rozkład na składowe ergodyczne). *Dla każdego połączenia $\lambda \in J(\mathcal{T}^1, \dots, \mathcal{T}^K)$ istnieje dokładnie jedna miara probabilistyczna κ na $J^e(\mathcal{T}^1, \dots, \mathcal{T}^K)$ taka, że*

$$\lambda = \int_{J^e(\mathcal{T}^1, \dots, \mathcal{T}^K)} \rho d\kappa(\rho).$$

Załóżmy, że $K = 2$. Wówczas miara produktowa $\mu^1 \otimes \mu^2$ zawsze należy do $J(\mathcal{T}^1, \mathcal{T}^2)$.

DEFINICJA 1. Mówimy, że potoki \mathcal{T}^1 i \mathcal{T}^2 są *rozłączne w sensie Furstenberga* jeżeli miara produktowa jest jedynym elementem $J(\mathcal{T}^1, \mathcal{T}^2)$. W dalszej części rozprawy będziemy pisać po prostu „rozłączne”.

W dowodach będziemy używać równoważnej definicji danej przez następujący fakt.

UWAGA 2.5. Rozłączność potoków \mathcal{T}^1 i \mathcal{T}^2 jest równoważna z tym, że $\mu^1 \otimes \mu^2$ jest jedynym elementem $J^e(\mathcal{T}^1, \mathcal{T}^2)$.

UWAGA 2.6. Jeżeli dwa potoki są rozłączne, to nie posiadają wspólnych czynników. W szczególności, są nieizomorficzne.

Pojęcia połączeń i rozłączności można w analogiczny sposób zdefiniować dla automorfizmów zachowujących miarę zamiast dla potoków. Mamy wtedy następujący rezultat.

LEMAT 2.7. *Jeżeli (T, X, \mathcal{B}, μ) jest automorfizmem ergodycznym oraz $(Id, Y, \mathcal{C}, \nu)$ jest identycznością, to T i Id są rozłączne.*

Niech $\phi : (X^1, \mathcal{B}^1, \mu^1, \mathcal{T}^1) \rightarrow (X^2, \mathcal{B}^2, \mu^2, \mathcal{T}^2)$ będzie izomorfizmem. Wtedy $\mu_\phi^1 := (Id \times \phi)_* \mu^1$ jest połączeniem potoków \mathcal{T}^1 i \mathcal{T}^2 . Mówimy, że μ_ϕ^1 jest *połączeniem wykresowym*. Warto zaznaczyć, że jeżeli \mathcal{T}^1 jest potokiem ergodycznym, to μ_ϕ^1 jest miarą ergodyczną dla $\mathcal{T}^1 \times \mathcal{T}^2$. Poniższa charakteryzacja potoków standardową obserwacją, jednakże podamy jej dowód.

LEMAT 2.8. *Niech $\lambda \in J(\mathcal{T}^1, \mathcal{T}^2)$ oraz niech $\Pi \subseteq \mathcal{B}^1$ będzie rodziną zbiorów mierzalnych. Niech $\phi : (X^1, \mathcal{B}^1, \mu^1, \mathcal{T}^1) \rightarrow (X^2, \mathcal{B}^2, \mu^2, \mathcal{T}^2)$ będzie izomorfizmem. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

- (1) $\lambda(A \times B) = \mu^1(A \cap \phi^{-1}(B))$ dla wszystkich $A \in \Pi$ oraz $B \in \phi(\Pi)$;
- (2) $\lambda(A \times X^2 \triangle X^1 \times \phi A) = 0$ dla każdego $A \in \Pi$;
- (3) $\lambda(A \times \phi A^c) = \lambda(A^c \times \phi A) = 0$ dla każdego $A \in \Pi$.

DOWÓD. Wykażemy najpierw, że z warunku (1) wynika warunek (3). Niech $A \in \Pi$. Wtedy podstawiając $B = \phi(A)$ w (1) otrzymujemy

$$\lambda(A \times \phi A) = \mu^1(A \cap A) = \mu^1(A) = \mu^2(\phi A).$$

Stąd

$$\lambda(A \times \phi A^c) = \lambda(A \times X^2) - \lambda(A \times \phi A) = \mu^1(A) - \lambda(A \times \phi A) = 0$$

oraz

$$\lambda(A^c \times \phi A) = \lambda(X^1 \times \phi A) - \lambda(A \times \phi A) = \mu^2(\phi A) - \lambda(A \times \phi A) = 0,$$

co kończy dowód implikacji. Zauważmy ponadto, że

$$\lambda(A \times X^2 \triangle X^1 \times \phi A) = \lambda(A \times \phi A^c) + \lambda(A^c \times \phi A),$$

co dowodzi równoważności pomiędzy warunkami (2) i (3).

Aby dokończyć dowód lematu, musimy pokazać, że warunek (3) implikuje warunek (1). Zauważmy, że

$$\lambda(A \times B) = \lambda((A \cap \phi^{-1}(B)) \times B) + \lambda((A \cap \phi^{-1}(B^c)) \times B).$$

Korzystając z punktu (3) dla $\phi^{-1}(B)$ uzyskujemy

$$\lambda((A \cap \phi^{-1}(B^c)) \times B) \leq \lambda(\phi^{-1}(B^c) \times B) = 0,$$

oraz

$$\lambda((A \cap \phi^{-1}(B)) \times B^c) \leq \lambda(\phi^{-1}(B) \times B^c) = 0.$$

Zatem

$$\begin{aligned}\lambda(A \times B) &= \lambda((A \cap \phi^{-1}(B)) \times B) + \lambda((A \cap \phi^{-1}(B^c)) \times B) = \lambda((A \cap \phi^{-1}(B)) \times B) \\ &= \lambda((A \cap \phi^{-1}(B)) \times X^2) - \lambda((A \cap \phi^{-1}(B)) \times B^c) \\ &= \lambda((A \cap \phi^{-1}(B)) \times X^2) = \mu^1(A \cap \phi^{-1}(B)),\end{aligned}$$

co kończy dowód. \square

Rozważmy połączenia wykresowe pomiędzy dwiema kopiami tego samego potoku $(X, \mathcal{B}, \mu, \mathcal{T})$. W rozprawie, będziemy głównie rozważać połączenia dane przez $\phi = T_{-t}$ dla pewnego $t \in \mathbb{R}$ i będziemy je oznaczać przez μ_t . Innymi słowy, dla $A, B \in \mathcal{B}$ mamy

$$\mu_t(A \times B) = \mu(A \cap T_t B) = \mu(T_{-t} A \cap B).$$

Tę definicję można łatwo rozszerzyć do połączeń wyżej wymiarowych, tj. $\mu_{t_1, \dots, t_{K-1}}$ jest K -połączeniem wyznaczonym wzorem

$$\mu_{t_1, \dots, t_{K-1}}(A_1 \times \dots \times A_K) = \mu(T_{-t_1} A_1 \cap \dots \cap T_{-t_{K-1}} A_{K-1} \cap A_K),$$

dla wszystkich $A_1, \dots, A_K \in \mathcal{B}$. Warto zaznaczyć, że odwzorowanie $(t_1, \dots, t_{K-1}) \mapsto \mu_{t_1, \dots, t_{K-1}}$ jest odwzorowaniem ciągłym. W szczególności, jeżeli \mathcal{T} jest potokiem słabo mieszającym, to powyższe odwzorowanie jest różnowartościowe, co razem z twierdzeniem Suslina implikuje, że zbiór $\{\mu_{t_1, \dots, t_{K-1}}; t_1, \dots, t_{K-1} \in \mathbb{R}\}$ jest mierzalny w $J_K(\mathcal{T})$.

Niech $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{K-1})$ oznacza zbiór borelowskich miar probabilistycznych na \mathbb{R}^{K-1} . Dla każdego $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{K-1})$ rozważamy K -połączenie całkowite wyznaczone przez

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{K-1}} \mu_{t_1, \dots, t_{K-1}} dP(t_1, \dots, t_{K-1})(A_1 \times \dots \times A_K) \\ := \int_{\mathbb{R}^{K-1}} \mu_{t_1, \dots, t_{K-1}}(A_1 \times \dots \times A_K) dP(t_1, \dots, t_{K-1}),\end{aligned}$$

gdzie $A_1, \dots, A_K \in \mathcal{B}$.

Przypomnijmy, że operator $\Phi : L^2(X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ nazywamy *operatorem Markowa* jeżeli jest on liniową kontrakcją (tzn. $\|\Phi f\|_2 \leq \|f\|_2$ dla każdej funkcji $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$) oraz

- (1) dla każdej nieujemnej funkcji $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$, funkcja $\Phi(f)$ również jest funkcją nieujemną;
- (2) jeżeli $\mathbf{1}_X$ funkcję stałą równą 1 X , to $\Phi(\mathbf{1}_X) = \mathbf{1}_X = \Phi^*(\mathbf{1}_X)$.

Z każdym 2-samopłączeniem $\lambda \in J_2(\mathcal{T})$, możemy stowarzyszyć operator Markowa $\Psi(\lambda) : L^2(X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ taki, że

$$(2.1) \quad \lambda(A \times B) = \int_X \Psi(\lambda)(\chi_A) \chi_B d\mu.$$

Wtedy $\Psi(\lambda) \circ \mathcal{U}_t^T = \mathcal{U}_t^T \circ \Psi(\lambda)$, gdzie $\{\mathcal{U}_t^T\}_{t \in \mathbb{R}}$ jest rodziną operatorów Koopmana stowarzyszoną z \mathcal{T} .

PRZYKŁAD 1. Jeżeli $\lambda = \mu \otimes \mu$, to $\Psi(\lambda)(f) = \int_X f d\mu$. Jeżeli natomiast $\lambda = \phi_* \mu$ dla pewnego izomorfizmu $\phi : (X, \mu) \rightarrow (X, \mu)$, to $\Psi(\lambda)(f) = f \circ \phi^{-1}$.

Oznaczmy przez $\mathcal{J}(\mathcal{T})$ zbiór wszystkich operatorów Markowa, które komutują z operatorami Koopmana stowarzyszonym z \mathcal{T} , tj. operator Φ należy do $\mathcal{J}(\mathcal{T})$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $t \in \mathbb{R}$ zachodzi $\Phi \circ \mathcal{U}_t^T = \mathcal{U}_t^T \circ \Phi$. Okazuje się, że

jeżeli rozważymy *-słabą topologię operatorową na $\mathcal{J}(\mathcal{T})$, to (2.1) definiuje afiniczny homeomorfizm $\Psi : J_2(\mathcal{T}) \rightarrow \mathcal{J}(\mathcal{T})$. Więcej informacji na temat połączeń i ich związków z operatorami Markowa można znaleźć w [15].

Rozważmy afiniczne ciągle odwzorowania $\Pi_{1,3} : J_3(\mathcal{T}) \rightarrow J_2(\mathcal{T})$ dane przez

$$(2.2) \quad \Pi_{1,3}(\lambda)(A \times B) := \lambda(A \times X \times B) \text{ dla } \text{każdych } A, B \in \mathcal{B}.$$

Innymi słowy $\Pi_{1,3}(\lambda)$ jest rzutowaniem połączenia λ na pierwszą i na trzecią współrzędną. Analogicznie definiujemy przekształcenie $\Pi_{2,3}$, które jest rzutowaniem na drugą i na trzecią współrzędną. Skoro $J_2(\mathcal{T})$ i $\mathcal{J}(\mathcal{T})$ są afinicznie homeomorficzne, to możemy rozważyć afiniczne odwzorowania $\Psi \circ \Pi_{i,3} : J_3(\mathcal{T}) \rightarrow \mathcal{J}(\mathcal{T})$ dla $i = 1, 2$. O ile nie doprowadzi to do nieporozumień, będziemy pisać $\Pi_{i,3}$ zamiast $\Psi \circ \Pi_{i,3}$. Zauważmy, że dla dowolnych $t, s \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$(2.3) \quad \Pi_{1,3}(\mu_{t,s}) = T_{-t} \text{ i } \Pi_{2,3}(\mu_{t,s}) = T_{-s}.$$

Dla $i \in \{1, 2\}$ niech $\sigma_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie rzutowaniem na i -tą współrzędną. Wtedy dla każdego $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, otrzymujemy również

$$(2.4) \quad \Pi_{i,3} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \mu_{-t,-s} dP(t, s) \right) = \int_{\mathbb{R}^2} \Pi_{i,3}(\mu_{-t,-s}) dP(t, s) = \int_{\mathbb{R}} T_t d((\sigma_i)_* P)(t),$$

dla $i = 1, 2$.

2.2. Potoki specjalne.

Niech (X, \mathcal{B}, μ) będzie probabilistyczną standardową przestrzenią borelowską. Niech $T : X \rightarrow X$ będzie μ -niezmienniczym automorfizmem. Niech $f \in L^1(X)$ będzie funkcją dodatnią oraz dla $n \in \mathbb{Z}$ rozważmy

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x), & \text{jeżeli } n \geq 1 \\ 0, & \text{jeżeli } n = 0 \\ -\sum_{i=n}^{-1} f(T^i x), & \text{jeżeli } n \leq -1. \end{cases}$$

Zdefiniujmy przestrzeń $X^f := ((x, r); x \in X, 0 \leq r < f(x))$. Niech $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ oznacza σ -algebrę zbiorów borelowskich na \mathbb{R} , natomiast Leb miarę Lebesgue'a na \mathbb{R} . Na X^f rozważmy σ -algebrę zbiorów mierzalnych \mathcal{B}^f będącą obcięciem σ -algebry produktowej $\mathcal{B} \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ na $X \times \mathbb{R}$. Podobnie, rozważamy także miarę μ^f będącą obcięciem miary $\mu \otimes Leb$ do X^f . *Potok specjalny* $\mathcal{T}^f = \{T_t^f\}_{t \in \mathbb{R}}$ jest to zachowujący miarę potok na X^f dany wzorem

$$T_t^f(x, r) := (T^n x, r + t - f^{(n)}(x)),$$

gdzie $n \in \mathbb{Z}$ jest jedyną liczbą naturalną taką, że spełniona jest nierówność $f^{(n)}(x) \leq r + t < f^{(n+1)}(x)$. Automorfizm T nazwiemy *podstawą* potoku specjalnego, natomiast funkcję f będziemy nazywać *funkcją dachową*. Innymi słowy, jest to potok, który przesyła punkty $(x, r) \in X^f$ w górę z prędkością jednostkową a punkty postaci $(x, f(x))$ oraz $(Tx, 0)$ dla $x \in X$ są ze sobą identyfikowane.

Potok specjalny możemy również zdefiniować inaczej. Niech $\{\sigma_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ będzie potokiem na $X \times \mathbb{R}$ danym wzorem $\sigma_t(x, r) = (x, r + t)$ dla $(x, r) \in X \times \mathbb{R}$. Podzielmy teraz przestrzeń $X \times \mathbb{R}$ przez relację równoważności, która identyfikuje punkty postaci $(T^n x, r - f^{(n)}(x))$ dla $(x, r) \in X \times \mathbb{R}$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$. Wówczas zbiór X^f jest dziedziną fundamentalną tej relacji i może być identyfikowany ze zbiorem ilorazowym. Zauważmy, że σ_t komutuje z produktem skośnym $(x, r) \mapsto (T^n x, r - f^{(n)}(x))$.

Stąd, potok wertykalny na przestrzeni ilorazowej jest identyfikowany z potokiem specjalnym \mathcal{T}^f .

UWAGA 2.9. Potok specjalny \mathcal{T}^f na $(X^f, \mathcal{B}^f, \mu^f)$ jest ergodyczny wtedy i tylko wtedy, gdy automorfizm T na (X, \mathcal{B}, μ) jest ergodyczny.

Poniższy rezultat stanowi kryterium słabego mieszania dla potoków specjalnych. Przypominjmy, że potok $\{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ jest słabo mieszający

$$h \circ T_t = e^{irt} h \text{ dla każdego } t \in \mathbb{R} \Rightarrow r = 0 \wedge h = \text{const.}$$

TWIERDZENIE 2.10 (patrz [19]). Niech \mathcal{T}^f na $(X^f, \mathcal{B}^f, \mu^f)$ będzie potokiem specjalnym nad automorfizmem ergodycznym $T : X \rightarrow X$ i pod funkcją dachową $f : X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$. Jeśli dla dowolnej liczby rzeczywistej $r \neq 0$ równanie kohomologiczne

$$e^{irf} = g/g \circ T$$

nie ma rozwiązań mierzalnych $g : X \rightarrow S^1$, to potok \mathcal{T}^f jest słabo mieszający.

Ze względu na twierdzenie o reprezentacji potoku Ambrose'a (patrz [2]), każdy potok ergodyczny jest izomorficzny z pewnym potokiem specjalnym w sensie teorii miar. Wówczas potok specjalny nazywamy *reprezentacją specjalną potoku*. W rozprawie będziemy zajmować się potokami specjalnymi nad automorfizmami na odcinku, których funkcje dachowe są kawałkami absolutnie ciągłe.

Będziemy zawsze zakładać, że funkcje dachowe są prawostronnie ciągłe oraz posiadają granice lewostronne w każdym punkcie. Jeżeli kawałkami absolutnie ciągła funkcja f posiada nieciągłość w x , to punkt x nazywamy *skokiem* funkcji f a *wartością skoku w x* nazywamy liczbę $d(x) := \lim_{y \rightarrow x^-} f(y) - f(x)$.

2.3. Przestrzeń potoków

Niech (X, \mathcal{B}, μ) będzie probabilistyczną standardową przestrzenią borelowską. Przez $Flow(X)$ oznaczamy zbiór wszystkich zachowujących miarę potoków na X . Niech $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t \in \mathbb{R}} \in Flow(X)$, $A \in \mathcal{B}$ oraz $\varepsilon > 0$. Rozważamy otoczenie $U(\mathcal{T}, A, \varepsilon) \subseteq Flow(X)$ zdefiniowane w następujący sposób

$$U(\mathcal{T}, A, \varepsilon) := \{\mathcal{S} = \{S_t\}_{t \in \mathbb{R}} \in Flow(X); \sup_{t \in [-1, 1]} \mu(T_t A \Delta S_t A) < \varepsilon\}.$$

Zbiory takiej postaci tworzą podbazę topologii a przestrzeń $Flow(X)$ wyposażona w tę topologię jest przestrzenią polską.

Niech (Y, d) będzie przestrzenią metryczną. Wtedy odwzorowanie $F : Y \rightarrow Flow(X)$ jest ciągle jeżeli dla każdego $y \in Y$ oraz $A \in \mathcal{B}$ zachodzi

(2.5)

$$\text{dla każdego } \varepsilon > 0 \text{ istnieje } \delta > 0 \text{ taka, że } d(y, z) < \delta \Rightarrow F(z) \in U(F(y), A, \varepsilon).$$

Z tego, że dla dowolnych $A_1, B_1, A_2, B_2 \in \mathcal{B}$ mamy

$$A_1 \Delta B_1 = A_1^c \Delta B_1^c \text{ i } (A_1 \cup B_1) \Delta (A_2 \cup B_2) \subseteq (A_1 \Delta A_2) \cup (B_1 \Delta B_2),$$

wynika, że dla każdego $y \in Y$ rodzina \mathcal{B}_y zbiorów $A \in \mathcal{B}$, dla których warunek (2.5) jest spełniony, jest algebrą zbiorów. Z nierówności trójkąta dla różnicy symetrycznej

$$\mu(A \Delta B) \leq \mu(A \Delta C) + \mu(B \Delta C) \text{ dla } A, B, C \in \mathcal{B},$$

wynika z kolei, że algebra \mathcal{B}_y jest zamknięta ze względu na branie sum przeliczalnych rodzin wstępujących, a zatem jest σ -algebrą zbiorów. Wnioskujemy stąd, że

aby sprawdzić ciągłość F w y , wystarczy sprawdzać (2.5) na elementach z rodziny zbiorów generującej \mathcal{B} .

Wszystkie bezatomowe standardowe probabilistyczne przestrzenie borelowskie są izomorficzne (patrz Theroem 3.4.23 in [29]). Niech $(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$ oraz $(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$ będą standardowymi probabilistycznymi przestrzeniami borelowskimi oraz niech $H : X_1 \rightarrow X_2$ będzie wspomnianym wyżej izomorfizmem. Wtedy przestrzenie $Flow(X_1)$ i $Flow(X_2)$ są identyfikowane poprzez homeomorfizm $\phi : Flow(X_1) \rightarrow Flow(X_2)$ dany wzorem

$$\phi(\mathcal{T}) := H \circ \mathcal{T} \circ H^{-1}.$$

Wynika stąd następująca uwaga.

UWAGA 2.11. Aby udowodnić, że funkcja $F : (Y, d) \rightarrow Flow(X_1)$ jest ciągła w punkcie $y \in Y$, możemy zamiast tego udowodnić, że funkcja $\phi \circ F : (Y, d) \rightarrow Flow(X_2)$ jest ciągła. Innymi słowy, wystarczy wykazać, że dla każdego $y \in Y$ oraz $A \in \mathcal{D} \subset \mathcal{B}_2$, gdzie \mathcal{D} generuje \mathcal{B}_2 , zachodzi

dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że $d(y, z) < \delta \Rightarrow \phi \circ F(z) \in U(\phi \circ F(y), A, \varepsilon)$.

2.4. Przekładania odcinków

Niech \mathcal{A} będzie alfabetem złożonym z d elementów. Dla $\epsilon \in \{0, 1\}$, niech $\pi_\epsilon : \mathcal{A} \rightarrow \{1, \dots, d\}$ będą bijekcjami. Od tej pory permutacją π alfabetu \mathcal{A} nazywamy parę $\{\pi_0, \pi_1\}$, gdzie $\pi_0(a)$ odpowiada pozycji litery a przed permutacją, podczas gdy $\pi_1(a)$ określa pozycję litery a po permutacji. Warto zaznaczyć, że $\pi_1 \circ \pi_0$ jest wtedy permutacją zbioru $\{1, \dots, d\}$ w klasycznym rozumieniu. Mówimy, że permutacja π jest *nieredukowalna* jeżeli nie istnieje liczba $1 \leq k < d$ taka, że

$$\pi_1 \circ \pi_0^{-1}(\{1, \dots, k\}) = \{1, \dots, k\}.$$

Zbiór wszystkich permutacji nieredukowalnych alfabetu \mathcal{A} oznaczamy przez $S_0^{\mathcal{A}}$. W rozprawie będziemy posługiwać się wyłącznie permutacjami nieredukowalnymi, więc to założenie będzie z reguły pomijane. Mówimy, że permutacja π jest *symetryczna* jeżeli

$$\pi_1(a) = d + 1 - \pi_0(a) \text{ dla każdego } a \in \mathcal{A}.$$

Zauważmy, że symetryczna permutacja jest zawsze nieredukowalna, co wynika z faktu, że $\pi_1(\pi_0^{-1}(1)) = d$.

Przedziały, które będziemy rozważać od tej pory, są zawsze lewostronnie domknięte i prawostronnie otwarte, o ile nie będzie powiedziane inaczej. Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie takim przedziałem wyposażonym w σ -algebrę zbiorów borelowskich oraz miarę Lebesgue'a Leb . Bez utraty ogólności możemy zakładać, że lewym końcem przedziału I jest 0. Niech $\{I_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ będzie podziałem I na d odcinków, gdzie I_a ma długość $|I_a| = \lambda_a \geq 0$. Niech $\mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathcal{A}}$ oznacza zbiór wszystkich wektorów rzeczywistych o nieujemnych współrzędnych, indeksowanych alfabetem \mathcal{A} , różnych od 0. Wówczas $\lambda := (\lambda_a)_{a \in \mathcal{A}} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathcal{A}}$ nazywamy *wektorem długości*. Wtedy mamy $|\lambda| := \sum_{a \in \mathcal{A}} \lambda_a = Leb(I)$. Każdy podział odcinka I będziemy utożsamiać z wektorem długości λ .

Przekładaniem odcinków (IET) nazywamy automorfizm $T_{\pi, \lambda} : I \rightarrow I$, który przestawia odcinki I_a zgodnie z permutacją π . Mówiąc dokładniej

$$(2.6) \quad T_{\pi, \lambda}(x) = x + \sum_{j < \pi_1(a)} \lambda_{\pi_1^{-1}(j)} - \sum_{j < \pi_0(a)} \lambda_{\pi_0^{-1}(j)} \text{ dla } x \in I_a.$$

Nietrudno zauważyć, że $T_{\pi,\lambda}$ jest automorfizmem zachowującym miarę Lebesgue'a. Niech teraz $\Omega_\pi := [(\Omega_\pi)_{ab}]_{a,b \in \mathcal{A}}$ będzie macierzą o wymiarach $d \times d$ daną następującym wzorem

$$(2.7) \quad (\Omega_\pi)_{ab} := \begin{cases} +1, & \text{jeśli } \pi_0(a) < \pi_0(b) \text{ i } \pi_1(a) > \pi_1(b); \\ -1, & \text{jeśli } \pi_0(a) > \pi_0(b) \text{ i } \pi_1(a) < \pi_1(b); \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Macierz Ω_π nazywamy *macierzą translacji* stowarzyszoną z $T_{\pi,\lambda}$. Nazwa tejże macierzy wywodzi się z faktu, iż $T_{\pi,\lambda}$ działa na odcinek I_a jako przesunięcie o liczbę $\sum_{b \in \mathcal{A}} (\Omega_\pi)_{ab} \lambda_b$.

2.5. Powierzchnie translacyjne i przestrzeń moduli

Niech M będzie orientowalną spójną i zwartą powierzchnią o genusie $g \geq 1$. Niech $\Sigma := \{A_1, \dots, A_s\}$ będzie skończonym zbiorem punktów osobliwych na M . Niech $\kappa := (\kappa_1, \dots, \kappa_s)$ będzie wektorem dodatnich liczb całkowitych takim, że $\sum_{i=1}^s \kappa_i = 2g - 2$. *Struktura translacyjna* na M jest to maksymalny atlas ζ map na $M \setminus \Sigma$ działających do otwartych podzbiorów płaszczyzny \mathbb{C} taki, że każde odwzorowanie przejścia pomiędzy lokalnymi układami współrzędnych jest translacją. Ponadto dla każdego $1 \leq i \leq s$ istnieje otoczenie $V_i \subset M$ punktu A_i , otoczenie $W_i \subset \mathbb{C}$ punktu 0 oraz ramifikowane nakrycie $\pi_i : (V_i, A_i) \rightarrow (W_i, 0)$ stopnia $\kappa_i + 1$ takie, że każde injektywne obcięcie π_i do $M \setminus \Sigma$ jest elementem ζ . Liczbę κ_i nazywamy indeksem punktu A_i . Przez *prostokąt* rozumiemy dowolny zbiór D zawarty w dziedzinie pewnej mapy f z atlasu ζ , będący przeciwobrazem poprzez f prostokąta na płaszczyźnie o pionowych i poziomych bokach.

Na (M, ζ) rozpatrzmy holomorficzną 1-formę, która w lokalnych współrzędnych jest postaci dz . Formę tę oznaczamy również jako ζ . Ma ona miejsca zerowa w punktach $A_i \in \Sigma$ rzędu κ_i . Będziemy identyfikować struktury translacyjne z formami holomorficznymi, których miejscami zerowymi są punkty z Σ .

Z formą ζ stowarzyszymy 2-formę powierzchni $\frac{i}{2}d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$, która z kolei wyznacza miarę Lebesgue'a λ_ζ na (M, ζ) . W lokalnych współrzędnych forma ta dana jest wzorem $\frac{i}{2}dz \wedge d\bar{z} = dx \wedge dy$. Ponadto forma kwadratowa $|\zeta|^2$ wyznacza metrykę riemannowską (M, ζ) . Przez d_ζ będziemy oznaczać odległość wyznaczoną przez tę metrykę. Z kolei niech $\text{Area}(\zeta) := \lambda_\zeta(M)$ oznacza całkowite pole powierzchni (M, ζ) .

Dla dowolnego kierunku $\theta \in S^1$ rozważamy na (M, ζ) potok translacyjny $\{\phi_t^\theta\}_{t \in \mathbb{R}}$, który w lokalnych współrzędnych porusza punkty w kierunku θ z prędkością jednostkową. Potok ten rozpatrywany jako lokalny potok topologiczny nie jest zdefiniowany dla elementów ze zbioru Σ . Ponadto nie dla każdego $x \in M$ element $\phi_t^\theta(x)$ jest zdefiniowany dla każdego $t \in \mathbb{R}$, co zależy od tego czy orbita punktu x natrafia na punkt osobliwy. Wśród potoków translacyjnych wyróżniamy pionowy potok translacyjny, który będziemy oznaczać przez $\mathcal{T}^\zeta = \{\mathcal{T}_t^\zeta\}_{t \in \mathbb{R}}$. Oznaczmy przez $I(x) \in \mathbb{R}$ maksymalny przedział, dla którego orbita punktu $x \in M \setminus \Sigma$ jest zdefiniowana. Jeśli $I(x)$ jest półprostą lewostronnie ograniczoną to orbitę punktu x nazwiemy *separatryszą wychodzącą*, natomiast gdy $I(x)$ jest półprostą prawostronnie ograniczoną, to mówimy, że orbita punktu x jest *separatryszą przychodzącą*. Możliwe jest również, że $I(x)$ jest przedziałem ograniczonym, czyli zarówno orbita w przód jak i w tył punktu x natrafia na punkty osobliwe. Mówimy wtedy, że taka orbita jest *pionowym połączeniem siodłowym*. Warto zaznaczyć jednak, że dla λ_ζ -prawie wszystkich $x \in M$, zbiór $I(x)$ jest całą prostą \mathbb{R} . To pozwala rozważać \mathcal{T}^ζ jako potok mierzalny, który

dotatkowo zachowuje λ_ζ , gdyż jest on lokalnie translacją. W szczególności, \mathcal{T}^ζ może być rozpatrywany jako element $Flow(M, \lambda_\zeta)$.

Na powierzchni (M, ζ) możemy również rozważać połączenia siodłowe we wszystkich kierunkach, nie tylko pionowe. *Systolem* $sys(\zeta)$ nazywamy długość najkrótszego z nich. Warto zaznaczyć, że $sys(\zeta)$ ogranicza z dołu długość wszystkich okresowych orbit potoków translacyjnych. Rzeczywiście, zgodnie z konstrukcją zaprezentowaną w [34], każdą okresową orbitę potoku translacyjnego można rozszerzyć do maksymalnego cylindra składającego się z orbit okresowych, w tym samym kierunku i o tej samej długości. Natomiast brzeg każdego takiego cylindra składa się z połączeń siodłowych.

W zbiorze wszystkich struktur translacyjnych na (M, Σ) identyfikujemy struktury ζ_1 i ζ_2 jeżeli istnieje homeomorfizm $H : M \rightarrow M$, który jest stały na Σ oraz $\zeta_1 = H^*\zeta_2$. W języku lokalnych współrzędnych oznacza to, że H jest lokalnie translacją. W ten sposób otrzymujemy relację równoważności, a zbiór jej klasy abstrakcji nazywamy *przestrzenią moduli* oznaczaną przez $\mathcal{M} = \mathcal{M}_g(\Sigma)$. Rozważmy także *znormalizowaną przestrzeń moduli* $\mathcal{M}^P := \{\zeta \in \mathcal{M}; Area(\zeta) = P\}$, dla dowolnej liczby $P > 0$.

Aby zadać topologię na \mathcal{M} , rozważmy nakrycie uniwersalne $p : \tilde{M} \rightarrow M$ oraz ustalmy dowolny punkt $O \in \tilde{M}$. Dla dowolnej 1-formy holomorficzej ζ rozważmy odwzorowanie ciągłe $D_\zeta : (\tilde{M}, O) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ dane wzorem $D_\zeta(x) = \int_O^x p^*\zeta$. Ze względu na jedność \tilde{M} oraz zamkniętość formy ζ jest to dobrze określone odwzorowanie. Odwzorowanie $\zeta \mapsto D_\zeta$ jest odwzorowaniem różnowartościowym. Zatem zbiór wszystkich struktur translacyjnych (1-form holomorficzych) możemy zanurzyć w $C(\tilde{M}, \mathbb{C})$ - przestrzeni funkcji ciągłych działających z \tilde{M} do \mathbb{C} . W szczególności, możemy rozważać na zbiorze wszystkich struktur translacyjnych topologię indukowaną z topologii zwarto-otwartej na $C(\tilde{M}, \mathbb{C})$. Po przejściu do topologii ilorazowej wyznaczonej przez relację równoważności definiującą przestrzeń moduli, otrzymujemy topologię na \mathcal{M} .

Przestrzeń moduli może być podzielona na podzbiory zwane *warstwami* $\mathcal{M}(M, \Sigma, \kappa) = \mathcal{M}(\kappa)$, do których należą klasy struktur translacyjnych z indeksami punktów osobliwych danymi przez κ . Każda taka warstwa $\mathcal{M}(M, \Sigma, \kappa)$ jest zespolonym orbifoldem (patrz [30]) posiadającym skończoną liczbę składowych spójności (patrz [23]). Koncewicz i Zorich w [23] podali pełną charakteryzację składowych spójności przestrzeni moduli, której dokonali poprzez użycie tzw. rozszerzonych grafów Rauzy'ego, które zostaną zdefiniowane w następnym podrozdziale. Mówimy, że $C \subset \mathcal{M}$ jest hiperliptyczną składową spójności, jeżeli istnieje inwolucja $\phi : M \rightarrow M$ taka, że dla każdej formy $\zeta \in C$ mamy $\phi^*\zeta = -\zeta$ oraz M podzielona przez działanie grupy $\{Id, \phi\}$ jest topologicznie sferą. Każda warstwa postaci $\mathcal{M}(2g - 2)$ oraz $\mathcal{M}(g - 1, g - 1)$, gdzie g jest genussem rozpatrywanej powierzchni, zawiera dokładnie jedną tzw. *hiperliptyczną* składową spójności, którą oznaczamy odpowiednio przez $\mathcal{M}^{hyp}(2g - 2)$ oraz $\mathcal{M}^{hyp}(g - 1, g - 1)$. Są to jedyne hiperliptyczne składowe spójności w \mathcal{M} .

Na \mathcal{M} rozpatrujemy ciągłe działanie grupy $SL_2(\mathbb{R})$. Dokładniej, dla ustalonego odwzorowania liniowego $\psi \in SL_2(\mathbb{R})$ oraz dla dowolnego atlasu $\zeta \in \mathcal{M}$ i dowolnej mapy f należącej do ζ , rozpatrujemy złożenie $\psi \circ f$. W ten sposób otrzymujemy nowy atlas $\psi(\zeta)$, który również wyznacza strukturę translacyjną, którą także oznaczamy przez $\psi(\zeta) \in \mathcal{M}$. To działanie zachowuje indeksy punktów osobliwych, a więc warstwy są niezmiennicze ze względu na działanie grupy $SL_2(\mathbb{R})$. Co więcej, jeżeli

warstwa nie jest zbiorem spójnym, to jej składowe spójności są również podzbiórmi niezmienniczymi ze względu na działanie $SL_2(\mathbb{R})$. W końcu, zauważmy, że dla każdej struktury $\zeta \in \mathcal{M}$ i dla dowolnego odwzorowania liniowego $\psi \in SL_2(\mathbb{R})$ zachodzi $\text{Area}(\zeta) = \text{Area}(\psi(\zeta))$. Zatem zbiory postaci $C \cap \mathcal{M}^P$ są zbiorami niezmienniczymi ze względu na działanie grupy $SL_2(\mathbb{R})$, przy czym $P > 0$ a $C \subset \mathcal{M}$ jest dowolną składową spójności.

Szczególnie ważne dla nas będą dwa poddziałania grupy $SL_2(\mathbb{R})$. Pierwszym jest działanie grupy obrotów. Dla dowolnego kąta $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ strukturę translacyjną możemy obrócić o kąt θ wyznaczając działanie r_θ wyrażone poprzez macierz $\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$. Warto dodać, że dla ustalonej struktury translacyjnej ζ i dla prawie każdego kąta $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ w sensie miary Lebesgue'a, struktura $r_\theta(\zeta)$ nie ma pionowych połączeń siodłowych. Drugim poddziałaniem jest tzw. *potok Teichmüllera* $\{\mathcal{G}_t\}_{t \in \mathbb{R}}$. W ten sposób nazywamy działanie grupy $\left(\begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}\right)_{t \in \mathbb{R}}$ na \mathcal{M} .

TWIERDZENIE 2.12 ([25] oraz [30]). *Na każdym zbiorze postaci $C \cap \mathcal{M}^P$, gdzie $P > 0$ oraz $C \subset \mathcal{M}$ jest składową spójności istnieje probabilistyczna miara $\mu_{C,P}$ niezmiennicza ze względu na działanie potoku Teichmüllera $\{\mathcal{G}_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, która przyjmuje dodatnie wartości na niepustych zbiorach otwartych. Ponadto $\{\mathcal{G}_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ z miarą $\mu_{C,P}$ jest potokiem ergodycznym.*

Reprezentacja wielokątna powierzchni translacyjnej. Niech $\pi \in S_0^{\mathcal{A}}$, gdzie \mathcal{A} jest alfabetem składającym się z $d \geq 2$ elementów. Rozważmy trójkę $(\pi, \lambda, \tau) \in \{\pi\} \times \mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathcal{A}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ taką, że

$$(2.8) \quad \begin{aligned} & \forall_{1 \leq k < d} \sum_{\{a \in \mathcal{A}; \pi_0(a) \leq k\}} \tau_a > 0 \wedge \sum_{\{a; \pi_1(a) \leq k\}} \tau_a < 0; \\ & \forall_{a \in \mathcal{A}} \lambda_a = 0 \Rightarrow \tau_a \neq 0; \\ & \forall_{i \in \{0,1\}} \forall_{a,b \in \mathcal{A}} (\pi_i(a) = \pi_i(b) + 1 \wedge \lambda_a = \lambda_b = 0) \Rightarrow \tau_a \cdot \tau_b > 0; \\ & \lambda_{\pi_0^{-1}(d)} \neq 0 \vee \lambda_{\pi_1^{-1}(d)} \neq 0. \end{aligned}$$

Rozważmy łamaną w \mathbb{C} , nazywaną *górną* łamaną, otrzymaną poprzez kolejne łączenie punktów 0 oraz $\sum_{i \leq k} (\lambda_{\pi_0^{-1}(i)} + i\tau_{\pi_0^{-1}(i)})$ dla $k = 1, \dots, d$, przy pomocy odcinków. Analogicznie, rozpatrujemy *dolną* łamaną łączącą punkty 0 oraz $\sum_{i \leq k} (\lambda_{\pi_1^{-1}(i)} + i\tau_{\pi_1^{-1}(i)})$ dla $k = 1, \dots, d$. Jeśli te dwie łamane nie przecinają się pomiędzy punktami końcowymi, to zestawione razem tworzą wielokąt składający się z d par równoległych krawędzi. Poprzez zidentyfikowanie (sklejenie) tychże krawędzi, otrzymujemy zwartą i spójną powierzchnię translacyjną, dla której zbiorem Σ punktów osobliwych jest zbiór wierzchołków rozpatrywanego wielokąta, przy czym niektóre z tych wierzchołków mogą zostać sklezione przy identyfikacji. Warto zauważyć, że omówione wyżej łamane mogą się przecinać tylko wewnątrz ostatniego odcinka jednej z nich. Niech

$$(2.9) \quad \Theta_\pi := \{(\pi, \lambda, \tau) \in \{\pi\} \times \mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathcal{A}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{A}}; (\pi, \lambda, \tau) \text{ spełnia (2.8)}\},$$

$$(2.10) \quad \Theta_\pi^* := \{(\pi, \lambda, \tau) \in \Theta_\pi; \lambda_{\pi_0^{-1}(d)} \neq 0 \wedge \lambda_{\pi_1^{-1}(d)} \neq 0\}$$

oraz

$$(2.11) \quad \Theta_\pi^\# := \{(\pi, \lambda, \tau) \in \Theta_\pi^*; \text{ dolna i górna łamana dla } (\pi, \lambda, \tau) \text{ nie przecinają się}\}.$$

Ponieważ Θ_π jest de facto otwartym podzbiorem $\mathbb{R}_{\geq 0}^A \times \mathbb{R}^A$, to możemy na tym zbiorze rozważać topologię indukowaną z $\mathbb{R}_{\geq 0}^A \times \mathbb{R}^A$ oraz miarę Lebesgue'a. Ponadto zauważmy, że zbiory Θ_π^* i $\Theta_\pi^\#$ są otwartymi podzbiórmi Θ_π , a $\Theta_\pi \setminus \Theta_\pi^*$ jest miary 0 w Θ_π .

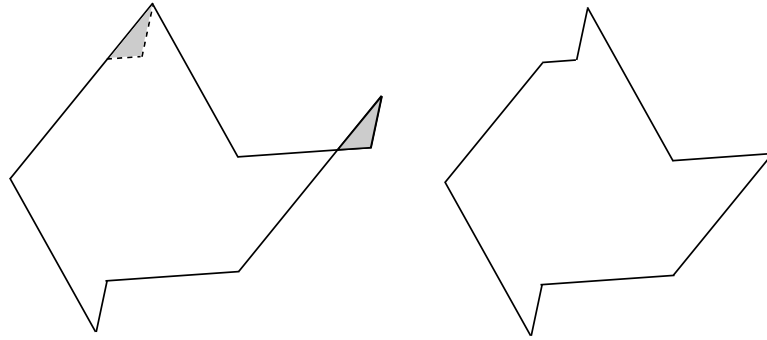
Oznaczamy przez $M(\pi, \lambda, \tau)$ strukturę translacyjną zadaną przez $(\pi, \lambda, \tau) \in \Theta_\pi^*$, którą to trójkę będziemy nazywać *reprezentacją wielokątną struktury translacyjnej*. Jeśli $(\pi, \lambda, \tau) \in \Theta_\pi^\#$, to $M(\pi, \lambda, \tau)$ jest strukturą opisaną powyżej. Jeśli natomiast $(\pi, \lambda, \tau) \in \Theta_\pi^* \setminus \Theta_\pi^\#$, to usuwamy wielokąt znajdujący się pomiędzy punktem przecięcia górnej i dolnej łamanej a prawym wierzchołkiem końcowym a także usuwamy odpowiadający mu wielokąt znajdujący się na krawędzi danej przez punkty

$$\sum_{\{a \in \mathcal{A}; \pi_0(a) < \pi_0(\pi_1^{-1}(d))\}} (\lambda_a + i\tau_a) \quad \text{i} \quad \sum_{\{a \in \mathcal{A}; \pi_0(a) \leq \pi_0(\pi_1^{-1}(d))\}} (\lambda_a + i\tau_a),$$

jeśli $\lambda_{\pi_1^{-1}(d)} > \lambda_{\pi_0^{-1}(d)}$, lub na krawędzi danej przez

$$\sum_{\{a \in \mathcal{A}; \pi_1(a) < \pi_1(\pi_0^{-1}(d))\}} (\lambda_a + i\tau_a) \quad \text{i} \quad \sum_{\{a \in \mathcal{A}; \pi_1(a) \leq \pi_1(\pi_0^{-1}(d))\}} (\lambda_a + i\tau_a),$$

jeśli $\lambda_{\pi_0^{-1}(d)} > \lambda_{\pi_1^{-1}(d)}$ (patrz rysunek 1). Po tej operacji otrzymujemy wielokąt wyznaczony przez pary równoległych boków i poprzez ich sklejenie uzyskujemy powierzchnię translacyjną $M(\pi, \lambda, \tau)$.



RYSUNEK 1. Tworzenie wielokąta z przecinających się łamanych.

UWAGA 2.13. Odwzorowanie $\Theta_\pi^* \ni (\pi, \lambda, \tau) \mapsto M(\pi, \lambda, \tau) \in \mathcal{M}$ jest odwzorowaniem ciągłym.

UWAGA 2.14. Na zbiorze wielokątów $\bigcup_{\pi \in G} \Theta_\pi$ możemy również zdefiniować potok Teichmüllera $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ dany wzorem

$$\mathcal{G}_t(\pi, \lambda, \tau) := (\pi, e^t \lambda, e^{-t} \tau) \text{ dla każdego } t \in \mathbb{R}.$$

Definicje potoku Teichmüllera na zbiorze wielokątów i na przestrzeni moduli są zgodne, tj. dla każdego $\pi \in S_0^A$, jeśli $(\pi, \lambda, \tau) \in \Theta_\pi^*$, to $\mathcal{G}_t(\pi, \lambda, \tau) \in \Theta_\pi^*$ oraz

$$M \circ \mathcal{G}_t(\pi, \lambda, \tau) = \mathcal{G}_t \circ M(\pi, \lambda, \tau).$$

Jeżeli \mathcal{T}^ζ nie posiada połączeń siodłowych, to ζ jest postaci $M(\pi, \lambda_0, \tau_0)$ dla pewnego $(\pi, \lambda_0, \tau_0) \in \Theta_\pi^*$, gdzie π jest pewną permutacją nieredukowalną (aby dowiedzieć się więcej o wyznaczaniu poszczególnych parametrów patrz np. Chapter 4 i Theorem 5.6 w [34]). Wówczas odwzorowanie $(\pi, \lambda, \tau) \mapsto M(\pi, \lambda, \tau)$ określone na odpowiednim otoczeniu (π, λ_0, τ_0) w Θ_π^* zadaje lokalny układ współrzędnych w otoczeniu takiej struktury ζ w warstwie, do której struktura ta należy. Ponadto

na tym otoczeniu $\zeta = M(\pi, \lambda_0, \tau_0)$ w $\mathcal{M}(M, \Sigma, \kappa)$ będziemy rozważać metrykę daną wzorem

$$d_{Mod}^\zeta(M(\pi, \lambda', \tau'), M(\pi, \lambda'', \tau'')) := \sum_{a \in \mathcal{A}} (|\lambda'_a - \lambda''_a| + |\tau'_a - \tau''_a|).$$

Jeżeli ζ posiada pionowe połączenia siodłowe, to możemy zastosować obrót r_θ dla pewnego $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tak, aby $r_\theta(\zeta)$ nie posiadała pionowych połączeń siodłowych. Wtedy $r_\theta(\zeta)$ jest postaci $M(\pi, \lambda_0, \tau_0)$ dla pewnego $(\pi, \lambda_0, \tau_0) \in \Theta_\pi^*$ oraz odwzorowanie $(\pi, \lambda, \tau) \mapsto r_{-\theta}M(\pi, \lambda, \tau)$ określone na odpowiednim otoczeniu (π, λ_0, τ_0) zadaje lokalny układ współrzędnych w otoczeniu takiej struktury ζ . Następnie możemy zdefiniować metrykę d_{Mod}^ζ również na otoczeniu ζ jako $d_{Mod}^{r_\theta \zeta} \circ (r_\theta \times r_\theta)$.

Reprezentacja specjalna potoku translacyjnego. Dla każdej struktury translacyjnej $\zeta = M(\pi, \lambda, \tau) \in \mathcal{M}(M, \Sigma, \kappa)$ możemy rozpatrywać reprezentację specjalną pionowego potoku translacyjnego na (M, ζ) . Rozpatrzmy wektor $h \in \mathbb{R}_{>0}^{\mathcal{A}}$ wyznaczony wzorem

$$(2.12) \quad h = -\Omega_\pi \tau,$$

gdzie Ω_π jest macierzą translacji przekładania wyznaczonego przez (π, λ) . Wektor h możemy utożsamić z funkcją $h : I \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, która nad odcinkiem I_a , $a \in \mathcal{A}$, przekładanym przez $T_{\pi, \lambda}$ jest stała i przyjmuje wartość h_a . Wtedy potok specjalny $\mathcal{T}_{\pi, \lambda}^h$ jest reprezentacją specjalną \mathcal{T}^ζ .

UWAGA 2.15 (patrz [30]). Jeśli $\zeta \in \mathcal{M}(M, \Sigma, \kappa)$, gdzie $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_s)$, to minimalna ilość przekładanych odcinków w podstawie reprezentacji specjalnej wynosi $\sum_{n=1}^s \kappa_n + s + 1$.

2.6. Indukcja Rauzy'ego-Veecha

Rozważymy teraz odwzorowanie, które jest często podstawowym narzędziem pozwalającym udowodnić wiele własności przekładania odcinków i potoków translacyjnych na powierzchniach. Oznaczmy przez $S_0^{\mathcal{A}}$ zbiór wszystkich nieredukowalnych permutacji alfabetu \mathcal{A} składającego się z d elementów. Możemy rozważyć przestrzeń $S_0^{\mathcal{A}} \times \mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathcal{A}}$ jako przestrzeń wszystkich przekładania d odcinków (będziemy dopuszczać odcinki długości 0). Zdefiniujmy operator $R : S_0^{\mathcal{A}} \times \mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathcal{A}} \rightarrow S_0^{\mathcal{A}} \times \mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathcal{A}}$ taki, że $R(\pi, \lambda) = R(T_{\pi, \lambda})$ jest odwzorowaniem pierwszego powrotu $T_{\pi, \lambda}$ do odcinka $[0, |\lambda| - \min\{\lambda_{\pi_0^{-1}(d)}, \lambda_{\pi_1^{-1}(d)}\}]$. Operator R nazywa się *indukcją Rauzy'ego-Veecha* (lub *prawostronną indukcją Rauzy'ego-Veecha*). Otrzymane odwzorowanie $R(T_{\pi, \lambda})$ na $[0, |\lambda| - \min\{\lambda_{\pi_0^{-1}(d)}, \lambda_{\pi_1^{-1}(d)}\}]$ jest przekładaniem d odcinków, które jest wyznaczone przez parametry (π^1, λ^1) zależące od relacji pomiędzy długościami ostatniego odcinka przed przełożeniem i po przełożeniu. I tak, jeżeli $\lambda_{\pi_0^{-1}(d)} \leq \lambda_{\pi_1^{-1}(d)}$, to

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \pi_0^1(a) &:= \begin{cases} \pi_0(a) & \text{jeżeli } \pi_0(a) \leq \pi_0(\pi_1^{-1}(d)); \\ \pi_0(\pi_1^{-1}(d)) + 1 & \text{jeżeli } \pi_0(a) = d; \\ \pi_0(a) + 1 & \text{jeżeli } \pi_0(\pi_1^{-1}(d)) < \pi_0(a) \leq d - 1, \end{cases} \\ \pi_1^1(a) &:= \pi_1(a), \\ \lambda_a^1 &:= \begin{cases} \lambda_{\pi_1^{-1}(d)} - \lambda_{\pi_0^{-1}(d)} & \text{jeżeli } \pi_1(a) = d; \\ \lambda_a & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases} \end{aligned}$$

natomiast jeżeli $\lambda_{\pi_0^{-1}(d)} > \lambda_{\pi_1^{-1}(d)}$, to

$$(2.14) \quad \begin{aligned} \pi_0^1(a) &:= \pi_0(a), \\ \pi_1^1(a) &:= \begin{cases} \pi_1(a) & \text{jeżeli } \pi_1(a) \leq \pi_1(\pi_0^{-1}(d)); \\ \pi_1(\pi_0^{-1}(d)) + 1 & \text{jeżeli } \pi_1(a) = d; \\ \pi_1(a) + 1 & \text{jeżeli } \pi_1(\pi_0^{-1}(d)) < \pi_1(a) \leq d - 1, \end{cases} \\ \lambda_a^1 &:= \begin{cases} \lambda_{\pi_0^{-1}(d)} - \lambda_{\pi_1^{-1}(d)} & \text{jeżeli } \pi_0(a) = d; \\ \lambda_a & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases} \end{aligned}$$

Grafami Rauzy'ego nazywamy minimalne podzbiory $G \subseteq S_0^A$ takie, że $R(G \times \mathbb{R}_{\geq 0}^A) = G \times \mathbb{R}_{\geq 0}^A$.

Analogicznie jak prawostronną indukcję Rauzy'ego, możemy zdefiniować lewostronną indukcję Rauzy'ego $L : S_0^A \times \mathbb{R}_{\geq 0}^A \rightarrow S_0^A \times \mathbb{R}_{\geq 0}^A$. Obie indukcje są za sobą ściśle związane. Niech

$$l : \{1, \dots, d\} \rightarrow \{1, \dots, d\} \text{ będzie dane przez } l(i) = d + 1 - i.$$

Funkcja l działa na S_0^A przesyłając $\{\pi_0, \pi_1\}$ na $l_*(\{\pi_0, \pi_1\}) = \{l \circ \pi_0, l \circ \pi_1\}$. Niech $\xi_\lambda : I \rightarrow I$ będzie symetrią daną wzorem $\xi_\lambda(x) = |\lambda| - x$. Ponadto dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}^A$ oznaczmy przez $l_*(\lambda) \in \mathbb{R}^A$ wektor $l_*(\lambda)_a = \lambda_{\pi_0^{-1} \circ l \circ \pi_0(a)}$ dla $a \in \mathcal{A}$. Wtedy

$$L(T_{\pi, \lambda}) = \xi_{\lambda^1}^{-1} \circ R(T_{l_*(\pi), l_*(\lambda)}) \circ \xi_\lambda.$$

Rozszerzonymi grafami Rauzy'ego nazywamy minimalne podzbiory $G \subseteq S_0^A$, takie, że $R(G \times \mathbb{R}_{\geq 0}^A) = G \times \mathbb{R}_{\geq 0}^A$ oraz $L(G \times \mathbb{R}_{\geq 0}^A) = G \times \mathbb{R}_{\geq 0}^A$. Mamy następujący rezultat

TWIERDZENIE 2.16 (patrz [27]). *Każdy (rozszerzony) graf Rauzy'ego permutacji $d \geq 2$ elementów zawiera przynajmniej jedną permutację $\hat{\pi}$ taką, że*

$$\hat{\pi}_1 \circ \hat{\pi}_0^{-1}(1) = d \quad \text{oraz} \quad \hat{\pi}_1 \circ \hat{\pi}_0^{-1}(d) = 1.$$

Mówimy, że $T_{\pi, \lambda}$ spełnia *warunek Keane'a*, jeżeli

$$T_{\pi, \lambda}^k(\partial I_a) = \partial I_b \text{ dla pewnego } k \in \mathbb{N} \text{ oraz } a, b \in \mathcal{A} \Rightarrow k = 1 \text{ oraz } \pi_0(b) = 1.$$

TWIERDZENIE 2.17 (patrz [20] oraz [30]). *Jeżeli $\pi \in S_0^A$, to dla prawie każdego $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}^A$ przekładanie odcinków $T_{\pi, \lambda}$ spełnia warunek Keane'a i jest ergodyczne.*

Warto zaznaczyć, że warunek Keane'a jest spełniony zawsze dla wektorów długości $\lambda \in \mathbb{R}_{> 0}^A$, które są *wymiernie niezależne*, tzn.

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} c_a \lambda_a = 0, \text{ gdzie } c_a \in \mathbb{Z} \text{ dla } a \in \mathcal{A} \Rightarrow c_a = 0 \text{ dla } a \in \mathcal{A}.$$

Niech $(\pi^n, \lambda^n) = R^n(\pi, \lambda)$.

TWIERDZENIE 2.18 (patrz str. 19 w [33]). *Jeżeli $T_{\pi, \lambda}$ jest przekładaniem odcinków spełniającym warunek Keane'a to dla każdego $n \in \mathbb{N}$ n -ta iteracja indukcji Rauzy'ego-Veecha na (π, λ) jest dobrze zdefiniowana. Ponadto $|\lambda^n| \rightarrow 0$ dla $n \rightarrow \infty$.*

Niech G będzie grafem Rauzy'ego. Przypomnijmy, że dla dowolnego $\pi \in S_0^A$ zbiory Θ_π oraz Θ_π^* dane jak w (2.9) i (2.10) są podzbiorem $S_0^A \times \mathbb{R}_{\geq 0}^A \times \mathbb{R}^A$. Niech

$$\Theta_\pi^+ := \{(\pi, \lambda, \tau) \in \Theta_\pi^*; \lambda_{\pi_0^{-1}(d)} \neq \lambda_{\pi_1^{-1}(d)}\}.$$

Podzbiór Θ_π^+ jest zbiorem pełnej miary w zbiorze Θ_π , a w szczególności jest w nim gęsty. Równoległe do indukcji Rauzy'ego R jako przekształcenia na przekładaniach

odcinków zdefiniujemy przekształcenie $\mathbf{R} : \bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi}^+ \mapsto \bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi}$ nazywane *wielokątną indukcją Rauzy'ego* (lub *prawostronną wielokątną indukcją Rauzy'ego*). Dla powierzchni $M(\pi, \lambda, \tau)$ odwzorowanie \mathbf{R} pozwala na inne sparametryzowanie tej powierzchni translacyjnej za pomocą $\mathbf{R}(\pi, \lambda, \tau)$.

Niech $\pi \in G$ oraz niech $(\pi, \lambda, \tau) \in \Theta_{\pi}^+$. Wtedy $\mathbf{R}(\pi, \lambda, \tau) := (\pi^1, \lambda^1, \tau^1)$, gdzie $(\pi^1, \lambda^1) = R(\pi, \lambda)$ oraz jeżeli $\lambda_{\pi_0^{-1}(d)} < \lambda_{\pi_1^{-1}(d)}$, to

$$\tau_a^1 := \begin{cases} \tau_{\pi_1^{-1}(d)} - \tau_{\pi_0^{-1}(d)} & \text{jeżeli } \pi_1(a) = d; \\ \tau_a & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases}$$

natomiast jeżeli $\lambda_{\pi_0^{-1}(d)} > \lambda_{\pi_1^{-1}(d)}$, to

$$\tau_a^1 := \begin{cases} \tau_{\pi_0^{-1}(d)} - \tau_{\pi_1^{-1}(d)} & \text{jeżeli } \pi_0(a) = d; \\ \tau_a & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Warto zaznaczyć, że jeżeli przekładanie odcinków $T_{\pi, \lambda}$ spełnia warunek Keane'a, to \mathbf{R} może być iterowane nieskończenie wiele razy dla parametrów $(\pi, \lambda, \tau) \in \Theta_{\pi}$. Symetrycznie, możemy również zdefiniować lewostronną wielokątną indukcję Rauzy'ego. Warto zauważyć, że jeśli $(\pi, \lambda, \tau) \in \Theta_{\pi}^+$ oraz $\mathbf{R}(\pi, \lambda, \tau) \in \Theta_{\pi}^*$ to reprezentacje wielokątne otrzymane z (π, λ, τ) oraz $(\pi^1, \lambda^1, \tau^1) = \mathbf{R}(\pi, \lambda, \tau)$ reprezentują tę samą powierzchnię translacyjną, t.j. $M(\pi, \lambda, \tau) = M(\pi^1, \lambda^1, \tau^1)$. Rzeczywiście, reprezentacja odpowiadająca $(\pi^1, \lambda^1, \tau^1)$ jest otrzymana z reprezentacji przyporządkowanej (π, λ, τ) poprzez wycięcie trójkąta wyznaczonego przez ostatnią górną i ostatnią dolną krawędź i przyklejenie go do krawędzi zidentyfikowanej z jedną z dwóch ścian wyznaczających trójkąt.

UWAGA 2.19. Jeśli $(\pi, \lambda, \tau) \in \Theta_{\pi}^* \setminus \Theta_{\pi}^{\#}$, jest takie, że przekładanie wyznaczone przez (π, λ) spełnia warunek Keane'a to istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $\mathbf{R}^n(\pi, \lambda, \tau) \in \Theta_{\pi}^{\#}$ dla pewnego $\bar{\pi} \in G$ (patrz Remark 18.3 w [33]). Przypomnijmy, że jeśli struktura translacyjna ζ nie posiada pionowych połączeń siodłowych, to możemy ją zapisać w postaci $M(\pi, \lambda, \tau)$, a ponadto przekładanie odcinków dane przez (π, λ) spełnia warunek Keane'a. W szczególności, jeżeli $(\pi, \lambda, \tau) \in \Theta_{\pi}^{\#}$, to struktura ζ posiada reprezentację wielokątną taką, że tworzące ją łamane spełniają warunek (2.8) i nie przecinają się. Natomiast jeżeli $(\pi, \lambda, \tau) \in \Theta_{\pi}^* \setminus \Theta_{\pi}^{\#}$, to istnieje liczba $n \in \mathbb{N}$ taka, że $\mathbf{R}^n(\pi, \lambda, \tau) = (\pi^n, \lambda^n, \tau^n) \in \Theta_{\pi^n}^{\#}$. Skoro $M(\pi, \lambda, \tau) = M(\mathbf{R}^n(\pi, \lambda, \tau))$, to otrzymujemy w ten sposób reprezentację wielokątną struktury ζ , która spełnia te same warunki co w pierwszym przypadku.

Okazuje się, że wielokątna indukcja Rauzy'ego jest przekształceniem odwracalnym na dużym zbiorze parametrów. Niech więc $(\pi, \lambda, \tau) \in \Theta_{\pi}$. Jeśli ponadto λ jest wektorem dodatnim, a $\sum_{a \in \mathcal{A}} \tau_a > 0$, to $\mathbf{R}^{-1}(\pi, \lambda, \tau) := (\pi', \lambda', \tau') \in \Theta_{\pi'}$, gdzie dla każdego $a \in \mathcal{A}$ zachodzi

$$\pi'_0(a) = \begin{cases} \pi_0(a) & \text{jeżeli } \pi_0(a) \leq \pi_0(\pi_1^{-1}(d)); \\ d & \text{jeżeli } \pi_0(a) = \pi_0(\pi_1^{-1}(d)) + 1; \\ \pi_0(a) - 1 & \text{jeżeli } \pi_0(a) > \pi_0(\pi_1^{-1}(d)) + 1, \end{cases}$$

$$\pi'_1(a) = \pi_1(a),$$

a także

$$\lambda'_a = \begin{cases} \lambda_a + \lambda_{\pi_0^{-1}(\pi_0(a)+1)} & \text{dla } a = \pi_1^{-1}(d); \\ \lambda_a & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases}$$

oraz

$$\tau'_a = \begin{cases} \tau_a + \tau_{\pi_0^{-1}(\pi_0(a)+1)} & \text{dla } a = \pi_1^{-1}(d); \\ \tau_a & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Jeśli natomiast $\sum_{a \in \mathcal{A}} \tau_a < 0$, to (π', λ', τ') jest dane przez

$$\pi'_0(a) = \pi_0(a),$$

$$\pi'_1(a) = \begin{cases} \pi_1(a) & \text{jeśli } \pi_1(a) \leq \pi_1(\pi_0^{-1}(d)); \\ d & \text{jeśli } \pi_1(a) = \pi_1(\pi_0^{-1}(d)) + 1; \\ \pi_1(a) - 1 & \text{jeśli } \pi_1(a) > \pi_1(\pi_0^{-1}(d)) + 1, \end{cases}$$

$$\lambda'_a = \begin{cases} \lambda_a + \lambda_{\pi_1^{-1}(\pi_1(a)+1)} & \text{dla } a = \pi_0^{-1}(d); \\ \lambda_a & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases}$$

oraz

$$\tau'_a = \begin{cases} \tau_a + \tau_{\pi_1^{-1}(\pi_1(a)+1)} & \text{dla } a = \pi_0^{-1}(d); \\ \tau_a & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases}$$

dla $a \in \mathcal{A}$.

Jak już wspomnieliśmy (patrz np. [23]), składowe spójności przestrzeni moduli mogą być opisane poprzez użycie grafów Rauzy'ego. Zdefiniujmy najpierw za Veechem niedegenerowalność permutacji. Niech \mathcal{A} będzie alfabetem składającym się z $d \geq 2$ elementów. Mówimy, że permutacja $\pi = \{\pi_0, \pi_1\}$ alfabetu \mathcal{A} jest *degenerowalna* jeżeli jeden z poniższych warunków jest prawdziwy:

$$(2.15) \quad \pi_1 \circ \pi_0^{-1}(j+1) = \pi_1 \circ \pi_0^{-1}(j) + 1 \text{ dla pewnego } 1 \leq j < d;$$

$$(2.16) \quad \pi_1 \circ \pi_0^{-1}(\pi_0 \circ \pi_1^{-1}(d) + 1) = \pi_1 \circ \pi_0^{-1}(d) + 1$$

$$(2.17) \quad \pi_0 \circ \pi_1^{-1}(1) - 1 = \pi_0 \circ \pi_1^{-1}(\pi_1 \circ \pi_0^{-1}(1) - 1)$$

$$(2.18) \quad \pi_0 \circ \pi_1^{-1}(d) = \pi_0 \circ \pi_1^{-1}(1) - 1 \text{ i } \pi_1 \circ \pi_0^{-1}(d) = \pi_1 \circ \pi_0^{-1}(1) - 1.$$

W przeciwnym wypadku mówimy, że permutacja jest *niedegenerowalna*. Własność niedegenerowalności jest niezmiennicza ze względu na działanie indukcji Rauzy'ego-Veecha.

Poniższe twierdzenie określa w jaki sposób rozszerzone klasy Rauzy'ego permutacji niedegenerowalnych są w relacji jeden do jednego ze składowymi spójności przestrzeni moduli.

TWIERDZENIE 2.20 (patrz [30], a także [23]). *Niech $P > 0$ oraz niech $C \subset \mathcal{M}(M, \Sigma, \kappa)$ będzie pewną składową spójności przestrzeni moduli, gdzie $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_s)$. Niech \mathcal{A} będzie alfabetem $\sum_{n=1}^s \kappa_n + s + 1$ -elementowym. Rozważmy miarę $\mu_{C,P}$ na $C \cap \mathcal{M}^P$ niezmienniczą na działanie potoku Teichmüllera, której istnienie wynika z 2.12. Dla każdej struktury translacyjnej $\zeta \in C$ niech $\mathfrak{R}(\zeta) \subset S_0^A$ oznacza zbiór tych permutacji $\pi \in S_0^A$, że istnieje poziomy odcinek w (M, ζ) taki, że odwzorowanie pierwszego powrotu pionowego potoku translacyjnego na (M, ζ) do tego odcinka jest przekładaniem odcinków danym przez permutację π . Wtedy istnieje podzbiór $\mathfrak{R}_C \subset S_0^A$ taki, że dla każdej struktury $\zeta \in C \cap \mathcal{M}^P$, mamy $\mathfrak{R}(\zeta) \subseteq \mathfrak{R}_C$. Ponadto dla $\mu_{C,P}$ -p.w. $\zeta \in C \cap \mathcal{M}^P$ zachodzi $\mathfrak{R}(\zeta) = \mathfrak{R}_C$. Zbiór \mathfrak{R}_C nie zależy od P i jest pewną rozszerzoną klasą Rauzy'ego permutacji niedegenerowalnych, a także jeśli C_1, C_2 są różnymi składowymi spójności \mathcal{M} , to $\mathfrak{R}_{C_1} \cap \mathfrak{R}_{C_2} = \emptyset$.*

WNIOSEK 2.21. Niech $C \subset \mathcal{M}$ będzie dowolną składową spójności oraz niech G będzie odpowiadającym jej rozszerzonym grafem Rauzy'ego danym przez twierdzenie 2.20. Wtedy dla każdej permutacji $\pi \in G$, zbiór $M(\Theta_\pi^*)$ jest gęsty w C .

DOWÓD. Niech $(\pi, \lambda_0, \tau_0) \in \Theta_\pi^*$ będzie takie, że λ_0 jest wektorem dodatnim. Niech $V \ni (\pi, \lambda_0, \tau_0)$ będzie otoczeniem otwartym w Θ_π^* , takim, że $M|_V$ jest lokalną parametryzacją wokół $M(\pi, \lambda_0, \tau_0)$. W szczególności, $M(\Theta_\pi^*)$ zawiera niepusty podzbiór otwarty. Ponadto zauważmy, że $M(\Theta_\pi^*)$ jest zbiorem niezmienniczym ze względu na przeskalowania. Stąd dla dowolnego $P > 0$, zbiór $M(\Theta_\pi^*) \cap \mathcal{M}^P$ jest dodatniej miary $\mu_{C,P}$. Zauważmy ponadto, że ze względu na uwagę 2.14, zbiór $M(\Theta_\pi^*) \cap \mathcal{M}^P$ jest zbiorem niezmienniczym ze względu na potok Teichmüllera. Z ergodyczności tegoż potoku otrzymujemy, że $\mu_{C,P}(M(\Theta_\pi^*) \cap \mathcal{M}^P) = 1$. W szczególności, $M(\Theta_\pi^*) \cap \mathcal{M}^P$ jest zbiorem gęstym w $C \cap \mathcal{M}^P$. Z dowolności P uzyskujemy tezę. \square

Zauważmy, że ze względu na twierdzenie 2.16, z każdą składową spójności $C = C_G$ przestrzeni moduli możemy stowarzyszyć permutację $\hat{\pi} \in G$ spełniającą $\hat{\pi}_1 \circ \hat{\pi}_0^{-1}(d) = 1$ oraz $\hat{\pi}_0 \circ \hat{\pi}_1^{-1}(d) = 1$, wówczas $\overline{M(\Theta_{\hat{\pi}}^*)} = C$. Zatem aby udowodnić, że pewna własność zachodzi dla gęstego podzbioru struktur translacyjnych w C_G wystarczy wykazać, że zachodzi ona dla struktur translacyjnych parametryzowanych gęstym podzbiorem $\Theta_{\hat{\pi}}^*$.

UWAGA 2.22. W języku twierdzenia 2.20, dla każdego genu $g \geq 2$ składowe hipereliptyczne $\mathcal{M}^{hyp}(2g-2)$ oraz $\mathcal{M}^{hyp}(g-1, g-1)$ odpowiadają rozszerzonym grafom Rauzy'ego permutacji symetrycznych odpowiednio $2g$ i $2g-1$ elementów (patrz [23]).

Powyższe fakty będą użyteczne przy dowodzie warunku gęstości w głównym rezultacie rozprawy.

Przez I^n będziemy oznaczać dziedzinę przekładania odcinków $R^n(T_{\pi,\lambda})$. Z kolei dla każdego $a \in \mathcal{A}$ przez I_a^n będziemy oznaczać przekładany odcinek dla $R^n(T_{\pi,\lambda})$, odpowiadający symbolowi a . W szczególności $I = I^0$ oraz $I_a = I_a^0$ dla $a \in \mathcal{A}$.

Oznaczmy przez $A^{(n)}(\pi, \lambda) = A^{(n)} = [A_{ab}^{(n)}]_{a,b \in \mathcal{A}}$ n -tą macierz indukcji Rauzy'ego-Veecha (lub w skrócie macierz Rauzy'ego), t.j. współczynnik $A_{ab}^{(n)}$ wskazuje ile razy przedział I_b^n odwiedza przedział I_a poprzez iteracje $T_{\pi,\lambda}$ zanim powróci pierwszy raz do I^n .

UWAGA 2.23. Niech $T = T_{\pi,\lambda} : I \rightarrow I$ będzie przekładaniem d odcinków spełniającym warunek Keane'a. Wtedy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ (patrz Lemma 4.2 w [33]) przedział I można rozłożyć na d rozłącznych wież Rochlina postaci $\{T^i I_b^n; 0 \leq i < s_b^n\}$, gdzie $s_b^n := \sum_{a \in \mathcal{A}} A_{ab}^{(n)}(\pi, \lambda)$ dla $b \in \mathcal{A}$. Dokładniej, $T^i I_b^n$ dla $i = 0, \dots, s_b^n - 1$ oraz $b \in \mathcal{A}$ są parami rozłącznymi odcinkami, wypełniającymi I . Co więcej, każdy taki odcinek $T^i I_b^n$ jest zawarty w pewnym przedziale I_a oraz $T^{s_b^n} I_b^n \subset I^n$. Wynika stąd, że T działa na każdy odcinek $T^i I_b^n$ poprzez translację oraz s_b^n jest czasem pierwszego powrotu odcinka I_b^n do I^n poprzez T .

LEMAT 2.24 (patrz [31]). Niech $(\pi, \lambda) \in S_0^{\mathcal{A}} \times \mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathcal{A}}$ będzie takie, że $T_{\pi,\lambda}$ spełnia warunek Keane'a. Wtedy

- (i) $A^{(n)}(\pi, \lambda)\lambda^n = \lambda$;
- (ii) $A^{(n)}(\pi, \lambda) = A^{(1)}(\pi^0, \lambda^0) \cdot \dots \cdot A^{(1)}(\pi^{n-1}, \lambda^{n-1})$, gdzie $(\pi^i, \lambda^i) = R^i(\pi, \lambda)$ dla $i = 0, \dots, n-1$;
- (iii) istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że macierz $A^{(n)}(\pi, \lambda)$ jest ściśle dodatnia

(iv) dla prawie każdego $(\pi, \lambda) \in S_0^A \times \mathbb{R}_{\geq 0}^A$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że spełniony jest warunek (iii) oraz $\pi^n = \pi$.

UWAGA 2.25. Nietrudno zauważyć, że

$$(A^{(1)}(\pi, \lambda))_{ab} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } a = b \\ 1, & \text{gdy } a = \pi_0^{-1}(d), b = \pi_1^{-1}(d) \text{ oraz } \lambda_a > \lambda_b \\ 1, & \text{gdy } a = \pi_1^{-1}(d), b = \pi_0^{-1}(d) \text{ oraz } \lambda_a > \lambda_b \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

W szczególności $A^{(1)}(\pi, \lambda) \in SL_{\mathcal{A}}(\mathbb{Z})(= SL_d(\mathbb{Z}))$, co razem z punktem (ii) w lemacie 2.24 implikuje, że $A^{(n)}(\pi, \lambda) \in SL_{\mathcal{A}}(\mathbb{Z})$. Co więcej, jeśli $R(\pi, \lambda) = (\pi^1, \lambda^1)$, to $\lambda^1 = (A^{(1)}(\pi, \lambda))^{-1}\lambda$, a co za tym idzie $\lambda^n = (A^{(n)}(\pi, \lambda))^{-1}\lambda$. Innymi słowy

$$(2.19) \quad R^n(\pi, \lambda) = (\pi^n, (A^{(n)}(\pi, \lambda))^{-1}\lambda),$$

a ponadto warto w tym miejscu zaznaczyć, że jeśli $\mathbf{R}^n(\pi, \lambda, \tau)$ jest dobrze zdefiniowana, to

$$(2.20) \quad \mathbf{R}^n(\pi, \lambda, \tau) = (\pi^n, (A^{(n)}(\pi, \lambda))^{-1}\lambda, (A^{(n)}(\pi, \lambda))^{-1}\tau),$$

natomiast jeśli dobrze zdefiniowana jest $\mathbf{R}^{-n}(\pi, \lambda, \tau) = (\pi', \lambda', \tau')$, to

$$(2.21) \quad \mathbf{R}^{-n}(\pi, \lambda, \tau) = (\pi', A^{(n)}(\pi', \lambda')\lambda, A^{(n)}(\pi', \lambda')\tau).$$

Mówimy, że przekładanie odcinków $T_{\pi, \lambda}$ ma typ „ θ ”, lub „ t ”, gdy $\lambda_{\pi_0^{-1}(d)} > \lambda_{\pi_1^{-1}(d)}$, natomiast ma typ „ l ”, lub „ b ”, gdy $\lambda_{\pi_0^{-1}(d)} < \lambda_{\pi_1^{-1}(d)}$.

UWAGA 2.26. W świetle uwagi 2.25, macierz $A^{(1)}(\pi, \lambda)$ zależy tylko od π oraz typu $T_{\pi, \lambda}$. Co więcej, permutacja π i typ $T_{\pi, \lambda}$ determinują postać permutacji π^1 . Zatem poprzez indukcję matematyczną można wykazać, że $A^{(n)}(\pi, \lambda)$ zależy tylko od π oraz ciągu typów przekładań $T_{R^k(\pi, \lambda)}$, dla $k = 0, \dots, n-1$.

LEMAT 2.27. Zbiór trójek $(\pi, \lambda, \tau) \in \bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi}$ takich, że λ i τ są wektorami wymiennie niezależnymi jest zbiorem niezmienniczym ze względu na działanie \mathbf{R} i \mathbf{R}^{-1} .

DOWÓD. Rozważmy zbiór $N_{\lambda} \subset \bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi, 1, 1}$ elementów (π, λ, τ) takich, λ jest wektorem wymiennie niezależnym, oraz zbiór $N_{\tau} \subset \bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi, 1, 1}$ elementów (π, λ, τ) takich, że τ jest wektorem wymiennie niezależnym. Wykażemy teraz, że N_{λ} i N_{τ} są zbiorami niezmienniczymi ze względu na \mathbf{R} i \mathbf{R}^{-1} . Jest to wystarczające, gdyż przekrój dwóch zbiorów niezmienniczych także jest zbiorem niezmienniczym. Ze względu na (2.20) oraz (2.21), wektory λ i τ po przekształceniu przez \mathbf{R} oraz przez \mathbf{R}^{-1} wyraża się tym samym wzorem. Wystarczy więc, że wykażemy, że N_{λ} jest zbiorem niezmienniczym, gdyż ten sam rezultat dla N_{τ} dowodzony jest analogicznie.

Niech $(\pi, \lambda, \tau) \in N_{\lambda}$. Wtedy jeśli $\mathbf{R}(\pi, \lambda, \tau) = (\pi^1, \lambda^1, \tau^1)$ oraz $\mathbf{R}^{-1}(\pi, \lambda, \tau) = (\pi', \lambda', \tau')$, to z uwagi 2.25 wiemy, że

$$\lambda^1 = A^{(1)}(\pi, \lambda)^{-1}\lambda \text{ oraz } \lambda' = A^{(1)}(\pi', \lambda')\lambda.$$

Jednakże, macierze $A^{(1)}(\pi, \lambda)$ oraz $A^{(1)}(\pi', \lambda')$ są macierzami nieosobliwymi i całkowitoliczbowymi. Stąd, gdyby λ^1 lub λ' było wektorem wymiennie zależnym, to również λ miałoby tę własność, co jest sprzeczne z wyborem (π, λ, τ) . \square

Rozważmy miarę μ na $\bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi}$ będącą obcięciem produktu miary liczącej na G i miary Lebesgue'a na $\mathbb{R}^A \times \mathbb{R}^A$. Ponieważ zbiór takich trójek $(\pi, \lambda, \tau) \in \bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi}$, że λ i τ są wektorami wymiennie niezależnymi, jest zbiorem pełnej miary μ , to

powyższy lemat umożliwia rozpatrywanie wielokątnej indukcji Rauzy'ego jako mierzalnego automorfizmu na $(\bigcup_{\pi \in G} \Theta_\pi, \mu)$. Miara μ jest w istocie nieskończoną miarą niezmienniczą dla \mathbf{R} (patrz Lemma 21.1 w [33]).

LEMAT 2.28. *Niech $T_{\pi, \lambda} : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ będzie dowolnym przekładaniem odcinków spełniającym warunek Keane'a. Wtedy dla każdego $\lambda' \in \mathbb{R}_{>0}^A$ oraz $0 \leq k \leq n$, element $R^k(\pi, A^{(n)}(\pi, \lambda)\lambda')$ jest dobrze zdefiniowany. Ponadto*

$$A^{(k)}(\pi, A^{(n)}(\pi, \lambda)\lambda') = A^{(k)}(\pi, \lambda)$$

a permutacje odpowiadające przekładaniom otrzymanym po zadziałaniu k razy indukcją Rauzy'ego na $T_{\pi, A^{(n)}(\pi, \lambda)\lambda'}$ i $T_{\pi, \lambda}$ są takie same.

DOWÓD. Dowód przeprowadzimy stosując indukcję matematyczną względem n . Niech $n = 1$ oraz $\lambda' \in \mathbb{R}_{>0}^A$. Zauważmy, że dla dowolnego $a \in \mathcal{A}$ zachodzi

$$(A^{(1)}(\pi, \lambda)\lambda')_a = \begin{cases} \lambda'_{\pi_0^{-1}(d)} + \lambda'_{\pi_1^{-1}(d)}, & \text{gdzie } a = \pi_0^{-1}(d) \text{ oraz } \lambda_{\pi_0^{-1}(d)} > \lambda_{\pi_1^{-1}(d)}; \\ \lambda'_{\pi_0^{-1}(d)} + \lambda'_{\pi_1^{-1}(d)}, & \text{gdzie } a = \pi_1^{-1}(d) \text{ oraz } \lambda_{\pi_0^{-1}(d)} < \lambda_{\pi_1^{-1}(d)}; \\ \lambda'_a, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

W szczególności $(A^{(1)}(\pi, \lambda)\lambda')_{\pi_0^{-1}(d)} \neq (A^{(1)}(\pi, \lambda)\lambda')_{\pi_1^{-1}(d)}$ oraz

$$(A^{(1)}(\pi, \lambda)\lambda')_{\pi_0^{-1}(d)} > (A^{(1)}(\pi, \lambda)\lambda')_{\pi_1^{-1}(d)} \Leftrightarrow \lambda_{\pi_0^{-1}(d)} > \lambda_{\pi_1^{-1}(d)},$$

tj. przekładania $T_{\pi, A^{(1)}(\pi, \lambda)\lambda'}$ oraz $T_{\pi, \lambda}$ są tego samego typu. Stąd na mocy uwagi 2.26 otrzymujemy

$$(2.22) \quad A^{(1)}(\pi, A^{(1)}(\pi, \lambda)\lambda') = A^{(1)}(\pi, \lambda),$$

co z kolei wraz (2.19) implikuje

$$(2.23) \quad R(\pi, A^{(1)}(\pi, \lambda)\lambda') = (\pi^1, \lambda').$$

Załóżmy, że wykazaliśmy tezę lematu dla pewnego n . Wykażemy jej prawdziwość dla $n + 1$. Korzystając z założenia indukcyjnego dla (π^1, λ^1) otrzymujemy, że dla dowolnego wektora $\lambda' \in \mathbb{R}_{>0}^A$ oraz $0 \leq k \leq n$ zachodzi

$$(2.24) \quad A^{(k)}(\pi^1, A^{(n)}(\pi^1, \lambda^1)\lambda') = A^{(k)}(\pi^1, \lambda^1),$$

elementy $R^k(\pi, A^{(n)}(\pi^1, \lambda^1)\lambda')$ są dobrze zdefiniowane, a permutacje przekładania uzyskanych po zadziałaniu k razy indukcją Rauzy'ego na $T_{\pi^1, A^{(n)}(\pi^1, \lambda^1)\lambda'}$ oraz T_{π^1, λ^1} są identyczne. Ponadto korzystając z pierwszego kroku indukcyjnego dla wektora $A^{(n)}(\pi^1, \lambda^1)\lambda'$ otrzymujemy, że

$$(2.25) \quad A^{(1)}(\pi, A^{(1)}(\pi, \lambda)(A^{(n)}(\pi^1, \lambda^1)\lambda')) = A^{(1)}(\pi, \lambda),$$

$R(\pi, A^{(1)}(\pi, \lambda)(A^{(n)}(\pi^1, \lambda^1)\lambda'))$ jest poprawnie określone oraz

$$(2.26) \quad R(\pi, A^{(1)}(\pi, \lambda)(A^{(n)}(\pi^1, \lambda^1)\lambda')) = (\pi^1, A^{(n)}(\pi^1, \lambda^1)\lambda').$$

W świetle (2.24), (2.25) i (2.26), korzystając dodatkowo z punktu (ii) w lemacie 2.24, uzyskujemy

$$\begin{aligned} A^{(k+1)}(\pi, A^{(n+1)}(\pi, \lambda)\lambda') &= A^{(k+1)}(\pi, A^{(1)}(\pi, \lambda)A^{(n)}(\pi^1, \lambda^1)\lambda') \\ &= A^{(1)}(\pi, A^{(1)}(\pi, \lambda)(A^{(n)}(\pi^1, \lambda^1)\lambda')) \cdot A^{(k)}(\pi^1, A^{(n)}(\pi^1, \lambda^1)\lambda') \\ &= A^{(1)}(\pi, \lambda) \cdot A^{(k)}(\pi^1, \lambda^1) = A^{(k+1)}(\pi, \lambda), \end{aligned}$$

dla dowolnego $k = 0, \dots, n$, z czego, po uwzględnieniu faktu, że dla dowolnego wektora $(\pi, \lambda) \in S_0^A \times \mathbb{R}_{>0}^A$ mamy $A^{(0)}(\pi, \lambda) = Id$, wynika pierwsza część tezy lematu dla $n + 1$.

Na mocy (2.26) otrzymujemy, że permutacje odpowiadające przekładaniom $R(\pi, (A^{(n+1)}(\pi, \lambda)\lambda'))$ oraz $R(\pi, \lambda)$ są identyczne. Co więcej, z tezy lematu dla n wiemy, że permutacje odpowiadające przekładaniom $R^k(\pi^1, (A^{(n)}(\pi^1, \lambda^1)\lambda'))$ oraz $R^k(\pi^1, \lambda^1)$ są identyczne dla $k = 0, \dots, n$. Skoro ze względu na (2.26) zachodzi

$$R^{k+1}(\pi, (A^{(n+1)}(\pi, \lambda)\lambda')) = R^k(R(\pi, (A^{(n+1)}(\pi, \lambda)\lambda'))) = R^k(\pi^1, (A^{(n)}(\pi^1, \lambda^1)\lambda')),$$

to permutacje odpowiadające przekładaniom $R^{k+1}(\pi, (A^{(n+1)}(\pi, \lambda)\lambda'))$ i $R^k(\pi^1, \lambda^1) = R^{k+1}(\pi, \lambda)$ są identyczne dla $k = 0, \dots, n$, co kończy dowód kroku indukcyjnego dla $n + 1$, a zarazem całego lematu. \square

Dla każdej dodatniej d -wymiarowej macierzy kwadratowej B indeksowanej alfabetem \mathcal{A} niech

$$(2.27) \quad \rho(B) := \max_{a,b,c \in \mathcal{A}} \frac{B_{ab}}{B_{ac}}.$$

Zdefiniujmy ponadto $\mathfrak{b}_b(B) := \sum_{a \in \mathcal{A}} B_{ab}$. Mamy wtedy następujący rezultat.

LEMAT 2.29. *Niech A i B będą nieosobliwymi d -wymiarowymi macierzami kwadratowymi indeksowanymi alfabetem \mathcal{A} . Załóżmy ponadto, że B jest macierzą dodatnią oraz A nieujemną. Zachodzą wtedy poniższe własności:*

$$(2.28) \quad \mathfrak{b}_b(B) \leq \rho(B)\mathfrak{b}_c(B) \quad \text{dla każdych } b, c \in \mathcal{A},$$

oraz

$$(2.29) \quad \rho(AB) \leq \rho(B).$$

Ponadto jeżeli $\|\eta\| = \sum_{a \in \mathcal{A}} |\eta_a|$ dla $\eta \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$, to

$$(2.30) \quad \frac{\|B\lambda' - B\lambda\|}{\|B\lambda\|} \leq \rho(B) \cdot \frac{\|\lambda' - \lambda\|}{\|\lambda\|},$$

dla dowolnych $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}_{>0}^{\mathcal{A}}$.

DOWÓD. Z definicji ρ mamy $\frac{B_{ab}}{B_{ac}} \leq \rho(B)$, a stąd

$$\mathfrak{b}_b(B) = \sum_{a \in \mathcal{A}} B_{ab} \leq \sum_{a \in \mathcal{A}} B_{ac}\rho(B) = \rho(B)\mathfrak{b}_c(B),$$

co dowodzi (2.28). Ponadto dla dowolnych $a, b, c \in \mathcal{A}$ zachodzi

$$\frac{(AB)_{ab}}{(AB)_{ac}} = \frac{\sum_{d \in \mathcal{A}} A_{ad}B_{db}}{\sum_{d \in \mathcal{A}} A_{ad}B_{dc}} \leq \frac{\sum_{d \in \mathcal{A}} A_{ad}\rho(B)B_{dc}}{\sum_{d \in \mathcal{A}} A_{ad}B_{dc}} = \rho(B),$$

co po przejściu do maksimum implikuje (2.29).

Pozostało dowieść (2.30). Korzystając z nierówności trójkąta a następnie z definicji ρ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|B(\lambda' - \lambda)\| &\leq \sum_{a \in \mathcal{A}} \sum_{b \in \mathcal{A}} B_{ab} |\lambda'_b - \lambda_b| \leq \sum_{a \in \mathcal{A}} \max_{c \in \mathcal{A}} (B_{ac}) \sum_{b \in \mathcal{A}} |\lambda'_b - \lambda_b| \\ &= \sum_{a \in \mathcal{A}} \max_{c \in \mathcal{A}} (B_{ac}) \| \lambda' - \lambda \|. \end{aligned}$$

Ponadto

$$\|B\lambda\| = \sum_{a \in \mathcal{A}} \sum_{b \in \mathcal{A}} B_{ab} \lambda_b \geq \sum_{a \in \mathcal{A}} \min_{c \in \mathcal{A}}(B_{ac}) \sum_{b \in \mathcal{A}} \lambda_b = \sum_{a \in \mathcal{A}} \min_{c \in \mathcal{A}}(B_{ac}) \|\lambda\|.$$

Podsumowując otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{\|B(\lambda' - \lambda)\|}{\|B\lambda\|} &\leq \frac{\sum_{a \in \mathcal{A}} \max_{c \in \mathcal{A}}(B_{ac}) \|\lambda' - \lambda\|}{\sum_{a \in \mathcal{A}} \min_{c \in \mathcal{A}}(B_{ac}) \|\lambda\|} \\ &\leq \frac{\sum_{a \in \mathcal{A}} \rho(B) \min_{c \in \mathcal{A}}(B_{ac}) \|\lambda' - \lambda\|}{\sum_{a \in \mathcal{A}} \min_{c \in \mathcal{A}}(B_{ac}) \|\lambda\|} = \rho(B) \frac{\|\lambda' - \lambda\|}{\|\lambda\|}, \end{aligned}$$

co kończy dowód lematu. \square

Niech

$$\Lambda^{\mathcal{A}} := \{\lambda \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}}; \lambda_a \geq 0 \text{ dla każdego } a \in \mathcal{A} \text{ oraz } \sum_{a \in \mathcal{A}} \lambda_a = 1\}.$$

Znormalizowaną indukcją Rauzy'ego-Veecha nazywamy odwzorowanie

$$\tilde{R} : S_0^{\mathcal{A}} \times \Lambda^{\mathcal{A}} \rightarrow S_0^{\mathcal{A}} \times \Lambda^{\mathcal{A}}, \quad R(\pi, \lambda) = \left(\pi^1, \frac{\lambda^1}{|\lambda^1|} \right).$$

Poniższe twierdzenie zostało udowodnione w [30].

TWIERDZENIE 2.30. *Dla każdego grafu Rauzy'ego $G \subset S_0^{\mathcal{A}}$ istnieje σ -skończona \tilde{R} -niezmiennicza miara η_G na $G \times \Lambda^{\mathcal{A}}$ równoważna produktowi miary liczącej na G i miary Lebesgue'a na $\Lambda^{\mathcal{A}}$. Odwzorowanie \tilde{R} na $(G \times \Lambda^{\mathcal{A}}, \eta_G)$ jest ergodyczne i powracające.*

Powróćmy do wielokątnej indukcji Rauzy'ego-Veecha \mathbf{R} . Niech G będzie dowolnym grafem Rauzy'ego permutacji nieredukowalnych oraz niech C będzie odpowiadającą mu składową spójności. Dla dowolnego $P > 0$, przez $C_P \subset C$ będziemy oznaczać podzbiór tych struktur translacyjnych $\zeta \in C$, dla których $\lambda_{\zeta}(M) = P$.

Niech $\pi \in G$ oraz niech $(\pi, \lambda, \tau) \in \Theta_{\pi}$. Przez $\text{Area}(\pi, \lambda, \tau)$ będziemy oznaczać pole figury odpowiadającej (π, λ, τ) , tzn.

$$(2.31) \quad \text{Area}(\pi, \lambda, \tau) = \langle \lambda, -\Omega_{\pi} \tau \rangle.$$

Jeśli dodatkowo $(\pi, \lambda, \tau) \in \Theta_{\pi}^*$ i $\zeta = M(\pi, \lambda, \tau)$, to $\text{Area}(\pi, \lambda, \tau) = \lambda_{\zeta}(M)$. Zauważmy, że powyższy wzór (2.31) pozwala na zdefiniowanie pola nawet dla parametrów (π, λ, τ) nienależących do $(\pi, \lambda, \tau) \in \Theta_{\pi}^{\#}$. Rozważmy

$$\Theta_{\pi, P} := \{(\pi, \lambda, \tau) \in \Theta_{\pi}; \text{Area}(\pi, \lambda, \tau) = P\}.$$

Skoro \mathbf{R} wyznacza różne parametryzacje tej samej struktury translacyjnej, to $\text{Area}(\pi, \lambda, \tau) = \text{Area}(\mathbf{R}(\pi, \lambda, \tau))$ dla $(\pi, \lambda, \tau) \in \Theta_{\pi}^+$. Innymi słowy, jeśli $\Theta_{\pi, P}^+ := \Theta_{\pi, P} \cap \Theta_{\pi}^+$, to dla każdego $P > 0$ zachodzi $\mathbf{R}(\cup_{\pi \in G} \Theta_{\pi, P}^+) \subset \cup_{\pi \in G} \Theta_{\pi, P}$. Ponadto dla każdego $P > 0$ zbiór $\Theta_{\pi, P}$ jest niezmienniczy ze względu na działanie potoku Teichmüllera \mathcal{G}_t .

Niech $\Theta_{\pi, P, L} := \{(\pi, \lambda, \tau) \in \Theta_{\pi, P}; |\lambda| = L\}$ dla dowolnego $L > 0$. Następnie, dla dowolnych $P, P', L, L' > 0$ definiujemy ciągłe przeskalowanie $\ell_{P, P', L, L'} : \Theta_{\pi, P, L} \rightarrow \Theta_{\pi, P', L'}$ dane wzorem

$$(2.32) \quad \ell_{P, P', L, L'}(\pi, \lambda, \tau) = (\pi, \lambda, \tau) = \left(\pi, \frac{L'}{L} \lambda, \frac{P' L}{P L'} \tau \right).$$

Potoki translacyjne stowarzyszone ze strukturami translacyjnymi powiązany wyżej zdefiniowanym przeskalowaniem posiadają wiele wspólnych własności dynamicznych. Ścisłej mówiąc, dla $(\pi, \lambda, \tau) \in \Theta_{\pi, P, L}^* := \Theta_{\pi, P, L} \cap \Theta_{\pi}^*$, pionowy potok translacyjny na $M(\ell_{P, P', L, L'}(\pi, \lambda, \tau))$ jest izomorficzny z potokiem translacyjnym na $M(\pi, \lambda, \tau)$, z dokładnością do liniowej zmiany czasów. W szczególności dla nas ważnymi własnościami wspólnymi dla tak stowarzyszonych potoków będą ergodyczność, słabe mieszanie i izomorfizm ze swoim potokiem odwrotnym.

Niech $\Theta_{\pi, P, L}^+ := \Theta_{\pi, P, L} \cap \Theta_{\pi}^+$. Znormalizowaną indukcją Rauzy'ego Veecha $\tilde{\mathbf{R}} : \bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi, P, L}^+ \rightarrow \bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi, P, L}^+$ nazywamy odwzorowanie dane wzorem

$$\tilde{\mathbf{R}}(\pi, \lambda, \tau) := \left(\pi^1, \frac{L}{|\lambda^1|} \lambda^1, \frac{|\lambda^1|}{L} \tau^1 \right),$$

gdzie $(\pi^1, \lambda^1, \tau^1) = \mathbf{R}(\pi, \lambda, \tau)$. Jeśli ponadto (π, λ, τ) jest takie, że $\sum_{a \in A} \tau_0 \neq 0$, to

$$\tilde{\mathbf{R}}^{-1}(\pi, \lambda, \tau) = \left(\pi', \frac{L}{|\lambda'|} \lambda', \frac{|\lambda'|}{L} \tau' \right),$$

gdzie $(\pi', \lambda', \tau') = \mathbf{R}^{-1}(\pi, \lambda, \tau)$.

Przypomnijmy, że miarę μ na standardowej przestrzeni borelowskiej nazywamy miarą Radona, gdy jest ona regularna z dołu oraz lokalnie skończona. Na przestrzeniach σ -zwartych drugi z tych warunków jest równoważny temu, że μ jest skończona na zbiorach zwartych. Zdefiniujemy teraz naturalną miarę Radona na $\bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi, 1, 1}^+$, względem której $\tilde{\mathbf{R}}$ będzie zachowującym miarę automorfizmem. W tym celu wykazemy następujący lemat.

LEMAT 2.31. Niech $B \subseteq \mathbb{R}^m$ będzie zbiorem domkniętym dla pewnego $m \geq 1$. Rozważmy dowolną miarę Radona η na $B \times \mathbb{R}$ i oznaczmy przez Id_B identyczność na zbiorze B , a przez σ_t przesunięcie o t na \mathbb{R} . Jeśli dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$(2.33) \quad (Id_B \times \sigma_t)_* \eta(A) = e^{\alpha t} \eta(A)$$

dla dowolnego mierzalnego zbioru $A \subseteq B \times \mathbb{R}$, to η jest postaci $e^{-\alpha s} d\nu ds$, dla pewnej miary Radona ν na B .

DOWÓD. Z (2.33) dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ i dla dowolnego ograniczonego podzbioru borelowskiego $A \subseteq B \times \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned} \int_{B \times \mathbb{R}} \chi_A(x, s+t) d\eta(x, s) &= \int_{B \times \mathbb{R}} \chi_{(Id_B \times \sigma_t)^{-1}A}(x, s) d\eta(x, s) \\ &= e^{\alpha t} \int_{B \times \mathbb{R}} \chi_A(x, s) d\eta(x, s). \end{aligned}$$

W szczególności dla każdej funkcji ciągłej o zwartym nośniku f na $B \times \mathbb{R}$ otrzymujemy

$$\int_{B \times \mathbb{R}} f(x, s+t) d\eta(x, s) = e^{\alpha t} \int_{B \times \mathbb{R}} f(x, s) d\eta(x, s).$$

Rozważmy miarę Radona μ na $B \times \mathbb{R}$ taką, że $d\mu(x, s) = e^{\alpha s} d\eta(x, s)$. Wtedy korzystając z powyższej równości otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{B \times \mathbb{R}} f(x, s+t) d\mu(x, s) &= \int_{B \times \mathbb{R}} f(x, s+t) e^{\alpha s} d\eta(x, s) \\ &= e^{-\alpha t} \int_{B \times \mathbb{R}} f(x, s+t) e^{\alpha(s+t)} d\eta(x, s) = e^{-\alpha t} \left(e^{\alpha t} \int_{B \times \mathbb{R}} f(x, s) e^{\alpha s} d\eta(x, s) \right) \\ &= \int_{B \times \mathbb{R}} f(x, s) e^{\alpha s} d\eta(x, s) = \int_{B \times \mathbb{R}} f(x, s) d\mu(x, s). \end{aligned}$$

Zatem μ jest miarą $(Id \times \sigma_t)$ -niezmienniczą.

Pokażemy, że miara μ jest miarą produktową postaci $\nu \otimes Leb$, gdzie ν jest pewną miarą Radona na zbiorze domkniętym B . Zauważmy, że dla każdego zbioru mierzalnego $A \subset B$ oraz $s \in \mathbb{R}$ zachodzi $\mu(A \times \{s\}) = 0$. W przeciwnym wypadku, ze względu na dolną regularność miary μ istniałby zbiór zwarty postaci $\tilde{A} \times \{s\}$ o dodatniej mierze. Ze względu na $(Id \times \sigma_t)$ -niezmienniczość miary μ zachodziłoby również $\mu(\tilde{A} \times \{t\}) = \mu(\tilde{A} \times \{s\}) \neq 0$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$. Jest to sprzeczne z własnością miary Radona, gdyż wtedy $\mu(\tilde{A} \times [0, 1]) = \infty$, a $\tilde{A} \times [0, 1]$ jest zbiorem zwartym.

Ze względu na domkniętość zbioru B możemy wybrać pokrycie $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ zbioru B takie, że dla każdego $i \in \mathbb{N}$ zbiór B_i jest zwartym podzbiorem zbioru B (dla przykładu można rozpatrzyć zbiory $B_i = B \cap D(0, i)$, gdzie $D(0, r)$ oznacza kulę domkniętą o środku 0 i promieniu r w przestrzeni \mathbb{R}^m). Rozważmy teraz $C_1 = B_1$ oraz $C_i := B_i \setminus \bigcup_{j < i} B_j$ dla $i > 1$. Ustalmy $i \in \mathbb{N}$ i rozważmy miarę $\mu|_{C_i \times \mathbb{R}}$. Weźmy dowolny mierzalny podzbiór $A \in C_i$ i zdefiniujmy funkcję $f_A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem

$$f_A(t) := \begin{cases} \mu(A \times [0, t)) & \text{gdy } t \geq 0; \\ -\mu(A \times [t, 0)) & \text{gdy } t < 0. \end{cases}$$

Zauważmy, że jest to funkcja dobrze określona, gdyż

$$\mu(A \times [0, t)) \leq \mu(C_i \times [0, t)) \leq \mu(B_i \times [0, t)) < \infty.$$

Ponadto jest ona ciągła oraz, ze względu na $(Id \times \sigma_t)$ -niezmienniczość miary μ , addytywna, tzn.

$$f_A(t + s) = f_A(t) + f_A(s) \text{ dla dowolnych } t, s \in \mathbb{R}.$$

Zatem f_A jest rosnącą funkcją liniową i niech $\nu_i(A)$ będzie jej współczynnikiem kierunkowym. Wtedy

$$\nu_i(A) = \mu(A \times [0, 1)) \text{ oraz } \mu(A \times [a, b)) = \nu_i(A) \cdot |b - a| \text{ dla dowolnych } a, b \in \mathbb{R}.$$

Zauważmy, że ν_i jest miarą. Rzeczywiście $\nu_i(\emptyset) = \mu(\emptyset \times [0, 1)) = \mu(\emptyset) = 0$ oraz

$$\nu_i\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \times [0, 1)\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n \times [0, 1)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu_i(A_n),$$

dla dowolnej rodziny $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ parami rozłącznych zbiorów mierzalnych w C_i . Znaleźliśmy zatem skończoną miarę ν_i na C_i taką, że dla dowolnego zbioru mierzalnego $A \subseteq C_i$ oraz dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\mu(A \times [a, b)) = \nu_i(A) \cdot Leb([a, b)).$$

Ponieważ zbiory powyższej postaci generują σ -algebrę zbiorów borelowskich na $C_i \times \mathbb{R}$, otrzymujemy równość miar μ oraz $\nu_i \otimes Leb$ na $C_i \times \mathbb{R}$.

Weźmy teraz dowolny zbiór mierzalny $E \subseteq B \times \mathbb{R}$. Wtedy

$$\mu(E) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(E \cap (C_i \times \mathbb{R})) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (\nu_i \otimes Leb)(E \cap (C_i \times \mathbb{R})).$$

Zdefiniujmy zatem miarę ν na B daną wzorem $\nu(A) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \nu_i(A \cap C_i)$. Wtedy

$$\mu(E) = (\nu \otimes Leb)(E).$$

Zauważmy, że ν jest miarą Radona. Rzeczywiście dla dowolnego zbioru zwartego $C \subseteq B$ zachodzi

$$\nu(C) = \mu(C \times [0, 1)) = \mu(C \times [0, 1]) < \infty.$$

Aby zakończyć dowód zauważmy, że z definicji miary μ wynika

$$d\eta = e^{-\alpha s} d\nu ds,$$

co należało udowodnić. \square

Rozważmy miarę $d\pi d\lambda d\tau$ (którą oznaczamy przez μ) na $\bigcup_{\pi \in G} \Theta_\pi \subset G \times \mathbb{R}^A \times \mathbb{R}^A$ (tj. produkt miary liczącej na G i miary Lebesgue'a na $\mathbb{R}^A \times \mathbb{R}^A$ obcięty do $\bigcup_{\pi \in G} \Theta_\pi$). Następnie rozważmy odwzorowanie $\psi : \left(\bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi,1,1} \right) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \bigcup_{\pi \in G} \Theta_\pi$ dane wzorem

$$\psi(\pi, \lambda, \tau, s, t) := (\pi, e^{s-t}\lambda, e^t\tau).$$

Zauważmy, że odwzorowanie to jest homeomorfizmem. Ponadto dla ustalonych $s, t \in \mathbb{R}_{>0}$ zachodzi $\psi(\Theta_{\pi,1,1}, s, t) = \Theta_{\pi, e^s, e^{s-t}}$. Rozważmy ponadto dla dowolnych $s_0, t_0 \in \mathbb{R}$ izomorfizmy $\sigma_{s_0}^1, \sigma_{t_0}^2$ na $\bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi,1,1} \times \mathbb{R}^2$ oraz $\tilde{\sigma}_{s_0}^1, \tilde{\sigma}_{t_0}^2$ na $\bigcup_{\pi \in G} \Theta_\pi$ dane wzorami

$$\begin{aligned} \sigma_{s_0}^1(\pi, \lambda, \tau, s, t) &= (\pi, \lambda, \tau, s + s_0, t); & \sigma_{t_0}^2(\pi, \lambda, \tau, s, t) &= (\pi, \lambda, \tau, s, t + t_0); \\ \tilde{\sigma}_{s_0}^1(\pi, \lambda, \tau) &= (\pi, e^{s_0}\lambda, \tau) & \text{oraz} & \tilde{\sigma}_{t_0}^2(\pi, \lambda, \tau) = (\pi, e^{-t_0}\lambda, e^{t_0}\tau). \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\psi \circ \sigma_{s_0}^1 = \tilde{\sigma}_{s_0}^1 \circ \psi \quad \text{oraz} \quad \psi \circ \sigma_{t_0}^2 = \tilde{\sigma}_{t_0}^2 \circ \psi,$$

a ponadto dla $d = \#\mathcal{A}$

$$(2.34) \quad (\tilde{\sigma}_{s_0}^1)_*\mu(E) = e^{-ds_0}\mu(E) \quad \text{oraz} \quad (\tilde{\sigma}_{t_0}^2)_*\mu(E) = \mu(E),$$

dla dowolnego zbioru mierzalnego $E \subseteq \bigcup_{\pi \in G} \Theta_\pi$.

Rozważmy miarę $\eta := (\psi^{-1})_*\mu$. Wtedy z (2.34) dla dowolnego $s_0 \in \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned} (\sigma_{s_0}^1)_*\eta(B \times I \times J) &= (\psi^{-1} \circ \tilde{\sigma}_{s_0}^1 \circ \psi)_*\eta(B \times I \times J) \\ &= (\psi^{-1})_*\mu\left((\tilde{\sigma}_{s_0}^1)^{-1} \circ \psi^{-1}(B \times I \times J)\right) \\ &= e^{-ds_0}(\psi^{-1})_*\mu(\psi^{-1}(B \times I \times J)) = e^{-ds_0}\eta(B \times I \times J), \end{aligned}$$

dla dowolnego mierzalnego podzbioru $B \subseteq \bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi,1,1}$ oraz dowolnych odcinków $I, J \in \mathbb{R}$. Zatem miara η spełnia założenia lematu 2.31, a tym samym jest ona postaci $e^{-ds}d\nu ds$, gdzie ν jest pewną miarą Radona na $(\bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi,1,1}) \times \mathbb{R}$.

Rozpatrzmy ponownie dowolny podzbiór $B \subseteq \bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi,1,1}$ oraz dowolne odcinki $I, J \in \mathbb{R}$. Wtedy z (2.34) dla dowolnego $t_0 \in \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned} \nu(B \times (J - t_0)) &= \int_{B \times (J - t_0)} d\nu = \int_{B \times [-\frac{\ln(d+1)}{d}, 0] \times (J - t_0)} e^{-ds} d\nu ds \\ &= \eta(B \times [-\frac{\ln(d+1)}{d}, 0] \times (J - t_0)) = (\sigma_{t_0}^2)_*\eta(B \times [-\frac{\ln(d+1)}{d}, 0] \times J) \\ &= (\psi^{-1} \circ \tilde{\sigma}_{t_0}^2 \circ \psi)_*\eta(B \times [-\frac{\ln(d+1)}{d}, 0] \times J) \\ &= (\psi^{-1})_*\mu\left(\psi^{-1}(B \times [-\frac{\ln(d+1)}{d}, 0] \times J)\right) \\ &= \eta(B \times [-\frac{\ln(d+1)}{d}, 0] \times J) = \nu(B \times J). \end{aligned}$$

Zatem ponownie korzystając z lematu 2.31 (dla $d = 0$), otrzymujemy, że $\nu = \xi_G \otimes \text{Leb}_{\mathbb{R}}$ dla pewnej miary Radona ξ_G na $\bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi,1,1}$. Zatem

$$(2.35) \quad d\eta = e^{-ds}d\xi_G ds dt.$$

LEMAT 2.32. *Zbiór trójek $(\pi, \lambda, \tau) \in \bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi,1,1}$ takich, że λ i τ są wektorami wymiennie niezależnymi jest zbiorem pełnej miary ξ_G . Ponadto jest to zbiór niezmienniczy ze względu na działanie $\tilde{\mathbf{R}}$ oraz \mathbf{R}^{-1} .*

DOWÓD. Rozważmy zbiór $N_\lambda \subset \bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi,1,1}$ elementów (π, λ, τ) takich, λ jest wektorem wymiernie niezależnym, oraz zbiór $N_\tau \subset \bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi,1,1}$ elementów (π, λ, τ) takich, że τ jest wektorem wymiernie niezależnym. Aby udowodnić lemat pokażemy że dopełnienia obydwu tych zbiorów są zbiorami miary 0 względem miary ξ_G .

Niech $\bar{k} = (k_a)_{a \in \mathcal{A}} \in \mathbb{Z}^{\mathcal{A}} \setminus \{0\}$ oraz niech $L_{\bar{k}} = \{(\pi, \lambda, \tau) \in \Theta_{\pi,1,1}; \sum_{a \in \mathcal{A}} k_a \lambda_a = 0\}$. Wtedy

$$\Theta_{\pi,1,1} \setminus N_\lambda = \bigcup_{\bar{k} \in \mathbb{Z}^{\mathcal{A}} \setminus \{0\}} L_{\bar{k}}.$$

Aby pokazać, że jest to zbiór miary 0 wykażemy, że dla ustalonego $\bar{k} \in \mathbb{Z}^{\mathcal{A}} \setminus \{0\}$, zbiór $L_{\bar{k}}$ jest miary 0 względem ξ_G . Zgodnie z definicją miary η (patrz (2.35)) mamy

$$\xi_G(L_{\bar{k}}) = \eta(L_{\bar{k}} \times [-\frac{\ln(d+1)}{d}, 0] \times [0, 1]) \leq \eta(L_{\bar{k}} \times \mathbb{R}^2).$$

Natomiast

$$\eta(L_{\bar{k}} \times \mathbb{R}^2) = \mu(\psi(L_{\bar{k}} \times \mathbb{R}^2)).$$

Zauważmy, że $\psi(L_{\bar{k}} \times \mathbb{R}^2) = \{(\pi, \lambda, \tau) \in \Theta_\pi; \sum_{a \in \mathcal{A}} k_a \lambda_a = 0\}$. Jako, że $\bar{k} \neq 0$, to zbiór ten stanowi podzbiór podprzestrzeni $(2d - 1)$ -wymiarowej w $\mathbb{R}^{\mathcal{A}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$. Ponieważ μ jest de facto miarą Lebesgue'a, oznacza to, że $\mu(\psi(L_{\bar{k}} \times \mathbb{R}^2)) = 0$ a zatem i $\xi_G(L_{\bar{k}}) = 0$ co należało dowieść. Aby wykazać, że dopełnienie zbioru N_τ jest miary 0 postępujemy analogicznie. Wystarczy w dowodzie zamienić rolami λ i τ . Druga teza wynika bezpośrednio z lematu 2.27. \square

Ze względu na powyższy lemat, znormalizowana wielokątna indukcja Rauzy'ego jest dobrze zdefiniowanym automorfizmem na zbiorze takich trójek $(\pi, \lambda, \tau) \in \bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi,1,1}$, że wektory λ i τ są wymiernie niezależne. Ponieważ jest to zbiór pełnej miary ξ_G , to możemy traktować $\tilde{\mathbf{R}}$ jako mierzalny automorfizm na $(\bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi,1,1}, \xi_G)$.

Pokażemy, że miara ξ_G jest niezmiennicza ze względu na $\tilde{\mathbf{R}}$. Niech $\Delta : (\bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi,1,1}^+) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow (\bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi,1,1}) \times \mathbb{R}^2$ będzie odwzorowaniem danym wzorem

$$\Delta(\pi, \lambda, \tau, s, t) = (\tilde{\mathbf{R}}(\pi, \lambda, \tau), s, t - \ln |\lambda^1|).$$

Zauważmy, że dla dowolnego elementu $(\pi, \lambda, \tau, s, t) \in (\bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi,1,1}^+) \times \mathbb{R}^2$ zachodzi

$$\begin{aligned} \psi \circ \Delta(\pi, \lambda, \tau, s, t) &= \psi(\pi^1, \frac{1}{|\lambda^1|} \lambda^1, |\lambda^1| \tau^1, s, t - \ln |\lambda^1|) \\ &= (\pi^1, \frac{e^{s-t+\ln |\lambda^1|}}{|\lambda^1|} \lambda^1, e^{t-\ln |\lambda^1|} |\lambda^1| \tau^1) \\ &= (\pi^1, e^{s-t} \lambda^1, e^t \tau^1) = \mathbf{R}(\pi, e^{s-t} \lambda, e^t \tau) \\ &= \mathbf{R} \circ \psi(\pi, \lambda, \tau, s, t). \end{aligned}$$

W szczególności z tego, μ jest \mathbf{R} -niezmiennicza, wynika że miara η (patrz (2.35)) jest Δ -niezmiennicza. Rozpatrzmy dowolny zbiór mierzalny $C \subset \bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi,1,1}^+$. Wtedy

$$\eta(\Delta(C \times [0, 1] \times [0, 1])) = \eta(C \times [0, 1] \times [0, 1]) = \xi_G(C) \cdot \int_0^1 e^{-ds} ds.$$

Natomiast z tw. Fubiniego

$$\eta(\Delta(C \times [0, 1] \times [0, 1])) = \int_{\tilde{\mathbf{R}}C} (\int_0^1 (\int_{-\ln |\lambda^1|}^{1-\ln |\lambda^1|} e^{-ds} dt) ds) d\xi_G = \xi_G(\tilde{\mathbf{R}}C) \cdot \int_0^1 e^{-ds} ds.$$

A zatem dla dowolnego zbioru mierzalnego $C \subset \bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi,1,1}^+$ otrzymaliśmy, że

$$\xi_G(C) = \xi_G(\tilde{\mathbf{R}}C).$$

Wykazaliśmy zatem, że ξ_G jest miarą $\tilde{\mathbf{R}}$ -niezmienniczą.

Okazuje się, że automorfizm $\tilde{\mathbf{R}}$ z miarą ξ_G ma bardzo dobre własności dynamiczne, o czym mówi następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 2.33 (patrz Lemma 25.1 i Corollary 27.2 w [33]). *Miara $\xi_{G,1,1} = \xi_G$ jest σ -skończoną miarą na $\bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi,1,1}$, niezmienniczą ze względu na działanie $\tilde{\mathbf{R}}$, przyjmującą dodatnie wartości na niepustych zbiorach otwartych. Ponadto odwzorowanie $\tilde{\mathbf{R}} : (\bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi,1,1}, \xi_G) \rightarrow (\bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi,1,1}, \xi_G)$ jest ergodyczne i powracające.*

UWAGA 2.34. Zauważmy, że odwzorowania $\ell_{1,P,1,L}$ i $\tilde{\mathbf{R}}$ komutują. Rozważmy zatem miarę $\xi_{G,P,L} := (\ell_{1,P,1,L})_* \xi_{G,1,1}$ na $\bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi,P,L}^+$. Po rozszerzeniu powyższej miary na $\bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi,P,L}^+$ otrzymujemy miarę niezmienniczą ze względu na $\tilde{\mathbf{R}} : \bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi,P,L} \rightarrow \bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi,P,L}$. Korzystając z twierdzenia 2.33 otrzymujemy, że odwzorowanie $\tilde{\mathbf{R}} : \bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi,P,L} \rightarrow \bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi,P,L}$ z miarą $\xi_{G,P,L}$ jest automorfizmem powracającym i ergodycznym. Jeśli nie będzie to wprowadzało niejasności, to każdą z opisanych wyżej miar będziemy oznaczać przez ξ_G .

UWAGA 2.35. Miarę pojawiającą się w twierdzeniu 2.30 można uzyskać jako rzut miary $\xi_{G,1,1}$ z twierdzenia 2.33 na współrzędne odpowiadające permutacji i wektorowi długości.

Twierdzenie 2.33 umożliwia pozyskiwanie dla prawie wszystkich parametrów (π, λ, τ) innych reprezentacji wielokątnych powierzchni $M(\pi, \lambda, \tau)$, w których krawędzie wielokątów spełniają warunki zadane w sposób otwarty (np. poprzez ostre nierówności). Warto jeszcze zaznaczyć, że znormalizowana indukcja Rauzy'ego-Veecha $\tilde{\mathbf{R}}$ jest niczym innym jak odwzorowaniem pierwszego powrotu potoku Teichmüllera $\mathcal{G}_t : \bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi,P} \rightarrow \bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi,P}$ do zbioru $\bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi,P,L}$ (z dokładnością do zbioru miary 0).

UWAGA 2.36. Prawostronną indukcję Rauzy'ego-Veecha możemy także wyrazić w języku spinanych prostokątów. Nadużywając notacji będziemy ją również oznaczać przez \mathbf{R} . Ścisłej mówiąc, rozważamy odwzorowanie $\mathbf{R} : S_0^{\mathcal{A}} \times \mathbb{R}_{>0}^{\mathcal{A}} \times \mathbb{R}_{>0}^{\mathcal{A}} \rightarrow S_0^{\mathcal{A}} \times \mathbb{R}_{>0}^{\mathcal{A}} \times \mathbb{R}_{>0}^{\mathcal{A}}$ dane wzorem $\mathbf{R}(\pi, \lambda, h) = (\pi^1, \lambda^1, h^1)$, gdzie $(\pi^1, \lambda^1) = R(\pi, \lambda)$ natomiast dla każdego $a \in \mathcal{A}$ mamy

$$h_a^1 := \begin{cases} h_{\pi_0^{-1}(a)} + h_{\pi_1^{-1}(a)} & \text{jeżeli } a = \pi_0^{-1}(d) \text{ oraz } \lambda_{\pi_0^{-1}(d)} < \lambda_{\pi_1^{-1}(d)}; \\ h_{\pi_0^{-1}(a)} + h_{\pi_1^{-1}(a)} & \text{jeżeli } a = \pi_1^{-1}(d) \text{ oraz } \lambda_{\pi_0^{-1}(d)} > \lambda_{\pi_1^{-1}(d)}; \\ h_a & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Indukcja Rauzy'ego dla spinanych prostokątów i dla reprezentacji wielokątnych są ze sobą ściśle powiązane, tj.

$$(2.36) \quad M(\mathbf{R}(\pi, \lambda, \tau)) = M(\mathbf{R}(\pi, \lambda, -\Omega_\pi \tau)),$$

dla dowolnego $\pi \in S_0^{\mathcal{A}}$ oraz $(\pi, \lambda, \tau) \in \Theta_\pi^+$, o ile $\mathbf{R}(\pi, \lambda, \tau) \in \Theta_\pi^*$. Podobnie jak wielokątna indukcja Rauzy'ego umożliwia znajdowanie różnych reprezentacji wielokątnych tej samej struktury translacyjnej, tak indukcja Rauzy'ego na spinanych prostokątach umożliwia uzyskanie różnych reprezentacji specjalnych pionowego potoku translacyjnego dla ustalonej struktury translacyjnej. Analogicznie definiujemy lewostronną indukcję Rauzy'ego-Veecha dla spinanych prostokątów.

Dla reprezentacji poprzez spinane prostokąty możemy zdefiniować znormalizowaną indukcję Rauzy'ego-Veecha. Rzeczywiście dla dowolnego (π, λ, h) takiego, że $M(\pi, \lambda, h) \in M(\Theta_{\pi, P, L}^+)$ definiujemy

$$\tilde{\mathbf{R}}(\pi, \lambda, h) := \left(\pi^1, \frac{L \cdot \lambda^1}{|\lambda^1|}, \frac{h \cdot |\lambda^1|}{L} \right).$$

Należy zaznaczyć, że znormalizowana indukcja Rauzy'ego dla parametryzacji wielokątnej i dla danej przez spinane prostokąty spełnia również równanie analogiczne do (2.36), tzn.

$$M(\tilde{\mathbf{R}}(\pi, \lambda, \tau)) = M(\tilde{\mathbf{R}}(\pi, \lambda, -\Omega_\pi \tau)),$$

dla dowolnego $\pi \in S_0^{\mathcal{A}}$ oraz $(\pi, \lambda, \tau) \in \Theta_\pi^+$, o ile $\mathbf{R}(\pi, \lambda, \tau) \in \Theta_\pi^*$.

Posiłkując się w dużej mierze twierdzeniem 2.33, wykażemy teraz kilka szczególnie użytecznych dla nas faktów dotyczących wielokątnej indukcji Rauzy'ego-Veecha. Najpierw wykażemy następujący rezultat, będący rozszerzeniem lematu 2.28.

LEMAT 2.37. *Niech $\bar{\pi}$ będzie niedegenerowalną permutacją alfabetu \mathcal{A} . Niech $(\bar{\pi}, \bar{\lambda}, \bar{\tau}) \in \Theta_{\bar{\pi}}$, będzie taką trójką, że przekładanie odcinków wyznaczone przez $(\bar{\pi}, \bar{\lambda})$ spełnia warunek Keane'a. Załóżmy, że istnieje taka liczba naturalna $n \in \mathbb{N}$, że jeśli $(\bar{\pi}^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\tau}^k) := \mathbf{R}^k(\bar{\pi}, \bar{\lambda}, \bar{\tau})$, to*

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} \bar{\tau}_a^k \neq 0,$$

dla wszystkich $k = 1, \dots, n$. Niech $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}^{\mathcal{A}}$ oraz $\tau \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ będą dowolnymi wektorami takimi, że $(\bar{\pi}^n, \lambda, \tau) \in \Theta_{\bar{\pi}^n}$. Przypuśćmy, że

$$(2.37) \quad \left(\sum_{a \in \mathcal{A}} (A^{(n-k)}(\bar{\pi}^k, \bar{\lambda}^k) \tau)_a \right) \cdot \sum_{a \in \mathcal{A}} \bar{\tau}_a^k > 0,$$

dla dowolnego $k = 1, \dots, n$. Wtedy $(\bar{\pi}, A^{(n)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda}) \lambda, A^{(n)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda}) \tau) \in \Theta_{\bar{\pi}}^+$. Ponadto dla dowolnego $k = 0, \dots, n$, $\mathbf{R}^k(\bar{\pi}, A^{(n)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda}) \lambda, A^{(n)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda}) \tau)$ jest dobrze zdefiniowane oraz zachodzi równość

$$A^{(k)}(\bar{\pi}, A^{(n)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda}) \lambda) = A^{(k)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda}).$$

W szczególności

$$\mathbf{R}^n(\bar{\pi}, A^{(n)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda}) \lambda, A^{(n)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda}) \tau) = (\bar{\pi}^n, \lambda, \tau).$$

DOWÓD. Lemat udowodnimy używając indukcji matematycznej ze względu na n . Załóżmy, że $(\bar{\pi}, \bar{\lambda}, \bar{\tau})$ spełnia założenia lematu dla $n = 1$. Rozpatrzmy dowolną trójkę $(\bar{\pi}^1, \lambda, \tau) \in \Theta_{\bar{\pi}^1}^+$ taką, że spełniony jest warunek (2.37) dla $n = 1$ czyli

$$(2.38) \quad \sum_{a \in \mathcal{A}} \tau_a \cdot \sum_{a \in \mathcal{A}} \bar{\tau}_a^1 > 0.$$

Na podstawie lematu 2.28 wiemy, że $(\bar{\pi}, A^{(1)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda}) \lambda)$ jest przekładaniem odcinków takim, że $R(\bar{\pi}, A^{(1)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda}) \lambda)$ jest dobrze zdefiniowane oraz

$$R(\bar{\pi}, A^{(1)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda}) \lambda) = (\bar{\pi}^1, \lambda) \text{ oraz } A^{(1)}(\bar{\pi}^1, A^{(1)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda}) \lambda) = A^{(1)}(\bar{\pi}^1, \bar{\lambda}).$$

Musimy zatem wykazać, że $A^{(1)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda}) \tau$ spełnia pierwszy warunek w (2.8). Pokażemy najpierw, że nie jest możliwe, aby liczby $\lambda_{\bar{\pi}_0^{-1}(d)} - \lambda_{\bar{\pi}_1^{-1}(d)}$ oraz $\sum_{a \in \mathcal{A}} \bar{\tau}_a^1$ były tego samego znaku. Rzeczywiście założmy, że $\lambda_{\bar{\pi}_0^{-1}(d)} - \lambda_{\bar{\pi}_1^{-1}(d)} > 0$ oraz $\sum_{a \in \mathcal{A}} \bar{\tau}_a^1 > 0$. Wtedy, dzięki uwadze 2.25, uzyskujemy

$$\sum_{a \in \mathcal{A}; \bar{\pi}_1(a) \leq d-1} \bar{\tau}_a = \sum_{a \in \mathcal{A}} \bar{\tau}_a - \bar{\tau}_{\bar{\pi}_1^{-1}(d)} = \sum_{a \in \mathcal{A} \setminus \{\bar{\pi}_0^{-1}(d)\}} \bar{\tau}_a + (\bar{\tau}_{\bar{\pi}_0^{-1}(d)} - \bar{\tau}_{\bar{\pi}_1^{-1}(d)}) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \bar{\tau}_a^1 > 0,$$

co jest sprzeczne z definicją $\Theta_{\bar{\pi}}$. Analogicznie dowodzimy, że nie jest możliwe, aby obie liczby były ujemne.

Założmy zatem, że $\bar{\lambda}_{\bar{\pi}_0^{-1}(d)} < \bar{\lambda}_{\bar{\pi}_1^{-1}(d)}$ oraz $\sum_{a \in \mathcal{A}} \bar{\tau}_a^1 > 0$ (dowód w przypadku, gdy $\bar{\lambda}_{\bar{\pi}_0^{-1}(d)} > \bar{\lambda}_{\bar{\pi}_1^{-1}(d)}$ oraz $\sum_{a \in \mathcal{A}} \bar{\tau}_a^1 < 0$ przebiega symetrycznie). Wtedy z (2.38) mamy

$$(2.39) \quad \sum_{a \in \mathcal{A}} \tau_a > 0.$$

Przypomnijmy, że z uwagi 2.25 mamy, że $(A^{(1)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda}))_{aa} = 1$ dla $a \in \mathcal{A}$ oraz $(A^{(1)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda}))_{ab} = 0$ jeśli $a \neq \bar{\pi}_1^{-1}(d)$ oraz $b \neq a$. A zatem z tego, że $(\bar{\pi}^1, \lambda, \tau) \in \Theta_{\bar{\pi}^1}$ oraz z tego, że $\bar{\pi}_1 = \bar{\pi}_1^1$ wynika, że dla $k = 1, \dots, d-1$ zachodzi

$$\sum_{\{a \in \mathcal{A}; \bar{\pi}_1(a) \leq k\}} (A^{(1)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda})\tau)_a = \sum_{\{a \in \mathcal{A}; \bar{\pi}_1^1(a) \leq k\}} \tau_a < 0.$$

Ponadto dla $a \in \mathcal{A}$ takich, że $\bar{\pi}_0(a) < \bar{\pi}_0(\bar{\pi}_1^{-1}(d))$ zachodzi $\bar{\pi}_0^1(a) = \bar{\pi}_0(a)$, a stąd dla $k < \bar{\pi}_0(\bar{\pi}_1^{-1}(d))$ mamy

$$\sum_{\{a \in \mathcal{A}; \bar{\pi}_0(a) \leq k\}} (A^{(1)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda})\tau)_a = \sum_{\{a \in \mathcal{A}; \bar{\pi}_0^1(a) \leq k\}} \tau_a > 0.$$

Również z uwagi 2.25 mamy $(A^{(1)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda}))_{\bar{\pi}_1^{-1}(d)a} = 1$ dla $a \in \{\bar{\pi}_0^{-1}(d), \bar{\pi}_1^{-1}(d)\}$ oraz $(A^{(1)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda}))_{\bar{\pi}_1^{-1}(d)a} = 0$ w przeciwnym wypadku. Ponadto z (2.13) mamy

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_0^1(\bar{\pi}_1^{-1}(d)) &= \bar{\pi}_0(\bar{\pi}_1^{-1}(d)), \\ \bar{\pi}_0^1(\bar{\pi}_0^{-1}(d)) &= \bar{\pi}_0(\bar{\pi}_0^{-1}(d)) + 1, \end{aligned}$$

oraz

$$\bar{\pi}_0^1(a) = \bar{\pi}_0(a) + 1,$$

dla $a \in \mathcal{A}$ takich, że $\bar{\pi}_0(\bar{\pi}_1^{-1}(d)) < \bar{\pi}_0(a) \leq d-1$. Stąd dla $k = \bar{\pi}_0(\bar{\pi}_1^{-1}(d)), \dots, d-1$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\{a \in \mathcal{A}; \\ \bar{\pi}_0(a) \leq k\}}} (A^{(1)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda})\tau)_a \\ &= \sum_{\substack{\{a \in \mathcal{A}; \\ \bar{\pi}_0(a) < \bar{\pi}_0(\bar{\pi}_1^{-1}(d))\}}} (A^{(1)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda})\tau)_a + (A^{(1)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda})\tau)_{\bar{\pi}_1^{-1}(d)} + \sum_{\substack{\{a \in \mathcal{A}; \bar{\pi}_0(\bar{\pi}_1^{-1}(d)) \\ < \bar{\pi}_0(a) \leq k\}}} (A^{(1)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda})\tau)_a \\ &= \sum_{\substack{\{a \in \mathcal{A}; \bar{\pi}_0(a) \\ < \bar{\pi}_0(\bar{\pi}_1^{-1}(d))\}}} \tau_a + (\tau_{\bar{\pi}_1^{-1}(d)} + \tau_{\bar{\pi}_0^{-1}(d)}) + \sum_{\substack{\{a \in \mathcal{A}; \bar{\pi}_0(\bar{\pi}_1^{-1}(d)) \\ < \bar{\pi}_0(a) \leq k\}}} \tau_a \\ &= \sum_{\substack{\{a \in \mathcal{A}; \bar{\pi}_0^1(a) \\ < \bar{\pi}_0(\bar{\pi}_1^{-1}(d))\}}} \tau_a + (\tau_{(\bar{\pi}_0^1)^{-1}(\bar{\pi}_0(\bar{\pi}_1^{-1}(d)))} + \tau_{(\bar{\pi}_0^1)^{-1}(\bar{\pi}_0(\bar{\pi}_1^{-1}(d))+1)}) + \sum_{\substack{\{a \in \mathcal{A}; \bar{\pi}_0(\bar{\pi}_1^{-1}(d))+1 \\ < \bar{\pi}_0^1(a) \leq k+1\}}} \tau_a \\ &= \sum_{\{a \in \mathcal{A}; \bar{\pi}_0^1(a) \leq k+1\}} \tau_a. \end{aligned}$$

Wykorzystując to, że $(\bar{\pi}^1, \lambda, \tau) \in \Theta_{\bar{\pi}^1}$ w przypadku, gdy $\bar{\pi}_0(\bar{\pi}_1^{-1}(d)) \leq k \leq d-2$ oraz używając (2.39), gdy $k = d-1$ uzyskujemy

$$\sum_{\{a \in \mathcal{A}; \bar{\pi}_0(a) \leq k\}} (A^{(1)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda})\tau)_a = \sum_{\{a \in \mathcal{A}; \bar{\pi}_0^1(a) \leq k+1\}} \tau_a > 0,$$

dla $k = \bar{\pi}_0(\bar{\pi}_1^{-1}(d)), \dots, d-1$. Powyższe rozważania wraz z tym, że $R(\bar{\pi}, A^{(1)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda})\lambda)$ jest dobrze zdefiniowane (patrz lemat 2.28), implikują

$$(\bar{\pi}, A^{(1)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda})\lambda, A^{(1)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda})\tau) \in \Theta_{\bar{\pi}}^+.$$

w szczególności $\mathbf{R}(\bar{\pi}, A^{(1)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda})\lambda, A^{(1)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda})\tau)$ jest dobrze zdefiniowane. Z lematu 2.28 mamy

$$A^{(1)}(\bar{\pi}, A^{(1)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda})\lambda) = A^{(1)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda}).$$

Stąd na podstawie wzoru (2.20), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\bar{\pi}, A^{(1)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda})\lambda, A^{(1)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda})\tau) \\ = (\bar{\pi}^1, (A^{(1)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda}))^{-1}A^{(1)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda})\lambda, (A^{(1)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda}))^{-1}A^{(1)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda})\tau) = (\bar{\pi}^1, \lambda, \tau). \end{aligned}$$

Załóżmy teraz, że teza lematu jest spełniona dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ i wykażmy, że zachodzi ona dla $n+1$. Niech $(\bar{\pi}^{n+1}, \lambda, \tau)$ będzie trójką spełniającą założenia lematu dla $n+1$. Z lematu 2.28 otrzymujemy

$$A^{(k)}(\bar{\pi}, A^{(n+1)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda})\lambda) = A^{(k)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda})$$

dla $k = 0, \dots, n+1$. Co więcej, z warunku (2.37) dla $k = n+1$ otrzymujemy

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} \tau_a \cdot \sum_{a \in \mathcal{A}} \bar{\tau}_a^{n+1} > 0.$$

Możemy zatem skorzystać z pierwszego kroku indukcji dla $(\bar{\pi}^n, \bar{\lambda}^n, \bar{\tau}^n)$ uzyskując w ten sposób, że $(\bar{\pi}^n, A^{(1)}(\bar{\pi}^n, \bar{\lambda}^n)\lambda, A^{(1)}(\bar{\pi}^n, \bar{\lambda}^n)\tau) \in \Theta_{\bar{\pi}^n}^+$, a także

$$A^{(1)}(\bar{\pi}^n, A^{(1)}(\bar{\pi}^n, \bar{\lambda}^n)\lambda) = A^{(1)}(\bar{\pi}^n, \bar{\lambda}^n)$$

oraz

$$(2.40) \quad \mathbf{R}(\bar{\pi}^n, A^{(1)}(\bar{\pi}^n, \bar{\lambda}^n)\lambda, A^{(1)}(\bar{\pi}^n, \bar{\lambda}^n)\tau) = (\bar{\pi}^{n+1}, \lambda, \tau).$$

Ponownie z (2.37) otrzymujemy, że dla $k = 1, \dots, n$ zachodzi

$$\begin{aligned} \left(\sum_{a \in \mathcal{A}} (A^{(n-k)}(\bar{\pi}^k, \bar{\lambda}^k) \cdot A^{(1)}(\bar{\pi}^n, \bar{\lambda}^n)\tau)_a \right) \cdot \sum_{a \in \mathcal{A}} \bar{\tau}_a^k \\ = \left(\sum_{a \in \mathcal{A}} (A^{(n+1-k)}(\bar{\pi}^k, \bar{\lambda}^k)\tau)_a \right) \cdot \sum_{a \in \mathcal{A}} \bar{\tau}_a^k > 0 \end{aligned}$$

Zatem trójka $(\bar{\pi}^n, A^{(1)}(\bar{\pi}^n, \bar{\lambda}^n)\lambda, A^{(1)}(\bar{\pi}^n, \bar{\lambda}^n)\tau)$ spełnia założenia lematu dla n . Korzystając z założenia indukcyjnego dla $(\bar{\pi}^n, A^{(1)}(\bar{\pi}^n, \bar{\lambda}^n)\lambda, A^{(1)}(\bar{\pi}^n, \bar{\lambda}^n)\tau)$ uzyskujemy, że

$$(2.41) \quad (\bar{\pi}, A^{(n)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda}) \cdot A^{(1)}(\bar{\pi}^n, \bar{\lambda}^n)\lambda, A^{(n)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda}) \cdot A^{(1)}(\bar{\pi}^n, \bar{\lambda}^n)\tau) \in \Theta_{\bar{\pi}}^+$$

oraz

$$(2.42) \quad \begin{aligned} \mathbf{R}(\bar{\pi}, A^{(n)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda}) \cdot A^{(1)}(\bar{\pi}^n, \bar{\lambda}^n)\lambda, A^{(n)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda}) \cdot A^{(1)}(\bar{\pi}^n, \bar{\lambda}^n)\tau) \\ = (\bar{\pi}^n, A^{(1)}(\bar{\pi}^n, \bar{\lambda}^n)\lambda, A^{(1)}(\bar{\pi}^n, \bar{\lambda}^n)\tau). \end{aligned}$$

Korzystając z punktu (ii) w lemacie 2.24 otrzymujemy

$$A^{(n)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda}) \cdot A^{(1)}(\bar{\pi}^n, \bar{\lambda}^n) = A^{(n+1)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda}).$$

Stąd z (2.41) mamy

$$(\bar{\pi}, A^{(n+1)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda})\lambda, A^{(n+1)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda})\tau) \in \Theta_{\bar{\pi}}^+.$$

Ponadto z (2.42) mamy również

$$\mathbf{R}(\bar{\pi}, A^{(n+1)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda})\lambda, A^{(n+1)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda})\tau) = (\bar{\pi}^n, A^{(1)}(\bar{\pi}^n, \bar{\lambda}^n)\lambda, A^{(1)}(\bar{\pi}^n, \bar{\lambda}^n)\tau).$$

Stąd z (2.40) zachodzi

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{n+1}(\bar{\pi}, A^{(n+1)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda})\lambda, A^{(n+1)}(\bar{\pi}, \bar{\lambda})\tau) &= \mathbf{R}(\bar{\pi}^n, A^{(1)}(\bar{\pi}^n, \bar{\lambda}^n)\lambda, A^{(1)}(\bar{\pi}^n, \bar{\lambda}^n)\tau) \\ &= (\bar{\pi}^{n+1}, \lambda, \tau), \end{aligned}$$

co kończy dowód kroku indukcyjnego, a zarazem całego lematu. \square

LEMAT 2.38. *Niech G będzie grafem Rauzy'ego permutacji niedegenerowalnej. Ustalmy $P, L > 0$ i rozpatrzmy dowolny niepusty podzbiór otwarty B w $\bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi, P, L}$. Wtedy istnieje liczba $\Gamma > 0$ taka, że dla każdej permutacji $\pi \in G$ i prawie każdego $(\pi, \lambda, \tau) \in \Theta_{\pi, P, L}$ istnieje rosnący ciąg liczb naturalnych $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że $\tilde{\mathbf{R}}^{k_n}(\pi, \lambda, \tau) \in B$ oraz $A^{(k_n)}(\pi, \lambda)$ jest macierzą dodatnią (wszystkie współczynniki są liczbami dodatnimi), spełniającą*

$$\rho(A^{(k_n)}(\pi, \lambda)) \leq \Gamma \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N},$$

gdzie ρ jest dane jak w (2.27).

UWAGA 2.39. Prawdziwy jest również analogiczny rezultat pochodzący z pracy Veecha (patrz [32]) dla przekładania odcinków, tj. jeśli B jest niepustym otwartym podzbiorem $G \times \Lambda^A$, to istnieje liczba $\Gamma > 0$ taka, że dla prawie każdego przekładania $(\pi, \lambda) \in G \times \Lambda^A$ względem produktu miary liczącej i miary Lebesgue'a, istnieje rosnący ciąg liczb naturalnych $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że $\tilde{R}^{k_n}(\pi, \lambda) \in B$ oraz $A^{(k_n)}(\pi, \lambda)$ jest macierzą dodatnią spełniającą $\rho(A^{(k_n)}) \leq \Gamma$. Dowód lematu 2.38 opiera się w dużej mierze na technikach pochodzących z dowodu opisanego wyżej faktu.

DOWÓD LEMATU 2.38. Ze względu na punkt (iii) w lemacie 2.24 wiemy, że dla prawie każdej pary $(\pi, \lambda) \in G \times \Lambda^A$ istnieje $k_{\pi, \lambda}$ takie, że dla wszystkich $k \geq k_{\pi, \lambda}$, macierz $A^{(k)}(\pi, \lambda)$ jest macierzą ściśle dodatnią. Z ergodyczności i powracania znormalizowanej wielokątnej indukcji Rauzy'ego-Veecha (patrz tw. 2.33 i uwaga 2.34) oraz z lematu 2.1, wiemy także, że dla prawie każdego elementu $(\pi, \lambda, \tau) \in \Theta_{\pi, P, L}$ zachodzi $\tilde{\mathbf{R}}^n(\pi, \lambda, \tau) \in B$ dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$.

Ustalmy trójkę $(\bar{\pi}, \bar{\lambda}, \bar{\tau})$, która posiada opisane wyżej własności oraz taką, że $(\bar{\pi}, \bar{\lambda})$ jest przekładaniem spełniającym warunek Keane'a, a także $\sum_{a \in A} \bar{\tau}_a^k \neq 0$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$.

Ustalmy liczbę $n_{\bar{\pi}, \bar{\lambda}, \bar{\tau}} \geq k_{\pi, \lambda}$ taką, że

$$(\bar{\pi}^{n_{\bar{\pi}, \bar{\lambda}, \bar{\tau}}}, \bar{\lambda}^{n_{\bar{\pi}, \bar{\lambda}, \bar{\tau}}}, \bar{\tau}^{n_{\bar{\pi}, \bar{\lambda}, \bar{\tau}}}) = \tilde{\mathbf{R}}^{(n_{\bar{\pi}, \bar{\lambda}, \bar{\tau}})}(\bar{\pi}, \bar{\lambda}, \bar{\tau}) \in B.$$

Oznaczmy $\bar{A} := A^{n_{\bar{\pi}, \bar{\lambda}, \bar{\tau}}}(\bar{\pi}, \bar{\lambda})$. Jako wniosek z punktu (ii) w lemacie 2.24, uzyskujemy

$$\bar{A} = A^{(k_{\bar{\pi}, \bar{\lambda}})}(\bar{\pi}, \bar{\lambda}) \cdot A^{(n_{\bar{\pi}, \bar{\lambda}, \bar{\tau}} - k_{\bar{\pi}, \bar{\lambda}})}(\bar{\pi}^{k_{\bar{\pi}, \bar{\lambda}}}, \bar{\lambda}^{k_{\bar{\pi}, \bar{\lambda}}}).$$

A więc \bar{A} jest iloczynem macierzy dodatniej i nieujemnej o niezerowych kolumnach, a stąd sama jest macierzą dodatnią. Możemy zatem zdefiniować $\Gamma := \rho(\bar{A})$.

Rozpatrzmy podzbiór $\bar{B} \subseteq B$ składający się z tych trójek $(\bar{\pi}^{n_{\bar{\pi}, \bar{\lambda}, \bar{\tau}}}, \bar{\lambda}^{n_{\bar{\pi}, \bar{\lambda}, \bar{\tau}}}, \bar{\tau}) \in B$, dla których λ jest wektorem dodatnim oraz zachodzi

$$\left(\sum_{a \in A} ((A^{(n_{\bar{\pi}, \bar{\lambda}, \bar{\tau}} - k)}(\bar{\pi}^k, \bar{\lambda}^k)\tau)_a) \cdot \sum_{a \in A} \bar{\tau}_a^k > 0, \right.$$

dla dowolnego $k = 1, \dots, n_{\bar{\pi}, \bar{\lambda}, \bar{\tau}}$. Zbiór \bar{B} jest zbiorem otwartym, a także niepustym, gdyż $(\bar{\pi}^{n_{\bar{\pi}, \bar{\lambda}, \bar{\tau}}}, \bar{\lambda}^{n_{\bar{\pi}, \bar{\lambda}, \bar{\tau}}}, \bar{\tau}^{n_{\bar{\pi}, \bar{\lambda}, \bar{\tau}}}) \in \bar{B}$. Rzeczywiście, korzystając ze wzoru (2.21) uzyskujemy

$$\left(\sum_{a \in A} ((A^{(n_{\bar{\pi}, \bar{\lambda}, \bar{\tau}} - k)}(\bar{\pi}^k, \bar{\lambda}^k)\bar{\tau}^{n_{\bar{\pi}, \bar{\lambda}, \bar{\tau}}})_a) \cdot \sum_{a \in A} \bar{\tau}_a^k = \left(\sum_{a \in A} \bar{\tau}_a^k \right)^2 > 0. \right.$$

Rozważmy teraz zbiór $E := \{(\bar{\pi}, \bar{A}\lambda, \bar{A}\tau); (\bar{\pi}^{n_{\bar{\pi}, \bar{\lambda}, \bar{\tau}}}, \lambda, \tau) \in \bar{B}\}$. Zauważmy, że lemat 2.37 implikuje, że $E \subseteq \Theta_{\bar{\pi}, P, L}$ oraz dla każdego $(\bar{\pi}, \bar{A}\lambda, \bar{A}\tau) \in E$ zachodzi

$$(2.43) \quad A^{(n_{\bar{\pi}, \bar{\lambda}, \bar{\tau}})}(\bar{\pi}, \bar{A}\lambda) = \bar{A},$$

a także

$$(2.44) \quad \tilde{\mathbf{R}}^{n_{\bar{\pi}, \bar{\lambda}, \bar{\tau}}}(\bar{\pi}, \bar{A}\lambda, \bar{A}\tau) = (\bar{\pi}^{n_{\bar{\pi}, \bar{\lambda}, \bar{\tau}}}, \lambda, \tau) \in B.$$

Z otwartości i niepustości zbioru \bar{B} otrzymujemy, że E jest otwartym i niepustym podzbiorem $\Theta_{\bar{\pi}, P, L}$. W szczególności, jest zbiorem dodatniej miary względem ξ_G w $\bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi, P, L}$.

Korzystając ponownie z ergodyczności i powracania $\tilde{\mathbf{R}}$ w połączeniu z lematem 2.1 uzyskujemy, że dla prawie każdego $(\pi, \lambda, \tau) \in \bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi, P, L}$ istnieje rosnący ciąg liczb naturalnych $\{\bar{k}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że $\tilde{\mathbf{R}}^{\bar{k}_n}(\pi, \lambda, \tau) = (\bar{\pi}, \lambda^{\bar{k}_n}, \tau^{\bar{k}_n}) \in E$. Korzystając z (2.44), otrzymujemy

$$\tilde{\mathbf{R}}^{\bar{k}_n + n_{\bar{\pi}, \bar{\lambda}, \bar{\tau}}}(\pi, \lambda, \tau) = \tilde{\mathbf{R}}^{n_{\bar{\pi}, \bar{\lambda}, \bar{\tau}}}(\tilde{\mathbf{R}}^{\bar{k}_n}(\pi, \lambda, \tau)) \in B.$$

Przyjmując zatem $k_n := \bar{k}_n + n_{\bar{\pi}, \bar{\lambda}, \bar{\tau}}$, pozostało nam wykazać, że $\rho(A^{(k_n)}(\pi, \lambda)) \leq \Gamma$. Jednakże z (2.43) wynika, że

$$A^{(k_n)}(\pi, \lambda) = A^{(\bar{k}_n)}(\pi, \lambda) \cdot A^{(n_{\bar{\pi}, \bar{\lambda}, \bar{\tau}})}(\bar{\pi}, \lambda^{\bar{k}_n}) = A^{(\bar{k}_n)}(\pi, \lambda) \cdot \bar{A},$$

co razem z punktem (2.29) w lemacie 2.29 pociąga żadaną nierówność. \square

Korzystając z technik zawartych w dowodzie lematu 14 w [11], dowiedzimy teraz następującego rezultatu.

LEMAT 2.40. *Niech C będzie składową spójności przestrzeni moduli \mathcal{M} oraz niech $\hat{\pi}$ będzie permutacją d -elementowego alfabetu \mathcal{A} z odpowiadającego C rozszerzonego grafu Rauzy'ego G , spełniającą*

$$\hat{\pi}_0^{-1}(1) = \hat{\pi}_1^{-1}(d) \text{ i } \hat{\pi}_0^{-1}(d) = \hat{\pi}_1^{-1}(1).$$

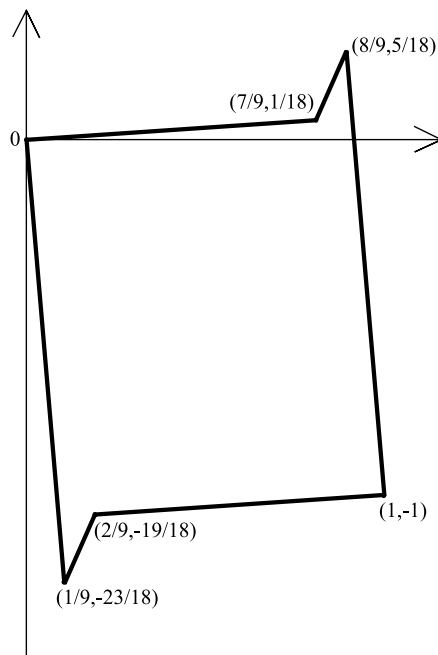
Ponadto rozważmy dowolny podzbiór $\mathcal{D} \subset \mathcal{A} \setminus \{\hat{\pi}_0^{-1}(1), \hat{\pi}_0^{-1}(d)\}$. Wtedy zbiór

$$C(\mathcal{D}) := \{M(\hat{\pi}, \lambda, \tau) \in C; (\hat{\pi}, \lambda, \tau) \in \Theta_{\hat{\pi}}^*, \lambda_a = 0 \text{ dla } a \in \mathcal{D}; \lambda_a > 0 \text{ dla } a \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{D}\}$$

jest gęsty w C .

DOWÓD. Dowiedzimy najpierw tezę lematu dla $\mathcal{D} = \mathcal{A} \setminus \{\hat{\pi}_0^{-1}(1), \hat{\pi}_0^{-1}(d)\}$. Niech $b := \hat{\pi}_0^{-1}(2)$. Rozpatrzmy zbiór $\Theta_{\hat{\pi}, P, L}^*$ dla pewnego $L > 0$ i $P > 0$. Wykażemy, że elementami zbioru $C(\mathcal{D})$ możemy przybliżać elementy z $M(\Theta_{\hat{\pi}, 1, 1}^*)$. Dla $L \neq 1$ lub $P \neq 1$ rozumowanie przenosi się dzięki ciągłości przeskalowania $\ell_{1, P, 1, L}$ zdefiniowanego jak w (2.32). Dokładniej, zauważmy, że zbiór $C(\mathcal{D})$ jest niezmienniczy ze względu na działanie $\ell_{1, P, 1, L}$. Ponadto, dla dowolnego $(\hat{\pi}, \lambda, \tau) \in \Theta_{\hat{\pi}, P, L}^*$, mamy $\ell_{1, P, 1, L}^{-1}(\hat{\pi}, \lambda, \tau) \in \Theta_{\hat{\pi}, 1, 1}$, a stąd istnieje ciąg elementów $\{M(\hat{\pi}, \lambda_n, \tau_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C(\mathcal{D})$ taki, że $\lim_{n \rightarrow \infty} M(\hat{\pi}, \lambda_n, \tau_n) = M(\ell_{1, P, 1, L}^{-1}(\hat{\pi}, \lambda, \tau))$. Z ciągłości $\ell_{1, P, 1, L}$ otrzymujemy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} M(\ell_{1, P, 1, L}(\hat{\pi}, \lambda_n, \tau_n)) = M(\hat{\pi}, \lambda, \tau)$, co jest szukaną przez nas aproksymacją, gdyż $M(\ell_{1, P, 1, L}(\hat{\pi}, \lambda_n, \tau_n)) \in C(\mathcal{D})$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wykażemy tym samym, że elementami zbioru $C(\mathcal{D})$ możemy przybliżać elementy zbioru $\Theta_{\hat{\pi}, P, L}$ dla dowolnych $P, L > 0$. Będzie to wystarczające aby dowieść lematu, gdyż z wniosku 2.21 zachodzi

$$\bigcup_{L > 0} \bigcup_{P > 0} \overline{M(\Theta_{\hat{\pi}, P, L}^*)} = \overline{M(\Theta_{\hat{\pi}}^*)} = C.$$

RYSUNEK 2. Reprezentacja wielokąta $M(\hat{\pi}, \lambda, \tau)$ dla $(\hat{\pi}, \lambda, \tau) \in B_n$.

Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ niech $B_n \subset \Theta_{\hat{\pi},1,1}^*$ będzie zbiorem elementów $(\hat{\pi}, \lambda, \tau)$ posiadających następujące własności:

$$(2.45) \quad \lambda_a > 0 \text{ dla } a \in \mathcal{A},$$

$$(2.46) \quad \frac{\tau_b}{\lambda_b} > 1,$$

$$(2.47) \quad \frac{\tau_b}{\lambda_b} > \frac{\tau_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}}{\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}} > 0$$

$$(2.48) \quad \left| \frac{\tau_b}{\lambda_b} - \frac{\tau_a}{\lambda_a} \right| < \frac{1}{n} \text{ dla } a \in \mathcal{D},$$

$$(2.49) \quad \frac{\lambda_b}{\tau_b} \sum_{a \in \mathcal{D}} \tau_a + \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)} < 1,$$

$$(2.50) \quad - \sum_{\hat{\pi}_1(a) \leq j} \tau_a > \frac{\lambda_b}{\tau_b} \text{ dla każdego } j = 1, \dots, d-1.$$

Zauważmy, że zbiór B_n jest niepusty. Rzeczywiście, rozważmy trójkę $(\hat{\pi}, \lambda, \tau)$, gdzie $\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)} = \frac{7}{9}$, $\lambda_a = \frac{1}{9(d-2)}$ dla $a \in \mathcal{D}$, $\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)} = \frac{1}{9}$ oraz $\tau_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)} = \frac{1}{18}$, $\tau_a = \frac{2}{9(d-2)}$ dla $a \in \mathcal{D}$ oraz $\tau_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)} = -\frac{23}{18}$. Wtedy $(\hat{\pi}, \lambda, \tau) \in \Theta_{\hat{\pi},1,1}^*$ (odpowiadający wielokąt przedstawiony jest na rys. 2) oraz

$$\lambda_a \geq \frac{1}{9(d-2)} > 0 \text{ dla } a \in \mathcal{A};$$

$$\frac{\tau_b}{\lambda_b} = 2 > 1;$$

$$\frac{\tau_b}{\lambda_b} = 2 > \frac{1}{14} = \frac{\tau_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}}{\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}};$$

$$\left| \frac{\tau_b}{\lambda_b} - \frac{\tau_a}{\lambda_a} \right| = 0 < \frac{1}{n} \text{ dla } a \in \mathcal{D}$$

oraz

$$\frac{\lambda_b}{\tau_b} \sum_{a \in \mathcal{D}} \tau_a + \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)} = \sum_{a \in \mathcal{D}} \lambda_a + \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)} = \frac{8}{9} < 1.$$

Ponadto skoro $\tau_a > 0$ dla $a \neq \hat{\pi}_1^{-1}(1) (= \hat{\pi}_0^{-1}(d))$, to

$$- \sum_{\hat{\pi}_1(a) \leq j} \tau_a > - \sum_{\hat{\pi}_1(a) \leq j} \tau_a - \sum_{\hat{\pi}_1(a) > j} \tau_a = - \sum_{a \in \mathcal{A}} \tau_a = 1 > \frac{1}{2} = \frac{\lambda_b}{\tau_b}$$

dla $j = 1, \dots, d-1$. Stąd skonstruowana trójka spełnia warunki (2.45)-(2.50). Zatem zbiór B_n jest otwarty i niepusty. W szczególności $\xi_G(B_n) > 0$, gdzie ξ_G jest miarą na $\bigcup_{\pi \in G} \Theta_{\pi,1,1}$ niezmienniczą ze względu na działanie znormalizowanej wielokątnej indukcji Rauzy'ego-Veecha $\tilde{\mathbf{R}}$ (patrz twierdzenie 2.33).

Korzystając z lematu 2.38 otrzymujemy, że istnieje $\Gamma > 0$ taka, że dla prawie wszystkich $(\hat{\pi}, \lambda, \tau) \in \Theta_{\hat{\pi},1,1}^*$ istnieje ciąg $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ liczb naturalnych rozbieżny do nieskończoności taki, że $\tilde{\mathbf{R}}^{k_n}(\hat{\pi}, \lambda, \tau) \in B_n$, macierz k_n -tej iteracji indukcji Rauzy'ego $A^{(k_n)}(\hat{\pi}, \lambda)$ jest macierzą dodatnią oraz $\rho(A^{(k_n)}(\hat{\pi}, \lambda)) \leq \Gamma$.

Ustalmy trójkę $(\hat{\pi}, \lambda, \tau) \in \Theta_{\hat{\pi},1,1}^*$, dla której istnieje ciąg $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że spełnione są powyższe warunki. Niech $(\hat{\pi}, \lambda^{(n)}, \tau^{(n)}) := \mathbf{R}^{k_n}(\hat{\pi}, \lambda, \tau)$ oraz

$$(\hat{\pi}, \bar{\lambda}^{(n)}, \bar{\tau}^{(n)}) := \tilde{\mathbf{R}}^{k_n}(\hat{\pi}, \lambda, \tau) = \left(\hat{\pi}, \frac{\lambda^{(n)}}{|\lambda^{(n)}|}, \tau^{(n)} |\lambda^{(n)}| \right).$$

Skoro $(\hat{\pi}, \bar{\lambda}^{(n)}, \bar{\tau}^{(n)}) \in B_n$ to spełnione są warunki (2.45)-(2.49). Stąd również

$$\frac{\bar{\tau}_b^{(n)}}{\bar{\lambda}_b^{(n)}} > 1 \wedge \left| \frac{\bar{\tau}_b^{(n)}}{\bar{\lambda}_b^{(n)}} - \frac{\bar{\tau}_a^{(n)}}{\bar{\lambda}_a^{(n)}} \right| < \frac{1}{n} \text{ dla } a \in \mathcal{D} \quad \Rightarrow \quad \bar{\tau}_a^{(n)} > 0 \text{ dla } a \in \mathcal{D}.$$

Rozważmy teraz $\bar{\lambda}^{p(n)} \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ dane wzorem

$$\bar{\lambda}_a^{p(n)} := \begin{cases} \frac{\bar{\lambda}_b^{(n)}}{\bar{\tau}_b^{(n)}} \bar{\tau}_a^{(n)} & \text{jeżeli } a \in \mathcal{D} \\ \bar{\lambda}_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{(n)} & \text{jeżeli } a = \hat{\pi}_0^{-1}(1) \\ 1 - \left(\sum_{a \in \mathcal{D}} \bar{\lambda}_a^{p(n)} + \bar{\lambda}_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)} \right) & \text{jeżeli } a = \hat{\pi}_0^{-1}(d). \end{cases}$$

Z (2.49) wynika, że $\bar{\lambda}^{p(n)}$ jest wektorem dodatnim. W szczególności $(\hat{\pi}, \bar{\lambda}^{p(n)}, \bar{\tau}) \in \Theta_{\hat{\pi}}^*$.

Ponieważ $\frac{\bar{\tau}_a^{(n)}}{\bar{\lambda}_a^{p(n)}} = \frac{\bar{\tau}_b^{(n)}}{\bar{\lambda}_b^{(n)}}$ dla $a \in \mathcal{D}$, to z (2.48) otrzymujemy, że

$$\left| \frac{\bar{\tau}_a^{(n)}}{\bar{\lambda}_a^{p(n)}} - \frac{\bar{\tau}_a^{(n)}}{\bar{\lambda}_a^{(n)}} \right| < \frac{1}{n} \text{ dla każdego } a \in \mathcal{D}.$$

Skoro z (2.46) mamy $\frac{\bar{\lambda}_b^{(n)}}{\bar{\tau}_b^{(n)}} < 1$, to z powyższej nierówności otrzymujemy, że

$$\left| \bar{\lambda}_a^{p(n)} - \bar{\lambda}_a^{(n)} \right| < \frac{1}{n} \frac{\bar{\lambda}_a^{p(n)} \bar{\lambda}_a^{(n)}}{\bar{\tau}_a^{(n)}} = \frac{\bar{\lambda}_a^{(n)} \bar{\lambda}_b^{(n)}}{n \bar{\tau}_b^{(n)}} < \frac{\bar{\lambda}_a^{(n)}}{n} \text{ dla } a \in \mathcal{D}.$$

Dalej wnioskując uzyskujemy

$$|\bar{\lambda}_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{p(n)} - \bar{\lambda}_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{(n)}| < \left| 1 - \left(\sum_{a \in \mathcal{D}} \bar{\lambda}_a^{p(n)} + \bar{\lambda}_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)} \right) - 1 + \left(\sum_{a \in \mathcal{A}} \bar{\lambda}_a^{(n)} + \bar{\lambda}_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)} \right) \right| < \frac{1}{n}.$$

W szczególności

$$(2.51) \quad \|\bar{\lambda}^{p(n)} - \bar{\lambda}^{(n)}\| < \frac{2}{n},$$

gdzie $\|\eta\| = \sum_{a \in \mathcal{A}} |\eta_a|$ dla $\eta \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$. Ponadto z (2.50), otrzymujemy

$$(2.52) \quad -\frac{\sum_{\hat{\pi}_1(a) \leq j} \bar{\tau}_a^{(n)}}{\sum_{\hat{\pi}_1(a) \leq j} \bar{\lambda}_a^{p(n)}} > -\sum_{\hat{\pi}_1(a) \leq j} \bar{\tau}_a^{(n)} > \frac{\bar{\lambda}_b^{(n)}}{\bar{\tau}_b^n} \text{ dla } j = 1, \dots, d-1.$$

Niech

$$(2.53) \quad \lambda^{p(n)} := |\lambda^{(n)}| \bar{\lambda}^{p(n)}.$$

Zauważmy, że skoro $(\hat{\pi}, \bar{\lambda}^{p(n)}, \bar{\tau}^{(n)}) \in \Theta_{\hat{\pi}}^*$, to

$$(\hat{\pi}, \lambda^{p(n)}, \tau^{(n)}) = (\hat{\pi}, |\lambda^{(n)}| \bar{\lambda}^{p(n)}, \frac{1}{|\lambda^{(n)}|} \bar{\tau}^{(n)}) \in \Theta_{\hat{\pi}}^*.$$

Ponadto z (2.46) oraz z definicji $\bar{\lambda}_a^{p(n)}$ otrzymujemy

$$(2.54) \quad \frac{\tau_a^{(n)}}{\lambda_a^{p(n)}} = \frac{\bar{\tau}_a^{(n)}}{|\lambda^{(n)}|^2 \bar{\lambda}_a^{p(n)}} = \frac{\bar{\tau}_b^{(n)}}{|\lambda^{(n)}|^2 \bar{\lambda}_b^{p(n)}} = \frac{\bar{\tau}_b^{(n)}}{\lambda_b^{(n)}} > \frac{1}{|\lambda^{(n)}|^2} \text{ dla } a \in \mathcal{D}.$$

Co więcej z (2.52) otrzymujemy

$$(2.55) \quad \begin{aligned} \frac{\sum_{\hat{\pi}_1(a) \leq j} \tau_a^{(n)}}{\sum_{\hat{\pi}_1(a) \leq j} \lambda_a^{p(n)}} &= \frac{\sum_{\hat{\pi}_1(a) \leq j} \bar{\tau}_a^{(n)}}{\sum_{\hat{\pi}_1(a) \leq j} \bar{\lambda}_a^{p(n)}} \frac{1}{|\lambda^{(n)}|^2} \\ &> \frac{\bar{\lambda}_b^{(n)}}{\bar{\tau}_b^n} \frac{1}{|\lambda^{(n)}|^2} = \frac{\lambda_b^{(n)}}{\bar{\tau}_b^n} \frac{1}{|\lambda^{(n)}|^4} > \frac{\lambda_b^{(n)}}{\tau_b^{(n)}} \end{aligned}$$

dla $j = 1, \dots, d-1$.

Niech $Arg(z) \in (-\pi, \pi]$ oznacza argument główny liczby zespolonej z . Niech

$$\theta_n := \frac{\pi}{2} - Arg(\lambda_b^{(n)} + i\tau_b^{(n)}) = Arg(\tau_b^{(n)} + i\lambda_b^{(n)}) > 0.$$

Ponieważ z własności indukcji Rauzy'ego-Veecha mamy $|\lambda^{(n)}| \rightarrow 0$, to z (2.54) wynika, że $\theta_n \rightarrow 0$. Zdefiniujmy wektory $\lambda^{r(n)}, \tau^{r(n)} \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ poprzez

$$\lambda^{r(n)} + i\tau^{r(n)} := e^{i\theta_n} (\lambda^{p(n)} + i\tau^{(n)}).$$

Udowodnimy teraz, że $(\hat{\pi}, \lambda^{r(n)}, \tau^{r(n)}) \in C(\mathcal{D})$. Ponieważ $Arg(\lambda_a^{p(n)} + i\tau_a^{(n)}) = Arg(\lambda_b^{p(n)} + i\tau_b^{(n)})$ dla $a \in \mathcal{D}$, to

$$(2.56) \quad Arg(\lambda_a^{r(n)} + i\tau_a^{r(n)}) = Arg(\lambda_a^{p(n)} + i\tau_a^{(n)}) + \frac{\pi}{2} - Arg(\lambda_b^{(n)} + i\tau_b^{(n)}) = \frac{\pi}{2} \text{ dla } a \in \mathcal{D}.$$

Ponadto z (2.47) mamy

$$0 < Arg(\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{(n)} + i\tau_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{(n)}) < Arg(\lambda_b^{(n)} + i\tau_b^{(n)}),$$

a stąd oraz z tego, że $Arg(\lambda_b^{(n)} + i\tau_b^{(n)}) < \frac{\pi}{2}$ oraz $Arg(\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{p(n)} + i\tau_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{(n)}) > 0$ otrzymujemy

(2.57)

$$0 < Arg(\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r(n)} + i\tau_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r(n)}) = Arg(\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{p(n)} + i\tau_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{(n)}) + \frac{\pi}{2} - Arg(\lambda_b^{(n)} + i\tau_b^{(n)}) < \frac{\pi}{2}.$$

Co więcej, z (2.55) dla $j = 1$ otrzymujemy

$$\frac{-\tau_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{(n)}}{\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{p(n)}} = \frac{-\tau_{\hat{\pi}_1^{-1}(1)}^{(n)}}{\lambda_{\hat{\pi}_1^{-1}(1)}^{p(n)}} > \frac{\lambda_b^{(n)}}{\tau_b^{(n)}},$$

co implikuje

$$Arg(\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{p(n)} - i\tau_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{(n)}) > Arg(\tau_b^{(n)} + i\lambda_b^{(n)}) > 0.$$

A zatem

$$(2.58) \quad \begin{aligned} Arg(\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r(n)} + i\tau_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r(n)}) &= Arg(\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{p(n)} + i\tau_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{(n)}) + \frac{\pi}{2} - Arg(\lambda_b^{(n)} + i\tau_b^{(n)}) \\ &= -Arg(\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{p(n)} - i\tau_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{(n)}) + Arg(\tau_b^{(n)} + i\lambda_b^{(n)}) < 0. \end{aligned}$$

Ponadto ponownie korzystając z tego, że $Arg(\lambda_b^{(n)} + i\tau_b^{(n)}) < \frac{\pi}{2}$ uzyskujemy

$$(2.59) \quad Arg(\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r(n)} + i\tau_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r(n)}) = Arg(\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{p(n)} + i\tau_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{(n)}) + \frac{\pi}{2} - Arg(\lambda_b^{(n)} + i\tau_b^{(n)}) > -\frac{\pi}{2}.$$

Z powyższego oraz z (2.56) i (2.57) otrzymujemy

$$(2.60) \quad \lambda_a^{r(n)} = 0 \text{ i } \tau_a^{r(n)} > 0 \text{ dla } a \in \mathcal{D} \quad \text{oraz} \quad \lambda_a^{r(n)} > 0 \text{ dla } a \in \{\hat{\pi}_0^{-1}(1), \hat{\pi}_0^{-1}(d)\}.$$

Ponieważ $\tau^{(n)}$ jest wektorem takim, że dla każdego $j = 1, \dots, d-1$ mamy $\sum_{\hat{\pi}_0(a) \leq j} \tau_a^{(n)} > 0$, to $0 < Arg(\sum_{\hat{\pi}_0(a) \leq j} \lambda_a^{p(n)} + i\tau_a^{(n)}) < \frac{\pi}{2}$. Zatem

$$Arg\left(\sum_{\hat{\pi}_0(a) \leq j} \lambda_a^{r(n)} + i\tau_a^{r(n)}\right) = Arg\left(\sum_{\hat{\pi}_0(a) \leq j} \lambda_a^{p(n)} + i\tau_a^{(n)}\right) + \theta_n > Arg\left(\sum_{\hat{\pi}_0(a) \leq j} \lambda_a^{p(n)} + i\tau_a^{(n)}\right) > 0$$

dla $j = 1, \dots, d-1$. Stąd $\sum_{\hat{\pi}_0(a) \leq j} \tau_a^{r(n)} > 0$. Korzystając ponownie z (2.55) otrzymujemy

$$Arg\left(\sum_{\hat{\pi}_1(a) \leq j} (\lambda_a^{p(n)} - i\tau_a^{(n)})\right) = Arg\left(\sum_{\hat{\pi}_1(a) \leq j} \lambda_a^{p(n)} - i\sum_{\hat{\pi}_1(a) \leq j} \tau_a^{(n)}\right) > Arg(\tau_b^{(n)} + i\lambda_b^{(n)}).$$

To pociąga, że

$$\begin{aligned} Arg\left(\sum_{\hat{\pi}_1(a) \leq j} (\lambda_a^{r(n)} + i\tau_a^{r(n)})\right) &= Arg\left(\sum_{\hat{\pi}_1(a) \leq j} (\lambda_a^{p(n)} + i\tau_a^{(n)})\right) + \theta_n \\ &= -Arg\left(\sum_{\hat{\pi}_1(a) \leq j} (\lambda_a^{p(n)} - i\tau_a^{(n)})\right) + Arg(\tau_b^{(n)} + i\lambda_b^{(n)}) < 0, \end{aligned}$$

a stąd $\sum_{\hat{\pi}_1(a) \leq j} \tau_a^{r(n)} < 0$ dla $j = 1, \dots, d-1$. Zatem $(\hat{\pi}, \lambda^{r(n)}, \tau^{r(n)}) \in \Theta_{\hat{\pi}}$ co razem z (2.60) implikuje, że $(\hat{\pi}, \lambda^{r(n)}, \tau^{r(n)}) \in C(\mathcal{D}) \subset \Theta_{\hat{\pi}}^*$.

Chcemy teraz pokazać, że $M(\hat{\pi}, \lambda^{r(n)}, \tau^{r(n)}) \rightarrow M(\hat{\pi}, \lambda, \tau)$. Biorąc pod uwagę (2.53), zdefiniujmy

$$\lambda^{b(n)} := A^{(k_n)}(\hat{\pi}, \lambda) \lambda^{p(n)} = |\lambda^{(n)}| A^{(k_n)}(\hat{\pi}, \lambda) \bar{\lambda}^{p(n)} = \frac{A^{(k_n)}(\hat{\pi}, \lambda) \bar{\lambda}^{p(n)}}{|A^{(k_n)}(\hat{\pi}, \lambda) \bar{\lambda}^{(n)}|}.$$

Skoro $\rho(A^{(k_n)}(\hat{\pi}, \lambda)) \leq \Gamma$, to z lematu 2.29 oraz (2.51) otrzymujemy

$$\|\lambda^{b(n)} - \lambda\| = \left\| \frac{A^{(k_n)}(\hat{\pi}, \lambda)\bar{\lambda}^{p(n)}}{|A^{(k_n)}(\hat{\pi}, \lambda)\bar{\lambda}^{(n)}|} - \frac{A^{(k_n)}(\hat{\pi}, \lambda)\bar{\lambda}^{(n)}}{|A^{(k_n)}(\hat{\pi}, \lambda)\bar{\lambda}^{(n)}|} \right\| \leq \Gamma \|\bar{\lambda}^{p(n)} - \bar{\lambda}^{(n)}\| \leq \frac{2\Gamma}{n}$$

Ponadto z lematu 2.37, podstawiając $(\hat{\pi}, \lambda, \tau)$ zamiast $(\bar{\pi}, \bar{\lambda}, \bar{\tau})$ oraz $(\hat{\pi}, \lambda^{p(n)}, \tau^{(n)})$ w miejsce $(\bar{\pi}^n, \lambda, \tau)$, uzyskujemy

$$\mathbf{R}^{k_n}(\hat{\pi}, \lambda^{b(n)}, \tau) = (\hat{\pi}, A^{(k_n)}(\hat{\pi}, \lambda)^{-1}\lambda^{b(n)}, A^{(k_n)}(\hat{\pi}, \lambda)^{-1}\tau^{b(n)}) = (\hat{\pi}, \lambda^{p(n)}, \tau^{(n)}).$$

A zatem struktury translacyjne $M(\hat{\pi}, \lambda^{b(n)}, \tau)$ oraz $M(\hat{\pi}, \lambda^{p(n)}, \tau^{(n)})$ są tym samym obiektem. Jako że wielokąt odpowiadający $(\hat{\pi}, \lambda^{r(n)}, \tau^{r(n)})$ powstał poprzez obrócenie wielokąta stowarzyszonego z $(\hat{\pi}, \lambda^{p(n)}, \tau^{(n)})$ o kąt θ_n , to

$$M(\hat{\pi}, \lambda^{r(n)}, \tau^{r(n)}) = r_{\theta_n} M(\hat{\pi}, \lambda^{p(n)}, \tau^{(n)}) = r_{\theta_n} M(\hat{\pi}, \lambda^{b(n)}, \tau).$$

Ponieważ odwzorowanie $M : \Theta_{\hat{\pi}}^* \rightarrow C$ jest ciągle a także grupa obrotów działa w sposób ciągly na C , to z tego, że $\|\lambda^{b(n)} - \lambda\| \leq \frac{2\Gamma}{n}$ oraz z tego, że $\theta_n \rightarrow 0$ wynika, że $M(\hat{\pi}, \lambda^{r(n)}, \tau^{r(n)}) \rightarrow M(\hat{\pi}, \lambda, \tau)$ w C dla prawie każdego $(\hat{\pi}, \lambda, \tau) \in \Theta_{\hat{\pi}, 1, 1}^*$. Skoro $M(\hat{\pi}, \lambda^{r(n)}, \tau^{r(n)}) \in C(\mathcal{D})$, to wykazaliśmy, że każdy element z $M(\Theta_{\hat{\pi}, 1, 1}^*)$ możemy przybliżyć elementami z $C(\mathcal{D})$, co kończy dowód, gdy $\mathcal{D} = \mathcal{A} \setminus \{\hat{\pi}_0^{-1}(1), \hat{\pi}_0^{-1}(d)\}$.

Wykażemy teraz, że teza dla dowolnego podzbioru $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A} \setminus \{\hat{\pi}_0^{-1}(1), \hat{\pi}_0^{-1}(d)\}$ wynika z udowodnionego przez nas rezultatu dla zbioru $\mathcal{A} \setminus \{\hat{\pi}_0^{-1}(1), \hat{\pi}_0^{-1}(d)\}$. Rzeczywiście, niech $(\hat{\pi}, \lambda, \tau) \in C(\mathcal{A} \setminus \{\hat{\pi}_0^{-1}(1), \hat{\pi}_0^{-1}(d)\})$. Dla $n \in \mathbb{N}$ rozpatrzmy wektor $\tilde{\lambda}^n$ dany przez

$$\tilde{\lambda}_a^n := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{dla } a \in (\mathcal{A} \setminus \{\hat{\pi}_0^{-1}(1), \hat{\pi}_0^{-1}(d)\}) \setminus \mathcal{D}; \\ \lambda_a & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Zauważmy, że $(\hat{\pi}, \tilde{\lambda}^n, \tau) \in C(\mathcal{D})$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $M(\hat{\pi}, \tilde{\lambda}^n, \tau) \rightarrow M(\hat{\pi}, \lambda, \tau)$. Zatem przybliżyliśmy dowolny element z $C(\mathcal{A} \setminus \{\hat{\pi}_0^{-1}(1), \hat{\pi}_0^{-1}(d)\})$ ciągiem elementów z $C(\mathcal{D})$. Skoro $C(\mathcal{A} \setminus \{\hat{\pi}_0^{-1}(1), \hat{\pi}_0^{-1}(d)\})$ jest gęsty w C , to również $C(\mathcal{D})$ ma tę własność, co kończy dowód lematu. \square

Granice wykresowych połączeń potoków specjalnych

W tym rozdziale zapoznamy się z głównym narzędziem, które posłuży do sformułowania kryterium rozłączności dwóch potoków ergodycznych. Niech (X, \mathcal{B}, μ) będzie probabilistyczną standardową przestrzenią borelowską. W tym rozdziale automorfizm $T : (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ będzie zachowującym μ automorfizmem ergodycznym. Wtedy dla dowolnej funkcji $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ rozważamy ergodyczny potok specjalny $(T_t^f)_{t \in \mathbb{R}}$ nad T i pod funkcją dachową f .

Dla każdego podzbioru $W \subset X$ takiego, że $\mu(W) > 0$ oznaczamy przez μ_W miarę warunkową daną przez $\mu_W(A) = \mu(A|W)$ dla $A \in \mathcal{B}$. Jeżeli istnieje ciąg zbiorów $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ należących do \mathcal{B} oraz rosnący ciąg liczb naturalnych $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że $\mu((T^{-q_n} A \Delta A) \cap V_n) \rightarrow 0$ dla dowolnego $A \in \mathcal{B}$, to mówimy, że T jest *sztynny* wzdłuż ciągu $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Wówczas $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy *ciągami sztywności wzdłuż ciągu* $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Przez $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, gdzie $d \in \mathbb{N}$, oznaczamy przestrzeń miar probabilistycznych na \mathbb{R}^d . Przypomnijmy, że ciąg miar $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ jest *słabo zbieżny* do miary $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, jeśli dla każdej ograniczonej funkcji ciągłej $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ zachodzi

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_n(x) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu(x).$$

Równoważnie, powyższą zbieżność wystarczy testować na jednostajnie ciągłych funkcjach ograniczonych, a nawet na funkcjach ciągłych ze zwartymi nośnikami.

Przypuśćmy teraz, że istnieje ciąg $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zbiorów mierzalnych w X , rosnące ciągi liczb naturalnych $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{q'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ oraz ciągi rzeczywiste $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{a'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ takie, że spełnione są następujące warunki:

$$(3.1) \quad \mu(W_n) \rightarrow \alpha \text{ dla pewnego } 0 < \alpha \leq 1,$$

$$(3.2) \quad \mu(W_n \Delta T^{-1}W_n) \rightarrow 0,$$

$$(3.3) \quad \{q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ jest ciągiem sztywności dla } T \text{ wzdłuż } \{W_n\}_{n \in \mathbb{N}},$$

$$(3.4) \quad \{q'_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ jest ciągiem sztywności dla } T \text{ wzdłuż } \{W_n\}_{n \in \mathbb{N}},$$

$$(3.5) \quad \left\{ \int_{W_n} |f_n(x)|^2 d\mu(x) \right\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ jest ograniczony, gdzie } f_n = f^{(q_n)} - a_n,$$

$$(3.6) \quad \left\{ \int_{W_n} |f'_n(x)|^2 d\mu(x) \right\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ jest ograniczony, gdzie } f'_n = f^{(q'_n)} - a'_n,$$

$$(3.7) \quad (f'_n, f_n)_*(\mu_{W_n}) \rightarrow P \text{ słabo w } \mathcal{P}(\mathbb{R}^2).$$

Podobne założenia były postawione w Theorem 6 w [13]. Z definicji słabej zbieżności miar wiemy, że dla każdej ciągłej i ograniczonej funkcji $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, mamy

$$(3.8) \quad \int_{W_n} \phi(f'_n(x), f_n(x)) d\mu(x) \rightarrow \alpha \int_{\mathbb{R}^2} \phi(t, u) dP(t, u).$$

Aby wykazać główny rezultat tego rozdziału, jakim jest twierdzenie orzekające o postaci granicy ciągu połączeń $\{\mu_{a'_n, a_n}^f\}_{n \in \mathbb{N}}$, gdy spełnione są warunki (3.1)-(3.7), będziemy potrzebować następujących pomocniczych lematów.

LEMAT 3.1. *Jeśli $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ i $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ są ciągami ograniczonymi w $L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ oraz $h_n \rightarrow 0$ według miary, to $h_n \cdot g_n \rightarrow 0$ w L^1 .*

DOWÓD. Niech $G, H > 0$ będzie takie, że $\|g_n\|_\infty \leq G$ oraz $\|h_n\|_\infty \leq H$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Niech $\varepsilon, \delta > 0$ oraz niech $A_{n, \delta} := \{x \in X; |h_n(x)| > \delta\}$. Ze zbieżności według miary ciągu h_n do 0 istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego $n \geq N$ zachodzi

$$\mu(A_{n, \delta}) < \varepsilon.$$

Wtedy

$$\int_X |h_n g_n| d\mu = \int_{A_{n, \delta}} |h_n g_n| d\mu + \int_{X \setminus A_{n, \delta}} |h_n g_n| d\mu \leq GH\varepsilon + G\delta.$$

Z dowolności ε i δ , to kończy dowód lematu. \square

LEMAT 3.2. *Następujące warunki są równoważne:*

- (i) ciąg $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem sztywności dla T wzdłuż $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$;
- (ii) dla każdej funkcji $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ zachodzi zbieżność $\chi_{W_n}(f \circ T^{q_n} - f) \rightarrow 0$ w L^1 ;
- (iii) dla każdej funkcji $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ zachodzi zbieżność $\chi_{W_n}(f \circ T^{q_n} - f) \rightarrow 0$ według miary.

DOWÓD. Zauważmy, że warunek $\mu((T^{-q_n} A \Delta A) \cap W_n) \rightarrow 0$ można zapisać w postaci

$$\int_{W_n} |\chi_A \circ T^{q_n} - \chi_A| d\mu \rightarrow 0.$$

Poprzez przejście do funkcji prostych a następnie skorzystanie z ich gęstości w L^1 , otrzymujemy, że $\chi_{W_n}(f \circ T^{q_n} - f) \rightarrow 0$ w L^1 dla wszystkich funkcji $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, a zatem (i) implikuje (ii). Z nierówności Markowa zbieżność w L^1 implikuje zbieżność według miary, zatem z warunku (ii) wynika (iii)

Przypuśćmy, że $\chi_{W_n}(f \circ T^{q_n} - f) \rightarrow 0$ według miary dla każdej funkcji $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$. Jeżeli dodatkowo f jest ograniczona, to z lematu 3.1, $\chi_{W_n}(f \circ T^{q_n} - f) \rightarrow 0$ w L^1 . Biorąc $f = \chi_A$ otrzymujemy $\chi_{W_n} |\chi_A \circ T^{q_n} - \chi_A| \rightarrow 0$ w L^1 dla każdego zbioru $A \in \mathcal{B}$. Ale $\int_{W_n} |\chi_A \circ T^{q_n} - \chi_A| d\mu = \mu((T^{-q_n} A \Delta A) \cap W_n)$, a zatem ciąg $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem sztywności dla T wzdłuż $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Zatem warunek (iii) implikuje (i). \square

LEMAT 3.3. *Przypuśćmy, że (X, \mathcal{B}, μ) jest wyposażona w metrykę d generującą σ -algebrę \mathcal{B} . Jeżeli $\sup_{x \in W_n} d(T^{q_n} x, x) \rightarrow 0$, to $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem sztywności dla T wzdłuż $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.*

DOWÓD. Niech $h \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ oraz niech $\varepsilon > 0$ i $a > 0$ będą dowolne, ustalone. Wtedy z twierdzenia Łuzina istnieje zbiór zwarty $B_\varepsilon \subset X$ taki, że $\mu(B_\varepsilon^c) < \frac{\varepsilon}{2}$ i $h : B_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła. Istnieje zatem takie $\delta > 0$, że warunek $d(x, y) < \delta$ implikuje $|h(x) - h(y)| < a$ dla wszystkich $x, y \in B_\varepsilon$. Z założenia istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$n \geq n_0 \text{ oraz } x \in W_n \Rightarrow d(x, T^{q_n} x) < \delta.$$

Stąd, $x \in W_n \cap B_\varepsilon \cap T^{-q_n} B_\varepsilon$ implikuje $|h(x) - h(T^{q_n} x)| < a$ dla wszystkich $n > n_0$. Zatem

$$\mu(\{x \in W_n : |h(x) - h(T^{q_n} x)| \geq a\}) \leq \mu(W_n \cap (B_\varepsilon^c \cup T^{-q_n} B_\varepsilon^c)) \leq 2\mu(B_\varepsilon^c) < \varepsilon.$$

Z dowolności $\varepsilon > 0$ i $a > 0$ użycie lematu 3.2 kończy dowód. \square

TWIERDZENIE 3.4. *Przypuśćmy, że zachodzą warunki (3.1)-(3.7) oraz T jest automorfizmem ergodycznym. Niech $h, h' : X \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami mierzalnymi. Niech $g \in L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ oraz niech $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną i jednostajnie ciągłą. Wtedy*

$$(3.9) \quad \int_{W_n} \phi(f'_n(x) + h'(x), f_n(x) + h(x))g(x) d\mu(x) \\ \rightarrow \alpha \int_X \int_{\mathbb{R}^2} \phi(t + h'(x), u + h(x))g(x) dP(t, u) d\mu(x).$$

DOWÓD. Podzielimy dowód tego rezultatu na kroki ze względu na złożoność funkcji h oraz h' .

Krok 1. Załóżmy najpierw, że $h = h' = 0$. Jeżeli g jest funkcją stałą, to (3.9) wynika bezpośrednio z (3.8). Zatem wystarczy rozważyć przypadek, gdy $g \in L_0^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, tzn. jest funkcją o zerowej całce. Rzeczywiście każdą funkcję $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ można zapisać w postaci $f = (f - \int_X f d\mu) + \int_X f d\mu$, a wtedy funkcją, dla której musimy sprawdzić prawdziwość tezy jest $g(x) := f(x) - \int_X f d\mu$. Zauważmy, że dla $g \in L_0^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ prawa strona w (3.9) jest równa 0, gdy $h = h' = 0$.

Z dowodu twierdzenia ergodycznego von Neumanna, kobrzegi, tj. funkcje postaci $g = \xi - \xi \circ T$, gdzie $\xi \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$, tworzą gęsty podzbiór w $L_0^1(X, \mathcal{B}, \mu)$. Wystarczy zatem rozważyć funkcje postaci $g = \xi - \xi \circ T$ dla $\xi \in L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$, gdyż one również są gęste w $L_0^1(X, \mathcal{B}, \mu)$. Rzeczywiście, aby udowodnić (3.9), można się ograniczyć do gęstego podzbioru $L_0^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, gdyż dla dowolnej funkcji $g \in L_0^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ i dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja g_ε z rozpatrywanego gęstego podzbioru taka, że $\|g - g_\varepsilon\|_{L^1} < \varepsilon$, a wtedy

$$\left| \int_{W_n} \phi(f'_n, f_n)g d\mu - \int_{W_n} \phi(f'_n, f_n)g_\varepsilon d\mu \right| \leq \int_{W_n} |\phi(f'_n, f_n)| |g - g_\varepsilon| d\mu \\ \leq \|\phi\|_\infty \cdot \|g - g_\varepsilon\|_{L^1} < \|\phi\|_\infty \cdot \varepsilon.$$

Ponieważ prawa strona w (3.9) zarówno dla g jak i dla g_ε wynosi 0, to z dowolności $\varepsilon > 0$ powyższa nierówność implikuje, że aby wykazać, że (3.9) zachodzi dla dowolnej funkcji $g \in L_0^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, wystarczy wykazać, że zachodzi na gęstym podzbiore tej przestrzeni.

Zauważmy, że prawa strona (3.9) jest równa

$$\alpha \int_{\mathbb{R}^2} \phi(t, u)dP(t, u) \int_X g(x) d\mu(x) = 0,$$

jeżeli tylko $g \in L_0^1(X, \mathcal{B}, \mu)$. Skoro $g = \xi - \xi \circ T$, gdzie $\xi \in L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$, to musimy dowieść, że

$$(3.10) \quad \left| \int_{W_n} \phi(f'_n(x), f_n(x))\xi(x) d\mu(x) - \int_{W_n} \phi(f'_n(x), f_n(x))\xi(Tx) d\mu(x) \right| \rightarrow 0.$$

Jednakże, ze względu na T -niezmienniczość miary μ i ograniczoność funkcji ϕ , zachodzi

$$\begin{aligned} & \left| \int_{W_n} \phi(f'_n(x), f_n(x)) \xi(x) d\mu(x) - \int_{W_n} \phi(f'_n(x), f_n(x)) \xi(Tx) d\mu(x) \right| \\ &= \left| \int_{T^{-1}W_n} \phi(f'_n(Tx), f_n(Tx)) \xi(Tx) d\mu(x) - \int_{W_n} \phi(f'_n(x), f_n(x)) \xi(Tx) d\mu(x) \right| \\ &\leq \int_{W_n} |\phi(f'_n(Tx), f_n(Tx)) - \phi(f'_n(x), f_n(x))| |\xi(Tx)| d\mu(x) \\ &\quad + \|\phi\|_\infty \int_{T^{-1}W_n \Delta W_n} |\xi(Tx)| d\mu(x). \end{aligned}$$

Z (3.2), otrzymujemy $\mu(T^{-1}W_n \Delta W_n) \rightarrow 0$. Zatem

$$(3.11) \quad \int_{T^{-1}W_n \Delta W_n} |\xi(Tx)| d\mu(x) \leq \mu(T^{-1}W_n \Delta W_n) \|\xi\|_\infty \rightarrow 0,$$

gdy $n \rightarrow \infty$.

Użyjemy teraz jednostajnej ciągłości ϕ . Z definicji f_n i f'_n , otrzymujemy

$$(f'_n(Tx), f_n(Tx)) - (f'_n(x), f_n(x)) = (f(T^{q_n}x) - f(x), f(T^{q_n}x) - f(x)).$$

Z lematu 3.2, mamy również, że

$$\chi_{W_n}(x)(f(T^{q_n}x) - f(x)) \rightarrow 0 \text{ oraz } \chi_{W_n}(x)(f(T^{q_n}x) - f(x)) \rightarrow 0$$

według miary, a zatem

$$\chi_{W_n}(x) \left((f'_n(Tx), f_n(Tx)) - (f'_n(x), f_n(x)) \right) \rightarrow 0$$

według miary. Skoro ϕ jest funkcją jednostajnie ciągłą, otrzymujemy również, że

$$\chi_{W_n} \left(\phi(f'_n \circ T, f_n \circ T) - \phi(f'_n, f_n) \right) \rightarrow 0$$

według miary. Z lematu 3.1, dostajemy

$$\int_{W_n} |\phi(f'_n(Tx), f_n(Tx)) - \phi(f'_n(x), f_n(x))| |\xi(Tx)| d\mu(x) \rightarrow 0.$$

To razem z (3.11) dowodzi zbieżności (3.10), a zatem i (3.9) dla $h = h' = 0$.

Krok 2. Niech teraz $h' = \sum_{i=1}^k h'_i \chi_{A_i}$ oraz $h = \sum_{j=1}^l h_j \chi_{B_j}$ będą funkcjami prostymi, gdzie A_i oraz B_j dla $i = 1, \dots, k$ oraz $j = 1, \dots, l$ stanowią dwa mierzalne rozbicia przestrzeni X . Wtedy

$$\begin{aligned} & \int_{W_n} \phi(f'_n(x) + h'(x), f_n(x) + h(x)) g(x) d\mu(x) \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \int_{W_n} \phi(f'_n(x) + h'_i, f_n(x) + h_j) g(x) \chi_{A_i}(x) \chi_{B_j}(x) d\mu(x) \\ &\rightarrow \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \alpha \int_X \int_{\mathbb{R}^2} \phi(t + h'_i, u + h_j) g(x) \chi_{A_i}(x) \chi_{B_j}(x) dP(t, u) d\mu(x) \\ &= \alpha \int_X \int_{\mathbb{R}^2} \phi(t + h'(x), u + h(x)) g(x) dP(t, u) d\mu(x), \end{aligned}$$

przy czym powyższa zbieżność zachodzi na podstawie pierwszego kroku użytego do funkcji postaci $(t, u) \mapsto \phi(t + h'_i, u + h_j)$. W ten sposób otrzymaliśmy (3.9) jeżeli h i h' są funkcjami prostymi.

Krok 3. Niech h i h' będą dowolnymi funkcjami mierzalnymi na X . Niech $\{h_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ i $\{h'_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ będą ciągami funkcji prostych zbieżnych według miary odpowiednio do h i h' . Wówczas mamy

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{W_n} \phi(f'_n(x) + h'(x), f_n(x) + h(x))g(x) d\mu(x) \right. \\
 & \quad \left. - \alpha \int_X \int_{\mathbb{R}^2} \phi(t + h'(x), u + h(x))g(x) dP(t, u) d\mu(x) \right| \\
 & \leq \left| \int_{W_n} \phi(f'_n(x) + h'(x), f_n(x) + h(x))g(x) d\mu(x) \right. \\
 & \quad \left. - \int_{W_n} \phi(f'_n(x) + h'_m(x), f_n(x) + h_m(x))g(x) d\mu(x) \right| \\
 (3.12) \quad & + \left| \int_{W_n} \phi(f'_n(x) + h'_m(x), f_n(x) + h_m(x))g(x) d\mu(x) \right. \\
 & \quad \left. - \alpha \int_X \int_{\mathbb{R}^2} \phi(t + h'_m(x), u + h_m(x))g(x) dP(t, u) d\mu(x) \right| \\
 & + \left| \alpha \int_X \int_{\mathbb{R}^2} \phi(t + h'_m(x), u + h_m(x))g(x) dP(t, u) d\mu(x) \right. \\
 & \quad \left. - \alpha \int_X \int_{\mathbb{R}^2} \phi(t + h'(x), u + h(x))g(x) dP(t, u) d\mu(x) \right|.
 \end{aligned}$$

Niech $\varepsilon > 0$. Wybierzmy liczbę $\delta > 0$ taką, że jeśli $\|x - y\| < \delta$, to $|\phi(x) - \phi(y)| < \varepsilon$. Ponadto dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ niech $A_{m,\delta} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \|(h', h)(x, y) - (h'_m, h_m)(x, y)\| \geq \delta\}$. Skoro $(h'_m, h_m) \rightarrow (h', h)$ według miary, to istnieje $M_\varepsilon > 0$ takie, że $\mu(A_{m,\delta}) < \varepsilon$ dla dowolnego $m \geq M_\varepsilon$. Wtedy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ uzyskujemy

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{W_n} \phi(f'_n(x) + h'(x), f_n(x) + h(x))g(x) d\mu(x) \right. \\
 & \quad \left. - \int_{W_n} \phi(f'_n(x) + h'_{M_\varepsilon}(x), f_n(x) + h_{M_\varepsilon}(x))g(x) d\mu(x) \right| \\
 & = \left| \int_{W_n} (\phi(f'_n(x) + h'(x), f_n(x) + h(x)) - \phi(f'_n(x) + h'_{M_\varepsilon}(x), f_n(x) + h_{M_\varepsilon}(x))) \right. \\
 & \quad \left. \cdot g(x) d\mu(x) \right| \\
 & \leq \int_X |\phi(f'_n(x) + h'(x), f_n(x) + h(x)) - \phi(f'_n(x) + h'_{M_\varepsilon}(x), f_n(x) + h_{M_\varepsilon}(x))| \\
 & \quad \cdot |g(x)| d\mu(x) \\
 & = \int_{A_{M_\varepsilon}} |\phi(f'_n(x) + h'(x), f_n(x) + h(x)) - \phi(f'_n(x) + h'_{M_\varepsilon}(x), f_n(x) + h_{M_\varepsilon}(x))| \\
 & \quad \cdot |g(x)| d\mu(x) \\
 & \quad + \int_{A_{M_\varepsilon}^c} |\phi(f'_n(x) + h'(x), f_n(x) + h(x)) - \phi(f'_n(x) + h'_{M_\varepsilon}(x), f_n(x) + h_{M_\varepsilon}(x))| \\
 & \quad \cdot |g(x)| d\mu(x) \\
 & < \mu(A_{M_\varepsilon}) \cdot 2\|\phi\|_\infty \cdot \|g\|_\infty + \varepsilon \cdot \|g\|_\infty < \varepsilon\|g\|_\infty(2\|\phi\|_\infty + 1).
 \end{aligned}$$

Analogicznie dowodzimy, że

$$\begin{aligned} & \left| \alpha \int_X \int_{\mathbb{R}^2} \phi(t + h'_{M_\varepsilon}(x), u + h_{M_\varepsilon}(x)) g(x) dP(t, u) d\mu(x) \right. \\ & \quad \left. - \alpha \int_X \int_{\mathbb{R}^2} \phi(t + h'(x), u + h(x)) g(x) dP(t, u) d\mu(x) \right| < \varepsilon \|g\|_\infty (2\|\phi\|_\infty + 1). \end{aligned}$$

Stosując krok drugi dowodu twierdzenia dla funkcji h_{M_ε} i h'_{M_ε} znajdziemy $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego $n \geq N$ zachodzi

$$\begin{aligned} & \left| \int_{W_n} \phi(f'_n(x) + h'_{M_\varepsilon}(x), f_n(x) + h_{M_\varepsilon}(x)) g(x) d\mu(x) \right. \\ & \quad \left. - \alpha \int_X \int_{\mathbb{R}^2} \phi(t + h'_{M_\varepsilon}(x), u + h_{M_\varepsilon}(x)) g(x) dP(t, u) d\mu(x) \right| < \varepsilon \|g\|_\infty (2\|\phi\|_\infty + 1). \end{aligned}$$

Podsumowując, korzystając z powyższych nierówności w (3.12), dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i odpowiednio dużych liczb $n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \left| \int_{W_n} \phi(f'_n(x) + h'(x), f_n(x) + h(x)) g(x) d\mu(x) \right. \\ & \quad \left. - \alpha \int_X \int_{\mathbb{R}^2} \phi(t + h'(x), u + h(x)) g(x) dP(t, u) d\mu(x) \right| < 3\varepsilon \|g\|_\infty (2\|\phi\|_\infty + 1), \end{aligned}$$

co dowodzi tezy. \square

LEMAT 3.5. *Załóżmy, że spełnione są warunki (3.1)-(3.7) oraz T jest ergodyczne. Przypuśćmy ponadto, że $g, \xi, \xi' \in L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$, a $h, h' : X \rightarrow \mathbb{R}$ są funkcjami mierzalnymi. Niech $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie jednostajnie ciągłą funkcją ograniczoną. Wtedy*

$$\begin{aligned} & \int_{W_n} \phi(f'_n(x) + h'(x), f_n(x) + h(x)) g(x) \xi(T^{q_n} x) \xi'(T^{q'_n} x) d\mu(x) \\ & \quad \rightarrow \alpha \int_X \int_{\mathbb{R}^2} \phi(t + h'(x), u + h(x)) g(x) \xi(x) \xi'(x) dP(t, u) d\mu(x). \end{aligned}$$

DOWÓD. Z lematu 3.2 otrzymujemy, że

$$\chi_{W_n}(x)(\xi(x) - \xi(T^{q_n} x)) \rightarrow 0 \text{ oraz } \chi_{W_n}(x)(\xi'(x) - \xi'(T^{q'_n} x)) \rightarrow 0,$$

według miary. Wtedy, korzystając z lematu 3.1, uzyskujemy, że

$$\begin{aligned} & \left| \int_{W_n} \phi(f'_n(x) + h'(x), f_n(x) + h(x)) g(x) \xi(T^{q_n} x) \xi'(T^{q'_n} x) d\mu(x) \right. \\ & \quad \left. - \int_{W_n} \phi(f'_n(x) + h'(x), f_n(x) + h(x)) g(x) \xi(x) \xi'(T^{q'_n} x) d\mu(x) \right| \\ & \leq \int_X |\phi(f'_n(x) + h'(x), f_n(x) + h(x))| |g(x)| |\xi'(T^{q'_n} x)| \\ & \quad |\chi_{W_n}(x)(\xi(T^{q_n} x) - \xi(x))| d\mu(x) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} & \left| \int_{W_n} \phi(f'_n(x) + h'(x), f_n(x) + h(x)) g(x) \xi(x) \xi'(T^{q'_n} x) d\mu(x) \right. \\ & \quad \left. - \int_{W_n} \phi(f'_n(x) + h'(x), f_n(x) + h(x)) g(x) \xi(x) \xi'(x) d\mu(x) \right| \\ & \leq \int_X |\phi(f'_n(x) + h'(x), f_n(x) + h(x))| |g(x)| |\xi(x)| \\ & \quad |\chi_{W_n}(x)(\xi'(T^{q'_n} x) - \xi'(x))| d\mu(x) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Podsumowując

$$\left| \int_{W_n} \phi(f'_n(x) + h'(x), f_n(x) + h(x))g(x)\xi(T^{q_n}x)\xi'(T^{q'_n}x) d\mu(x) - \int_{W_n} \phi(f'_n(x) + h'(x), f_n(x) + h(x))g(x)\xi(x)\xi'(x) d\mu(x) \right| \rightarrow 0.$$

Zatem aby sfinalizować dowód lematu musimy wykazać, że

$$\begin{aligned} & \int_{W_n} \phi(f'_n(x) + h'(x), f_n(x) + h(x))g(x)\xi(x)\xi'(x) d\mu(x) \\ & \rightarrow \alpha \int_X \int_{\mathbb{R}^2} \phi(t + h'(x), u + h(x))g(x)\xi(x)\xi'(x) dP(t, u) d\mu(x). \end{aligned}$$

Jest to jednakże bezpośrednia konsekwencja lematu 3.4, poprzez podstawienie $g(x)\xi(x)\xi'(x)$ w miejsce $g(x)$. \square

Poniższy fakt jest dobrze znany jednak dla jasności podamy jego dowód.

LEMAT 3.6. *Niech $g_n : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $n \in \mathbb{N}$ stanowi ciąg odwzorowań mierzalnych takich, że $(g_n)_*\mu \rightarrow P$ słabo w $\mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ oraz niech $h_n : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ będzie ciągiem funkcji mierzalnych takich, że $h_n \rightarrow 0$ według miary. Wtedy $(g_n + h_n)_*\mu \rightarrow P$ słabo w $\mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$.*

DOWÓD. Niech $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną jednostajnie ciągłą funkcją ograniczoną. Weźmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$. Niech $\delta > 0$ będzie taka, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}^m$, z tego że $\|x - y\| < \delta$ wynika $|\phi(x) - \phi(y)| < \varepsilon$. Niech ponadto $N \in \mathbb{N}$ będzie takie, że dla dowolnego $n \geq N$ zachodzi

$$\mu(A_{n,\delta}) < \varepsilon, \text{ gdzie } A_{n,\delta} := \{x \in X; \|h_n(x)\| \geq \delta\}.$$

Wtedy dla $n \geq N$ mamy

$$\begin{aligned} & \left| \int_X \phi(g_n(x) + h_n(x))d\mu(x) - \int_X \phi(g_n(x))d\mu(x) \right| \\ & \leq \left| \int_{A_{n,\delta}} \phi(g_n(x) + h_n(x))d\mu(x) - \int_{A_{n,\delta}} \phi(g_n(x))d\mu(x) \right| \\ & \quad + \left| \int_{A_{n,\delta}^c} \phi(g_n(x) + h_n(x))d\mu(x) - \int_{A_{n,\delta}^c} \phi(g_n(x))d\mu(x) \right| \\ & \leq 2\mu(A_{n,\delta})\|\phi\|_\infty + \int_{A_{n,\delta}^c} |\phi(g_n(x) + h_n(x)) - \phi(g_n(x))|d\mu(x) \\ & < 2\varepsilon\|\phi\|_\infty + \varepsilon\mu(A_{n,\delta}^c) < \varepsilon(2\|\phi\|_\infty + 1), \end{aligned}$$

co z dowolności ε i ze słabej zbieżności ciągu $\{(g_n)_*\mu\}_{n \in \mathbb{N}}$ implikuje, że

$$\int_X \phi(g_n(x) + h_n(x))d\mu(x) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^m} \phi(r)dP(r).$$

Ponieważ powyższa zbieżność zachodzi dla każdej funkcji ϕ jednostajnie ciągłej i ograniczonej, to dowodzi tezy lematu. \square

Niech $T : (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$ będzie automorfizmem ergodycznym oraz niech $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną z kwadratem taką, że dla pewnego $c \in \mathbb{R}$ zachodzi $f \geq c > 0$. Oznaczmy przez $T_{-f} : X \times \mathbb{R} \rightarrow X \times \mathbb{R}$ produkt skośny $T_{-f}(x, r) := (Tx, r - f(x))$. Wtedy dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ otrzymujemy $T_{-f}^n(x, r) =$

$(T^n x, r - f^{(n)}(x))$. Niech $\{\sigma_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ oznacza potok na $X \times \mathbb{R}$ dany wzorem $\sigma_t(x, r) = (x, r + t)$, który zachowuje miarę $\mu \otimes \text{Leb}$. Jak nietrudno zauważyć

$$T_{-f} \circ \sigma_t = \sigma_t \circ T_{-f} \quad \text{dla każdego } t \in \mathbb{R}.$$

Poniższy lemat jest uproszczoną wersją lematu 3.2 in [12], który z kolei był uogólnieniem lematu 4.2 w [14].

LEMAT 3.7. *Dla wszystkich liczb $t, s \in \mathbb{R}$ oraz mierzalnych podzbiorów $A, B, C \subset X^f$ zachodzi*

$$\mu^f(T_t^f A \cap T_s^f B \cap C) = \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} \mu \otimes \text{Leb}((T_{-f})^n \sigma_t A \cap (T_{-f})^m \sigma_s B \cap C).$$

Ponadto zbiory których miary są sumowane po prawej stronie powyższej nierówności są parami rozłączne.

DOWÓD. Niech $t, s \in \mathbb{R}$ oraz $(x, r) \in X^f$. Przypomnijmy, że zgodnie z definicją potoku specjalnego mamy

$$(3.13) \quad T_t^f(x, r) = (T^n(x), r + t - f^{(n)}(x)) = T_{-f}^n(x, r + t),$$

gdzie $n \in \mathbb{Z}$ jest jedyną liczbą całkowitą taką, że $f^{(n)}(x) \leq r + t < f^{(n+1)}(x)$. Warto zauważyć, że nie ma żadnego powodu aby dla ustalonego zbioru mierzalnego $A \subseteq X^f$ oraz $t \in \mathbb{R}$, wszystkim elementom $(x, r) \in A$ przyporządkowana była ta sama liczba całkowita $n \in \mathbb{Z}$ w (3.13). Możemy jednak zapisać

$$T_t^f A = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (T_{-f}^n \sigma_t A \cap X^f),$$

gdzie ze względu na jedyność $n \in \mathbb{Z}$ w (3.13), rodzina $\{T_{-f}^n \sigma_t A \cap X^f\}_{n \in \mathbb{Z}}$ jest rodziną zbiorów parami rozłącznych. Rzeczywiście, przypuśćmy, że $(x_0, r_0) \in X^f$ oraz $(x_0, r_0) \in T_{-f}^n \sigma_t A \cap T_{-f}^m \sigma_t A$ dla $n \neq m$. Ponieważ produkt skośny T_{-f} i potok $\{\sigma_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ komutują, to $(x_0, r_0 - t) \in T_{-f}^n A$ oraz $(x_0, r_0 - t) \in T_{-f}^m A$. Stąd

$$T_{-f}^n(x_0, r_0 - t) = (T^n x_0, r_0 - t - f^{(n)}(x_0)) \in A \subseteq X^f$$

oraz

$$T_{-f}^m(x_0, r_0 - t) = (T^m(x_0), r_0 - t - f^{(m)}(x_0)) \in A \subseteq X^f.$$

Zatem zgodnie z definicją przestrzeni X^f otrzymujemy, że

$$0 \leq r_0 - t - f^{(n)}(x_0) < f(T^n x_0) \quad \text{oraz} \quad 0 \leq r_0 - t - f^{(m)}(x_0) < f(T^m x_0),$$

czyli

$$f^{(n)}(x_0) \leq r_0 - t < f^{(n+1)}(x_0) \quad \text{oraz} \quad f^{(m)}(x_0) \leq r_0 - t < f^{(m+1)}(x_0).$$

Jest to sprzeczność dla $n \neq m$, gdyż f jest funkcją ściśle dodatnią.

Analogicznie,

$$T_s^f B = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (T_{-f}^n \sigma_s B \cap X^f),$$

gdzie $\{T_{-f}^n \sigma_s B \cap X^f\}_{n \in \mathbb{Z}}$ również jest rodziną zbiorów parami rozłącznych. Skoro $C \subset X^f$, to

$$(T_t^f A \cap T_s^f B \cap C) = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T_{-f}^n \sigma_t A \cap \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} T_{-f}^m \sigma_s B \cap C \right) = \bigcup_{n, m \in \mathbb{Z}} (T_{-f}^n \sigma_t A \cap T_{-f}^m \sigma_s B \cap C),$$

gdzie $\{T_{-f}^n \sigma_t A \cap T_{-f}^m \sigma_s B \cap C\}_{n, m \in \mathbb{Z}}$ jest rodziną zbiorów parami rozłącznych, co dowodzi drugiej części lematu.

Jako że miara μ^f jest obcięciem miary $\mu \otimes Leb$ na $X \times \mathbb{R}$ do X^f , to korzystając z σ -addytywności

$$\mu^f(T_t^f A \cap T_s^f B \cap C) = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \mu \otimes Leb(T_{-f}^n \sigma_t A \cap T_{-f}^m \sigma_s B \cap C),$$

co kończy dowód lematu. \square

Następujący lemat jest z kolei uproszczoną wersją Lemma 3.3, również pochodzącego z pracy [12].

LEMAT 3.8. *Przypuśćmy, że $A = A_1 \times A_2$, $B = B_1 \times B_2$, $C = C_1 \times C_2$ są mierzalnymi prostokątami w $X \times \mathbb{R}$. Wtedy*

$$\begin{aligned} & \mu \otimes Leb(T_{-f}^{k_1} A \cap T_{-f}^{k_2} B \cap C) \\ &= \int_{(T^{k_1} A_1) \cap (T^{k_2} B_1) \cap C_1} Leb\left(\left(A_2 + f^{(-k_1)}(x)\right) \cap \left(B_2 + f^{(-k_2)}(x)\right) \cap C_2\right) d\mu(x), \end{aligned}$$

dla dowolnych $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

DOWÓD. Zauważmy, że $(x, r) \in T_{-f}^{k_1} A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in T^{k_1} A_1$ oraz $r \in A_2 + f^{(-k_1)}(x)$. Zatem

$$\begin{aligned} \mu \otimes Leb(T_{-f}^{k_1} A \cap T_{-f}^{k_2} B \cap C) &= \int_X \int_{\mathbb{R}} \chi_{(T_{-f}^{k_1} A \cap T_{-f}^{k_2} B \cap C)}(x, r) dx(r) d\mu(x) \\ &= \int_X \int_{\mathbb{R}} \chi_{(T^{k_1} A_1 \cap T^{k_2} B_1 \cap C_1)}(x) \cdot \chi_{((A_2 + f^{(-k_1)}(x)) \cap (B_2 + f^{(-k_2)}(x)) \cap C_2)}(r) dx(r) d\mu(x) \\ &= \int_{(T^{k_1} A_1) \cap (T^{k_2} B_1) \cap C_1} Leb\left(\left(A_2 + f^{(-k_1)}(x)\right) \cap \left(B_2 + f^{(-k_2)}(x)\right) \cap C_2\right) d\mu(x), \end{aligned}$$

co kończy dowód lematu. \square

Twierdzenie, którego teraz dowiedziemy jest głównym rezultatem tego rozdziału. Jest to uogólniona wersja Theorem 6 w [13] oraz Proposition 3.7 w [12]. Ścisłej rzecz biorąc, jest to wersja Theorem 3.7 w [12], w którym zastępujemy założenie o sztywności T założeniem słabszym tj. sztywnością wzdłuż ciągu zbiorów. Przypomnijmy, że Proposition 3.7 w [12] stosowano dla potoków specjalnych zbudowanych nad obrotami niewymiernymi. Nowa wersja tego wyniku jest użyteczna w przypadku, gdy podstawą potoku specjalnego jest ergodyczne przekładanie odcinków.

TWIERDZENIE 3.9. *Przypuśćmy, że spełnione są warunki (3.1)-(3.7) oraz T jest automorfizmem ergodycznym. Wtedy, przechodząc ewentualnie do podciągu, zachodzi słaba zbieżność*

$$\mu_{a'_n, a_n}^f \rightarrow \alpha \int_{\mathbb{R}} \mu_{-t, -u}^f dP(t, u) + (1 - \alpha)\nu \quad \text{w } J_3(\mathcal{T}^f),$$

gdzie $\nu \in J_3(\mathcal{T}^f)$.

DOWÓD. Ze zwartości $J_3(\mathcal{T}^f)$, przechodząc ewentualnie do podciągu, możemy przyjąć, że $\mu_{a'_n, a_n}^f \rightarrow \rho$ słabo do pewnej miary $\rho \in J_3(\mathcal{T}^f)$. Dowiedziemy najpierw, że dla mierzalnych prostokątów w X^f

$$A = A_1 \times A_2, \quad B = B_1 \times B_2, \quad C = C_1 \times C_2,$$

gdzie $A_2, B_2, C_2 \subset \mathbb{R}$ są ograniczone, mamy

$$(3.14) \quad \begin{aligned} & \mu^f \left(T_{-a'_n}^f \left(A \cap (T^{q'_n} W_n \times \mathbb{R}) \right) \cap T_{-a_n}^f \left(B \cap (T^{q_n} W_n \times \mathbb{R}) \right) \cap C \right) \\ & \rightarrow \alpha \int_{\mathbb{R}^2} \mu^f \left(T_t^f A \cap T_u^f B \cap C \right) dP(t, u). \end{aligned}$$

Z lematu 3.7 uzyskujemy

$$\begin{aligned} & \mu^f \left(T_{-a'_n}^f \left((A_1 \cap T^{q'_n} W_n) \times A_2 \right) \cap T_{-a_n}^f \left((B_1 \cap T^{q_n} W_n) \times B_2 \right) \cap (C_1 \times C_2) \right) \\ & = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \mu \otimes Leb \left((T_{-f})^{-k} (T_{-f})^{-q'_n} \sigma_{-a'_n} \left((A_1 \cap T^{q'_n} W_n) \times A_2 \right) \right. \\ & \quad \left. \cap (T_{-f})^{-l} (T_{-f})^{-q_n} \sigma_{-a_n} \left((B_1 \cap T^{q_n} W_n) \times B_2 \right) \cap (C_1 \times C_2) \right). \end{aligned}$$

Ponadto ze względu na lemat 3.8, zachodzi

$$\begin{aligned} a_{k,l}^n & := \mu \otimes Leb \left((T_{-f})^{-k} (T_{-f})^{-q'_n} \sigma_{-a'_n} \left((A_1 \cap T^{q'_n} W_n) \times A_2 \right) \right. \\ & \quad \left. \cap (T_{-f})^{-l} (T_{-f})^{-q_n} \sigma_{-a_n} \left((B_1 \cap T^{q_n} W_n) \times B_2 \right) \cap (C_1 \times C_2) \right) \\ & = \int_{U_n} Leb \left((A_2 - a'_n + f^{(q'_n+k)}(x)) \cap (B_2 - a_n + f^{(q_n+l)}(x)) \cap C_2 \right) d\mu(x), \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} U_n & := T^{-q'_n-k} (A_1 \cap T^{q'_n} W_n) \cap T^{-q_n-l} (B_1 \cap T^{q_n} W_n) \cap C_1 \\ & = T^{-q'_n-k} A_1 \cap T^{-k} W_n \cap T^{-q_n-l} B_1 \cap T^{-l} W_n \cap C_1. \end{aligned}$$

W szczególności mamy

$$(3.15) \quad \mu^f \left(T_{-a'_n}^f \left((A_1 \cap T^{q'_n} W_n) \times A_2 \right) \cap T_{-a_n}^f \left((B_1 \cap T^{q_n} W_n) \times B_2 \right) \cap (C_1 \times C_2) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}^n.$$

Ustalmy $l \in \mathbb{Z}$. Używając tezy o rozłączności zbiorów w lemacie 3.7 uzyskujemy

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{k,l}^n & = \mu \otimes Leb \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left((T_{-f})^{-k} (T_{-f})^{-q'_n} \sigma_{-a'_n} \left((A_1 \cap T^{q'_n} W_n) \times A_2 \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \cap (T_{-f})^{-l} (T_{-f})^{-q_n} \sigma_{-a_n} \left((B_1 \cap T^{q_n} W_n) \times B_2 \right) \cap (C_1 \times C_2) \right) \right) \\ & \leq \mu \otimes Leb \left((T_{-f})^{-l} (T_{-f})^{-q_n} \sigma_{-a_n} \left((B_1 \cap T^{q_n} W_n) \times B_2 \right) \cap (C_1 \times C_2) \right) \end{aligned}$$

Z kolei z lematu 3.8 dla $A := X \times \mathbb{R}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \mu \otimes Leb \left((T_{-f})^{-l} (T_{-f})^{-q_n} \sigma_{-a_n} \left((B_1 \cap T^{q_n} W_n) \times B_2 \right) \cap (C_1 \times C_2) \right) \\ & \leq \int_{T^{-l} W_n} Leb \left((B_2 - a_n + f^{(l+q_n)}(x)) \cap C_2 \right) d\mu(x) \\ & = \int_{T^{-l} W_n} Leb \left((B_2 + f_n(T^l x) + f^{(l)}(x)) \cap C_2 \right) d\mu(x), \end{aligned}$$

gdzie w ostatniej równości użyliśmy faktu, że

$$f^{(l+q_n)}(x) - a_n = f^{(l)}(x) + f^{(q_n)}(T^l x) - a_n = f^{(l)}(x) + f_n(T^l x).$$

Podsumowując

$$(3.16) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{k,l}^n \leq \int_{T^{-l}W_n} \text{Leb} \left((B_2 + f_n(T^l x) + f^{(l)}(x)) \cap C_2 \right) d\mu(x).$$

Niech teraz $s = \text{diam}(B_2 \cup C_2)$ oraz $V_n = \{x \in T^{-l}W_n : |f_n(T^l x) + f^{(l)}(x)| \leq s\}$. Przypomnijmy także, że $f \geq c > 0$. Wtedy

$$(3.17) \quad \begin{aligned} & \int_{T^{-l}W_n} \text{Leb} \left((B_2 + f_n(T^l x) + f^{(l)}(x)) \cap C_2 \right) d\mu(x) \\ &= \int_{V_n} \text{Leb} \left((B_2 + f_n(T^l x) + f^{(l)}(x)) \cap C_2 \right) d\mu(x) \\ &\leq s\mu(V_n) \leq s\mu(\{x \in W_n : |f_n(x)| \geq c|l| - s\}) \leq s \frac{D}{(c|l| - s)^2}, \end{aligned}$$

gdzie $D = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{W_n} |f_n(x)|^2 d\mu(x)$, a ostatnia nierówność wynika z nierówności Czebyszewa. Niech teraz $D_l := s \frac{D}{(c|l| - s)^2}$ dla $l \in \mathbb{Z}$ takich, że $|l| > \frac{s}{c}$ i niech $D_l := \mu^f(X^f)$ w przeciwnym wypadku. Z (3.16) i (3.17) uzyskaliśmy $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{k,l}^n \leq D_l$ oraz $\sum_{l \in \mathbb{Z}} D_l < \infty$. Analogicznie, możemy znaleźć ciąg $\{D'_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ taki, że $\sum_{k \in \mathbb{Z}} D'_k < \infty$ oraz $\sum_{l \in \mathbb{Z}} a_{k,l}^n \leq D'_k$. Stąd dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $M > 0$ takie, że

$$\sum_{|k| \geq M} \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_{k,l}^n \leq \sum_{|k| \geq M} D'_k < \frac{\varepsilon}{8} \quad \text{oraz} \quad \sum_{|l| \geq M} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{k,l}^n \leq \sum_{|l| \geq M} D_l < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Zatem

$$(3.18) \quad \sum_{\max(|k|, |l|) \geq M} a_{k,l}^n \leq \sum_{|k| \geq M} \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_{k,l}^n + \sum_{|l| \geq M} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{k,l}^n < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Udowodnimy teraz, że dla każdej pary $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$ ciąg

$$\begin{aligned} a_{k,l}^n &= \int_{T^{-k}W_n \cap T^{-l}W_n} \chi_{C_1}(x) \chi_{T^{-k}A_1}(T^{q'_n}x) \chi_{T^{-l}B_1}(T^{q_n}x) \\ &\quad \text{Leb} \left((A_2 + f'_n(x) + f^{(k)}(T^{q'_n}x)) \cap (B_2 + f_n(x) + f^{(l)}(T^{q_n}x)) \cap C_2 \right) d\mu(x) \end{aligned}$$

jest zbieżny dla $n \rightarrow \infty$. Skoro, z założenia (3.2), mamy $\mu((T^{-k}W_n \cap T^{-l}W_n) \Delta W_n) \rightarrow 0$, to wystarczy sprawdzić zbieżność ciągu

$$\begin{aligned} b_{k,l}^n &:= \int_{W_n} \text{Leb} \left((A_2 + f'_n(x) + f^{(k)}(T^{q'_n}x)) \cap (B_2 + f_n(x) + f^{(l)}(T^{q_n}x)) \cap C_2 \right) \\ &\quad \chi_{C_1}(x) \chi_{T^{-k}A_1}(T^{q'_n}x) \chi_{T^{-l}B_1}(T^{q_n}x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Rzeczywiście, ze względu na ograniczoność zbiorów A_2, B_2, C_2 funkcja podcałkowa jest funkcją ograniczoną, a stąd $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{k,l}^n - b_{k,l}^n| = 0$. Niech $F'_n, F_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ będą dane wzorami

$$F'_n(x) := f'_n(x) + f^{(k)}(T^{q'_n}x) - f^{(k)}(x) \quad \text{oraz} \quad F_n(x) := f_n(x) + f^{(l)}(T^{q_n}x) - f^{(l)}(x).$$

Wtedy

$$\begin{aligned} b_{k,l}^n &= \int_{W_n} \text{Leb} \left((A_2 + F'_n(x) + f^{(k)}(x)) \cap (B_2 + F_n(x) + f^{(l)}(x)) \cap C_2 \right) \\ &\quad \chi_{C_1}(x) \chi_{T^{-k}A_1}(T^{q'_n}x) \chi_{T^{-l}B_1}(T^{q_n}x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Z lematu 3.2 otrzymujemy

$$\chi_{W_n}(x)(f^{(k)}(T^{q_n}x) - f^{(k)}(x)) \rightarrow 0 \text{ oraz } \chi_{W_n}(x)(f^{(l)}(T^{q_n}x) - f^{(l)}(x)) \rightarrow 0$$

według miary. Skoro $(f'_n, f_n)_*(\mu_{W_n}) \rightarrow P$, to lemat 3.6 implikuje

$$(F'_n, F_n)_*(\mu_{W_n}) \rightarrow P \text{ słabo w } \mathcal{P}(\mathbb{R}^2).$$

Zastosujmy lemat 3.5 do

$$\begin{aligned} \phi(t, u) &:= \text{Leb}\left((A_2 + t) \cap (B_2 + u) \cap C_2\right), \quad (h', h) := (f^{(k)}, f^{(l)}), \\ (f'_n, f_n) &:= (F'_n, F_n), \quad g := \chi_{C_1}, \quad \xi' := \chi_{T^{-k}A_1}, \quad \xi := \chi_{T^{-l}B_1}. \end{aligned}$$

Uzyskujemy w ten sposób, że

$$\begin{aligned} b_{k,l}^n \rightarrow c_{k,l} &:= \alpha \int_X \int_{\mathbb{R}^2} \text{Leb}\left(\left(A_2 + t + f^{(k)}(x)\right) \cap \left(B_2 + u + f^{(l)}(x)\right) \cap C_2\right) \\ &\quad \chi_{C_1}(x) \chi_{T^{-k}A_1}(x) \chi_{T^{-l}B_1}(x) dP(t, u) d\mu(x). \end{aligned}$$

Z twierdzenia Fubiniiego i lematu 3.8, $c_{k,l}$ jest liczbą równą

$$\begin{aligned} &\alpha \int_{\mathbb{R}^2} \int_{T^{-k}A_1 \cap T^{-l}B_1 \cap C_1} \text{Leb}\left(\left(A_2 + t + f^{(k)}(x)\right) \cap \left(B_2 + u + f^{(l)}(x)\right) \cap C_2\right) d\mu(x) dP(t, u) \\ &= \alpha \int_{\mathbb{R}^2} (\mu \otimes \text{Leb})\left(\left(T_{-f}\right)^{-k} \sigma_t(A_1 \times A_2) \cap \left(T_{-f}\right)^{-l} \sigma_u(B_1 \times B_2) \cap (C_1 \times C_2)\right) dP(t, u). \end{aligned}$$

Z lematu 3.7 mamy

$$(3.19) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_{k,l} = \alpha \int_{\mathbb{R}^2} \mu^f\left(T_t^f A \cap T_u^f B \cap C\right) dP(t, u) < \infty.$$

Stąd, biorąc ewentualnie większe M , otrzymujemy

$$(3.20) \quad \sum_{\max\{|k|, |l|\} > M} c_{k,l} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Skoro $b_{k,l}^n \rightarrow c_{k,l}$ oraz $|a_{k,l}^n - b_{k,l}^n| \rightarrow 0$, to $a_{k,l}^n \rightarrow c_{k,l}$ oraz dla wszystkich $k, l \in \mathbb{Z}$, możemy wybrać $N > 0$ takie, że dla wszystkich $n \geq N$ oraz $k, l \in \mathbb{Z}$ spełniających $\max\{|k|, |l|\} \leq M$ mamy

$$|a_{k,l}^n - c_{k,l}| < \frac{\varepsilon}{2(2M+1)^2}.$$

Biorąc pod uwagę (3.18) oraz (3.20) otrzymujemy, że

$$\left| \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} a_{k,l}^n - \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} c_{k,l} \right| \leq \sum_{\max\{|k|, |l|\} > M} a_{k,l}^n + \sum_{\max\{|k|, |l|\} > M} c_{k,l} + \sum_{\max\{|k|, |l|\} \leq M} |a_{k,l}^n - c_{k,l}| < \varepsilon.$$

Zatem $\sum_{k,l \in \mathbb{Z}} a_{k,l}^n \rightarrow \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} c_{k,l}$ co ze względu na (3.15) oraz (3.19), dowodzi zbieżności (3.14).

Skoro ciąg połączeń $\mu_{a'_n, a_n}^f$ zbiega do ρ w $J_3(\mathcal{T}^f)$, to

$$(3.21) \quad \begin{aligned} \rho(A \times B \times C) &= \lim_n \rightarrow \infty \mu^f(T_{-a'_n}^f(A) \cap T_{-a_n}^f(B) \cap C) \\ &\geq \mu^f\left(T_{-a'_n}^f\left(A \cap (T^{q_n}W_n \times \mathbb{R})\right) \cap T_{-a_n}^f\left(B \cap (T^{q_n}W_n \times \mathbb{R})\right) \cap C\right), \end{aligned}$$

gdzie $A, B, C \subset X^f$ są dowolnymi mierzalnymi prostokątami. Następnie z (3.14) po przejściu z n do nieskończoności uzyskujemy

$$(3.22) \quad \rho(A \times B \times C) \geq \alpha \int_{\mathbb{R}^2} \mu_{-t, -u}^f(A \times B \times C) dP(t, u).$$

Warto zaznaczyć, że Rozważmy $\nu \in J_3(\mathcal{T}^f)$ dane wzorem

$$\nu(E) := \frac{1}{1-\alpha}(\rho(E) - \alpha \int_{\mathbb{R}^2} \mu_{-t,-u}^f dP(t,u)(E)).$$

dla dowolnego mierzalnego podzbioru $E \subset (X^f)^3$. Wykażemy, że $\nu \in J_3(\mathcal{T}^f)$. Z (3.22) otrzymujemy, że ν przyjmuje nieujemne wartości na produktach prostokątów w $(X^f)^3$. Ponieważ ν jest różnicą miar, to jest także przeliczalnie addytywną miarą zespoloną o wartościach rzeczywistych. Zatem wahanie ν , oznaczane przez $|\nu|$, jest miarą na $(X^f)^3$. W szczególności $|\nu|$ jest miarą na przestrzeni metryzowalnej, a więc jest miarą regularną. Ustalmy $E \in (B^f)^3$ oraz $\varepsilon > 0$. Z regularności $|\nu|$ istnieje zbiór otwarty $U \subset (B^f)^3$ oraz zbiór zwarty $K \subset (B^f)^3$ takie, że

$$K \subseteq E \subseteq U \text{ oraz } |\nu|(U \setminus K) < \varepsilon.$$

Dla każdego elementu $x \in K$ wybierzmy zbiór otwarty postaci

$$(3.23) \quad V(x) := I_1^1(x) \times I_2^1(x) \times I_1^2(x) \times I_2^2(x) \times I_1^3(x) \times I_2^3(x)$$

taki, że $x \in V(x)$ oraz $V(x) \subset U$, a $I_1^i \times I_2^i \in X^f$ jest otwartą kostką dla $i = 1, 2, 3$. Ze zwartości K możemy wybrać skończoną rodzinę $\{V_i\}_{i=1}^M$ zbiorów spełniających powyższe warunki taką, że $K \subseteq \bigcup_{i=1}^M V_i \subseteq U$. Bez utraty ogólności możemy założyć, że $V_i \setminus V_j \neq \emptyset$ dla $i \neq j$. Rozważmy teraz rodzinę rozłącznych produktów prostokątów $\{W_i\}_{i=1}^N$ uzyskaną poprzez urozłacznienie zbiorów V_i . Dokładniej, niech $W_1 = V_1$. Następnie zauważmy, że skoro V_2 i V_1 są postaci jak w (3.23), to $V_2 \setminus V_1$ jest skończoną sumą rozłącznych prostokątów (niekoniecznie otwartych). Postępując indukcyjnie otrzymujemy w ten sposób rodzinę $\{W_n\}_{n=1}^M$.

Niech $W := \sum_{i=1}^n W_i$. Jako, że jest to rozłączna suma prostokątów, to $\nu(W) \geq 0$. Z definicji wahania miary otrzymujemy

$$\begin{aligned} |\nu(W) - \nu(E)| &\leq |\nu(W) - \nu(K)| + |\nu(E) - \nu(K)| = |\nu(W \setminus K)| + |\nu(E \setminus K)| \\ &\leq |\nu|(W \setminus K) + |\nu|(E \setminus K) \leq 2|\nu|(U \setminus K) < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Stąd $\nu(E) > \nu(W) - 2\varepsilon > -2\varepsilon$, co z dowolności $E \in (X^f)^3$ oraz ε implikuje, że ν przyjmuje wartości nieujemne na wszystkich podziorach mierzalnych.

Pozostało wykazać, że ν jest połączeniem. Skoro ρ oraz $\int_{\mathbb{R}^2} \mu_{-t,-u}^f dP(t,u)$ są połączeniami, to w szczególności są $\mathcal{T}^f \times \mathcal{T}^f \times \mathcal{T}^f$ - niezmiennicze, a stąd także ν posiada tę własność. Ponadto dla dowolnego zbioru mierzalnego $A \subset X^f$ mamy

$$\begin{aligned} \nu(A \times X^f \times X^f) &= \frac{1}{1-\alpha}(\rho(A \times X^f \times X^f) - \alpha \int_{\mathbb{R}^2} \mu_{-t,-u}^f dP(t,u)(A \times X^f \times X^f)) \\ &= \frac{1}{1-\alpha}(\mu(A) - \alpha\mu(A)) = \mu(A). \end{aligned}$$

Analogiczne rozumowanie względem pozostałych współrzędnych, kończy dowód tego, że $\nu \in J_3(\mathcal{T}^f)$. □

ROZDZIAŁ 4

Następstwa postaci połączeń granicznych

W tym rozdziale podamy kryteria rozłączności potoku ze swoim potokiem odwrotnym oraz słabego mieszania potoku. Oba kryteria wykorzystują postać granicy połączeń wykresowych.

Niech (X, \mathcal{B}, μ) oraz (Y, \mathcal{C}, ν) będą probabilistycznymi standardowymi przestrzeniami borelowskimi. Dla każdej miary probabilistycznej $\lambda \in \mathcal{P}(X \times Y)$, oznaczamy przez $\lambda|_X$ oraz $\lambda|_Y$ rzutowania miary λ odpowiednio na X i Y , tj. dla każdego mierzalnego zbioru $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$ mamy

$$\lambda|_X(A) = \lambda(A \times Y) \quad \text{oraz} \quad \lambda|_Y(B) = \lambda(X \times B).$$

Niech $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ oraz $\mathcal{S} = \{S_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ będą słabo mieszającymi potokami działającymi odpowiednio na (X, \mathcal{B}, μ) i (Y, \mathcal{C}, ν) . Przypomnijmy, że dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ mamy $\mu_t = (T_t \times Id)_* \mu$ oraz $\nu_t = (S_t \times Id)_* \nu$.

LEMAT 4.1. *Niech $\lambda \in J^e(\mathcal{T}, \mathcal{S})$. Niech ponadto $\rho \in J_2^e(\mathcal{T} \times \mathcal{S}, \lambda)$ będzie samopołączeniem zdefiniowanym na $X_1 \times Y_1 \times X_2 \times Y_2$, gdzie $X_1 = X_2 = X$ oraz $Y_1 = Y_2 = Y$. Załóżmy, że dla pewnych $r, r' \in \mathbb{R}$ zachodzi $\rho|_{X_1 \times X_2} = \mu_r$ oraz $\rho|_{Y_1 \times Y_2} = \nu_{r'}$. Jeśli $r \neq r'$, to $\lambda = \mu \otimes \nu$.*

DOWÓD. Wykażemy, że $\lambda = (T_r \times S_{r'})_* \lambda$. Pokażemy najpierw, że warunek (3) w lemacie 2.8 jest spełniony dla π -układu zbiorów produktowych oraz dla izomorfizmu $\phi := T_{-r} \times S_{-r'}$ działającego z $(X_1 \times Y_1, \lambda)$ do $(X_2 \times Y_2, \lambda)$. Innymi słowy, dla każdego $A \in \mathcal{B}$ oraz $B \in \mathcal{C}$ mamy

$$\rho(A \times B \times (T_{-r} \times S_{-r'})(A \times B)^c) = \rho((A \times B)^c \times (T_{-r} \times S_{-r'})(A \times B)) = 0.$$

Rzeczywiście, skoro μ_r oraz $\nu_{r'}$ są połączeniami wykresowymi, to z lematu 2.8 otrzymujemy, że dla dowolnych $A \in \mathcal{B}$ oraz $B \in \mathcal{C}$ zachodzi

$$\mu_r(A \times T_{-r}A^c) = 0 \quad \text{oraz} \quad \nu_{r'}(B \times T_{-r}B^c) = 0.$$

Jako, że $\rho|_{X_1 \times X_2} = \mu_r$ oraz $\rho|_{Y_1 \times Y_2} = \nu_{r'}$, to

$$\begin{aligned} \rho(A \times B \times (T_{-r} \times S_{-r'})(A \times B)^c) &= \rho(A \times B \times T_{-r}A^c \times S_{-r'}B) \\ &\quad + \rho(A \times B \times T_{-r}A^c \times S_{-r'}B^c) + \rho(A \times B \times T_{-r}A \times S_{-r'}B^c) \\ &\leq 2\rho(A \times Y \times T_{-r}A^c \times Y) + \rho(X \times B \times X \times S_{-r'}B^c) \\ &= 2\mu_r(A \times T_{-r}A^c) + \nu_{r'}(B \times S_{-r'}B^c) = 0 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \rho((A \times B)^c \times T_{-r}A \times S_{-r'}B) &= \rho(A^c \times B \times T_{-r}A \times S_{-r'}B) \\ &\quad + \rho(A^c \times B^c \times T_{-r}A \times S_{-r'}B) + \rho(A \times B^c \times T_{-r}A \times S_{-r'}B) \\ &\leq 2\rho(A^c \times Y \times T_{-r}A \times Y) + \rho(X \times B^c \times X \times S_{-r'}B) \\ &= 2\mu_r(A^c \times T_{-r}A) + \nu_{r'}(B^c \times S_{-r'}B) = 0. \end{aligned}$$

Udowodniliśmy zatem, że warunek (3) w lemacie 2.8 jest spełniony dla π -układu zbiorów produktowych. Skoro $\rho \in J_2^e(\mathcal{T} \times \mathcal{S}, \lambda)$, to z uwagi na warunek (2) w lemacie 2.8 uzyskujemy

$$\begin{aligned} \lambda(A \times B) &= \rho(A \times B \times X \times Y) = \rho(X \times Y \times T_{-r}A \times S_{-r'}B) \\ &= \lambda(T_{-r}A \times S_{-r'}B) = (T_r \times S_{r'})_* \lambda(A \times B), \end{aligned}$$

dla wszystkich $A \in \mathcal{B}$ oraz $B \in \mathcal{C}$. Jako, że π -układ zbiorów produktowych generuje $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$, otrzymujemy, że miary λ i $(T_r \times S_{r'})_* \lambda$ są sobie równe. Ze względu na $(\mathcal{T} \times \mathcal{S})$ -niezmienniczość miary λ otrzymujemy, że λ jest $(Id \times S_{r-r'})$ -niezmiennicza. Skoro \mathcal{S} jest potokiem słabo mieszającym, to automorfizm $S_{r-r'}$ jest ergodyczny, jeżeli tylko $r \neq r'$. Jako, że Id jest rozłączna z każdym automorfizmem ergodycznym (patrz lemat 2.7), to $\lambda = \mu \otimes \nu$. \square

TWIERDZENIE 4.2. *Załóżmy, że dla pewnych ciągów rzeczywistych $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zachodzi*

$$\mu_{a_n, b_n} \rightarrow (1 - \alpha) \int_{\mathbb{R}^2} \mu_{-t, -u} dP(t, u) + \alpha \xi_1,$$

oraz

$$\nu_{a_n, b_n} \rightarrow (1 - \alpha') \int_{\mathbb{R}^2} \nu_{-t, -u} dQ(t, u) + \alpha' \xi_2,$$

dla pewnych liczb $0 \leq \alpha, \alpha' < 1$, miar $P, Q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ oraz połączeń $\xi_1 \in J_3(\mathcal{T})$, $\xi_2 \in J_3(\mathcal{S})$. Załóżmy ponadto, że istnieje zbiór $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ taki, że

$$(4.1) \quad (1 - \alpha)P(B) - (1 - \alpha')Q(B) > \alpha'.$$

Wtedy potoki \mathcal{T} oraz \mathcal{S} są rozłączne.

DOWÓD. Niech $\xi_1 = \int_{J_3^e(\mathcal{T})} \rho^{\mathcal{T}} d\kappa_1(\rho^{\mathcal{T}})$ oraz $\xi_2 = \int_{J_3^e(\mathcal{S})} \rho^{\mathcal{S}} d\kappa_2(\rho^{\mathcal{S}})$ będą rozkładami na składowe ergodyczne połączeń ξ_1 i ξ_2 . Niech ponadto

$$\mathcal{A}_1 := \{\mu_{t,u}; t, u \in \mathbb{R}\} \subset J_3^e(\mathcal{T}) \text{ oraz } \mathcal{A}_2 := \{\nu_{t,u}; t, u \in \mathbb{R}\} \subset J_3^e(\mathcal{S}).$$

Powyższe inkluzje wynikają ze słabego mieszania potoków \mathcal{T} i \mathcal{S} . Z uwagi na twierdzenie Suslina (patrz np. Proposition 4.5.1 w [29]), zbiory \mathcal{A}_1 i \mathcal{A}_2 , jako obrazy ciągłych i różnowartościowych odwzorowań $(t, u) \mapsto \mu_{t,u}$ oraz $(t, u) \mapsto \nu_{t,u}$, są mierzalne.

W dalszej części dowodu będziemy zakładać, że

$$(4.2) \quad \kappa_1(\mathcal{A}_1) = \kappa_2(\mathcal{A}_2) = 0.$$

W przeciwnym wypadku przyjmijmy $\beta := 1 - \kappa_1(\mathcal{A}_1) \geq 0$ oraz $\beta' := 1 - \kappa_2(\mathcal{A}_2) \geq 0$. Wtedy

$$\xi_1 = (1 - \beta) \int_{\mathbb{R}^2} \mu_{-t, -u} dP'(t, u) + \beta \xi'_1$$

i

$$\xi_2 = (1 - \beta') \int_{\mathbb{R}^2} \nu_{-t, -u} dQ'(t, u) + \beta' \xi'_2,$$

gdzie $\xi'_1 \in J_3(\mathcal{T})$ oraz $\xi'_2 \in J_3(\mathcal{S})$ nie posiadają połączeń z \mathcal{A}_1 oraz \mathcal{A}_2 w swoich rozkładach na składowe ergodyczne, natomiast P' i Q' są probabilistycznymi miarami na \mathbb{R}^2 będącymi obrazami miar warunkowych odpowiednio $\kappa_1|_{\mathcal{A}_1}$ i $\kappa_2|_{\mathcal{A}_2}$ poprzez

odwzorowania $\mu_{t,u} \mapsto (t, u)$ oraz $\nu_{t,u} \mapsto (t, u)$. Wtedy

$$\begin{aligned} \mu_{a_n, b_n} &\rightarrow (1 - \alpha) \int_{\mathbb{R}^2} \mu_{-t, -u} dP(t, u) + \alpha \left((1 - \beta) \int_{\mathbb{R}^2} \mu_{-t, -u} dP'(t, u) + \beta \xi'_1 \right) \\ &= (1 - \alpha\beta) \int_{\mathbb{R}^2} \mu_{-t, -u} d\left(\frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\beta} P + \frac{\alpha(1 - \beta)}{1 - \alpha\beta} P' \right) + \alpha\beta \xi'_1 \\ &= (1 - \alpha\beta) \int_{\mathbb{R}^2} \mu_{-t, -u} d\bar{P} + \alpha\beta \xi'_1, \end{aligned}$$

gdzie $\bar{P} = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\beta} P + \frac{\alpha(1 - \beta)}{1 - \alpha\beta} P'$. Analogicznie

$$\nu_{a_n, b_n} \rightarrow (1 - \alpha'\beta') \int_{\mathbb{R}^2} \nu_{-t, -u} d\bar{Q} + \alpha'\beta' \xi'_2,$$

gdzie $\bar{Q} = \frac{1 - \alpha'}{1 - \alpha'\beta'} Q + \frac{\alpha'(1 - \beta')}{1 - \alpha'\beta'} Q'$. Wtedy dla każdego zbioru B spełniającego (4.1), mamy

$$\begin{aligned} (1 - \alpha\beta)\bar{P}(B) - (1 - \alpha'\beta')\bar{Q}(B) &= (1 - \alpha)P(B) + \alpha(1 - \beta)P'(B) - (1 - \alpha')Q(B) - \alpha'(1 - \beta')Q'(B) \\ &> \alpha' + \alpha(1 - \beta)P'(B) - \alpha'(1 - \beta')Q'(B) \geq \alpha' - \alpha'(1 - \beta') = \alpha'\beta'. \end{aligned}$$

Wystarczy zatem zamienić P, Q na \bar{P}, \bar{Q} oraz α, α' na $\alpha\beta, \alpha'\beta'$. Wówczas spełnione są założenia twierdzenia, a ponadto spełniony jest także warunek (4.2).

Niech $\lambda \in J^e(\mathcal{T}, \mathcal{S})$. Pokażemy, że $\lambda = \mu \otimes \nu$. Rozważmy ciąg $\{\lambda_{a_n, b_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ w $J_3^e(\mathcal{T} \times \mathcal{S}, \lambda)$. Ze względu na zwartość $J_3(\mathcal{T} \times \mathcal{S}, \lambda)$ uzyskujemy, że $\lambda_{a_n, b_n} \rightarrow \eta$ zbiega słabo w $J_3(\mathcal{T} \times \mathcal{S}, \lambda)$, ewentualnie przechodząc do podciągu. Co więcej, z założeń uzyskujemy

$$\eta|_{X_1 \times X_2 \times X_3} = (1 - \alpha) \int_{\mathbb{R}^2} \mu_{-t, -u} dP(t, u) + \alpha \xi_1$$

oraz

$$\eta|_{Y_1 \times Y_2 \times Y_3} = (1 - \alpha') \int_{\mathbb{R}^2} \nu_{-t, -u} dQ(t, u) + \alpha' \xi_2.$$

Niech $h^{\mathcal{T}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{A}_1$ oraz $h^{\mathcal{S}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{A}_2$ będą dane wzorami $h^{\mathcal{T}}(t, u) := \mu_{-t, -u}$ i $h^{\mathcal{S}}(t, u) := \nu_{-t, -u}$. Wtedy

$$(4.3) \quad \eta|_{X_1 \times X_2 \times X_3} = \int_{J_3^e(\mathcal{T})} \rho^{\mathcal{T}} d((1 - \alpha)h_*^{\mathcal{T}} P + \alpha \kappa_1)(\rho^{\mathcal{T}}),$$

oraz

$$(4.4) \quad \eta|_{Y_1 \times Y_2 \times Y_3} = \int_{J_3^e(\mathcal{S})} \rho^{\mathcal{S}} d((1 - \alpha')h_*^{\mathcal{S}} Q + \alpha' \kappa_2)(\rho^{\mathcal{S}}).$$

Niech teraz $\eta = \int_{J_3^e(\mathcal{T} \times \mathcal{S}, \lambda)} \psi d\kappa(\psi)$ będzie rozkładem na składowe ergodyczne połączenia η . Uzyskujemy wtedy, że

$$\eta|_{X_1 \times X_2 \times X_3} = \int_{J_3^e(\mathcal{T} \times \mathcal{S}, \lambda)} \psi|_{X_1 \times X_2 \times X_3} d\kappa(\psi),$$

oraz

$$\eta|_{Y_1 \times Y_2 \times Y_3} = \int_{J_3^e(\mathcal{T} \times \mathcal{S}, \lambda)} \psi|_{Y_1 \times Y_2 \times Y_3} d\kappa(\psi).$$

Skoro $\psi \in J_3^e(\mathcal{T} \times \mathcal{S})$, to $\psi|_{X_1 \times X_2 \times X_3} \in J_3^e(\mathcal{T})$ oraz $\psi|_{Y_1 \times Y_2 \times Y_3} \in J_3^e(\mathcal{S})$. Rozważmy odwzorowania $\Omega^{\mathcal{T}} : J_3^e(\mathcal{T} \times \mathcal{S}, \lambda) \rightarrow J_3^e(\mathcal{T})$ i $\Omega^{\mathcal{S}} : J_3^e(\mathcal{T} \times \mathcal{S}, \lambda) \rightarrow J_3^e(\mathcal{S})$ dane wzorami

$$\Omega^{\mathcal{T}}(\psi) = \psi|_{X_1 \times X_2 \times X_3} \quad \text{oraz} \quad \Omega^{\mathcal{S}}(\psi) = \psi|_{Y_1 \times Y_2 \times Y_3}.$$

Mamy

$$\eta|_{X_1 \times X_2 \times X_3} = \int_{J_3^e(\mathcal{T})} \rho^{\mathcal{T}} d(\Omega_*^{\mathcal{T}} \kappa)(\rho^{\mathcal{T}}),$$

i

$$\eta|_{Y_1 \times Y_2 \times Y_3} = \int_{J_3^e(\mathcal{S})} \rho^{\mathcal{S}} d(\Omega_*^{\mathcal{S}} \kappa)(\rho^{\mathcal{S}}).$$

Porównując powyższe wyrażenia z (4.3) i (4.4) i używając jednoznaczności rozkładu na składowe ergodyczne otrzymujemy

$$(4.5) \quad \Omega_*^{\mathcal{T}} \kappa = (1 - \alpha)h_*^{\mathcal{T}} P + \alpha\kappa_1 \quad \text{i} \quad \Omega_*^{\mathcal{S}} \kappa = (1 - \alpha')h_*^{\mathcal{S}} Q + \alpha'\kappa_2.$$

Niech teraz

$$\mathcal{A} := \{\psi \in J_3^e(\mathcal{T} \times \mathcal{S}, \lambda) : \exists t, u, t', u' \in \mathbb{R}, (t, u) \neq (t', u'), \\ \psi|_{X_1 \times X_2 \times X_3} = \mu_{-t, -u}, \psi|_{Y_1 \times Y_2 \times Y_3} = \nu_{-t', -u'}\}.$$

Pokażemy teraz, że $\kappa(\mathcal{A}) > 0$. Dla dowolnych mierzalnych podzbiorów $C \subset J_3^e(\mathcal{T})$ i $D \subset J_3^e(\mathcal{S})$ oznaczmy przez $C \bar{\times} D$ zbiór wszystkich połączeń $\psi \in J_3^e(\mathcal{T} \times \mathcal{S}, \lambda)$ takich, że $\psi|_{X_1 \times X_2 \times X_3} \in C$ i $\psi|_{Y_1 \times Y_2 \times Y_3} \in D$.

Załóżmy, że $\kappa(\mathcal{A}) = 0$. Niech $B \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem spełniającym (4.1). Jeśli $(t, u) \in B$, to z definicji $h^{\mathcal{T}}$ i $h^{\mathcal{S}}$ uzyskujemy $\mu_{-t, -u} \in h^{\mathcal{T}}(B)$ oraz $\nu_{-t, -u} \in h^{\mathcal{S}}(B)$. Ponadto warunki $\kappa(\mathcal{A}) = 0$ oraz $h^{\mathcal{T}}(B) \bar{\times} (\mathcal{A}_2 \setminus h^{\mathcal{S}}(B)) \subset \mathcal{A}$ implikują

$$(4.6) \quad \kappa(h^{\mathcal{T}}(B) \bar{\times} \mathcal{A}_2) = \kappa(h^{\mathcal{T}}(B) \bar{\times} h^{\mathcal{S}}(B)).$$

Zauważmy, że $\kappa_1(h^{\mathcal{T}}(B)) \leq \kappa_1(\mathcal{A}_1) = 0$. Stąd, z (4.5) i (4.6) wynika, że

$$(4.7) \quad \begin{aligned} (1 - \alpha)P(B) &= (1 - \alpha)h_*^{\mathcal{T}} P(h^{\mathcal{T}}(B)) = [(1 - \alpha)h_*^{\mathcal{T}} P + \alpha\kappa_1](h^{\mathcal{T}}(B)) \\ &= \Omega_*^{\mathcal{T}} \kappa(h^{\mathcal{T}}(B)) = \kappa(h^{\mathcal{T}}(B) \bar{\times} J_3^e(\mathcal{S})) \\ &= \kappa(h^{\mathcal{T}}(B) \bar{\times} \mathcal{A}_2) + \kappa(h^{\mathcal{T}}(B) \bar{\times} (J_3^e(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{A}_2)) \\ &= \kappa(h^{\mathcal{T}}(B) \bar{\times} h^{\mathcal{S}}(B)) + \kappa(h^{\mathcal{T}}(B) \bar{\times} (J_3^e(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{A}_2)). \end{aligned}$$

Analogicznie otrzymujemy, że

$$(4.8) \quad (1 - \alpha')Q(B) = (1 - \alpha')h_*^{\mathcal{S}} Q(h^{\mathcal{S}}(B)) = \kappa(h^{\mathcal{T}}(B) \bar{\times} h^{\mathcal{S}}(B)) + \kappa((J_3^e(\mathcal{T}) \setminus \mathcal{A}_1) \bar{\times} h^{\mathcal{S}}(B)).$$

Ponadto ze względu na (4.5), uzyskujemy

$$\begin{aligned} \kappa(h^{\mathcal{T}}(B) \bar{\times} (J_3^e(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{A}_2)) &\leq \kappa(J_3^e(\mathcal{T}) \bar{\times} (J_3^e(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{A}_2)) \\ &= \Omega_*^{\mathcal{S}} \kappa(J_3^e(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{A}_2) = \alpha'\kappa_2(J_3^e(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{A}_2) = \alpha'. \end{aligned}$$

Skoro $(1 - \alpha)P(B) - (1 - \alpha')Q(B) > \alpha'$, to przez odjęcie od siebie (4.7) i (4.8) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \alpha' &< (1 - \alpha)h_*^{\mathcal{T}} P(h^{\mathcal{T}}(B)) - (1 - \alpha')h_*^{\mathcal{S}} Q(h^{\mathcal{S}}(B)) \\ &= (\kappa(h^{\mathcal{T}}(B) \bar{\times} h^{\mathcal{S}}(B)) + \kappa(h^{\mathcal{T}}(B) \bar{\times} (J_3^e(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{A}_2))) \\ &\quad - (\kappa(h^{\mathcal{T}}(B) \bar{\times} h^{\mathcal{S}}(B)) + \kappa((J_3^e(\mathcal{T}) \setminus \mathcal{A}_1) \bar{\times} h^{\mathcal{S}}(B))) \\ &= \kappa(h^{\mathcal{T}}(B) \bar{\times} (J_3^e(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{A}_2)) - \kappa((J_3^e(\mathcal{T}) \setminus \mathcal{A}_1) \bar{\times} h^{\mathcal{S}}(B)) \leq \alpha', \end{aligned}$$

co doprowadziło do sprzeczności. Z tego wynika, że $\kappa(\mathcal{A}) > 0$, co pociąga, że \mathcal{A} jest niepusty. Innymi słowy, istnieje takie połączenie $\psi \in \mathcal{A} \subset J_3^e(\mathcal{T} \times \mathcal{S}, \lambda)$, że

$\psi|_{X_1 \times X_2 \times X_3} = \mu_{t,u}$ oraz $\psi|_{Y_1 \times Y_2 \times Y_3} = \nu_{t',u'}$ gdzie $(t,u) \neq (t',u')$. Załóżmy, że $t \neq t'$ (przypadek, gdy $u \neq u'$ jest analogiczny). Wtedy $\phi := \Pi_{1,3}(\psi) \in J_2^e(\mathcal{T} \times \mathcal{S}, \lambda)$ spełnia

$$\phi|_{X_1 \times X_3} = \mu_t \quad \text{oraz} \quad \phi|_{Y_1 \times Y_3} = \nu_{t'}.$$

Zatem z lematu 4.1 otrzymujemy, że $\lambda = \mu \otimes \nu$. □

Użyteczna dla nas będzie również uproszczona wersja powyższego twierdzenia, gdy $\alpha = 0$.

WNIOSEK 4.3. *Niech $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ i $\mathcal{S} = \{S_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ będą słabo mieszejącymi potokami działającymi na standardowych przestrzeniach borelowskich odpowiednio (X, \mathcal{B}, μ) i (Y, \mathcal{C}, ν) . Załóżmy, że dla pewnych ciągów rzeczywistych $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, zachodzi*

$$\mu_{a_n, b_n} \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} \mu_{-t, -u} dP(t, u) \quad \text{oraz} \quad \nu_{a_n, b_n} \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} \nu_{-t, -u} dQ(t, u),$$

dla pewnych miar probabilistycznych $P, Q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$. Jeśli $P \neq Q$, to \mathcal{T} oraz \mathcal{S} są rozłączne.

Niech $\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem $\theta(t, u) = (t, t - u)$. Poniższy rezultat pokazuje jak w duchu twierdzenia 4.2 wykazać, że potok jest rozłączny ze swoim odwrotnym.

WNIOSEK 4.4. *Załóżmy, że dla pewnego ciągu rzeczywistego $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zachodzi*

$$\mu_{2a_n, a_n} \rightarrow (1 - \alpha) \int_{\mathbb{R}^2} \mu_{-t, -u} dP(t, u) + \alpha \xi$$

dla pewnej liczby $0 \leq \alpha < 1$ miary $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ oraz połączenia $\xi \in J_3(\mathcal{T})$. Załóżmy również, że istnieje zbiór $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ taki, że

$$(4.9) \quad P(B) - \theta_* P(B) > \frac{\alpha}{1 - \alpha}.$$

Wtedy potok \mathcal{T} jest rozłączny ze swoim potokiem odwrotnym.

DOWÓD. Zgodnie z definicją zbieżności połączeń dla dowolnych zbiorów $A, B, C \in \mathcal{B}$ zachodzi

$$(4.10) \quad \mu_{2a_n, a_n}(A \times B \times C) \rightarrow (1 - \alpha) \int_{\mathbb{R}^2} \mu_{-t, -u}(A \times B \times C) dP(t, u) + \alpha \xi(A \times B \times C).$$

Zamieniając kolejność zbiorów, uzyskujemy

$$\mu_{2a_n, a_n}(C \times B \times A) \rightarrow (1 - \alpha) \int_{\mathbb{R}^2} \mu_{-t, -u}(C \times B \times A) dP(t, u) + \alpha \xi(C \times B \times A).$$

Jednakże korzystając z \mathcal{T} -niezmienniczości miary μ , uzyskujemy

$$\begin{aligned} \mu_{2a_n, a_n}(C \times B \times A) &= \mu(T_{-2a_n} C \cap T_{-a_n} B \cap A) \\ &= \mu(C \cap T_{a_n} B \cap T_{2a_n} A) = \mu_{-2a_n, -a_n}(A \times B \times C). \end{aligned}$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \mu_{-t, -u}(C \times B \times A) dP(t, u) &= \int_{\mathbb{R}^2} \mu(T_t C \cap T_u B \cap A) dP(t, u) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mu(C \cap T_{u-t} B \cap T_{-t} A) dP(t, u) = \int_{\mathbb{R}^2} \mu_{t, t-u}(A \times B \times C) dP(t, u) \end{aligned}$$

Jeśli dodatkowo oznaczymy przez $\hat{\xi}$ taki element $J_3(\mathcal{T})$, że dla dowolnych $A, B, C \in \mathcal{B}$ zachodzi $\hat{\xi}(A \times B \times C) = \xi(C \times B \times A)$, to otrzymujemy

$$(4.11) \quad \mu_{-2a_n, -a_n}(C \times B \times A) \rightarrow (1 - \alpha) \int_{\mathbb{R}^2} \mu_{t,u}(A \times B \times C) d\theta_* P(t, u) + \alpha \hat{\xi}(A \times B \times C).$$

Rozpatrując w twierdzeniu 4.2 zbieżność 4.10 dla potoku „w przód” oraz 4.11 dla potoku „w tył” a także zbiór B z założenia, uzyskujemy tezę wniosku. \square

W tym miejscu należy zaznaczyć, że przy sprawdzaniu rozłączności potoku specjalnego ze swoim odwrotnym miar, które będziemy porównywać w kryterium 4.4, dostarczać nam będzie twierdzenie 3.9. Jednakże często o mierze P występującej w tym twierdzeniu nie będziemy mogli powiedzieć więcej niż to, że ta miara istnieje. Okazuje się jednak, że stosując pewne proste rzutowanie, możemy uprościć rachunki na tyle, aby móc powiedzieć więcej o mierze P . Niech $\xi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dane wzorem $\xi(t, u) := t - 2u$.

TWIERDZENIE 4.5. *Niech T będzie zachowującym miarę automorfizmem na probabilistycznej standardowej przestrzeni borelowskiej (X, \mathcal{B}, μ) . Niech $f \in L^2(X, \mu)$ będzie funkcją dodatnią odgranieczoną od zera. Przypuśćmy, że istnieje ciąg $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zbiorów mierzalnych w X , rosnący ciąg liczb naturalnych $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, oraz ciąg rzeczywisty $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że spełnione są następujące warunki:*

$$(4.12) \quad \mu(W_n) \rightarrow 1 - \alpha \text{ dla pewnego } 0 \leq \alpha < 1,$$

$$(4.13) \quad \mu(W_n \Delta T^{-1}W_n) \rightarrow 0,$$

$$(4.14) \quad \{q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ jest ciągiem sztywności dla } T \text{ wzdłuż } \{W_n\}_{n \in \mathbb{N}},$$

$$(4.15) \quad \text{ciąg } \left\{ \int_{W_n} |f^{(q_n)}(x) - a_n|^2 d\mu(x) \right\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ jest ograniczony,}$$

$$(4.16) \quad \text{ciąg } \left\{ \int_{W_n} |f^{(2q_n)}(x) - 2a_n|^2 d\mu(x) \right\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ jest ograniczony,}$$

$$(4.17) \quad (f^{(2q_n)}(x) - 2a_n, f^{(q_n)}(x) - a_n)_*(\mu_{W_n}) \rightarrow P \text{ słabo w } \mathcal{P}(\mathbb{R}^2).$$

Jeśli istnieje taki zbiór borelowski $B \in \mathcal{B}$, że

$$(4.18) \quad \xi_* P(B) - (-\xi)_* P(B) > \frac{\alpha}{1 - \alpha},$$

to jeśli potok specjalny T^f na X^f jest słabo mieszkający, to jest także rozłączny ze swoim potokiem odwrotnym.

DOWÓD. Pokażemy, że gdy rozpatrzmy $q'_n = 2q_n$ oraz $a'_n = 2a_n$ dla $n \in \mathbb{N}$, to spełnione są założenia twierdzenia 3.9. Rzeczywiście, własności (4.12)-(4.17) odpowiadają bezpośrednio założeniom (3.1), (3.2), (3.3), (3.5), (3.6) oraz (3.7). Pokażemy, że z (4.14) wynika, że $\{2q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem sztywności dla T wzdłuż $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Z definicji sztywności wzdłuż ciągu mamy

$$\mu((T^{-q_n} A \Delta A) \cap W_n) \rightarrow 0 \text{ dla dowolnego } A \in \mathcal{B}.$$

Korzystając z nierówności trójkąta dla różnicy symetrycznej uzyskujemy

$$\begin{aligned} \mu((T^{-2q_n} A \Delta A) \cap W_n) &\leq \mu((T^{-2q_n} A \Delta T^{-q_n} A) \cap W_n) + \mu((T^{-q_n} A \Delta A) \cap W_n) \\ &= 2\mu((T^{-q_n} A \Delta A) \cap W_n) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

co oznacza pożądaną sztywność dla ciągu $\{2q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Spełnione jest zatem założenie (3.4).

Zauważmy teraz, że $\xi \circ \theta(t, u) = 2u - t = -\xi(t, u)$. A zatem z założenia mamy

$$\xi_* P(B) - \xi_* \theta_* P(B) > \frac{\alpha}{1 - \alpha}.$$

Stąd

$$P(\xi^{-1}B) - \theta_* P(\xi^{-1}B) > \frac{\alpha}{1 - \alpha}.$$

Spełnione są zatem założenia wniosku 4.4, a więc potok \mathcal{T}^f jest rozłączny ze swoim odwrotnym. \square

UWAGA 4.6. Z powyższego twierdzenia wynika, że aby wnioskować o rozłączności potoku ze swoim potokiem odwrotnym, wystarczy wiedzieć, że miara $\xi_* P$ jest niesymetryczna. Zauważmy jednak, że jeśli

$$(f^{(2q_n)}, f^{(q_n)})_* \mu_{W_n} \rightarrow P,$$

to po zadziałaniu ξ otrzymujemy

$$\xi_* (f^{(2q_n)}, f^{(q_n)})_* \mu_{W_n} \rightarrow \xi_* P.$$

Jednakże

$$\begin{aligned} \xi_* (f^{(2q_n)}, f^{(q_n)})(x) &= \xi \left(\sum_{i=0}^{2q_n-1} f(T^i x), \sum_{i=0}^{q_n-1} f(T^i x) \right) \\ &= \sum_{i=q_n}^{2q_n-1} f(T^i x) - \sum_{i=0}^{q_n-1} f(T^i x) = \sum_{i=0}^{q_n-1} (f(T^{i+q_n} x) - f(T^i x)). \end{aligned}$$

Aby skorzystać z kryterium o rozłączności potoku z jego potokiem odwrotnym dla potoków specjalnych nad przekładaniami odcinków, będziemy wykazywać, że miara

$$(4.19) \quad \xi_* P = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^{q_n-1} (f(T^{i+q_n} x) - f(T^i x)) \right)_* \text{Leb}_{W_n}$$

jest dostatecznie niesymetryczna, w sensie wyrażonym w twierdzeniu 4.4.

Poniższy rezultat stwierdza, kiedy można wnioskować o słabym mieszanym potoku, patrząc na stowarzyszone z nim granice ciągów połączeń wykresowych.

LEMAT 4.7. *Niech $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ będzie potokiem ergodycznym na (X, \mathcal{B}, μ) i założymy, że istnieje rosnący ciąg rzeczywisty $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, liczba rzeczywista $\rho \in [0, 1)$ oraz miara probabilistyczna $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ taka, że*

$$(4.20) \quad \mu_{2b_n, b_n} \rightarrow (1 - \rho) \int_{\mathbb{R}^2} \mu_{-t, -u} dP(t, u) + \rho \psi,$$

dla pewnego $\psi \in J_3(\mathcal{T})$. Jeśli nośnik P nie zawiera się w żadnej kracie afinicznej w \mathbb{R}^2 , to \mathcal{T} jest słabo mieszkający. W szczególności, jeżeli istnieją dwie wymiennie niezależne liczby d_1 i d_2 takie, że d_1, d_2 i 0 są atomami $\xi_* P$, to potok \mathcal{T} jest słabo mieszkający.

DOWÓD. Załóżmy, że nośnik miary P nie jest zawarty w żadnej kracie afinicznej a potok \mathcal{T} nie jest słabo mieszkający. Wtedy istnieje funkcja $f \in L^2(X, \mu)$ różna od stałej oraz liczba $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ taka, że

$$(4.21) \quad \forall t \in \mathbb{R}, f \circ T_t = e^{-2\pi i a t} f.$$

Przypomnijmy, że $\sigma_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ oznacza rzutowanie na pierwszą współrzędną. Poprzez zadziałanie $\Psi \circ \Pi_{1,3}$ (patrz (2.2)) do (4.20) oraz użycie (2.3) i (2.4), uzyskujemy

$$T_{2b_n} \rightarrow (1 - \rho) \int_{\mathbb{R}} T_t dP_1(t) + \rho \Psi_1,$$

gdzie $P_1 := (\sigma_1)_* P$ a Ψ_1 jest operatorem Markowa. Niech $\langle \cdot, \cdot \rangle$ będzie iloczynem skalarnym na $L^2(X, \mu)$. Z (4.21), uzyskujemy

$$\|f\|^2 = |\langle f, f \rangle| = |\langle f, e^{-2\pi i a t} f \rangle| = |\langle f, f \circ T_t \rangle| = |\langle f, f \circ T_{2b_n} \rangle|$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Gdy $n \rightarrow \infty$, to dostajemy

$$\|f\|^2 = |\langle f, f \circ T_{2b_n} \rangle| = \left| \left\langle f, (1 - \rho) \int_{\mathbb{R}} f \circ T_t dP_1(t) + \rho \Psi_1(f) \right\rangle \right|.$$

Z drugiej strony, z faktu że operator Markowa jest kontrakcją, otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} & \left| \left\langle f, (1 - \rho) \int_{\mathbb{R}} f \circ T_t dP_1(t) + \rho \Psi_1(f) \right\rangle \right| \\ & \leq (1 - \rho) \left| \left\langle f, \int_{\mathbb{R}} f \circ T_t dP_1(t) \right\rangle \right| + \rho |\langle f, \Psi_1(f) \rangle| \\ & \leq (1 - \rho) \left| \int_{\mathbb{R}} \langle f, f \circ T_t \rangle dP_1(t) \right| + \rho \|f\|^2 \\ & = (1 - \rho) \|f\|^2 \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i a t} dP_1(t) \right| + \rho \|f\|^2 \end{aligned}$$

Zatem

$$\left| \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i a t} dP_1(t) \right| = 1$$

to jest

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i a t} dP_1(t) = e^{-2\pi i b} \quad \text{dla pewnego } b \in \mathbb{R}.$$

Wynika stąd, że

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i (a t - b)} dP_1(t) = 1.$$

To pociąga ze sobą, że

$$P_1(\{t \in \mathbb{R}; at - b \in \mathbb{Z}\}) = 1.$$

Rozważmy teraz $P_2 := (\sigma_2)_* P$. Analogicznie, poprzez zastosowanie $\Psi \circ \Pi_{2,3}$ do (4.20), otrzymujemy

$$P_2(\{u \in \mathbb{R}; au - c \in \mathbb{Z}\}) = 1 \quad \text{dla pewnego } c \in \mathbb{R}.$$

Łącząc dwa powyższe rezultaty, uzyskujemy

$$(4.22) \quad P(\{(t, u) \in \mathbb{R}^2; a(t, u) - (b, c) \in \mathbb{Z}^2\}) = 1,$$

co jest sprzecznością z naszym założeniem. Stąd jeśli nośnik P nie zawiera się w afinicznej kracie, to potok \mathcal{T} jest słabo mieszający.

Przypuśćmy teraz, że $\xi_* P$ posiada atomy w punktach $0, d_1$ and d_2 . Załóżmy ponownie, że \mathcal{T} nie jest słabo mieszający i że $e^{2\pi i a}$, $a \neq 0$, jest wartością własną. Z definicji odwzorowania ξ , każda z prostych $(x, \frac{1}{2}(x - d_i))$ dla $i = 1, 2$ oraz prosta $(x, \frac{1}{2}x)$ ma dodatnią miarę P . To razem z (4.22) implikuje istnienie $x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, such that

$$\begin{aligned} a(x_0, \tfrac{1}{2}x_0) - (b, c) & \in \mathbb{Z}^2, \\ a(x_1, \tfrac{1}{2}(x_1 - d_1)) - (b, c) & \in \mathbb{Z}^2, \\ a(x_2, \tfrac{1}{2}(x_2 - d_2)) - (b, c) & \in \mathbb{Z}^2. \end{aligned}$$

To pociąga z kolei, że

$$a(x_1 - x_0, \frac{1}{2}(x_1 - x_0) - \frac{1}{2}d_1) \in \mathbb{Z}^2,$$

$$a(x_2 - x_0, \frac{1}{2}(x_2 - x_0) - \frac{1}{2}d_2) \in \mathbb{Z}^2.$$

Poprzez zadziałanie ξ na powyższych równościach uzyskujemy, że $ad_1 \in \mathbb{Z}$ oraz $ad_2 \in \mathbb{Z}$. Skoro $a, d_1, d_2 \neq 0$, to otrzymujemy, że $(ad_1)d_2 - (ad_2)d_1 = 0$ jest nietrywialną całkowitą kombinacją liniową liczb d_1 i d_2 . Z wymiernej niezależności liczb d_1 i d_2 otrzymujemy, że $a = 0$. Jest to sprzeczność, a zatem \mathcal{T} jest słabo mieszający. \square

Dozwolone permutacje

W tym rozdziale zaprezentujemy własność permutacji niedegenerowalnych, która będzie kluczowa w dowodzie twierdzenia 1.1 będącego głównym rezultatem rozprawy. Na podstawie twierdzenia 2.20 istnieje jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy składowymi spójności przestrzeni moduli a rozszerzonymi grafami Rauzy'ego permutacji niedegenerowalnych. Ponadto z uwagi 2.22 mamy, że hipereliptyczne składowe spójności odpowiadają rozszerzonym grafom Rauzy'ego permutacji symetrycznych. Główny wynik rozdziału (twierdzenie 5.1) stanowi, że dla dowolnej niehipereliptycznej składowej spójności istnieje permutacja z jej rozszerzonego grafu Rauzy'ego spełniająca wspomnianą wcześniej własność.

Przypomnijmy, że zgodnie z twierdzeniem 2.16, w każdym grafie Rauzy'ego możemy znaleźć permutację $\pi = \{\pi_0, \pi_1\}$ taką, że

$$(5.1) \quad \pi_1 \circ \pi_0^{-1}(1) = d \quad \text{oraz} \quad \pi_1 \circ \pi_0^{-1}(d) = 1.$$

Zachodzi następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 5.1. *Niech $\pi = \{\pi_0, \pi_1\}$ będzie niedegenerowalną permutacją niesymetryczną, spełniającą (5.1). Wówczas istnieją parami różne symbole $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{A} \setminus \{\pi_0^{-1}(1), \pi_0^{-1}(d)\}$, dla których zachodzi*

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \Omega_{\alpha_i \alpha_j} &= 0 \text{ dla } i, j = 1, 2, \\ \Omega_{\alpha_1 \gamma_2} &= 0 \text{ lub } \Omega_{\alpha_2 \gamma_1} = 0 \text{ oraz} \\ \Omega_{\alpha_1 \gamma_1} &\neq 0 \text{ i } \Omega_{\alpha_2 \gamma_2} \neq 0, \end{aligned}$$

gdzie $\Omega := \Omega_\pi$ jest macierzą translacji odpowiadającą permutacji π (patrz (2.7)).

DOWÓD. Niech $\pi = \{\pi_0, \pi_1\}$ będzie niedegenerowalną permutacją (patrz (2.15)-(2.18)) spełniającą (5.1) należącą do rozszerzonego grafu Rauzy'ego stowarzyszonego z niehipereliptyczną składową spójności przestrzeni moduli. Wtedy, jak zauważyliśmy wcześniej, π nie jest permutacją symetryczną. Stąd Ω posiada zerowe współczynniki poza przekątną. Rzeczywiście, załóżmy, że tak nie jest, czyli

$$\pi_0(\alpha) < \pi_0(\beta) \Leftrightarrow \pi_1(\alpha) > \pi_1(\beta) \text{ dla wszystkich } \alpha, \beta \in \mathcal{A}.$$

Wtedy dla każdego $\alpha \in \mathcal{A}$

$$\pi_1(\alpha) = \#\{\beta \in \mathcal{A}; \pi_1(\beta) < \pi_1(\alpha)\} + 1 = \#\{\beta \in \mathcal{A}; \pi_0(\beta) > \pi_0(\alpha)\} + 1 = d - \pi_0(\alpha) + 1.$$

Zatem π musiałaby być permutacją symetryczną a więc otrzymaliśmy sprzeczność.

Zauważmy, że jeśli spełniony jest warunek (5.2) przez pewne symbole $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{A} \setminus \{\pi_0^{-1}(1), \pi_0^{-1}(d)\}$, to $\alpha_i \neq \gamma_j$, dla $i, j = 1, 2$. Musimy teraz rozważyć osobno dwa przypadki.

Przypadek 1. Załóżmy najpierw, że istnieje symbol $\alpha \in \mathcal{A} \setminus \{\pi_0^{-1}(1), \pi_0^{-1}(d)\}$ taki, że dla wszystkich symboli $\beta \in \mathcal{A} \setminus \{\pi_0^{-1}(1), \pi_0^{-1}(d)\}$ spełniających $1 < \pi_0(\beta) < d$ zachodzi

$$\pi_0(\beta) < \pi_0(\alpha) \Leftrightarrow \pi_1(\beta) < \pi_1(\alpha),$$

innymi słowy

$$(5.3) \quad \Omega_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{dla każdego } \beta \in \mathcal{A} \setminus \{\pi_0^{-1}(1), \pi_0^{-1}(d)\}.$$

Zauważmy, że warunek (2.16) w przypadku, gdy permutacja π spełnia (5.1) oznacza $\pi_0^{-1}(2) = \pi_1^{-1}(2)$, natomiast warunek (2.17) oznacza, że $\pi_0^{-1}(d-1) = \pi_1^{-1}(d-1)$. Skoro π jest niedegenerowalna, to istnieją symbole $\alpha_1, \gamma_1 \in \mathcal{A} \setminus \{\pi_0^{-1}(1), \pi_0^{-1}(d)\}$ takie, że

$$(5.4) \quad 1 < \pi_0(\alpha_1) < \pi_0(\gamma_1) < \pi_0(\alpha) \quad \text{oraz} \quad 1 < \pi_1(\gamma_1) < \pi_1(\alpha_1) < \pi_1(\alpha).$$

W przeciwnym wypadku zachodziłoby $\pi_0^{-1}(2) = \pi_1^{-1}(2)$, a więc permutacja π spełniałaby (2.16), czyli byłaby degenerowalna. Na podobnej zasadzie, istnieją symbole $\alpha_2, \gamma_2 \in \mathcal{A} \setminus \{\pi_0^{-1}(1), \pi_0^{-1}(d)\}$ takie, że

$$(5.5) \quad \pi_0(\alpha) < \pi_0(\gamma_2) < \pi_0(\alpha_2) < d \quad \text{oraz} \quad \pi_1(\alpha) < \pi_1(\alpha_2) < \pi_1(\gamma_2) < d.$$

W przeciwnym wypadku zachodziłoby $\pi_0^{-1}(d-1) = \pi_1^{-1}(d-1)$, a więc permutacja π spełniałaby (2.17), czyli byłaby degenerowalna. A zatem

$$\Omega_{\alpha_1\alpha_2} = \Omega_{\alpha_2\alpha_1} = \Omega_{\alpha_1\gamma_2} = \Omega_{\alpha_2\gamma_1} = 0 \quad \text{i} \quad \Omega_{\alpha_1\gamma_1} = 1 \quad \text{i} \quad \Omega_{\alpha_2\gamma_2} = -1.$$

Jako, że z (5.4) oraz (5.5) wynika, że $\alpha_1 \neq \alpha_2$ oraz $\gamma_1 \neq \gamma_2$, to otrzymujemy stąd, że $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2$ są symbolami spełniającymi (5.2).

Przypadek 2. Przypuśćmy teraz, że nie ma symboli spełniających (5.3). Skoro w macierzy Ω_π występują zera poza przekątną, znajdziemy dwa różne symbole $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A} \setminus \{\pi_0^{-1}(1), \pi_0^{-1}(d)\}$ takie, że $\Omega_{\alpha_1\alpha_2} = \Omega_{\alpha_2\alpha_1} = 0$. Bez utraty ogólności możemy zakładać, że $\pi_0(\alpha_1) < \pi_0(\alpha_2)$. Wtedy także $\pi_1(\alpha_1) < \pi_1(\alpha_2)$.

Przypadek 2a. Załóżmy najpierw, że wiersze macierzy Ω_π odpowiadające symbolom α_1 i α_2 nie są identyczne. Niech $\gamma \in \mathcal{A} \setminus \{\pi_0^{-1}(1), \pi_0^{-1}(d), \alpha_1, \alpha_2\}$ będzie takim symbolem, że $\Omega_{\alpha_1\gamma} \neq \Omega_{\alpha_2\gamma}$. Wtedy $\Omega_{\alpha_1\gamma} \neq 0$, $\Omega_{\alpha_2\gamma} = 0$ lub $\Omega_{\alpha_2\gamma} \neq 0$, $\Omega_{\alpha_1\gamma} = 0$, ale niemożliwe jest aby $|\Omega_{\alpha_1\gamma}| = |\Omega_{\alpha_2\gamma}| = 1$. Rzeczywiście założymy, że $\Omega_{\alpha_2\gamma} = 1$ oraz $\Omega_{\alpha_1\gamma} = -1$. Wtedy $\pi_0(\alpha_2) < \pi_0(\gamma) < \pi_0(\alpha_1)$, co stoi w sprzeczności z $\pi_0(\alpha_1) < \pi_0(\alpha_2)$. Natomiast, jeśli $\Omega_{\alpha_2\gamma} = -1$ oraz $\Omega_{\alpha_1\gamma} = 1$, to $\pi_1(\alpha_2) < \pi_1(\gamma) < \pi_1(\alpha_1)$, co stoi w sprzeczności z $\pi_1(\alpha_1) < \pi_1(\alpha_2)$.

Założmy zatem, że $\Omega_{\alpha_1\gamma} \neq 0$ oraz $\Omega_{\alpha_2\gamma} = 0$ (w przypadku, gdy $\Omega_{\alpha_2\gamma} \neq 0$ oraz $\Omega_{\alpha_1\gamma} = 0$ postępujemy analogicznie) i oznaczmy $\gamma_1 := \gamma$. Skoro α_2 nie spełnia (5.3), to istnieje symbol $\gamma_2 \in \mathcal{A} \setminus \{\pi_0^{-1}(1), \pi_0^{-1}(d)\}$ taki, że $\Omega_{\alpha_2\gamma_2} \neq 0$. Skoro $\Omega_{\alpha_2\gamma_1} = 0$, to wynika stąd, że $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Wtedy symbole $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2$ spełniają (5.2).

Przypadek 2b. Przypuśćmy teraz, że wiersze macierzy Ω_π stowarzyszone z indeksami α_1, α_2 są identyczne. Wtedy nie istnieją dwa różne symbole γ_1, γ_2 takie, że $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2$ spełniają (5.2). Jednakże, pokażemy, że istnieje inny zestaw symboli spełniający (5.2). Zauważmy, że dla każdego $\beta \in \mathcal{A} \setminus \{\pi_0^{-1}(1), \pi_0^{-1}(d)\}$ własność

$$(5.6) \quad \pi_0(\alpha_1) < \pi_0(\beta) < \pi_0(\alpha_2)$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(5.7) \quad \pi_1(\alpha_1) < \pi_1(\beta) < \pi_1(\alpha_2).$$

W przeciwnym wypadku tylko jeden ze współczynników $\Omega_{\alpha_1\beta}$ i $\Omega_{\alpha_2\beta}$ byłby niezerowy. Innymi słowy wszystkie symbole $\beta \in \mathcal{A}$ spełniające (5.6) spełniają również $\Omega_{\alpha_1\beta} = \Omega_{\alpha_2\beta} = 0$. Zauważmy, że istnieją dwa różne symbole $\hat{\alpha}_1, \gamma_1 \in \mathcal{A}$ spełniające (5.6)

(a zatem zachodzi także $\Omega_{\hat{\alpha}_1\alpha_2} = \Omega_{\alpha_2\gamma_1} = 0$ oraz $\hat{\alpha}_1 \neq \alpha_2$) takie, że $\Omega_{\hat{\alpha}_1\gamma_1} \neq 0$. W przeciwnym przypadku

$$\pi_1(\alpha_2) = \pi_1 \circ \pi_0^{-1}(\pi_0^{-1}(\alpha_2) - 1) + 1,$$

czyli permutacja π spełniałaby (2.15), a więc byłaby degenerowalna. Skoro α_1, α_2 nie spełniają (5.3) a odpowiadające im wiersze są identyczne, to istnieje symbol $\gamma_2 \in \mathcal{A} \setminus \{\pi_0^{-1}(1), \pi_0^{-1}(d)\}$ taki, że $\Omega_{\alpha_1\gamma_2} = \Omega_{\alpha_2\gamma_2} \neq 0$. Ponieważ $\Omega_{\alpha_2\gamma_1} = 0$, to $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Zauważmy, że $\Omega_{\hat{\alpha}_1\gamma_2} = \Omega_{\alpha_2\gamma_2} \neq 0$. Rzeczywiście, jeśli $\Omega_{\alpha_1\gamma_2} = \Omega_{\alpha_2\gamma_2} = 1$, to $\pi_0(\hat{\alpha}_1) < \pi_0(\alpha_2) < \pi_0(\gamma_2)$ oraz $\pi_1(\gamma_2) < \pi_1(\alpha_1) < \pi_1(\hat{\alpha}_1)$. Zatem $\Omega_{\hat{\alpha}_1\gamma_2} = 1$. Analogicznie dowodzimy, że jeśli $\Omega_{\alpha_1\gamma_2} = \Omega_{\alpha_2\gamma_2} = -1$, to $\Omega_{\hat{\alpha}_1\gamma_2} = -1$. Otrzymujemy zatem, że

$$\Omega_{\hat{\alpha}_1\alpha_2} = \Omega_{\alpha_2\hat{\alpha}_1} = \Omega_{\alpha_2\gamma_1} = 0, \quad \Omega_{\hat{\alpha}_1\gamma_1} \neq 0 \quad \text{oraz} \quad \Omega_{\alpha_2\gamma_2} \neq 0.$$

Zatem $\hat{\alpha}_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2$ spełniają (5.2). \square

WNIOSEK 5.2. *Niech π jest niesymetryczną i niedegenerowalną permutacją alfabetu \mathcal{A} składającego się z d elementów spełniającą (5.1), natomiast $\Omega := \Omega_\pi$ będzie stowarzyszoną z nią macierzą translacji. Niech ponadto $\tau \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ będzie wektorem wymiernie niezależnym. Wówczas istnieją $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A}$ takie, że $\Omega_{\alpha_1\alpha_2} = \Omega_{\alpha_2\alpha_1} = 0$ oraz dla każdego $i = 1, 2$ liczby*

$$(\Omega\tau)_{\alpha_2} - (\Omega\tau)_{\alpha_1} \quad \text{i} \quad (\Omega\tau)_{\alpha_i} - ((\Omega\tau)_{\pi_0^{-1}(1)} + (\Omega\tau)_{\pi_0^{-1}(d)})$$

są wymiernie niezależne.

DOWÓD. Udowodnimy ten rezultat dla $i = 1$. Dla $i = 2$, dowód przebiega symetrycznie. Rozważmy symbole $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{A} \setminus \{\pi_0^{-1}(1), \pi_0^{-1}(d)\}$ dane przez twierdzenie 5.1, tzn. spełniające warunek (5.2). Mamy wtedy $\Omega_{\alpha_1\alpha_2} = \Omega_{\alpha_2\alpha_1} = 0$. Niech p i q będą takimi liczbami całkowitymi, że

$$\begin{aligned} 0 &= p\left((\Omega\tau)_{\alpha_2} - (\Omega\tau)_{\alpha_1}\right) + q\left((\Omega\tau)_{\alpha_1} - ((\Omega\tau)_{\pi_0^{-1}(1)} + (\Omega\tau)_{\pi_0^{-1}(d)})\right) \\ &= \sum_{\beta \in \mathcal{A}} (-q\Omega_{\pi_0^{-1}(1)\beta} - q\Omega_{\pi_0^{-1}(d)\beta} + (q-p)\Omega_{\alpha_1\beta} + p\Omega_{\alpha_2\beta})\tau_\beta. \end{aligned}$$

Z wymiernej niezależności τ , to implikuje

$$-q\Omega_{\pi_0^{-1}(1)\beta} - q\Omega_{\pi_0^{-1}(d)\beta} + (q-p)\Omega_{\alpha_1\beta} + p\Omega_{\alpha_2\beta} = 0,$$

dla każdego $\beta \in \mathcal{A}$. Skoro

$$\Omega_{\pi_0^{-1}(1)\beta} = 1 \quad \text{dla} \quad \beta \in \mathcal{A} \setminus \{\pi_0^{-1}(1)\} \quad \text{i} \quad \Omega_{\pi_0^{-1}(d)\beta} = -1 \quad \text{dla} \quad \beta \in \mathcal{A} \setminus \{\pi_0^{-1}(d)\},$$

to

$$(q-p)\Omega_{\alpha_1\beta} + p\Omega_{\alpha_2\beta} = 0 \quad \text{dla} \quad \beta \in \mathcal{A} \setminus \{\pi_0^{-1}(1), \pi_0^{-1}(d)\}$$

Ponieważ z twierdzenia 5.1 macierz

$$\begin{bmatrix} \Omega_{\alpha_1\gamma_1} & \Omega_{\alpha_1\gamma_2} \\ \Omega_{\alpha_2\gamma_1} & \Omega_{\alpha_2\gamma_2} \end{bmatrix}$$

jest macierzą trójkątną i posiada niezerowe współczynniki na przekątnej, to z tego wynika, że

$$p = q = 0,$$

co dowodzi wymiernej niezależności. \square

Rozłączność potoków specjalnych nad przekładaniami odcinków z ich potokami odwrotnymi

6.1. Funkcje kawałkami absolutnie ciągłe

W tym dziale udowodnimy twierdzenia dotyczące rozłączności potoków specjalnych nad przekładaniami odcinków i pod funkcjami kawałkami absolutnie ciągłymi z ich potokami odwrotnymi. Dokładniej, wykażemy najpierw w jaki sposób przenieść rezultat dotyczący potoków specjalnych pod funkcjami kawałkami liniowymi na potoki pod funkcjami kawałkami absolutnie ciągłymi. W późniejszych podrozdziałach wykażemy rozłączność potoków z ich potokami odwrotnymi, gdy funkcje dachowe są kawałkami liniowe o niezerowym nachyleniu, a także gdy są kawałkami stałe. Kolejność takiej prezentacji rezultatów wynika z faktu, że pewne własności dotyczące funkcji o wahaniu ograniczonym (a więc i kawałkami absolutnie ciągłymi) będą użyteczne w dowodzie twierdzeń dotyczących funkcji kawałkami liniowych.

Rozważmy dodatnią funkcję $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ będącą funkcją kawałkami absolutnie ciągłą, tzn. istnieje skończony podział odcinka $[0, 1) = I_0 \cup \dots \cup I_r$ na parami rozłączne lewostronnie domknięte i prawostronnie otwarte przedziały taki, że $f|_{I_k}$ jest funkcją absolutnie ciągłą dla każdego $k = 0, \dots, r$. Oznaczmy przez β_1, \dots, β_r punkty nieciągłości funkcji f oraz niech $p_i := \lim_{t \rightarrow \beta_i^-} f(t) - f(\beta_i)$ będzie wartością skoku w punkcie β_i dla dowolnego $i = 1, \dots, r$. Jeśli ponadto $f(0) \neq \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t)$, to mówimy, że f posiada skok w zerze i oznaczamy $p_0 := \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) - f(0)$. Wtedy pochodna Df jest dobrze zdefiniowana prawie wszędzie, należy do $L^1([0, 1))$, i możemy zdefiniować sumę skoków funkcji f jako

$$S(f) := \sum_{i=0}^r p_i = \int_0^1 Df(x) dx.$$

Rozłóżmy funkcję f na sumę dwóch funkcji f_{pl} oraz f_{ac} , gdzie f_{pl} jest funkcją kawałkami liniową, a f_{ac} jest funkcją absolutnie ciągłą, nieposiadającą skoku w zerze. Dokładniej, niech f_{ac} będzie funkcją daną przez

$$f_{ac}(x) = \int_0^x Df(t) dt - S(f)x.$$

Jest to funkcja absolutnie ciągła, gdyż $Df \in L^1$. Jako, że funkcja absolutnie ciągła jest funkcją pierwotną swojej pochodnej, to $\lim_{t \rightarrow 1^-} f_{ac}(t) - f_{ac}(0) = \int_0^1 Df_{ac}(t) dt = 0$. Zatem f_{ac} nie posiada skoku w zerze. Natomiast niech $f_{pl} := f - f_{ac}$. Zauważmy, że Df_{pl} jest funkcją kawałkami stałą równą $S(f)$. Zatem f_{pl} jest funkcją kawałkami liniową o nachyleniu $S(f)$. Jako, że w szczególności jest funkcją absolutnie ciągłą nad odcinkami I_k dla $k = 1, \dots, r$, to jest ona funkcją liniową nad tymi odcinkami. Dokładniej, f_{pl} jest funkcją daną wzorem

$$f_{pl}(x) = \sum_{i=0}^r p_i \{x - \beta_i\} + p, \quad \text{gdzie } p = \int_0^1 \left(f(x) - \int_0^x Df(t) dt \right) dx.$$

Przypuśćmy, że \mathcal{A} jest alfabetem składającym się z d elementów. W tym podrozdziale wykażemy następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 6.1. *Dla każdej nieredukowalnej permutacji $\pi \in S_0^{\mathcal{A}}$ i dla prawie każdego wektora $\lambda \in \Lambda^{\mathcal{A}}$, jeśli f jest funkcją absolutnie ciągłą nad odcinkami przekładanymi przez $T_{\pi,\lambda}$ oraz $S(f) \neq 0$, to potok specjalny $T_{\pi,\lambda}^f$ z przekładaniem $T_{\pi,\lambda}$ w podstawie, pod funkcją dachową f jest słabo mieszający i rozłączny ze swoim odwrotnym.*

Do jego dowodu użyjemy następującego rezultatu, który zostanie udowodniony w następnym podrozdziale.

TWIERDZENIE 6.2. *Dla prawie każdego przekładania odcinków $(\pi, \lambda) \in S_0^{\mathcal{A}} \times \Lambda^{\mathcal{A}}$, jeśli $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_+$ jest funkcją kawałkami liniową o nachyleniu $s \neq 0$ i ciągłą nad odcinkami przekładanymi przez $T := T_{\pi,\lambda}$, to istnieje ciąg wież Rochlina $\{T^i \Delta_n : 0 \leq i < q_n\}$ dla $n \in \mathbb{N}$ (gdzie $q_n \rightarrow +\infty$) taki, że $T^i \Delta_n$ są odcinkami dla wszystkich $0 \leq i < q_n$ oraz $n \in \mathbb{N}$, T działa na każde piętro każdej wieży poprzez translację, a jeśli*

$$(6.1) \quad J_n := \Delta_n \cap T^{-q_n} \Delta_n \cap T^{-2q_n} \Delta_n,$$

to zbiory $W_n = \bigcup_{i=0}^{q_n-1} T^i J_n$ spełniają warunki (4.12)-(4.17) dla pewnego $0 \leq \alpha < 1$ oraz pewnego ciągu liczb rzeczywistych $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Ponadto, jeśli P jest miarą z warunku (4.17) oraz $\xi(t, u) = t - 2u$, to $\xi_* P$ jest miarą Diraca skupioną poza zerem.

Metoda zastosowana w dowodzie następującego lematu jest zaczerpnięta z dowodu twierdzenia 2 w [18].

LEMAT 6.3. *Niech $T : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ będzie przekładaniem odcinków oraz niech $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją o wahaniu ograniczonym. Niech $\{T^i \Delta : 0 \leq i < q\}$ będzie wieżą Rochlina, w której każde piętro jest odcinkiem. Wówczas istnieje liczba $a \in \mathbb{R}$ taka, że*

$$|f^{(q)}(x) - a| \leq \text{Var}_{[0,1]} f \quad \text{oraz} \quad |f^{(2q)}(x) - 2a| \leq 2\text{Var}_{[0,1]} f$$

dla każdego $x \in \bigcup_{i=0}^{q-1} T^i(\Delta \cap T^{-q}\Delta \cap T^{-2q}\Delta)$.

DOWÓD. Niech

$$a := \frac{1}{|\Delta|} \int_{\bigcup_{i=0}^{q-1} T^i \Delta} f(t) dt.$$

Jako, że dla każdego $i = 0, \dots, q-1$ zbiór $T^i \Delta$ jest odcinkiem a T zachowuje miarę Lebesgue'a, to $|T^i \Delta| = |\Delta|$. Stąd dla dowolnego $0 \leq k < q$ oraz dla każdego

$x \in T^k(\Delta \cap T^{-q}\Delta)$ mamy

(6.2)

$$\begin{aligned}
|f^{(q)}(x) - a| &= \left| \sum_{0 \leq i < q} f(T^i x) - \sum_{0 \leq i < q} \frac{1}{|\Delta|} \int_{T^i \Delta} f(t) dt \right| \\
&= \left| \sum_{k \leq i < q} \frac{1}{|T^i \Delta|} \int_{T^i \Delta} f(T^{i-k} x) dt + \sum_{0 \leq i < k} \frac{1}{|T^i \Delta|} \int_{T^i \Delta} f(T^{q+i-k} x) dt \right. \\
&\quad \left. - \sum_{0 \leq i < q} \frac{1}{|\Delta|} \int_{T^i \Delta} f(t) dt \right| \\
&\leq \sum_{k \leq i < q} \frac{1}{|\Delta|} \int_{T^i \Delta} |f(T^{i-k} x) - f(t)| dt \\
&\quad + \sum_{0 \leq i < k} \frac{1}{|\Delta|} \int_{T^i \Delta} |f(T^{q+i-k} x) - f(t)| dt \\
&\leq \sum_{0 \leq i < q} Var_{T^i \Delta} f \leq Var_{[0,1]} f.
\end{aligned}$$

Jeśli $x \in T^k(\Delta \cap T^{-q}\Delta \cap T^{-2q}\Delta)$, to $T^q x \in T^k(\Delta \cap T^{-q}\Delta)$. Stąd, korzystając dwukrotnie z (6.2), uzyskujemy

$$|f^{(2q)}(x) - 2a| \leq |f^{(q)}(x) - a| + |f^{(q)}(T^q x) - a| \leq 2Var_{[0,1]} f,$$

co kończy dowód lematu. \square

Dowód następującego rezultatu bazuje częściowo na dowodzie Lemma 4.8 w [24].

LEMAT 6.4. *Załóżmy, że $T : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ jest ergodycznym przekładaniem odcinków oraz $g : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją o wahanii ograniczonym. Niech $\{T^i \Delta_n : 0 \leq i < q_n\}$ dla $n \in \mathbb{N}$ będzie ciągiem wież Rochlina takich, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $0 \leq i < q_n$ zbiory $T^i \Delta_n$ są odcinkami, $q_n \rightarrow +\infty$, a T działa na każdym z pięter tych wież poprzez translację. Niech $J_n := \Delta_n \cap T^{-q_n} \Delta_n \cap T^{-2q_n} \Delta_n$ oraz $W_n = \bigcup_{i=0}^{q_n-1} T^i J_n$. Przypuśćmy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} Leb(W_n) = \alpha > 0$. Wtedy*

- (i) *istnieje ciąg liczb rzeczywistych $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ oraz liczba $C > 0$ taka, że $|g^{(q_n)}(x) - a_n| \leq C$ oraz $|g^{(2q_n)}(x) - 2a_n| \leq C$ dla wszystkich $x \in W_n$ oraz $n \in \mathbb{N}$;*
- (ii) *istnieje miara $Q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ taka, że $(g^{(2q_n)} - 2a_n, g^{(q_n)} - a_n)_* Leb_{W_n} \rightarrow Q$ słabo w $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, przechodząc ewentualnie do podciągu;*
- (iii) *jeśli dodatkowo g jest funkcją absolutnie ciągłą oraz*

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} g(t) - g(0) = \int_0^1 Dg(t) dt = 0,$$

to

$$(6.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{q_n-1} \sup_{x_i \in T^i J_n} \int_{T^i J_n} |g^{(q_n)}(x_i) - g^{(q_n)}(y)| dy = 0.$$

Ponadto

$$(6.4) \quad (g^{(q_n)} \circ T^{q_n} - g^{(q_n)}) \chi_{W_n} \rightarrow 0 \quad w L^1.$$

DOWÓD. Podpunkt (i) wynika bezpośrednio z lematu 6.3. Przypomnijmy, że ciąg miar probabilistycznych μ_n na \mathbb{R}^k , nazywamy jednostajnie jedynym, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór zwarty $K_\varepsilon \subset \mathbb{R}^k$ taki, że $\mu_n(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$ dla każdego

$n \in \mathbb{N}$. Twierdzenie Prochorowa (patrz np. Twierdzenie 29.3 w [7]) mówi, że każdy jednostajnie jędrny ciąg miar posiada podciąg słabo zbieżny. Z podpunktu (i) otrzymujemy, że rodzina rozkładów $(g^{(2q_n)} - 2a_n, g^{(q_n)} - a_n)_*$ (Leb_{W_n}), $n \in \mathbb{N}$ posiada nośnik zawarty w zwartym podzbiorze \mathbb{R}^2 . Stanowi zatem rodzinę jednostajnie jędrną. Zatem z tw. Prochorowa, przechodząc ewentualnie do podciągu, istnieje miara graniczna Q , a stąd punkt (ii) jest udowodniony.

Pozostaje dowieść punktu (iii). Załóżmy, że g jest funkcją absolutnie ciągłą spełniającą $\int_0^1 Dg(t)dt = 0$. Wówczas z tw. ergodycznego Birkhoffa mamy

$$(6.5) \quad \frac{1}{q_n} \int_0^1 |Dg^{(q_n)}(t)| dt \rightarrow 0.$$

Niech $n \in \mathbb{N}$. Z definicji J_n każdy zbiór postaci $T^i J_n$ dla $i = 0, \dots, 2q_n - 1$ zawiera się w odcinku $T^j \Delta_n$ dla pewnego $j = 0, \dots, q_n - 1$. Zatem z absolutnej ciągłości g wnioskujemy absolutną ciągłość funkcji $g^{(q_n)}$ na każdym odcinku postaci $T^i J_n$ dla $0 \leq i < q_n$. Wówczas dla dowolnego $0 \leq j < q_n$ oraz $x_j, y \in T^j J_n$ mamy

$$(6.6) \quad |g^{(q_n)}(x_j) - g^{(q_n)}(y)| \leq \int_y^{x_j} |Dg^{(q_n)}(t)| dt \leq \int_{T^j \Delta_n} |Dg^{(q_n)}(t)| dt.$$

Stąd, z tego, że T zachowuje miarę Lebesgue'a oraz z (6.5), otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{q_n-1} \sup_{x_i \in T^i J_n} \int_{T^i J_n} |g^{(q_n)}(x_i) - g^{(q_n)}(y)| dy \\ & \leq \sum_{i=0}^{q_n-1} |T^i J_n| \int_{T^i \Delta_n} |Dg^{(q_n)}(t)| dt \\ & = |J_n| \sum_{i=0}^{q_n-1} \int_{T^i \Delta_n} |Dg^{(q_n)}(t)| dt \leq \frac{1}{q_n} \int_0^1 |Dg^{(q_n)}(t)| dt \rightarrow 0, \end{aligned}$$

co dowodzi (6.3).

Dowodzimy teraz (6.4). Zauważmy, że jeśli $x \in T^i J_n$ dla pewnego $i = 0, \dots, q_n - 1$, to

$$T^{q_n} x \in T^i \Delta_n \cap T^{i-q_n} \Delta_n.$$

Ponadto dla każdego $j = 0, \dots, q_n - 1$ zachodzi

$$T^j (T^i \Delta_n \cap T^{i-q_n} \Delta_n) \subset T^{i+j} \Delta_n \quad \text{dla } j = 0, \dots, q_n - 1 - i$$

oraz

$$T^j (T^i \Delta_n \cap T^{i-q_n} \Delta_n) \subset T^{i+j-q_n} \Delta_n \quad \text{dla } j = q_n - i, \dots, q_n - 1.$$

Zatem z faktu, że funkcja g jest absolutnie ciągła otrzymujemy, że $g^{(q_n)}$ jest absolutnie ciągła na każdym odcinku $T^i \Delta_n \cap T^{i-q_n} \Delta_n$ dla $i = 0, \dots, q_n - 1$. Stąd, analogicznie jak w (6.6), uzyskujemy

$$|g^{(q_n)}(T^{q_n} x) - g^{(q_n)}(x)| \leq \int_{T^i \Delta_n} |Dg^{(q_n)}(t)| dt \quad \text{dla } x \in T^i J_n.$$

Stąd, z niezmienniczości miary Lebesgue'a ze względu na T oraz z (6.5) uzyskujemy

$$\begin{aligned} \int_{W_n} |g^{(q_n)}(T^{q_n}x) - g^{(q_n)}(x)| dx &= \sum_{i=0}^{q_n-1} \int_{T^i J_n} |g^{(q_n)}(T^{q_n}x) - g^{(q_n)}(x)| dx \\ &\leq \sum_{i=0}^{q_n-1} \text{Leb}(T^i J_n) \int_{T^i \Delta_n} |Dg^{(q_n)}(t)| dt \\ &= \text{Leb}(J_n) \int_{\bigcup_{i=0}^{q_n-1} T^i \Delta_n} |Dg^{(q_n)}(t)| dt \\ &\leq \frac{1}{q_n} \int_0^1 |Dg^{(q_n)}(t)| dt \rightarrow 0, \end{aligned}$$

co dowodzi (6.4). \square

Udowodnimy teraz twierdzenie 6.1. W owym dowodzie pokażemy w jaki sposób uzyskać rezultat dla funkcji kawałkami absolutnie ciągłych, korzystając z twierdzenia 6.2.

DOWÓD TWIERDZENIA 6.1. Niech $(\pi, \lambda) \in S_0^{\mathcal{A}} \times \Lambda^{\mathcal{A}}$ należy do zbioru pełnej miary wyznaczonego przez twierdzenie 6.2. Załóżmy ponadto, że przekładanie odcinków $T_{\pi, \lambda}$ jest ergodyczne (możemy tak założyć, dzięki twierdzeniu 2.17). Niech f będzie funkcją kawałkami absolutnie ciągłą, ciągłą nad odcinkami przekładanymi przez $T_{\pi, \lambda}$, o niezerowej sumie skoków $S(f)$. Niech $f = f_{pl} + f_{ac}$ będzie rozkładem funkcji f na część kawałkami liniową f_{pl} o nachyleniu $S(f)$ i część absolutnie ciągłą f_{ac} spełniającą $\int_0^1 Df_{ac}(t) dt = 0$. Zauważmy, że f_{pl} spełnia założenia twierdzenia 6.2.

Niech $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem wież Rochlina, $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ rosnącym ciągiem liczb naturalnych, a $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ciągiem rzeczywistym uzyskanym dzięki twierdzeniu 6.2 zastosowanemu do f_{pl} . Wówczas $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ oraz $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ spełniają warunki (4.12)-(4.17). W szczególności

$$(6.7) \quad 1 - \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Leb}(W_n) > 0 \text{ dla pewnego } \alpha \in [0, 1).$$

Niech $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ będzie słabą granicą ciągu $(f_{pl}^{(2q_n)} - 2a_n, f_{pl}^{(q_n)} - a_n)_*(\text{Leb}_{W_n})$, tj. daną jak w (4.17). Zgodnie z twierdzeniem 6.2, miara $\xi_* P \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ jest miarą Diraca skupioną w pewnym punkcie $\gamma \neq 0$. Przyjmując $B := \{\gamma\}$ otrzymujemy, że $\xi_* P(B) - (-\xi)_* P(B) = 1$. Zatem miara $\xi_* P$ dopełnia założeń twierdzenia 4.5.

Pokażemy teraz, że potok specjalny \mathcal{T}^f jest słabo mieszający. Załóżmy niewprost, że nie jest, czyli ze względu na twierdzenie 2.10 istnieje liczba $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ oraz funkcja mierzalna $h : [0, 1) \rightarrow S^1$ taka, że

$$e^{irf(x)} = h(x)/h(Tx).$$

Wtedy

$$e^{irf^{(q_n)}(x)} = h(x)/h(T^{q_n}x),$$

a więc

$$\int_{W_n} e^{irf^{(q_n)}(x)} dx = \int_{W_n} h(x)/h(T^{q_n}x) dx.$$

Zauważmy, że w powyższych rozważaniach możemy zastąpić r przez Kr dla dowolnej liczby całkowitej K . Stąd, liczba r może być co do modułu dowolnie duża. Wybierzmy zatem liczbę r taką, że

$$(6.8) \quad |r| > \frac{4}{(1 - \alpha)|S(f)|},$$

gdzie α jest dane jak w (6.7).

Z lematu 3.2 oraz z (6.7) i z (4.14) uzyskujemy, że

$$(6.9) \quad \int_{W_n} h(x)/h(T^{q_n}x) dx \rightarrow 1 - \alpha > 0.$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned} \left| \int_{W_n} h(x)/h(T^{q_n}x) dx - \text{Leb}(W_n) \right| &= \left| \int_{W_n} (h(x)/h(T^{q_n}x) - 1) dx \right| \\ &\leq \int_{W_n} |h(x) - h(T^{q_n}x)|/|h(T^{q_n}x)| dx \\ &= \int_{W_n} |h(x) - h(T^{q_n}x)| dx \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $j = 0, \dots, q_n - 1$ wybierzmy dowolny punkt $x_j^n \in T^j J_n$. Wtedy

$$(6.10) \quad \begin{aligned} &\left| \sum_{j=0}^{q_n-1} \int_{T^j J_n} e^{irf^{(q_n)}(x)} - e^{ir(f_{pl}^{(q_n)}(x) + f_{ac}^{(q_n)}(x_j^n))} dx \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{q_n-1} \int_{T^j J_n} |e^{irf^{(q_n)}(x)} - e^{ir(f_{pl}^{(q_n)}(x) + f_{ac}^{(q_n)}(x_j^n))}| dx \\ &\leq |r| \sum_{j=0}^{q_n-1} \int_{T^j J_n} |f^{(q_n)}(x) - f_{pl}^{(q_n)}(x) - f_{ac}^{(q_n)}(x_j^n)| dx \\ &= |r| \int_{W_n} |f_{ac}^{(q_n)}(x) - f_{ac}^{(q_n)}(x_j^n)| dx \rightarrow 0, \end{aligned}$$

gdzie ostatnia zbieżność wynika z punktu (iii) w lemacie 6.4. Pokażemy teraz, że $\left| \sum_{j=0}^{q_n-1} \int_{T^j J_n} e^{ir(f_{pl}^{(q_n)}(x) + f_{ac}^{(q_n)}(x_j^n))} dx \right| < \frac{1-\alpha}{2}$. Będzie to stało w sprzeczności z (6.9).

Z definicji J_n każdy zbiór postaci $T^i J_n$ dla $i = 0, \dots, 2q_n - 1$ zawiera się w odcinku $T^j \Delta_n$ dla pewnego $j = 0, \dots, q_n - 1$. Zatem jako, że f_{pl} jest liniowa wewnątrz przekładanych odcinków o nachyleniu $S(f)$, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $j = 0, \dots, q_n - 1$ funkcja $f_{pl}^{(q_n)}$ na odcinku $T^j J_n$ jest postaci $S(f)q_n x + h_j^n$ dla pewnego $h_j^n \in \mathbb{R}$. Oznaczmy $T^j J_n = [a_j, b_j]$ oraz $k_j^n := h_j^n + f_{ac}^{(q_n)}(x_j^n)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $j = 0, \dots, q_n - 1$. Wtedy korzystając z (6.8) otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{j=0}^{q_n-1} \int_{T^j J_n} e^{ir(f_{pl}^{(q_n)}(x) + f_{ac}^{(q_n)}(x_j^n))} dx \right| = \left| \sum_{j=0}^{q_n-1} \int_{T^j J_n} e^{ir(S(f)q_n x + k_j^n)} dx \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{q_n-1} \left| \int_{a_j}^{b_j} e^{irS(f)q_n x} dx \right| = \sum_{j=0}^{q_n-1} \frac{1}{|rS(f)q_n|} |e^{irS(f)q_n b_j} - e^{irS(f)q_n a_j}| \\ &\leq \frac{2q_n}{|rS(f)q_n|} \leq \frac{2}{|rS(f)|} < \frac{1-\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Zatem ze względu na (6.10) otrzymujemy $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{W_n} e^{irf^{(q_n)}(x)} dx \right| \leq \frac{1-\alpha}{2}$, co stoi ze sprzecznością z (6.9). Zatem potok \mathcal{T}^f jest słabo mieszający.

Z lematu 6.3 zastosowanego do funkcji f oraz ciągu wież $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, otrzymujemy ciąg liczb rzeczywistych $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że

$$|f^{(q_n)}(x) - b_n| \leq \text{Var}(f) \text{ oraz } |f^{(2q_n)}(x) - 2b_n| \leq 2\text{Var}(f) \text{ dla } x \in W_n \text{ i } n \in \mathbb{N}$$

oraz z tw. Prochorowa istnieje słaba granica $Q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ ciągu miar postaci $(f^{(2q_n)} - 2b_n, f^{(q_n)} - b_n)_* Leb_{W_n}$ dla $n \in \mathbb{N}$, ewentualnie przechodząc do podciągu. Zauważmy, że $\xi_* Q = \xi_* P$. Rzeczywiście, ze względu na (4.19), mamy

$$\xi_* Q \leftarrow (f^{(q_n)} \circ T^{q_n} - f^{(q_n)})_* Leb_{W_n} = (f_{pl}^{(q_n)} \circ T^{q_n} - f_{pl}^{(q_n)} + f_{ac}^{(q_n)} \circ T^{q_n} - f_{ac}^{(q_n)})_* Leb_{W_n}.$$

Z punktu (iii) lematu 6.4, $(f_{ac}^{(q_n)} \circ T^{q_n} - f_{ac}^{(q_n)})\chi_{W_n} \rightarrow 0$ w L^1 , gdy $n \rightarrow \infty$. Zatem, uzyskując lematu 3.6, uzyskujemy

$$\xi_* Q = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_{pl}^{(q_n)} \circ T^{q_n} - f_{pl}^{(q_n)})_* Leb_{W_n} = \xi_* P,$$

gdzie ostatnia równość również wynika z (4.19). Wynika stąd, że miara Q również spełnia warunek asymetrii z lematu 4.5 dla $B = \{\gamma\}$, co kończy dowód twierdzenia. \square

6.2. Kawalkami liniowe funkcje dachowe

Niech \mathcal{A} będzie alfabetem zawierającym $d \geq 2$ elementów, natomiast Λ^A oznacza standardowy sympleks jednostkowy w \mathbb{R}^A . W tej części rozprawy udowodnimy twierdzenie 6.2. Konstrukcja wież zaprezentowana w następującym lemacie jest oparta o konstrukcję podaną przez Veecha w dziale 3 w [32] (patrz także Theorem 1 w [18]).

LEMAT 6.5. *Dla każdej permutacji $\pi \in S_0^A$ oraz dla prawie każdego wektora $\lambda \in \Lambda^A$, istnieje ciąg mierzalnych wież Rochlina $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dla przekładania odcinków $T_{\pi, \lambda}$ oraz rosnący ciąg liczb naturalnych $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że q_n jest wysokością wieży W_n oraz warunki (4.12)-(4.14) są spełnione dla pewnego $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$. Ponadto dla każdego $n \in \mathbb{N}$ podstawą wieży W_n jest odcinek J^n postaci $J^n = \Delta_n \cap T^{-q_n} \Delta_n \cap T^{-2q_n} \Delta_n$, gdzie Δ_n jest odcinkiem takim, że $\bigcup_{i=0}^{q_n-1} T^i \Delta_n$ jest wieżą Rochlina, dla której $T_{\pi, \lambda}$ działa poprzez translację na każdym jej piętrze.*

DOWÓD. Ustalmy $\tilde{\pi} \in S_0^A$ i niech G będzie grafem Rauzy'ego zawierającym $\tilde{\pi}$. Wybierzmy $\tilde{\lambda} \in \Lambda^A$ takie, że przekładanie odcinków $(\tilde{\pi}, \tilde{\lambda})$ spełnia warunek Keane'a. Z punktu (iv) w lemacie 2.24 możemy dodatkowo założyć, że istnieje liczba $m \geq 1$ taka, że $B := A^{(m)}(\tilde{\pi}, \tilde{\lambda}) \in SL_{\mathcal{A}}(\mathbb{Z})$ jest macierzą dodatnią oraz $\tilde{\pi}^m = \tilde{\pi}$, gdzie $(\tilde{\pi}^m, \tilde{\lambda}^m) = R^m(\tilde{\pi}, \tilde{\lambda})$. Ustalmy $0 < \varepsilon < 1$ oraz niech $\delta > 0$ będzie taką liczbą, że

$$(6.11) \quad (1 - 3\delta) \left(1 - \rho(B) \frac{\delta}{1 - \delta}\right) > 1 - \varepsilon.$$

Niech $Y \subset \Lambda^A$ będzie zbiorem takich wektorów λ , że

$$\lambda_{\tilde{\pi}_0^{-1}(1)} > (1 - \delta)|\lambda| \quad \text{oraz} \quad \lambda_b > \frac{\delta}{2d}|\lambda| \quad \text{dla} \quad b \in \mathcal{A} \setminus \{\tilde{\pi}_0^{-1}(1)\}.$$

Zauważmy, że zbiór Y jest niepusty i otwarty. Ponadto niech $V = \{(\tilde{\pi}, \frac{B\lambda}{|B\lambda|}); \lambda \in Y\}$. Skoro $B \in SL_{\mathcal{A}}(\mathbb{Z})$, to zbiór V jest również niepusty i otwarty w $G \times \Lambda^A$. Niech η_G będzie miarą na $G \times \Lambda^A$ otrzymaną w twierdzeniu 2.30. Skoro $\eta_G(V) > 0$, to z twierdzenia 2.30, dla prawie każdej pary $(\pi, \lambda) \in G \times \Lambda^A$, istnieje rosnący ciąg liczb naturalnych $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że $(\pi^{r_n-m}, \lambda^{r_n-m}/|\lambda^{r_n-m}|) = \tilde{R}^{r_n-m}(\pi, \lambda) \in V$, przy czym $(\pi^{r_n-m}, \lambda^{r_n-m}) := R^{r_n-m}(\pi, \lambda)$. Zatem $\pi^{r_n-m} = \tilde{\pi}$ oraz $\lambda^{r_n-m} = A^{(m)}(\tilde{\pi}, \tilde{\lambda})\lambda'$ dla pewnego $\lambda' \in \mathbb{R}_{>0}^A$ takiego, że $\lambda'/|\lambda'| \in Y$. Ze względu na lemat 2.28, otrzymujemy

$$A^{(m)}(\pi^{r_n-m}, \lambda^{r_n-m}) = A^{(m)}(\tilde{\pi}, A^{(m)}(\tilde{\pi}, \tilde{\lambda})\lambda') = A^{(m)}(\tilde{\pi}, \tilde{\lambda}) = B \quad \text{oraz} \quad \pi^{r_n} = \tilde{\pi}.$$

Z powyższego oraz ze wzoru (2.19) mamy

$$R^{r_n}(\pi, \lambda) = R^m(\pi^{r_n}, \lambda^{r_n}) = (\pi^{r_n}, (A^{(m)}(\pi^{r_n}, \lambda^{r_n}))^{-1} \lambda^{r_n}) = (\tilde{\pi}, \lambda'),$$

a więc $\tilde{R}^{r_n}(\pi, \lambda) = (\tilde{\pi}, \lambda'/|\lambda'|) \in \{\tilde{\pi}\} \times Y$. Co więcej z lematu 2.24 wynika, że

$$A^{(r_n)}(\pi, \lambda) = A^{(r_n)}(\pi, \lambda) \cdot A^{(m)}(\pi^{r_n}, \lambda^{r_n}) = A^{(r_n)}(\pi, \lambda) \cdot B.$$

Stąd, z (2.29) uzyskujemy, że

$$(6.12) \quad \rho(A^{(r_n)}(\pi, \lambda)) \leq \rho(B).$$

Skoro $\tilde{R}^{r_n}(\pi, \lambda) = (\pi^{r_n}, \frac{\lambda^{r_n}}{|\lambda^{r_n}|}) \in \{\tilde{\pi}\} \times Y$, to

$$(6.13) \quad \lambda_{\tilde{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n} > (1 - \delta)|\lambda^{r_n}|$$

oraz

$$(6.14) \quad \lambda_b^{r_n} > \frac{\delta}{2d} |\lambda^{r_n}| \quad \text{dla } b \in \mathcal{A} \setminus \{\tilde{\pi}_0^{-1}(1)\}$$

Będziemy używać oznaczeń wprowadzonych przed i w uwadze 2.23. Oznaczmy $T := T_{\pi, \lambda}$. Ponadto dla $b \in \mathcal{A}$ niech $s_b^n := \sum_{a \in \mathcal{A}} A_{ab}^{(r_n)}$. Wyróżnijmy $q_n := s_{\tilde{\pi}_0^{-1}(1)}^n$ oraz $\Delta_n := I_{\tilde{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Przypomnijmy, że zgodnie z uwagą 2.23 odcinek Δ_n jest podstawą wieży Rochlina o wysokości q_n oraz $T^{q_n} \Delta_n \subset I^{r_n}$. Definiujemy wtedy zbiór

$$J^n := \Delta_n \cap T^{-q_n} \Delta_n \cap T^{-2q_n} \Delta_n.$$

Zauważmy, że J^n jest przedziałem. Rzeczywiście zauważmy, że ze względu na uwagę 2.23, zbiór $T^{q_n} \Delta_n$ jest odcinkiem zawartym w I^{r_n} . Zatem $\Delta_n \cap T^{q_n} \Delta_n$ również jest odcinkiem. Skoro $\Delta_n \cap T^{q_n} \Delta_n \subset \Delta_n$, to także zbiór $T^{q_n}(\Delta_n \cap T^{q_n} \Delta_n)$ jest odcinkiem. Zatem zbiór

$$T^{2q_n} J^n = (\Delta_n \cap T^{q_n} \Delta_n) \cap T^{q_n}(\Delta_n \cap T^{q_n} \Delta_n)$$

jest przedziałem. Jako, że $T^{2q_n} J^n \subset T^{q_n} \Delta_n$, to T^{-q_n} działa na tym zbiorze poprzez translację. Zatem $T^{-q_n}(T^{2q_n} J^n) = T^{q_n} J^n$ jest odcinkiem. Ponadto zauważmy, że także $T^{q_n} J^n \subset T^{q_n} \Delta_n$. Stąd na tej samej zasadzie uzyskujemy, że $T^{-q_n}(T^{q_n} J^n) = J^n$ jest odcinkiem.

Skoro $T^{q_n}(\Delta_n) \subset I^{r_n}$ (patrz ponownie uwaga 2.23) oraz Leb jest miarą $T_{\pi, \lambda}$ -niezmienniczą, to zachodzi

$$Leb(J^n) = Leb(\Delta_n \cap T^{q_n} \Delta_n \cap T^{2q_n} \Delta_n),$$

oraz $T^{q_n} \Delta_n \cap T^{2q_n} \Delta_n \subset I^{r_n}$. Co więcej, z (6.13) mamy

$$Leb(T^{q_n} \Delta_n \cap T^{2q_n} \Delta_n) = Leb(\Delta_n \cap T^{q_n} \Delta_n) \geq (1 - 2\delta)|I^{r_n}|.$$

Łącząc powyższy rezultat z (6.13), uzyskujemy

$$(6.15) \quad Leb(J^n) = Leb(\Delta_n \cap T^{q_n} \Delta_n \cap T^{2q_n} \Delta_n) \geq (1 - 3\delta)|I^{r_n}|.$$

Skoro rodzina zbiorów $\{T^i \Delta_n; 0 \leq i < q_n\}$ jest wieżą Rochlina (patrz uwaga 2.23), to rodzina $\{T^i J^n; 0 \leq i < q_n\}$ również nią jest, to znaczy

$$(6.16) \quad J^n \cap T^l J^n = \emptyset \quad \text{dla } 1 \leq l < q_n.$$

Z uwagi 2.23, otrzymujemy $|\lambda| = \sum_{b \in \mathcal{A}} \lambda_b^{r_n} s_b^n$. Ze względu na (2.28) oraz (6.12) dla dowolnego $b \in \mathcal{A}$ mamy

$$s_b^n \leq \rho(A^{(r_n)}) s_{\tilde{\pi}_0^{-1}(1)}^n \leq \rho(B) q_n.$$

Stąd oraz z (6.13) wynika, że

$$\begin{aligned} |\lambda| - q_n \lambda_{\tilde{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n} &= \sum_{b \in \mathcal{A} \setminus \{\tilde{\pi}_0^{-1}(1)\}} s_b^n \lambda_b^{r_n} \leq \rho(B) q_n \sum_{b \in \mathcal{A} \setminus \{\tilde{\pi}_0^{-1}(1)\}} \lambda_b^{r_n} = \rho(B) q_n (|\lambda^{r_n}| - \lambda_{\tilde{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}) \\ &\leq \rho(B) q_n \delta |\lambda^{r_n}| \leq \rho(B) q_n \frac{\delta}{1 - \delta} \lambda_{\tilde{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n} < \rho(B) \frac{\delta}{1 - \delta} |\lambda|. \end{aligned}$$

Warto zaznaczyć, że $q_n \lambda_{\tilde{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n} = \text{Leb}(\bigcup_{i=0}^{q_n-1} \Delta_n)$. Podsumowując uzyskaliśmy, że

$$(6.17) \quad q_n |I^{r_n}| > q_n \lambda_{\tilde{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n} > \left(1 - \rho(B) \frac{\delta}{1 - \delta}\right) |\lambda|,$$

co z kolei, z (6.15), (6.16) i (6.11) implikuje, że

$$(6.18) \quad \begin{aligned} \text{Leb}\left(\bigcup_{l=0}^{q_n-1} T^l J^n\right) &= q_n \text{Leb}(J^n) \geq (1 - 3\delta) q_n |I^{r_n}| \\ &> (1 - 3\delta) \left(1 - \rho(B) \frac{\delta}{1 - \delta}\right) |\lambda| > (1 - \varepsilon) |\lambda|. \end{aligned}$$

Niech

$$(6.19) \quad W_n := \bigcup_{l=0}^{q_n-1} T^l J^n.$$

Skoro założyliśmy, że $\lambda \in \Lambda^A$ (tzn. $|\lambda| = 1$), to z (6.18), przechodząc ewentualnie do podciągu, uzyskujemy

$$(6.20) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Leb}(W_n) = 1 - \alpha \quad \text{dla pewnej liczby } 0 \leq \alpha \leq \varepsilon.$$

Zatem warunek (4.12) jest spełniony. Ponadto skoro $W_n \Delta T^{-1} W_n \subseteq T^{q_n-1} J^n \cup T^{-1} J^n$, to

$$\text{Leb}(W_n \Delta T^{-1} W_n) \leq 2 \text{Leb}(J^n) \rightarrow 0, \quad \text{gdy } n \rightarrow \infty,$$

co potwierdza zachodzenie warunku (4.13).

Zauważmy, że

$$(6.21) \quad \text{dla } x \in W_n \text{ istnieje liczba } 0 \leq l < q_n \text{ taka, że } x, T^{q_n} x, T^{2q_n} x \in T^l \Delta_n.$$

Rzeczywiście, istnieje $0 \leq l < q_n$ taki, że

$$x \in T^l J^n = T^l \Delta_n \cap T^{-q_n+l} \Delta_n \cap T^{-2q_n+l} \Delta_n$$

co pociąga (6.21). Z uwagi 2.23, $T^l \Delta_n$ jest przedziałem długości $|\Delta_n| < |I^{r_n}|$. Skoro z własności indukcji Rauzy'ego mamy $|I^{r_n}| \rightarrow 0$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in W_n} |T^{q_n} x - x| = 0.$$

Z lematu 3.3, to implikuje zachodzenie warunku (4.14) dla ciągu $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Na koniec wystarczy zauważyć, że biorąc $\varepsilon < \frac{1}{2}$, to z (6.20) uzyskujemy $\alpha < \frac{1}{2}$. \square

LEMAT 6.6. *Przypuśćmy, że $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ oraz $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ są ciągami skonstruowanymi w lemacie 6.5. Wtedy dla każdego $x \in W_n$ oraz $0 \leq j < q_n$, punkty $T^j x$ oraz $T^{q_n+j} x$ należą do tego samego przekładanego odcinka I_b dla pewnego $b \in \mathcal{A}$. Ponadto istnieje ciąg dodatnich liczb rzeczywistych $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że*

$$T^{q_n+j} x - T^j x = \gamma_n / q_n \text{ dla wszystkich } x \in W_n, 0 \leq j < q_n \quad \text{oraz} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \gamma > 0.$$

DOWÓD. W dowodzie tego lematu będziemy korzystać z oznaczeń wprowadzonych w lemacie 6.5, jak również z pewnych wyprowadzonych tam faktów. Niech $(\pi^{r_n}, \lambda^{r_n}) = R^{r_n}(\pi, \lambda) \in \{\tilde{\pi}\} \times \mathbb{R}_+ Y$ oraz niech $\tilde{T} := T_{\pi^{r_n}, \lambda^{r_n}}$. Wtedy, zgodnie z uwagą 2.23, odwzorowanie $\tilde{T} : I^{r_n} \rightarrow I^{r_n}$ jest przekładaniem odcinków takim, że $\tilde{T}x = T^{q_n}x$ dla $x \in \Delta_n$. Ponadto skoro $\pi^{r_n} = \tilde{\pi}$, to dla wszystkich $x \in \Delta_n$ mamy

$$\tilde{T}x = x + \sum_{\{b \in \mathcal{A}; \tilde{\pi}_1(b) < \tilde{\pi}_1(\tilde{\pi}_0^{-1}(1))\}} |I_b^{r_n}|.$$

Jako, że $\pi \in S_0^A$ oraz $\lambda^{r_n}/|\lambda^{r_n}| \in Y$, to istnieje $c \in \mathcal{A}$ takie, że $\tilde{\pi}_1(c) < \tilde{\pi}_1(\tilde{\pi}_0^{-1}(1))$ oraz

$$\gamma_n := q_n \sum_{\{b \in \mathcal{A}; \tilde{\pi}_1(b) < \tilde{\pi}_1(\tilde{\pi}_0^{-1}(1))\}} |I_b^{r_n}| \geq q_n |I_c^{r_n}| \geq \frac{\delta}{2d} q_n |I^{r_n}|.$$

Ostatnia nierówność wynika z (6.14). Ze względu na (6.17), wnioskujemy że

$$\gamma_n \geq \frac{\delta}{2d} q_n |I^{r_n}| \geq \frac{\delta}{2d} \left(1 - \rho(B) \frac{\delta}{1 - \delta}\right) > 0.$$

Podsumowując, dla każdego $x \in \Delta_n$ mamy $T^{q_n}x - x = \gamma_n/q_n$ a ciąg $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ liczb dodatnich jest odseparowany od zera.

Niech $x \in W_n$ oraz $0 \leq j < q_n$. Z (6.21), istnieje $0 \leq l < q_n$ takie, że $x, T^{q_n}x, T^{2q_n}x \in T^l \Delta_n$. Wynika stąd, że $T^j x, T^{q_n+j}x \in T^k \Delta_n$ dla pewnego $0 \leq k < q_n$. Rzeczywiście, jeśli $0 \leq l + j < q_n$, to bierzemy $k := l + j$, a jeśli $q_n \leq l + j < 2q_n$ to $k := l + j - q_n$. Z uwagi 2.23, $T^j x, T^{q_n+j}x \in T^k \Delta_n \subset I_b$ dla pewnego $b \in \mathcal{A}$ oraz T^k działa na przedział Δ_n poprzez translację. Zatem

$$T^{q_n+j}x - T^j x = T^{q_n+j-k}x - T^{j-k}x, \text{ gdzie } T^{j-k}x \in \Delta_n,$$

więc $T^{q_n+j}x - T^j x = \gamma_n/q_n$. Jako, że $\liminf_{n \rightarrow \infty} \gamma_n > 0$, to kończy dowód lematu. \square

DOWÓD TWIERDZENIA 6.2. W tym dowodzie będziemy stosować oznaczenia użyte w dowodach dwóch poprzednich lematów. Niech W_n będzie wieżą zdefiniowaną w (6.19) oraz niech $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb całkowitych również zdefiniowanych w (6.19). Z lematu 6.5, spełnione są warunki (4.12) – (4.14) oraz T działa na każdy zbiór postaci $T^l \Delta_n$ poprzez translację, dla dowolnego $l = 0, \dots, q_n - 1$. Ponadto skoro f jest funkcją o wahanii ograniczonym, możemy zastosować lemat 6.3 do zbioru $\Delta = \Delta_n$ oraz liczby $q = q_n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Otrzymujemy w ten sposób ciąg liczb rzeczywistych $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że

$$|f^{(q_n)}(x) - a_n| \leq \text{Var}(f) \text{ oraz } |f^{(2q_n)}(x) - 2a_n| \leq 2\text{Var}(f)$$

dla wszystkich $x \in W_n$ i $n \in \mathbb{N}$, co razem z twierdzeniem Prochorowa implikuje istnienie miary $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ takiej, że

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(f^{(2q_n)} - 2a_n, f^{(q_n)} - a_n \right)_* (\text{Leb}_{W_n}) \quad \text{słabo w } \mathcal{P}(\mathbb{R}^2),$$

przechodząc ewentualnie do podciągu. Zatem własności (4.15), (4.16) i (4.17) także są spełnione. Z lematu 6.6, dla każdego $x \in W_n$ oraz $0 \leq j < q_n$ punkty $T^j x$ i $T^{q_n+j}x$ należą do tego samego odcinka I_b oraz $T^{q_n+j}x - T^j x = \gamma_n/q_n$. Skoro f jest funkcją liniową z nachyleniem s na przekładanych odcinkach, a więc i na I_b , otrzymujemy

że $f(T^{q_n+j}x) - f(T^jx) = s\gamma_n/q_n$. Zatem dla każdego $x \in W_n$ mamy

$$\begin{aligned} f^{(q_n)} \circ T^{q_n}(x) - f^{(q_n)}(x) &= \sum_{j=0}^{q_n-1} (f(T^{q_n+j}x) - f(T^jx)) \\ &= s \sum_{j=0}^{q_n-1} (T^{q_n+j}x - T^jx) = s\gamma_n \rightarrow s\gamma, \end{aligned}$$

gdzie $\gamma > 0$. Stąd i z (4.19) uzyskujemy, że $\xi_*P = \delta_{s\gamma}$, przy czym $s\gamma \neq 0$, co kończy dowód. □

6.3. Kawalkami stałe funkcje dachowe

W tym podrozdziale udowodnimy następujący rezultat dotyczący rozłączności potoków specjalnych nad przekładaniami odcinków z ich potokami odwrotnymi w sytuacji, gdy funkcja dachowa jest funkcją kawalkami stałą.

TWIERDZENIE 6.7. *Dla prawie każdego przekładania $(\pi, \lambda) \in S_0^A \times \Lambda^A$ i dla każdego $r \geq 2$, istnieje podzbiór $D_\lambda \subset [0, 1]^r$ pełnej miary Lebesgue'a taki, że jeśli f jest kawalkami stałą funkcją posiadającą punkty nieciągłości w punktach $\beta_1, \dots, \beta_r \in [0, 1)$ takich, że $(\beta_1, \dots, \beta_r) \in D_\lambda$ oraz ewentualnie w punktach nieciągłości przekładania odcinków, z wymiernie niezależnymi skokami w punktach β_1, \dots, β_r , to potok specjalny $T_{\pi, \lambda}^f$ jest słabo mieszający i rozłączny ze swoim potokiem odwrotnym.*

Potrzebujemy następującego ogólnego rezultatu.

LEMAT 6.8 (patrz Theorem 3.3 w [21]). *Niech T będzie ergodycznym automorfizmem probabilistycznej standardowej przestrzeni borelowskiej (X, \mathcal{B}, μ) . Niech $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem wież Rochlina takim, że $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(W_n) > 0$ oraz $\mu(J_n) \rightarrow 0$, gdzie J_n jest podstawą wieży W_n . Wtedy dla prawie każdego $x \in X$ mamy $x \in W_n$ dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$.*

Aby udowodnić twierdzenie 6.7, zastosujemy konstrukcję i argumenty użyte w lemacie 6.5, jak również część oznaczeń. Tak jak w dowodzie lematu 6.5, zbiór W_n powstaje jako wieża $\{T^i\Delta_n : 0 \leq i < q_n\}$ składająca się z odcinków. W dowodzie lematu 6.5 użyliśmy jednej dominującej wieży uzyskanej z podziału $[0, 1)$ na wieże (który to podział był możliwy dzięki uwadze 2.23) oraz odpowiedniemu wyborowi iteracji indukcji Rauzy'ego-Veecha. W dowodzie rezultatu, który za moment przedstawimy, będziemy bazować na dwóch dominujących wieżach i w pewnym sensie $\{T^i\Delta_n : 0 \leq i < q_n\}$ będzie zbiorem złożonym z tych dwóch wież. Następnie skonstruujemy „podwieże” $W_n^l \subset W_n$ dla $l = 1, \dots, r$, które spełniają założenia lematu 6.8. Lemat 6.8 zapewnia istnienie zbioru $D \subset [0, 1)^r$ pełnej miary Lebesgue'a takiego, że dla każdego wyboru $(\beta_1, \dots, \beta_r) \in D$ zachodzi $(\beta_1, \dots, \beta_r) \in W_n^1 \times \dots \times W_n^r$ dla nieskończenie wielu liczb $n \in \mathbb{N}$. Następnie rozszerzymy zbiór W_n o punkty, na których będziemy w stanie kontrolować wartości funkcji dachowej rozpatrywanego potoku specjalnego. W ostatnim kroku dowodu pokażemy, że jeśli punkty β_1, \dots, β_r są punktami nieciągłości funkcji dachowej f takimi, że $(\beta_1, \dots, \beta_r) \in D$, to miara ξ_*P dana jak w (4.19) jest dyskretną miarą spełniającą założenia twierdzenia 4.5.

DOWÓD TWIERDZENIA 6.7. Ustalmy graf Rauzy'ego permutacji nieredukowalnych G oraz rozpatrzmy permutację $\hat{\pi} \in G$ taką, że $\hat{\pi}_0^{-1}(1) = \hat{\pi}_1^{-1}(d)$ oraz

$\hat{\pi}_0^{-1}(d) = \hat{\pi}_1^{-1}(1)$, gdzie $d = \#\mathcal{A}$ (przypomnijmy, że istnienie takiej permutacji wynika z twierdzenia 2.16). Ze względu na punkt (iv) w lemacie 2.24 znajdziemy takie przekładanie odcinków $(\hat{\pi}, \bar{\lambda})$, które spełnia warunek Keane'a, że istnieją takie liczby $M, m \in \mathbb{N}$, że $\hat{\pi}^M = \hat{\pi}^{M+m} = \hat{\pi}$ oraz macierze $C := A^{(M)}(\hat{\pi}, \bar{\lambda})$ i $B := A^{(m)}(\hat{\pi}, \bar{\lambda}^M)$ są dodatnie. Przypomnijmy, że ρ jest zdefiniowane jak w (2.27). Wybierzmy liczby $\varepsilon, \delta, \delta' > 0$ tak, aby zachodziło

$$(6.22) \quad 0 < \varepsilon < \min\left(1/(10\rho(B)), 1/8(2r+2)\right), \quad \varepsilon/3 < \delta' < \delta < \varepsilon/2$$

oraz

$$(6.23) \quad \delta - \delta' < \frac{\varepsilon}{4d \max_{a,b \in \mathcal{A}}(B_{ab})\rho(B)\rho(C)}.$$

Niech $Y \subset \Lambda^{\mathcal{A}}$ oznacza zbiór tych λ , że

$$\frac{1}{2} - \delta < \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)} < \frac{1}{2} - \delta + \frac{\delta - \delta'}{4}, \quad \frac{1}{2} + \delta' < \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)} < \frac{1}{2} + \delta' + \frac{\delta - \delta'}{4}.$$

Wtedy

$$\frac{\varepsilon}{2} < \frac{2}{3}\varepsilon - \frac{1}{16}\varepsilon < \delta' + \delta - \frac{\delta - \delta'}{4} < \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)} < \delta' + \delta + \frac{\delta - \delta'}{4} < 2\delta.$$

Przedstawione teraz rozumowanie jest analogiczne do początku dowodu lematu 6.5. Zauważmy, że Y jest zbiorem niepustym i otwartym w $\Lambda^{\mathcal{A}}$, co z kolei pociąga, że zbiór $V := \{(\hat{\pi}, \frac{1}{|CB\lambda|}CB\lambda); \lambda \in Y\}$ jest niepusty i otwarty w $S_0^{\mathcal{A}} \times \Lambda^{\mathcal{A}}$. Zbiór V jest zatem zbiorem dodatniej miary η_G w $G \times \Lambda^{\mathcal{A}}$. Z twierdzenia 2.30 wiemy, że dla prawie każdej pary $(\pi, \lambda) \in G \times \Lambda^{\mathcal{A}}$ istnieje rosnący ciąg liczb naturalnych $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że $\tilde{R}^{r_n-M-m}(\pi, \lambda) \in V$. Oznaczmy zbiór takich par przez $\Upsilon_0 \subset G \times \Lambda^{\mathcal{A}}$. Niech

$$\Upsilon := \{(\pi, \lambda) \in \Upsilon_0; T_{\pi, \lambda} \text{ jest ergodycznym przekładaniem odcinków}\}.$$

Jako, że Υ_0 jest pełnej miary, to ze względu na twierdzenie 2.17, zbiór Υ także jest pełnej miary.

Niech $(\pi, \lambda) \in \Upsilon$. Z definicji Υ oraz z lematu 2.28 wynika, że $\pi^{r_n-M-m} = \pi^{r_n-m} = \pi^{r_n} = \hat{\pi}$ a także

$$(6.24) \quad A^{(r_n-m)}(\pi, \lambda) = A^{(r_n-M-m)}(\pi, \lambda) \cdot C \quad \text{oraz} \quad A^{(r_n)}(\pi, \lambda) = A^{(r_n-m)}(\pi, \lambda) \cdot B.$$

Stąd oraz z (2.19) otrzymujemy, że

$$(\hat{\pi}^{r_n}, \lambda^{r_n}) = \tilde{R}^{r_n}(\pi, \lambda) = \tilde{R}^{M+m}(\tilde{R}^{r_n-M-m}(\pi, \lambda)) = \left(\hat{\pi}, \frac{(CB)^{-1}\lambda^{r_n-M-m}}{|(CB)^{-1}\lambda^{r_n-M-m}|}\right) \in \{\hat{\pi}\} \times Y.$$

W szczególności z lematu 2.29 wynika, że

$$(6.25) \quad \rho(A^{(r_n-m)}(\pi, \lambda)) \leq \rho(C) \quad \text{oraz} \quad \rho(A^{(r_n)}(\pi, \lambda)) \leq \rho(B).$$

Z definicji zbioru Y wynika, że

$$(6.26) \quad \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n} > \left(\frac{1}{2} - \delta\right)|\lambda^{r_n}|, \quad \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} > \left(\frac{1}{2} + \delta'\right)|\lambda^{r_n}|,$$

$$(6.27) \quad \frac{\varepsilon}{2}|\lambda^{r_n}| < \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n} < 2\delta|\lambda^{r_n}|.$$

Niech $T := T_{\pi, \lambda}$. Ustalmy $s_j^k := \sum_{b \in \mathcal{A}} A_{b\hat{\pi}_0^{-1}(j)}^{(k)}$ dla $j = 1, \dots, d$ i $k \in \mathbb{N}$ oraz niech $\Delta_n := I_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}$ i $\Xi_n := I_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n}$. Wtedy

$$(6.28) \quad |\Delta_n| = \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n} \quad \text{oraz} \quad |\Xi_n| = \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n}.$$

Przyjmijmy także $q_n := s_1^{r_n} + s_d^{r_n}$. Wtedy definiujemy

$$J^n := \Delta_n \cap T^{-q_n} \Delta_n \cap T^{-2q_n} \Delta_n.$$

Rozważmy przekładanie odcinków $\tilde{T} := T_{\pi^{r_n}, \lambda^{r_n}}$ działające na I^{r_n} . Wtedy ze względu na uwagę 2.23 otrzymujemy, że $\tilde{T} = T^{s_1^{r_n}}$ na Δ_n oraz $\tilde{T} = T^{s_d^{r_n}}$ na Ξ_n , a także że $\{T^i \Delta_n; i = 0 \dots s_1^{r_n} - 1\}$ oraz $\{T^i \Xi_n; i = 0 \dots s_d^{r_n} - 1\}$ są wiezami Rochlina składającymi się z odcinków. Skoro $\pi^{r_n} = \hat{\pi}$ oraz $\hat{\pi}_1 \circ \hat{\pi}_0^{-1}(1) = d$, $\hat{\pi}_1 \circ \hat{\pi}_0^{-1}(d) = 1$, to przedział Δ_n jest przesuwany przez $T^{s_1^{r_n}}$ ($= \tilde{T}$) na odcinek, którego prawy koniec jest prawym końcem I^{r_n} , a Ξ_n jest przesuwany przez $T^{s_d^{r_n}}$ ($= \tilde{T}$) na odcinek, którego lewy koniec jest równy 0. Stąd, pierwsza z opisanych wyżej translacji jest przesunięciem o $|I^{r_n}| - |\Delta_n|$, natomiast druga o $|\Xi_n| - |I^{r_n}|$. Co więcej, ze względu na (6.27), odcinek $T^{s_1^{r_n}} \Delta_n$ jest krótszy niż Ξ_n , czyli

$$(6.29) \quad T^{s_1^{r_n}} \Delta_n \subset \Xi_n.$$

Wynika stąd, że

$$(6.30) \quad T^{q_n} = T^{s_1^{r_n} + s_d^{r_n}} \text{ przesuwa } \Delta_n \text{ o } |\Xi_n| - |\Delta_n| = \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n} > 0.$$

Zatem J^n jest odcinkiem zaczynającym się w 0, którego długość jest równa

$$(6.31) \quad |J^n| = \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n} - 2(\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}).$$

Skoro $0 < 2\delta < \varepsilon < 1/10$, to z (6.27) wynika, że

$$(6.32) \quad \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n} < 2\delta |I^{r_n}| < \varepsilon |I^{r_n}| < \frac{1}{10} |I^{r_n}|.$$

Z (6.26) oraz z tego, że $\delta < 1/20$ otrzymujemy

$$(6.33) \quad |J^n| = \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n} - 2(\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}) > \left(\frac{1}{2} - \delta - \frac{1}{5}\right) |I^{r_n}| > \frac{1}{4} |I^{r_n}|.$$

Z uwagi 2.23, $\{T^i \Delta_n : 0 \leq i < s_1^{r_n}\}$ oraz $\{T^i \Xi_n : 0 \leq i < s_d^{r_n}\}$ są wiezami Rochlina składającymi się z odcinków, a ponadto $\sum_{j=1}^d s_j^{r_n} |I_{\hat{\pi}_0^{-1}(j)}^{r_n}| = 1$. Skoro $T^{s_1^{r_n}} \Delta_n \subset \Xi_n$ (patrz (6.29)) oraz $J^n \subset \Delta_n$, to dostajemy, że

$$\{T^i \Delta_n : 0 \leq i < q_n\} \quad \text{i} \quad \{T^i J^n : 0 \leq i < q_n\}$$

także są wiezami Rochlina, których wszystkie piętra są odcinkami. Ponadto

$$(6.34) \quad T \text{ działa na każde piętro wieży } \bigcup_{i=0}^{q_n-1} T^i \Delta_n \text{ poprzez translację.}$$

Niech

$$W_n := \bigcup_{i=0}^{q_n-1} T^i J^n.$$

Ze względu na (2.28) oraz (2.29) mamy

$$(6.35) \quad s_j^{r_n} \leq \rho(A^{r_n}(\hat{\pi}, \lambda)) s_k^n \leq \rho(B) s_k^n \quad \text{dla} \quad 1 \leq j, k \leq d.$$

To implikuje, że

$$(6.36) \quad s_1^{r_n} |I^{r_n}| \geq \sum_{j=1}^d \frac{s_j^{r_n}}{\rho(B)} |I_{\hat{\pi}_0^{-1}(j)}^{r_n}| = 1/\rho(B).$$

Zatem, z (6.33), uzyskujemy

$$(6.37) \quad \text{Leb}(W_n) = q_n |J^n| > \frac{1}{4} q_n |I^{r_n}| \geq \frac{1}{4\rho(B)}.$$

Stąd, przechodząc ewentualnie do podciągu, otrzymujemy

$$(6.38) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Leb(W_n) = \alpha > 0.$$

Skoro $\{T^i \Delta_n : 0 \leq i < q_n\}$ jest wieżą Rochlina taką, że T działa na każdy jej poziom poprzez translację, użycie takich samych argumentów jak w dowodzie lematu 6.5 daje, że dla każdego $x \in W_n$ istnieje liczba $0 \leq l < q_n$ taka, że $x, T^{q_n}x, T^{2q_n}x \in T^l \Delta_n$ i

$$(6.39) \quad \text{dla każdej liczby } 0 \leq i < q_n \text{ istnieje liczba } 0 \leq l < q_n \text{ taka, że} \\ T^i x, T^{i+q_n} x \in T^l \Delta_n \text{ dla każdego } x \in W_n.$$

To pociąga, że

$$(6.40) \quad \sup_{x \in W_n} |T^{q_n} x - x| \leq |I^{r_n}| \rightarrow 0 \text{ oraz } \sup_{x \in W_n} |T^{2q_n} x - x| \leq |I^{r_n}| \rightarrow 0.$$

Co więcej, skoro T^k działa na Δ_n poprzez translację, to ze względu na (6.30), zachodzi

$$T^{q_n} T^i x - T^i x = T^{q_n} T^{i-l} x - T^{i-l} x = \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}. \quad (T^{i-l} x \in \Delta_n).$$

Zatem dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ uzyskaliśmy, że

$$(6.41) \quad T^{q_n} T^i x - T^i x = \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n} \text{ dla każdego } x \in W_n \text{ oraz } i = 0, \dots, q_n - 1.$$

Konstrukcja zbioru punktów nieciągłości funkcji f . Rozważmy następujące r rozłącznych przedziałów

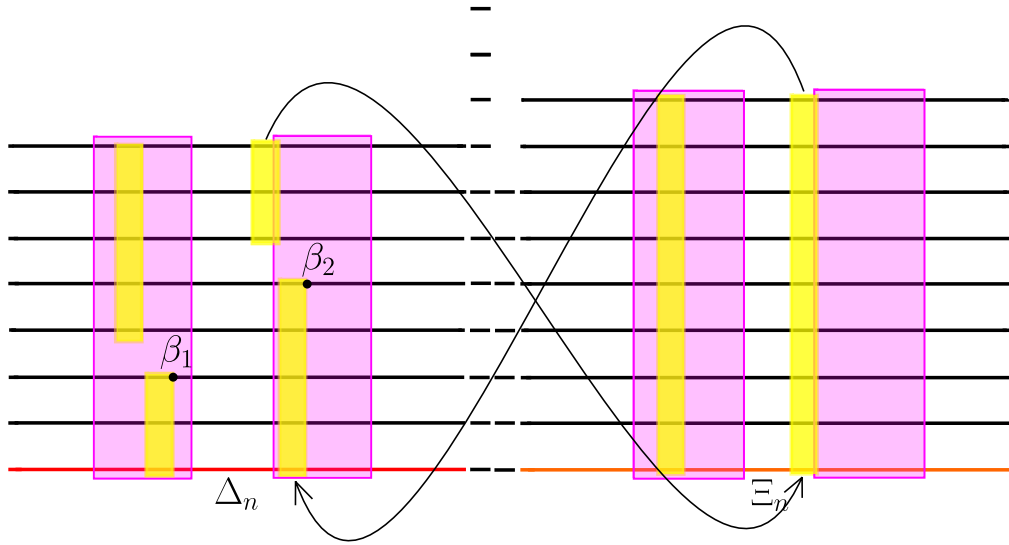
$$J_l^n = \left[\frac{2l|J^n|}{2r+2}, \frac{(2l+1)|J^n|}{2r+2} \right) \subset J^n \quad \text{dla } l = 1, \dots, r.$$

Niech $W_n^l := \bigcup_{i=0}^{q_n-1} T^i J_l^n$. Skoro $\{T^i J_l^n : 0 \leq i < q_n\}$ jest wieżą Rochlina, to $\{T^i J_l^n : 0 \leq i < q_n\}$ także są wieżami Rochlina dla $1 \leq l \leq r$. Zauważmy, że całkowita miara każdej z takich wież stanowi $\frac{1}{2r+2}$ miary wieży W_n . Z (6.38) otrzymujemy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} Leb(W_n^l)$ jest liczbą dodatnią dla $1 \leq l \leq r$. Z lematu 6.8, istnieje zbiór $D_\lambda \subset [0, 1]^r$ pełnej miary Lebesgue'a taki, że dla każdego elementu $(\beta_1, \dots, \beta_r) \in D_\lambda$, mamy $\beta_l \in W_l^n$ dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$ i dla wszystkich $1 \leq l \leq r$. Zauważmy, że z (6.32), (6.22) oraz (6.33), zachodzi

$$(6.42) \quad \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n} < \varepsilon |I^{r_n}| < \frac{1}{8(2r+2)} |I^{r_n}| < \frac{1}{2(2r+2)} |J^n|.$$

Zauważmy ponadto, że punkty β_1, \dots, β_r są od siebie odseparowane przynajmniej o $\frac{1}{2r+2} |J^n|$. Rzeczywiście, niech $1 \leq k, l \leq r$, $k \neq l$, $\beta_k \in T^i J_k^n$ oraz $\beta_l \in T^j J_l^n$. Jeśli $i \neq j$, to w szczególności $\beta_l \notin T^i J^n$. Jako, że $\beta_k \in T^i \left[\frac{|J^n|}{2r+2}, \frac{(2r+1)|J^n|}{2r+2} \right)$, to z (6.34) wynika, że β_k jest oddalony od krańców odcinka $T^i J^n$ przynajmniej o $\frac{1}{2r+2} |J^n|$. Zatem $|\beta_k - \beta_l| > \frac{1}{2r+2}$. Jeśli natomiast $i = j$, to $|\beta_k - \beta_l|$ jest liczbą ograniczoną z dołu przez odległość zbiorów $T^i \left[\frac{2k|J^n|}{2r+2}, \frac{(2k+1)|J^n|}{2r+2} \right)$ oraz $T^i \left[\frac{2l|J^n|}{2r+2}, \frac{(2l+1)|J^n|}{2r+2} \right)$. Zatem z (6.34) wynika, że w tym przypadku również zachodzi $|\beta_k - \beta_l| > \frac{1}{2r+2} |J^n|$. Stąd i z (6.42) uzyskaliśmy, że

$$(6.43) \quad |\beta_k - \beta_l| > \frac{1}{2r+2} |J^n| > \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n} \text{ dla } k \neq l.$$



RYSUNEK 1. Wybór punktów nieciągłości.

Rozważmy teraz zbiory

$$(6.44) \quad V_l^n = \bigcup_{i=0}^{q_n-1} T^{-i} [\beta_l - (\lambda_{\hat{\pi}_0^{r_n}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{r_n}(1)}^{r_n}), \beta_l] \quad \text{dla } l = 1, \dots, r.$$

Udowodnimy teraz, że V_l^n dla $l = 1, \dots, r$ są parami rozłącznymi wieżami Rochlina zawartymi w W_n . Skoro $\beta_l \in W_n^l$, to istnieje liczba $0 \leq k = k(l) < q_n$ taka, że $T^{-k}\beta_l \in J_l^n$. Rozważmy przedział $\left(\frac{2l-1}{2r+2}|J^n|, \frac{2l+1}{2r+2}|J^n|\right) \subset J^n$. Skoro T^k działa na J^n poprzez translację, to zbiór $T^k\left(\frac{2l-1}{2r+2}|J^n|, \frac{2l+1}{2r+2}|J^n|\right)$ jest odcinkiem takim, że β_l należy do jego prawej połowy. Jako, że długość tego przedziału wynosi $\frac{2}{2r+2}|J^n|$, to z (6.42) uzyskujemy

$$(6.45) \quad [\beta_l - 2(\lambda_{\hat{\pi}_0^{r_n}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{r_n}(1)}^{r_n}), \beta_l] \subset T^k\left(\frac{2l-1}{2r+2}|J^n|, \frac{2l+1}{2r+2}|J^n|\right) \subset W_n.$$

Skoro T^{q_n} działa na W_n jako translacja o $\lambda_{\hat{\pi}_0^{r_n}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{r_n}(1)}^{r_n}$ (patrz (6.41)), to otrzymujemy, że

$$T^{q_n} [\beta_l - 2(\lambda_{\hat{\pi}_0^{r_n}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{r_n}(1)}^{r_n}), \beta_l - (\lambda_{\hat{\pi}_0^{r_n}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{r_n}(1)}^{r_n})] = [\beta_l - (\lambda_{\hat{\pi}_0^{r_n}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{r_n}(1)}^{r_n}), \beta_l].$$

To pociąga, że

$$(6.46) \quad T^{-q_n} [\beta_l - (\lambda_{\hat{\pi}_0^{r_n}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{r_n}(1)}^{r_n}), \beta_l] \subset T^k\left(\frac{2l-1}{2r+2}|J^n|, \frac{2l+1}{2r+2}|J^n|\right).$$

Zatem, w świetle (6.45), dla każdego $0 \leq i \leq k$ mamy

$$T^{-i} [\beta_l - (\lambda_{\hat{\pi}_0^{r_n}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{r_n}(1)}^{r_n}), \beta_l] \subset T^{k-i}\left(\frac{2l-1}{2r+2}|J^n|, \frac{2l+1}{2r+2}|J^n|\right) \subset W_n$$

oraz, z (6.46), dla każdego $k < i < q_n$ zachodzi

$$T^{-i} [\beta_l - (\lambda_{\hat{\pi}_0^{r_n}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{r_n}(1)}^{r_n}), \beta_l] \subset T^{q_n+k-i}\left(\frac{2l-1}{2r+2}|J^n|, \frac{2l+1}{2r+2}|J^n|\right) \subset W_n.$$

Uzyskaliśmy zatem, że

$$(6.47) \quad V_l^n \subset \bigcup_{i=0}^{q_n-1} T^i \left(\frac{2l-1}{2r+2} |J^n|, \frac{2l+1}{2r+2} |J^n| \right) \quad \text{dla dowolnego } l = 1, \dots, r.$$

Skoro $\{T^j J^n : 0 \leq j < q_n\}$ jest wieżą Rochlina, to $\{T^j \left(\frac{2l-1}{2r+2} |J^n|, \frac{2l+1}{2r+2} |J^n| \right) : 0 \leq j < q_n\}$ są rozłącznymi wieżami Rochlina dla $l = 1, \dots, r$. Każdy przedział $T^{-i} \left[\beta_l - (\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}), \beta_l \right)$ jest podzbiorem pewnego piętra wieży $\bigcup_{i=0}^{q_n-1} T^i \left(\frac{2l-1}{2r+2} |J^n|, \frac{2l+1}{2r+2} |J^n| \right)$ i dla $0 \leq i < q_n$ przedziały te są rozmieszczone w różnych piętrach l -tej wieży. Zatem V_l^n dla $l = 1, \dots, r$ są parami rozłącznymi wieżami Rochlina zawierającymi się w W_n . Stąd

$$(6.48) \quad \text{Leb} \left(\bigcup_{l=1}^r V_l^n \right) = r(\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}) q_n.$$

Zauważmy także, że jeśli $\text{Int}(\cdot)$ oznacza wnętrze zbioru, to z (6.47) wynika

$$(6.49) \quad \bigcup_{i=l}^r V_l^n \subseteq \text{Int}(W_n),$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Punkty nienależące do W_n . Zauważmy, że punkty, które nie należą do W_n pochodzą z trzech źródeł, tzn. wieży zbudowanej nad odcinkiem $\Delta_n \setminus J^n$ o wysokości $s_1^{r_n}$, wież zbudowanych nad odcinkami $I_{\hat{\pi}_0^{-1}(j)}^{r_n}$ o wysokościach odpowiednio $s_j^{r_n}$ dla $j = 2, \dots, d-1$ oraz wieży o wysokości $s_d^{r_n}$ zbudowanej nad $\Xi_n \setminus T^{s_1^{r_n}} J^n$. Z (6.28) oraz (6.31), uzyskujemy

$$(6.50) \quad \begin{aligned} \text{Leb}(\Delta_n \setminus J^n) &= |\Delta_n| - |J^n| = 2(\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}), \\ \text{Leb}(\Xi_n \setminus T^{s_1^{r_n}} J^n) &= |\Xi_n| - |J^n| = 3(\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}), \end{aligned}$$

a z (6.26) uzyskujemy, że długości odcinków $I_{\hat{\pi}_0^{-1}(j)}^{r_n}$ dla $j = 2, \dots, d-1$ można oszacować następująco

$$(6.51) \quad \sum_{j=2}^{d-1} |I_{\hat{\pi}_0^{-1}(j)}^{r_n}| = |I^{r_n}| - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n} < (\delta - \delta') |I^{r_n}|.$$

Zauważmy zatem, że z (6.50) oraz z (6.51) wynika

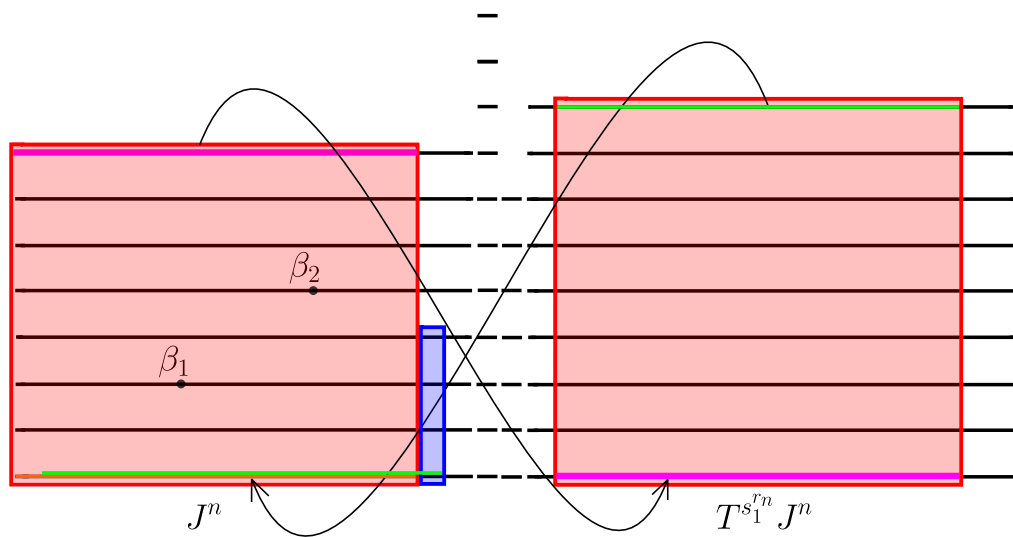
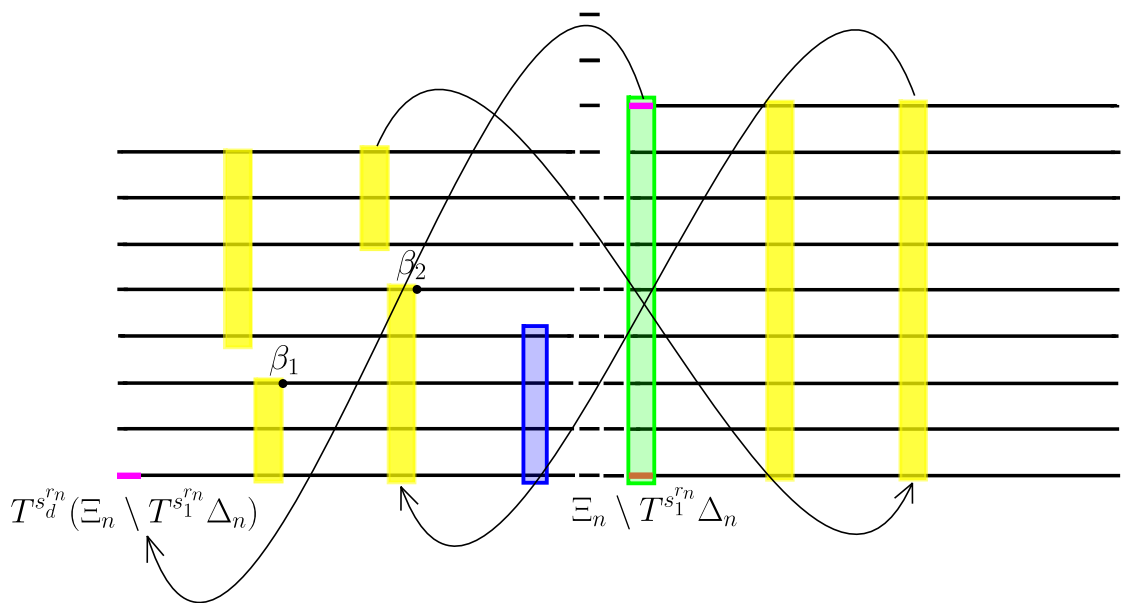
$$(6.52) \quad \begin{aligned} \text{Leb}([0, 1] \setminus W_n) &= (2s_1^{r_n} + 3s_d^{r_n})(\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}) + \sum_{j=2}^{d-1} s_j^{r_n} |I_{\hat{\pi}_0^{-1}(j)}^{r_n}| \\ &\leq (2s_1^{r_n} + 3s_d^{r_n})(\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}) + (\delta - \delta') \max_{1 < j < d} s_j^{r_n} |I^{r_n}|. \end{aligned}$$

Zdefiniujemy teraz wieże Z_n oraz U_n rozłączne z W_n , na których będziemy w pewnym sensie kontrolować wartości funkcji f .

Definicja i własności wieży Z_n . Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ rozważmy zbiór

$$Z_n := \bigcup_{i=0}^{s_d^{r_n}-1} T^i(\Xi_n \setminus T^{s_1^{r_n}} \Delta_n).$$

Zauważmy, że jest to wieża Rochlina, gdyż odcinek $\Xi_n = I_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n}$ jest podstawą wieży Rochlina o wysokości $s_d^{r_n}$. Ponadto zbiór $\Xi_n \setminus T^{s_1^{r_n}} \Delta_n$ jest odcinkiem, którego lewy


 RYSUNEK 2. Wieża W_n .

 RYSUNEK 3. Wieża Z_n (zielona), U_n (niebieska) oraz wieże V_l^n (żółte).

kraniec pokrywa się z lewym krańcem odcinka Ξ_n , a jego długość wynosi $|\Xi_n| - |\Delta_n|$. Jako, że $|\Xi_n| - |\Delta_n| = \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{rn} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{rn}$ oraz $T^{s_1^{rn}}(\Delta_n) \subset \Xi_n$, to

$$(6.53) \quad \text{Leb}(Z_n) = s_d^{rn} (\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{rn} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{rn}).$$

Zauważmy także, że $Z_n \cap W_n = \emptyset$ dla $n \in \mathbb{N}$ (patrz rys. 3). Ponadto mamy

$$(6.54) \quad T^{q_n}(T^l x) = T^l x + (\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{rn} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{rn}) \text{ dla każdego } x \in Z_n \text{ oraz } l = 0, \dots, q_n - 1.$$

Rzeczywiście, jeśli $x \in Z_n$, to $x \in T^l(\Xi_n \setminus T^{s_1^{r_n}} \Delta_n)$ dla pewnego $l = 0, \dots, s_d^{r_n} - 1$. Przypomnijmy, że $\tilde{T} = T^{s_d^{r_n}}$ jest translacją na Ξ_n oraz $\tilde{T}\Xi_n = [0, |\Xi_n|)$. W szczególności

(6.55)

$$T^{s_d^{r_n}}(\Xi_n \setminus T^{s_1^{r_n}} \Delta_n) = \tilde{T}(\Xi_n \setminus T^{s_1^{r_n}} \Delta_n) = [0, |\Xi_n| - |\Delta_n|) = [0, \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}).$$

Ze względu na (6.42) wynika stąd, że $T^{s_d^{r_n}}(\Xi_n \setminus T^{s_1^{r_n}} \Delta_n) \subset J^n$. W szczególności $T^{s_d^{r_n}-k}x \in J^n$. Zatem dla $s_d^{r_n} - l \leq k < q_n$ zachodzi $T^k x \in W_n = \bigcup_{i=0}^{q_n-1} T^i J^n$. Wtedy równość (6.54) wynika z (6.41). Niech teraz $0 \leq k < s_d^{r_n} - l$. Korzystając z (6.55) uzyskujemy, że $T^{s_d^{r_n}-k-l}(T^k x) \in J^n \subset W_n$. Wtedy z (6.41) uzyskujemy

$$T^{q_n+s_d^{r_n}-k-l}(T^k x) - T^{s_d^{r_n}-k-l}(T^k x) = \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}.$$

Stąd, z (6.55) oraz z (6.42) wynika między innymi, że

$$T^{q_n+s_d^{r_n}-k-l}(T^k x) \in [0, 2(\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n})) \subset J^n \subset T^{s_d^{r_n}} \Xi_n.$$

Jednakże T działa na odcinek $T^{s_d^{r_n}-1}\Xi_n$ poprzez translację. Zatem

$$T^{q_n+s_d^{r_n}-k-l-1}(T^k x) - T^{s_d^{r_n}-k-l-1}(T^k x) = \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}.$$

Jako, że T działa poprzez translację także na każdy odcinek postaci $T^m \Xi_n$ dla $m = l, \dots, s_d^{r_n} - 1$ oraz $T^{q_n+s_d^{r_n}-k-l-1}(T^k x), T^{s_d^{r_n}-k-l-1}(T^k x) \in T^{s_d^{r_n}-1}\Xi_n$, to

$$T^{q_n}(T^k x) - T^k x = \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}.$$

To kończy dowód (6.54).

Definicja i własności wieży U_n . Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ rozważmy także

$$U_n := \bigcup_{i=0}^{s_1^{r_n-m}-1} T^i [|J^n|, |J^n| + (\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n})).$$

Jako, że $[|J^n|, |J^n| + (\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n})) \subset I_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n} = \Delta_n$, a Δ_n jest podstawą wieży Rokhlina o wysokości $s_1^{r_n}$, to U_n jest wieżą Rokhlina o wysokości $s_1^{r_n-m}$. Ponadto zauważmy, że z (6.24) wynika

$$\begin{aligned} s_1^{r_n} &= \sum_{b \in \mathcal{A}} A_{b\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{(r_n)}(\pi, \lambda) = \sum_{b \in \mathcal{A}} \sum_{c \in \mathcal{A}} A_{bc}^{(r_n-m)}(\pi, \lambda) B_{c\hat{\pi}_0^{-1}(1)} \\ &\leq \max_{b,c \in \mathcal{A}}(B_{cb}) \sum_{b \in \mathcal{A}} \sum_{c \in \mathcal{A}} A_{bc}^{(r_n-m)}(\pi, \lambda). \end{aligned}$$

Co więcej, z definicji ρ (patrz (2.27)) oraz z (6.25) wynika

$$\begin{aligned} \sum_{b \in \mathcal{A}} \sum_{c \in \mathcal{A}} A_{bc}^{(r_n-m)}(\pi, \lambda) &\leq \sum_{b \in \mathcal{A}} \sum_{c \in \mathcal{A}} \rho(A^{(r_n-m)}) A_{b\hat{\pi}_0^{-1}(1)}(\pi, \lambda) \\ &\leq d \cdot \rho(C) \cdot \sum_{b \in \mathcal{A}} A_{b\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{(r_n-m)}(\pi, \lambda) = d \cdot \rho(C) \cdot s_1^{r_n-m}. \end{aligned}$$

Podsumowując, uzyskaliśmy, że

$$s_1^{r_n} \leq d \cdot \max_{b,c \in \mathcal{A}}(B_{cb}) \cdot \rho(C) \cdot s_1^{r_n-m}.$$

Z powyższego wynika, że

$$(6.56) \quad \text{Leb}(U_n) = s_1^{r_n-m} (\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}) \geq \frac{s_1^{r_n}}{d \rho(C) \max_{b,c \in \mathcal{A}}(B_{cb})} (\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}).$$

Co więcej, zachodzi także $U_n \cap (W_n \cup Z_n) = \emptyset$ (patrz rys. 3). Wykażemy teraz, że

$$(6.57) \quad T^{q_n}(T^l x) = T^l x + (\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}) \text{ dla każdego } x \in U_n \text{ oraz } l = 0, \dots, q_n - 1.$$

Skoro $x \in U_n$, to istnieje liczba $0 \leq l < s_1^{r_n - m}$, taka, że $x \in T^l[|J^n|, |J^n| + (\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n})]$. Niech $0 \leq k < q_n - l$. Wtedy $T^k x \in T^{k+l}[|J^n|, |J^n| + (\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n})]$. Zauważmy ponadto, że z (6.30) wynika, że T^{q_n} na odcinku $[|J^n|, |J^n| + (\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n})] \subset \Delta_n$ działa poprzez translację o $\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}$. Stąd, a także z tego, że

$$(6.58) \quad T^{-l} x \in [|J^n|, |J^n| + (\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n})] \subset \Delta_n$$

oraz $|\Delta_n| = |J^n| + 2(\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n})$ (patrz (6.31)) uzyskujemy $T^{q_n}(T^{-l} x) - T^{-l} x = \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}$ oraz

$$(6.59) \quad T^{q_n}(T^{-l} x) \in [|J^n| + (\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}), |J^n| + 2(\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n})] \subset \Delta_n.$$

Skoro $k + l < q_n$, to z (6.34) mamy

$$(6.60) \quad T^{q_n}(T^k x) - T^k x = T^{l+k}(T^{q_n}(T^{-l} x)) - T^{l+k}(T^{-l} x) = \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n},$$

dla dowolnego $0 \leq k < q_n - l$.

Założmy teraz, że $q_n - l \leq k < q_n$. Z (6.60) wynika w szczególności, że

$$T^{q_n}(T^{q_n-l-1} x) - T^{q_n-l-1} x = \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}.$$

Zauważmy, że z (6.58) mamy $T^{q_n-l-1} x = T^{q_n-1}(T^{-l} x) \in T^{q_n-1} \Delta_n$. Ponadto z (6.59) mamy także $T^{q_n}(T^{q_n-l-1} x) = T^{q_n-1}(T^{q_n-l} x) \in T^{q_n-1} \Delta_n$. Z (6.34) odwzorowanie T działa na $T^{q_n-1} \Delta_n$ poprzez translację, zatem

$$(6.61) \quad T^{q_n}(T^{q_n-l} x) - T^{q_n-l} x = T(T^{q_n}(T^{q_n-l-1} x)) - T(T^{q_n-l-1} x) = \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}.$$

Stąd i z (6.59) otrzymujemy

$$(6.62) \quad \begin{aligned} T^{q_n}(T^{q_n-l} x) &\in [|J^n| + 2(\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}), |J^n| + 3(\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n})] \\ &= [|\Delta_n|, |\Delta_n| + (\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n})]. \end{aligned}$$

Ponadto $[|J^n| + (\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}), |J^n| + 3(\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n})] \subset I^{r_n}$. Jako, że B jest macierzą dodatnią, to $|I_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n-m}| = (B\lambda^{r_n})_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)} \geq |I^{r_n}|$, co implikuje

$$(6.63) \quad [|J^n| + (\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}), |J^n| + 3(\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n})] \subset I^{r_n} \subset I_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n-m}.$$

Jednakże $I_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n-m}$ jest podstawą wieży Rochlina o wysokości $s_1^{r_n-m}$, a T działa na każde jej piętro poprzez translację. Ponadto z (6.59), (6.62) oraz (6.63) mamy $T^{q_n-l} x, T^{q_n}(T^{q_n-l} x) \in I_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n-m}$. Stąd, z (6.61) oraz z tego, że $l < s_1^{r_n-m}$ uzyskujemy, że dla $q_n - l \leq k < q_n$ zachodzi $0 \leq k - (q_n - l) < s_1^{r_n-m}$ oraz

$$T^{q_n}(T^k x) - T^k x = T^{k-(q_n-l)}(T^{q_n}(T^{q_n-l} x)) - T^{k-(q_n-l)}(T^{q_n-l} x) = \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n},$$

co kończy dowód (6.57).

Sztywność wzdłuż ciągu $\{W_n \cup Z_n \cup U_n\}$. Z (6.41), (6.54) oraz (6.57), a także z tego, że $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda^{r_n}| = 0$ otrzymujemy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in W_n \cup Z_n \cup U_n} |T^{q_n} x - x| \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}) = 0.$$

Stąd i z lematu 3.3 uzyskujemy, że zbiór $W_n \cup Z_n \cup U_n$ spełnia warunek (4.14).

Miara zbioru $W_n \cup Z_n \cup U_n$. Zauważmy, że dzięki (6.38) przechodząc ewentualnie do podciągu, otrzymujemy

$$(6.64) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Leb(W_n \cup Z_n \cup U_n) = \hat{\alpha},$$

dla pewnego $0 < \hat{\alpha} < 1$. Jako, że W_n, Z_n i U_n są wieżami Rochlina spełniającymi (6.64), to zbiór $W_n \cup Z_n \cup U_n$ spełnia warunki (4.12) oraz (4.13).

Korzystając z tego, że W_n, Z_n i U_n są parami rozłączne, a także z (6.52), (6.53) oraz (6.56), uzyskujemy

$$\begin{aligned} Leb([0, 1] \setminus (W_n \cup Z_n \cup U_n)) &= Leb([0, 1] \setminus W_n) - (Leb(Z_n) + Leb(U_n)) \\ &< (\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n})(2s_1^{r_n} + 3s_d^{r_n}) + (\delta - \delta')|I^{r_n}| \max_{1 < j < d} (s_j^{r_n}) \\ &\quad - \left(s_d^{r_n} (\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}) + \frac{s_1^{r_n}}{d\rho(C) \max_{b,c \in \mathcal{A}}(B_{cb})} (\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}) \right) \\ &= (\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n})(2s_1^{r_n} + 2s_d^{r_n}) + (\delta - \delta')|I^{r_n}| \max_{1 < j < d} (s_j^{r_n}) \\ &\quad - \frac{s_1^{r_n}}{d\rho(C) \max_{b,c \in \mathcal{A}}(B_{cb})} (\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}). \end{aligned}$$

Stąd oraz kolejno z (6.48), (6.27), (6.35), (6.23) i (6.36) otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} &Leb\left(\bigcup_{l=1}^r V_l^n\right) - Leb([0, 1] \setminus (W_n \cup Z_n \cup U_n)) \\ &> (\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}) \left((r-2)s_1^{r_n} + (r-2)s_d^{r_n} \right) - (\delta - \delta') \max_{1 < j < d} (s_j^{r_n}) |I^{r_n}| \\ &\quad + \frac{s_1^{r_n}}{d\rho(C) \max_{b,c \in \mathcal{A}}(B_{cb})} (\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}) \\ &\geq \frac{s_1^{r_n}}{d\rho(C) \max_{b,c \in \mathcal{A}}(B_{cb})} (\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}) - (\delta - \delta') \max_{1 < j < d} (s_j^{r_n}) |I^{r_n}| \\ &> \frac{s_1^{r_n} \varepsilon}{2d\rho(C) \max_{b,c \in \mathcal{A}}(B_{cb})} |I^{r_n}| - \frac{\varepsilon}{4d \max_{a,b \in \mathcal{A}}(B_{cb}) \rho(B) \rho(C)} (\rho(B) s_1^{r_n}) |I^{r_n}| \\ &= \frac{\varepsilon}{4d\rho(C) \max_{b,c \in \mathcal{A}}(B_{cb})} s_1^{r_n} |I^{r_n}| > \frac{\varepsilon}{4d\rho(C) \rho(B) \max_{b,c \in \mathcal{A}}(B_{cb})} > 0. \end{aligned}$$

Przechodząc do granicy, ewentualnie wzdłuż podciągu, dzięki (6.64) uzyskujemy, że

$$(6.65) \quad \Gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} Leb\left(\bigcup_{l=1}^r V_l^n\right) > 1 - \hat{\alpha}.$$

Warunki (4.15) i (4.16). Niech $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ będzie funkcją kawałkami stałą, która ma nieciągłości w punktach β_1, \dots, β_r ze skokami równymi odpowiednio d_1, \dots, d_r . Z założeń $d_j \neq -d_k$ dla $1 \leq j < k \leq r$. Warto zaznaczyć, że dopuszczamy również punkty nieciągłości f w punktach nieciągłości $T_{\pi, \lambda}$. Nie mają one wpływu na rachunki, które teraz wykonamy, gdyż znajdują się one zawsze w lewych krańcach pięter wież Rochlina. Wykażemy teraz, że warunki (4.15) i (4.16) są spełnione

na zbiorze $W_n \cup Z_n \cup U_n$. W tym celu wykażemy, że określone w tychże punktach ciągi całek są ograniczone na każdym ze zbiorów W_n , Z_n oraz U_n z osobna.

Ograniczoność całek na W_n . Przypomnijmy, że $J^n = \Delta_n \cap T^{-q_n} \Delta_n \cap T^{-2q_n} \Delta_n$. Z lematu 6.3 zastosowanego dla $\Delta = \Delta_n$ wiemy, że istnieje liczba $K > 0$ oraz ciąg $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$(6.66) \quad |f^{(q_n)}(x) - a_n| \leq K \text{ oraz } |f^{(2q_n)}(x) - 2a_n| \leq K \text{ dla każdego } x \in W_n = \bigcup_{i=0}^{q_n-1} T^i J^n.$$

W szczególności

$$(6.67) \quad \int_{W_n} |f^{(q_n)} - a_n|^2 dx \leq K^2 \text{ oraz } \int_{W_n} |f^{(2q_n)} - 2a_n|^2 dx \leq K^2.$$

Ograniczoność całek na Z_n . Wykażemy teraz, że powyższe nierówności są również prawdziwe, gdy zastąpimy W_n przez Z_n . Niech $x \in Z_n$. Wtedy $x \in T^l(\Xi_n \setminus T^{s_1^{r_n}} \Delta_n)$ dla pewnego $0 \leq l < s_d^{r_n}$. Zauważmy, że $T^{s_1^{r_n}+l}(0) \in W_n \cap T^{s_1^{r_n}+l} \Delta_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, gdyż 0 jest lewym końcem odcinka Δ_n , a także odcinka J^n . W szczególności z (6.66) wynika, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$(6.68) \quad |f^{(q_n)}(T^{s_1^{r_n}+l}(0)) - a_n| \leq K \text{ oraz } |f^{(2q_n)}(T^{s_1^{r_n}+l}(0)) - 2a_n| \leq K.$$

Przypomnijmy ponadto, że

$$(6.69) \quad T \text{ działa na każde piętro wieży } \{T^i \Xi_n; 0 \leq i < s_d^{r_n}\} \text{ poprzez translację.}$$

Jednocześnie jako, że $T^{s_1^{r_n}}(0) = \tilde{T}(0)$ jest prawym końcem odcinka $\Xi_n \setminus T^{s_1^{r_n}} \Delta_n$ oraz $T^{s_1^{r_n}}(0) \in \Xi_n$, to $T^{s_1^{r_n}+l}(0)$ jest prawym końcem odcinka $T^l(\Xi_n \setminus T^{s_1^{r_n}} \Delta_n)$, będącego początkowym istotnym pododcinkiem $T^l \Xi_n$. Zatem, jeśli $\overline{}$ oznacza domknięcie zbioru, to $\overline{\Xi_n \setminus T^{s_1^{r_n}} \Delta_n} \subset \Xi_n$. Z (6.69) mamy

$$(6.70) \quad T^k(\overline{\Xi_n \setminus T^{s_1^{r_n}} \Delta_n}) = \overline{T^k(\Xi_n \setminus T^{s_1^{r_n}} \Delta_n)} \text{ dla } k = 0, \dots, s_d^{r_n}.$$

Uzyskujemy stąd, że

$$(6.71) \quad [x, T^{s_1^{r_n}+l}(0)] \subset \overline{T^l(\Xi_n \setminus T^{s_1^{r_n}} \Delta_n)} \subset T^l \Xi_n.$$

Zauważmy, że

$$(6.72) \quad [x, T^{s_1^{r_n}+l}(0)] \cap V_j^n = \emptyset \text{ dla każdego } j = 1, \dots, r.$$

Rzeczywiście, z (6.49) mamy $V_j^n \subset \text{Int}(W_n)$. Ponadto $[x, T^{s_1^{r_n}+l}(0)] \subset \overline{Z_n}$. Jednakże $Z_n \cap W_n = \emptyset$, a zatem $\overline{Z_n} \cap \text{Int}(W_n) = \emptyset$, co implikuje żadaną rozłączność.

Pokażemy teraz, że dla dowolnego $0 \leq k < 2q_n$ zbiór $T^k[x, T^{s_1^{r_n}+l}(0)]$ jest odcinkiem, na którym funkcja f jest stała.

Założmy, że $0 \leq k < s_d^{r_n} - l$. Wtedy z (6.71) oraz (6.70) mamy

$$T^k x, T^k(T^{s_1^{r_n}+l}(0)) \in T^k(\overline{T^l(\Xi_n \setminus T^{s_1^{r_n}} \Delta_n)}) = T^{k+l}(\overline{\Xi_n \setminus T^{s_1^{r_n}} \Delta_n}) \subset T^{k+l} \Xi_n.$$

Ponadto jako, że T działa na każdy z odcinków $T^l \Xi_n, \dots, T^{s_d^{r_n}-1} \Xi_n$ poprzez translację oraz $k+l < s_d^{r_n}$, to

$$(6.73) \quad T^k[x, T^{s_1^{r_n}+l}(0)] = [T^k x, T^k(T^{s_1^{r_n}+l}(0))] \\ \text{oraz } T^k[x, T^{s_1^{r_n}+l}(0)] \subset T^{k+l} \Xi_n \text{ dla } 0 \leq k < s_d^{r_n} - l.$$

W szczególności, korzystając z powyższego dla $k = s_d^{r_n} - l - 1$ uzyskujemy, że $T^{s_d^{r_n}-l-1}[x, T^{s_1^{r_n}+l}(0)] = [T^{s_d^{r_n}-l-1} x, T^{s_d^{r_n}-l-1}(T^{s_1^{r_n}+l}(0))]$ jest odcinkiem zawartym

w $T^{s_d^{r_n}-1}\Xi_n$. Zatem z tego, że T działa na odcinek $T^{s_d^{r_n}-1}\Xi_n$ poprzez translację otrzymujemy, że

$$T^{s_d^{r_n}-l}[x, T^{s_1^{r_n}+l}(0)] = T\left(T^{s_d^{r_n}-l-1}[x, T^{s_1^{r_n}+l}(0)]\right)$$

jest odcinkiem oraz

$$(6.74) \quad T^{s_d^{r_n}-l}[x, T^{s_1^{r_n}+l}(0)] = [T^{s_d^{r_n}-l}x, T^{s_d^{r_n}-l}(T^{s_1^{r_n}+l}(0))] = [T^{s_d^{r_n}-l}x, T^{q_n}(0)].$$

Jako, że z (6.30) mamy $T^{q_n}(0) = \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}$, to z (6.42) uzyskujemy

$$(6.75) \quad T^{s_d^{r_n}-l}[x, T^{s_1^{r_n}+l}(0)] = [T^{s_d^{r_n}-l}x, T^{q_n}(0)] \subset [0, \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}] \subset J^n.$$

Niech teraz $s_d^{r_n} - l \leq k < q_n + s_d^{r_n} - l$. Wtedy $0 \leq k - (s_d^{r_n} - l) < q_n$. Przypomnijmy, że J^n jest odcinkiem zawartym w Δ_n , który z kolei jest podstawą wieży o wysokości q_n . Z (6.34) oraz (6.75) uzyskujemy zatem, że $T^k[x, T^{s_1^{r_n}+l}(0)] = T^{k-(s_d^{r_n}-l)}[T^{s_d^{r_n}-l}x, T^{q_n}(0)]$ jest odcinkiem a także

$$(6.76) \quad T^k[x, T^{s_1^{r_n}+l}(0)] = [T^kx, T^{k+s_1^{r_n}+l}(0)] \subset T^{k-(s_d^{r_n}-l)}J^n \subset T^{k-(s_d^{r_n}-l)}\Delta_n$$

dla $s_d^{r_n} - l \leq k < q_n + s_d^{r_n} - l$.

Ponadto, z definicji J^n mamy $J^n \subset T^{-q_n}\Delta_n$, czyli $T^{q_n}J^n \subset \Delta_n$, a stąd oraz z (6.75) zachodzi

$$T^{q_n+s_d^{r_n}-l}x \in \Delta_n \text{ oraz } T^{q_n+s_d^{r_n}-l}(T^{s_1^{r_n}+l}(0)) = T^{2q_n}(0) \in \Delta_n.$$

Stąd, korzystając z (6.75) oraz z tego, że T^{q_n} działa na Δ_n poprzez translację (patrz (6.30)) otrzymujemy, że

$$(6.77) \quad T^{q_n+s_d^{r_n}-l}[x, T^{s_1^{r_n}+l}(0)] = T^{q_n}[T^{s_d^{r_n}-l}x, T^{q_n}(0)] = [T^{q_n+s_d^{r_n}-l}x, T^{2q_n}(0)] \subset \Delta_n.$$

Niech $q_n + s_d^{r_n} - l \leq k < 2q_n$. Stąd $0 \leq k - (q_n + s_d^{r_n} - l) < q_n$, co razem z (6.77) oraz (6.34) implikuje, że $T^k[x, T^{s_1^{r_n}+l}(0)]$ jest odcinkiem postaci $[T^kx, T^k(T^{s_1^{r_n}+l}(0))]$ oraz

$$(6.78) \quad T^k[x, T^{s_1^{r_n}+l}(0)] \subset T^{k-(q_n+s_d^{r_n}-l)}\Delta_n \text{ dla } q_n + s_d^{r_n} - l \leq k < 2q_n.$$

Podsumowując z (6.73), (6.76) oraz (6.78) mamy, że dla każdego $k = 0, \dots, 2q_n - 1$

$$(6.79) \quad \text{odcinek } T^k[x, T^{s_1^{r_n}+l}(0)] \text{ jest zawarty w pewnym piętrze}$$

wieży $\{T^i\Delta_n; 0 \leq i < q_n\}$ lub $\{T^i\Xi_n; 0 \leq i < s_d^{r_n}\}$.

Z (6.72) oraz z definicji V_j^n wiemy, że $T^k[x, T^{s_1^{r_n}+l}(0)]$ nie zawiera punktów β_1, \dots, β_r dla $k = 0, \dots, q_n - 1$. Pozostało wykazać, że ten sam rezultat zachodzi także dla $k = q_n, \dots, 2q_n - 1$. W tym celu pokażemy, że $T^{q_n}[x, T^{s_1^{r_n}+l}(0)]$ jest rozłączny z $\bigcup_{j=1}^r V_j^n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Z (6.76) dla $k = q_n$ mamy

$$T^{q_n}[x, T^{s_1^{r_n}+l}(0)] = [T^{q_n}x, T^{q_n}(T^{s_1^{r_n}+l}(0))]$$

Z (6.75) mamy

$$T^{q_n}[x, T^{s_1^{r_n}+l}(0)] \subset T^{q_n-(s_d^{r_n}-l)}[0, \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}],$$

przy czym $0 < q_n - (s_d^{r_n} - l) < q_n$. Jednakże, z (6.42) mamy $[0, \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}] \subset [0, \frac{1}{2r+2}|J^n|] \subset \Delta_n$. Ponadto $[0, \frac{1}{2r+2}|J^n|] \cap (\frac{1}{2r+2}|J^n|, \frac{2r+1}{2r+2}|J^n|) = \emptyset$. Stąd z (6.34) i z (6.47) uzyskujemy, że

$$T^{q_n}[x, T^{s_1^{r_n+l}}(0)] \cap \bigcup_{j=1}^r V_j^n = \emptyset.$$

Zatem z definicji wież V_j^n , dla $k = q_n, \dots, 2q_n - 1$ mamy, że odcinek $T^k[x, T^{s_1^{r_n+l}}(0)] = T^{k-q_n}(T^{q_n}[x, T^{s_1^{r_n+l}}(0)])$ nie zawiera punktów β_1, \dots, β_r .

Podsumowując wykazaliśmy, że dla dowolnego $x \in Z_n$ żaden odcinek postaci $T^k[x, T^{s_1^{r_n+l}}(0)]$ dla $k = 0, \dots, 2q_n - 1$ nie zawiera punktów β_1, \dots, β_r . Co więcej z (6.79) wiemy, że każdy z tych odcinków jest zawarty w pewnym pięttrze wieży, które jest z kolei zawarte w jednym z odcinków przekładanych przez T . Zatem funkcja f jest stała nad odcinkami $T^k[x, T^{s_1^{r_n+l}}(0)]$, gdzie $k = 0, \dots, 2q_n - 1$. W szczególności dla każdego $0 \leq k < 2q_n$ zachodzi $f(T^k x) = f(T^k(T^{s_1^{r_n+l}}(0)))$, a stąd

$$f^{(q_n)}(x) = f^{(q_n)}(T^{s_1^{r_n+l}}(0)) \quad \text{oraz} \quad f^{(2q_n)}(x) = f^{(2q_n)}(T^{s_1^{r_n+l}}(0)) \quad \text{dla każdego } x \in Z_n.$$

Zatem z (6.68), funkcje $f^{(q_n)} - a_n$ oraz $f^{(2q_n)} - 2a_n$ są ograniczone przez K na Z_n , a stąd

$$(6.80) \quad \int_{Z_n} |f^{(q_n)} - a_n|^2 dx \leq K^2 \quad \text{oraz} \quad \int_{Z_n} |f^{(2q_n)} - 2a_n|^2 dx \leq K^2.$$

Ograniczoność całek na U_n . Wykażemy teraz analogiczne nierówności dla zbioru U_n . Ustalmy dowolny punkt $y \in J^n$ taki, że $y > \frac{2r+1}{2r+2}|J^n|$. Niech teraz $x \in U_n$, czyli $x \in T^l[|J^n|, |J^n| + (\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n})]$ dla pewnego $0 \leq l < s_1^{r_n-m}$. W szczególności $x \in T^l \Delta_n$. Wykażemy teraz, że dla każdego $k = 0, \dots, 2q_n - 1$ zbiór $T^k[T^l y, x]$ jest odcinkiem, na którym funkcja f jest stała. Z wyboru x oraz y mamy

$$(6.81) \quad [y, T^{-l}x] \subset \left(\frac{2r+1}{2r+2}|J^n|, |J^n| + (\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}) \right) \subset \Delta_n.$$

Ponadto,

$$\left(\frac{2r+1}{2r+2}|J^n|, |J^n| + (\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}) \right) \cap \left(\frac{1}{2r+2}|J^n|, \frac{2r+1}{2r+2}|J^n| \right) = \emptyset.$$

Zatem z (6.34) otrzymujemy

$$(6.82) \quad [T^l y, x] = T^l[y, T^{-l}x] \subseteq T^l \left(\frac{2r+1}{2r+2}|J^n|, |J^n| + (\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}) \right) \subset T^l \Delta_n$$

oraz

$$[T^l y, x] \cap \bigcup_{m=0}^{q_n-1} T^m \left(\frac{1}{2r+2}|J^n|, \frac{2r+1}{2r+2}|J^n| \right) = \emptyset.$$

Stąd i z (6.47) otrzymujemy

$$(6.83) \quad [T^l y, x] \cap V_j^n = \emptyset \quad \text{dla } j = 1, \dots, r.$$

Wykażemy teraz, że dla dowolnego $k = 0, \dots, 2q_n - 1$ zachodzi

$$(6.84) \quad \text{zbiór } T^k([T^l y, x]) \text{ jest odcinkiem zawartym w pewnym pięttrze wieży} \\ \{T^j \Delta_n, 0 \leq j < q_n\} \text{ lub } \{T^j I_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n-m}, 0 \leq j < s_1^{r_n-m}\}.$$

Niech $0 \leq k < q_n - l$. Z (6.82) oraz (6.34) zbiór $T^k[T^l y, x]$ jest odcinkiem, $0 \leq k + l < q_n$, a także

$$(6.85) \quad T^k[T^l y, x] = [T^{l+k} y, T^k x] \subset T^{l+k} \Delta_n \text{ dla } 0 \leq k < q_n - l.$$

W szczególności, korzystając z powyższego dla $k = q_n - l - 1$ otrzymujemy, że

$$T^{q_n-l-1}[T^l y, x] = [T^{q_n-1} y, T^{q_n-l-1} x] \subset T^{q_n-1} \Delta_n$$

Z (6.34) zbiór $T^{q_n-l}[T^l y, x] = T(T^{q_n-l-1}[T^l y, x])$ jest odcinkiem, a w połączeniu z (6.57) uzyskujemy stąd, że

$$(6.86) \quad T^{q_n-l}[T^l y, x] = [T^{q_n} y, T^{q_n-l} x] = \left[y + (\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}), T^{-l} x + (\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}) \right].$$

Z (6.81) mamy $T^{-l} x < |J^n| + (\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n})$, co razem z (6.31) implikuje, że

$$(6.87) \quad T^{-l} x + (\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}) < |J^n| + 2(\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}) = |\Delta_n|.$$

Zatem

$$(6.88) \quad T^{q_n-l}[T^l y, x] = [T^{q_n} y, T^{q_n-l} x] \subset \Delta_n.$$

Załóżmy, że $q_n - l \leq k < 2q_n - l$. Wtedy $0 \leq k - (q_n - l) < q_n$. Stąd, z (6.88) oraz z (6.34) mamy

$$(6.89) \quad T^k[T^l y, x] = T^{k-(q_n-l)}(T^{q_n-l}[T^l y, x]) \subset T^{k-(q_n-l)} \Delta_n \text{ dla } q_n - l \leq k < 2q_n - l.$$

Ponadto z (6.34) każdy zbiór $T^k[T^l y, x]$ jest odcinkiem postaci $[T^{l+k} y, T^k x]$. Wykazaliśmy w szczególności, że $T^{2q_n-l-1}[T^l y, x]$ jest odcinkiem zawartym w $T^{q_n-1} \Delta_n$. Z (6.34) jego obrazem poprzez T jest odcinek $[T^{2q_n} y, T^{2q_n-l} x]$, który nie musi być zawarty w Δ_n . Jednakże z (6.86), (6.88) oraz (6.30), a także z tego, że $T^{-l} x \in [0, |J^n| + (\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n})]$ uzyskujemy

$$\begin{aligned} T^{2q_n-l}[T^l y, x] &= T^{q_n}[T^{q_n} y, T^{q_n-l} x] \\ &= \left[y + 2(\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}), T^{-l} x + 2(\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}) \right] \\ &\subset \left[0, |J^n| + 3(\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}) \right], \end{aligned}$$

co razem z (6.63) daje

$$(6.90) \quad T^{2q_n-l}[T^l y, x] = [T^{2q_n} y, T^{2q_n-l} x] \subset I_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n-m}.$$

Niech $2q_n - l \leq k < 2q_n$. Korzystając z faktu, że $I_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n-m}$ jest podstawą wieży Rochlina o wysokości $s_1^{r_n-m}$, na której piętrach T działa poprzez translację oraz z tego, że $l < s_1^{r_n-m}$ uzyskujemy, że $0 \leq k - (2q_n - l) < s_1^{r_n-m}$, co razem z (6.90) daje, że $T^k[T^l y, x]$ jest odcinkiem oraz

$$(6.91) \quad T^k[T^l y, x] = T^{k-(2q_n-l)}[T^{2q_n} y, T^{2q_n-l} x] \subset T^{k-(2q_n-l)} I_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n-m} \text{ dla } 2q_n - l \leq k < 2q_n.$$

Podsumowując, z (6.85), (6.89) oraz (6.91) wykazaliśmy, że dla dowolnego $k = 0, \dots, 2q_n - 1$ zachodzi (6.84).

Z (6.83) oraz z definicji V_l^n wiemy, że dla dowolnego $k = 0, \dots, q_n - 1$ odcinek $T^k[T^l y, x]$ nie zawiera żadnego z punktów β_1, \dots, β_r . Pozostaje wykazać analogiczny

rezultat dla $k = q_n, \dots, 2q_n - 1$. W tym celu wykażemy, że

$$(6.92) \quad T^{q_n}[T^l y, x] \cap \bigcup_{j=1}^r V_j^r = \emptyset \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ $y > \frac{2r+1}{2r+2}|J^n|$, to z (6.86) i (6.87) mamy

$$T^{q_n-l}[T^l y, x] = [T^{q_n} y, T^{q_n-l} x] \subset \left(\frac{2r+1}{2r+2}|J^n|, |\Delta_n| \right) \subset \Delta_n.$$

Ponadto mamy

$$\left(\frac{2r+1}{2r+2}|J^n|, |\Delta_n| \right) \cap \left(\frac{1}{2r+2}|J^n|, \frac{2r+1}{2r+2}|J^n| \right) = \emptyset.$$

Zatem

$$T^{q_n}[T^l y, x] = T^l(T^{q_n-l}[T^l y, x]) \subset T^l \left(\frac{2r+1}{2r+2}|J^n|, |\Delta_n| \right)$$

oraz z (6.34) mamy

$$T^{q_n}[T^l y, x] \cap \bigcup_{m=0}^{q_n-1} T^m \left(\frac{1}{2r+2}|J^n|, \frac{2r+1}{2r+2}|J^n| \right) = \emptyset.$$

Stąd i z (6.47) otrzymujemy (6.92).

Podsumowując, dla dowolnego $x \in U_n$ oraz dla dowolnego $0 \leq k < 2q_n$, zbiór $T^k[T^l y, x]$ jest odcinkiem, który nie zawiera punktów β_1, \dots, β_r . Ponadto z (6.84) każdy z tych odcinków jest zawarty w piętrze wieży, które z kolei jest zawarte w jednym z odcinków przekładanych przez T . Zatem funkcja f jest funkcją stałą nad odcinkami $T^k[T^l y, x]$ dla $0 \leq k < 2q_n$. W szczególności dla każdego $k = 0, \dots, 2q_n - 1$ mamy $f(T^k(T^l y)) = f(T^k(x))$, a stąd

$$f^{(q_n)}(x) = f^{(q_n)}(T^l y) \text{ oraz } f^{(2q_n)}(x) = f^{(2q_n)}(T^l y),$$

dla każdego $x \in U_n$. Skoro $T^l y \in W_n$, to korzystając z (6.66) otrzymujemy z powyższego, że

$$(6.93) \quad \int_{U_n} |f^{(q_n)}(x) - a_n|^2 dx \leq K^2 \text{ oraz } \int_{U_n} |f^{(2q_n)}(x) - 2a_n|^2 dx \leq K^2.$$

Podsumowując z (6.67), (6.80) oraz (6.93) uzyskaliśmy, że

$$\int_{W_n \cup Z_n \cup U_n} |f^{(q_n)}(x) - a_n|^2 dx \leq 3K^2 \text{ oraz } \int_{W_n \cup Z_n \cup U_n} |f^{(2q_n)}(x) - 2a_n|^2 dx \leq 3K^2,$$

a zatem ciąg zbiorów $\{W_n \cup Z_n \cup U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ razem z ciągami $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ oraz $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ spełnia warunki (4.15) i (4.16).

Miara graniczna i warunek (4.17). Z warunków (4.15) i (4.16) oraz z twierdzenia Prochorowa otrzymujemy, że istnieje miara $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ taka, że przechodząc ewentualnie do podciągu, zachodzi

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} (f^{(2q_n)}, f^{(q_n)})_* \text{Leb}_{W_n \cup Z_n \cup U_n} \text{ słabo w } \mathcal{P}(\mathbb{R}^2).$$

Spełniony jest zatem warunek (4.17).

Punkty $T^i x$ oraz $T^{q_n+i} x$ leżą na tym samym piętrze wieży. Wykażemy teraz, że dla każdego $x \in W_n \cup Z_n \cup U_n$ mamy, że

$$(6.94)$$

dla $0 \leq i < q_n$, punkty $T^i x$ i $T^{i+q_n} x$ leżą na tym samym piętrze jednej z wież

$$\{T^j \Delta_n, 0 \leq j < q_n\} \text{ lub } \{T^j \Xi_n, 0 \leq j < s_d^{r_n}\} \text{ lub } \{T^j I_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n-m}, 0 \leq j < s_1^{r_n-m}\}.$$

Z (6.39) otrzymujemy, że dla każdego $x \in W_n$ zachodzi $T^i x, T^{q_n+i} x \in T^l \Delta_n$ dla pewnego $0 \leq l < q_n - 1$, co daje (6.94) dla $x \in W_n$.

Niech $x \in Z_n$, czyli $x \in T^l(\Xi_n \setminus T^{s_1^{r_n}} \Delta_n)$ dla pewnego $l = 0, \dots, s_d^{r_n} - 1$, a w szczególności $x \in T^l \Xi_n$. Ze względu na (6.76) dla $k = q_n + i$, a także (6.29) uzyskujemy, że dla $0 \leq i < s_d^{r_n} - l$ mamy $T^i x \in T^{i+l} \Xi_n$, $T^{q_n+i} x \in T^{(q_n+i)-(s_d^{r_n}-l)} \Delta_n \subset T^{i+l} \Xi_n$ oraz $i + l < s_d^{r_n}$. Zatem

$$(6.95) \quad \begin{aligned} &T^i x \text{ oraz } T^{q_n+i} x \text{ leżą w tym samym piętrze wieży} \\ &\{T^j \Xi_n, 0 \leq j < s_d^{r_n}\} \text{ dla } 0 \leq i < s_d^{r_n} - l. \end{aligned}$$

Z kolei dla $s_d^{r_n} - l \leq i < q_n$, korzystając z (6.76) dla $k = i$ oraz (6.78) dla $k = q_n + i$ uzyskujemy, że $T^i x \in T^{i-(s_d^{r_n}-l)} \Delta_n$, $T^{q_n+i} x \in T^{i-(s_d^{r_n}-l)} \Delta_n$ oraz $0 \leq i - (s_d^{r_n} - l) < q_n$. Zatem

$$(6.96) \quad \begin{aligned} &T^i x \text{ oraz } T^{q_n+i} x \text{ leżą w tym samym piętrze wieży} \\ &\{T^j \Delta_n, 0 \leq j < q_n\} \text{ dla } s_d^{r_n} - l \leq i < q_n. \end{aligned}$$

Zatem z (6.95) oraz (6.96) uzyskujemy (6.94) dla $x \in Z_n$.

Niech $x \in U_n$, czyli $x \in T^l[|J^n|, |J^n| + \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}]$ dla pewnego $l = 0, \dots, s_1^{r_n-m} - 1$, a w szczególności $x \in T^l \Delta_n$, a z (6.63) mamy także $x \in T^l I_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n-m}$. Ze względu na (6.89) dla $k = q_n + i$, uzyskujemy, że dla $0 \leq i < q_n - l$ mamy $T^i x \in T^{i+l} \Delta_n$, $T^{q_n+i} x \in T^{i+l} \Delta_n$ oraz $0 \leq i + l < q_n$. Zatem

$$(6.97) \quad \begin{aligned} &T^i x \text{ oraz } T^{q_n+i} x \text{ leżą w tym samym piętrze wieży} \\ &\{T^j \Delta_n, 0 \leq j < q_n\} \text{ dla } 0 \leq i < q_n - l. \end{aligned}$$

Z kolei dla $q_n - l \leq i < q_n$, korzystając z (6.89) dla $k = i$ oraz (6.91) dla $k = i + q_n$ uzyskujemy, że $T^i x \in T^{i-(q_n-l)} \Delta_n$ oraz $T^{q_n+i} x \in T^{i-(q_n-l)} I_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n-m}$. Skoro $0 \leq l < s_1^{r_n-m}$, to $0 \leq i - (q_n - l) < s_1^{r_n-m}$. Stąd oraz z tego, że $\Delta_n \subset I^{r_n} \subset I_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n-m}$ uzyskujemy

$$(6.98) \quad \begin{aligned} &T^i x \text{ oraz } T^{q_n+i} x \text{ leżą w tym samym piętrze wieży} \\ &\{T^j I_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n-m}, 0 \leq j < s_1^{r_n-m}\} \text{ dla } q_n - l \leq i < q_n. \end{aligned}$$

Zatem z (6.97) oraz (6.98) uzyskujemy (6.94) dla $x \in U_n$. Podsumowując, własność (6.94) jest spełniona dla każdego $x \in W_n \cup Z_n \cup U_n$.

Postać połączenia granicznego. Dla dowolnego $x \in W_n \cup Z_n \cup U_n$ oraz $i = 0, \dots, q_n - 1$, ze względu na (6.41), (6.54) oraz (6.57) zbiór $(T^i x, T^{q_n+i} x]$ jest odcinkiem długości $\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}$. Ponadto, ze względu na (6.94) nie zawiera on punktów nieciągłości przekładania T . Skoro, ze względu na (6.43), odległości pomiędzy punktami β_l , $l = 1, \dots, r$ są większe niż $\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}$, to przedział $(T^i x, T^{q_n+i} x]$ może zawierać co najwyżej jeden punkt β_l . Stąd

$$\beta_l \in (T^i x, T^{q_n+i} x] \implies f(T^{q_n+i} x) - f(T^i x) = -d_l,$$

a ponadto

$$\beta_l \in (T^i x, T^{q_n+i} x] \iff x \in T^{-i}[\beta_l - (\lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(d)}^{r_n} - \lambda_{\hat{\pi}_0^{-1}(1)}^{r_n}), \beta_l).$$

Jeśli $(T^i x, T^{q_n+i} x]$ nie zawiera żadnych punktów nieciągłości β_l , $l = 1, \dots, r$, to $f(T^{q_n+i} x) - f(T^i x) = 0$. Skoro $f^{(q_n)}(T^{q_n} x) - f^{(q_n)}(x) = \sum_{i=0}^{q_n-1} (f(T^{q_n+i} x) - f(T^i x))$,

to z definicji zbiorów $V_l^n \subset W_n \cup Z_n \cup U_n$ (patrz (6.44)), dla każdego $x \in W_n \cup Z_n \cup U_n$ mamy

$$f^{(q_n)}(T^{q_n}x) - f^{(q_n)}(x) = \begin{cases} -d_l, & \text{gdy } x \in V_l^n \text{ dla pewnego } l = 1, \dots, r \\ 0, & \text{gdy } x \in W_n \cup Z_n \cup U_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^r V_i^n\right). \end{cases}$$

Stąd, z (6.64) oraz z (6.65) wynika, że $\xi_* P = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(f^{(q_n)} \circ T^{q_n} - f^{(q_n)} \right)_* Leb_{W_n \cup Z_n \cup U_n}$ (patrz (4.19)) jest miarą dyskretną z r niezerowymi atomami w punktach d_l dla $l = 1, \dots, r$, których całkowita miara wynosi $\frac{\Gamma}{\hat{\alpha}} > \frac{1-\hat{\alpha}}{\hat{\alpha}}$. Skoro $d_j \neq -d_k$ dla $1 \leq j < k \leq r$, warunek (4.18) jest spełniony dla zbioru $B = \{-d_1, \dots, -d_r\}$ oraz $\alpha = \hat{\alpha}$. Jako, że liczby d_1, \dots, d_r są wymiernie niezależne, to z lematu 4.7 potok specjalny nad $T_{\pi, \lambda}$ pod funkcją f jest słabo mieszejący. Zatem stosując twierdzenie 4.5, uzyskujemy rozłączność potoku specjalnego nad przekładaniem $T_{\pi, \lambda}$ pod funkcją dachową f ze swoim potokiem odwrotnym dla dowolnej pary $(\pi, \lambda) \in \Upsilon$. \square

Miary na powierzchniach

Twierdzenie 6.7 jest głównym narzędziem, które posłuży do udowodnienia tego, że zbiór struktur translacyjnych, dla których pionowy potok translacyjny jest słabo mieszający i rozłączny ze swoim odwrotnym, jest zbiorem gęstym w każdej niehipereliptycznej składowej spójności przestrzeni moduli \mathcal{M} . Pozostała część rozprawy jest poświęcona dowodowi faktu, że ów zbiór jest typu G_δ w każdej składowej spójności. Jak wspomnieliśmy we wstępie, będziemy korzystać z rezultatu Danilenki i Ryzikowa (patrz tw. 9.1 w rozdziale 9), stwierdzającego, że potoki słabo mieszające i rozłączne ze swoimi odwrotnymi stanowią zbiór typu G_δ w przestrzeni wszystkich potoków zachowujących miarę. Udowodnili także, że stanowią one również zbiór gęsty, ale dla naszych rozważań ten rezultat jest nieprzydatny. Aby wykorzystać wynik Danilenki i Ryzikowa, w rozdziale 8 udowodnimy twierdzenie 8.4, które stwierdza, że wokół każdego punktu przestrzeni moduli w sposób ciągły lokalnie wkłada się w przestrzeń potoków zachowujących miarę. Konsekwencją tego jest fakt, że zbiór powierzchni translacyjnych, dla których pionowy potok translacyjny jest słabo mieszający i rozłączny ze swoim odwrotnym jest zbiorem typu G_δ . Aby dowieść twierdzenia 8.4, pokażemy najpierw, że dla ustalonej struktury translacyjnej $\zeta \in \mathcal{M}$ oraz miary $h d\lambda_\zeta$ absolutnie ciągłej względem miary Lebesgue'a λ_ζ takiej, że jej gęstość h jest ograniczona i dostatecznie bliska funkcji stałej równej 1 w L^1 , istnieje algorytm, który pozwala skonstruować homeomorfizm powierzchni M , zależny w sposób ciągły od h taki, że obrazem $h d\lambda_\zeta$ poprzez ten homeomorfizm jest miara λ_ζ . Jest to główny rezultat tego rozdziału (patrz tw. 7.10). Wspomniana konstrukcja jest częściowo inspirowana wynikami Mosera (patrz [26]), a także metodami zastosowanymi w pracy [16], w której to autorzy podają alternatywny dowód twierdzenia Oxtoby'ego-Ulama.

Wymieniony wcześniej homeomorfizm konstruujemy poprzez przybliżanie go odwzorowaniami kawałkami afinicznymi. Przypomnijmy, że odwzorowaniem afinicznym $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ nazywamy przekształcenie, które przekształca proste w proste. Zachowuje ono również stosunki długości odcinków o tym samym kierunku. Każde takie odwzorowanie wyraża się wzorem $G(x) = Ax + v$, gdzie A jest macierzą kwadratową wymiaru 2, natomiast $v \in \mathbb{R}^2$. Macierz A będącą częścią liniową odwzorowania G oznaczamy przez $\text{lin}(G)$. Zauważmy, że $\text{lin}(G) = DG$, gdzie D oznacza pochodną. Ponadto dla każdej rzeczywistej dwuwymiarowej macierzy kwadratowej $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ jej norma wyraża się wzorem

$$(7.1) \quad \|A\| := \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 - 4(\det(A))^2}}{2}}.$$

Norma ta jest w szczególności stałą Lipschitza dla dowolnego odwzorowania afinicznego, dla którego A jest częścią liniową. Przypomnijmy także, że jeśli $t \in [0, 1]$, to

$$G(tx + (1-t)y) = tG(x) + (1-t)G(y) \text{ dla } x, y \in \mathbb{R}^2.$$

Własność ta implikuje poniższy oczywisty rezultat.

LEMAT 7.1. *Niech $x, y \in \mathbb{R}^2$ będą punktami na płaszczyźnie oraz niech $[x, y]$ będzie odcinkiem o końcach w x i y . Niech H_1, H_2 będą dwoma afinicznymi odwzorowaniami na \mathbb{R}^2 . Jeżeli $H_1(x) = H_2(x)$ i $H_1(y) = H_2(y)$, to $H_1|_{[x,y]} = H_2|_{[x,y]}$. Ponadto dla wszystkich niestwierdzonych trójek $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^2$ oraz $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}^2$, istnieje dokładnie jedno afiniczne odwzorowanie H , takie że $H(x_i) = y_i$ dla $i = 1, 2, 3$.*

Główna konstrukcja. Przez cały ten rozdział będziemy korzystać z następującej konstrukcji. Niech V będzie trójkątem w \mathbb{R}^2 z wierzchołkami w punktach $(0, a), (a, 0), (0, -a)$, gdzie $0 < a < 1$. Niech V_1 i V_2 będą trójkątami o wierzchołkach odpowiednio w $(0, a), (a, 0), (0, 0)$ oraz $(0, 0), (a, 0), (0, -a)$. Ustalmy $0 \leq h < \frac{1}{2}$ oraz $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$. Niech $y = y(h, \epsilon) := (\epsilon a(1 - h), h a)$. Rozważmy trójkąty dane przez następujące trójki wierzchołków:

- $C_1 = C_1(h, \epsilon)$ dane przez $\{(0, 0), (0, a), y(h, \epsilon)\}$;
- $C_2 = C_2(h, \epsilon)$ dane przez $\{(a, 0), (0, a), y(h, \epsilon)\}$;
- $C_3 = C_3(h, \epsilon)$ dane przez $\{(0, 0), (\epsilon a, 0), y(h, \epsilon)\}$;
- $C_4 = C_4(h, \epsilon)$ dane przez $\{(a, 0), (\epsilon a, 0), y(h, \epsilon)\}$;
- $C_5 = C_5(h, \epsilon)$ dane przez $\{(0, 0), (0, -a), (\epsilon a, 0)\}$;
- $C_6 = C_6(h, \epsilon)$ dane przez $\{(a, 0), (0, -a), (\epsilon a, 0)\}$.

Niech $\hat{h} := \frac{h}{h+1} \geq 0$. Rozważmy punkt $\hat{y} = \hat{y}(h, \epsilon) := (\epsilon a(1 - \hat{h}), -\hat{h} a)$. Rozważmy także następujące trójkąty:

- $\hat{C}_1 = \hat{C}_1(h, \epsilon)$ dane przez $\{(0, 0), (0, a), (\epsilon a, 0)\}$;
- $\hat{C}_2 = \hat{C}_2(h, \epsilon)$ dane przez $\{(a, 0), (0, a), (\epsilon a, 0)\}$;
- $\hat{C}_3 = \hat{C}_3(h, \epsilon)$ dane przez $\{(0, 0), (\epsilon a, 0), \hat{y}(h, \epsilon)\}$;
- $\hat{C}_4 = \hat{C}_4(h, \epsilon)$ dane przez $\{(a, 0), (\epsilon a, 0), \hat{y}(h, \epsilon)\}$;
- $\hat{C}_5 = \hat{C}_5(h, \epsilon)$ dane przez $\{(0, 0), (0, -a), \hat{y}(h, \epsilon)\}$;
- $\hat{C}_6 = \hat{C}_6(h, \epsilon)$ dane przez $\{(a, 0), (0, -a), \hat{y}(h, \epsilon)\}$.

Z definicji h i \hat{h} mamy

$$(7.2) \quad \begin{aligned} \frac{Leb(C_1)}{Leb(\hat{C}_1)} &= \frac{Leb(C_2)}{Leb(\hat{C}_2)} = 1 - h \quad \text{oraz} \\ \frac{Leb(C_3)}{Leb(\hat{C}_3)} &= \frac{Leb(C_4)}{Leb(\hat{C}_4)} = \frac{Leb(C_5)}{Leb(\hat{C}_5)} = \frac{Leb(C_6)}{Leb(\hat{C}_6)} = 1 + h. \end{aligned}$$

Rzeczywiście,

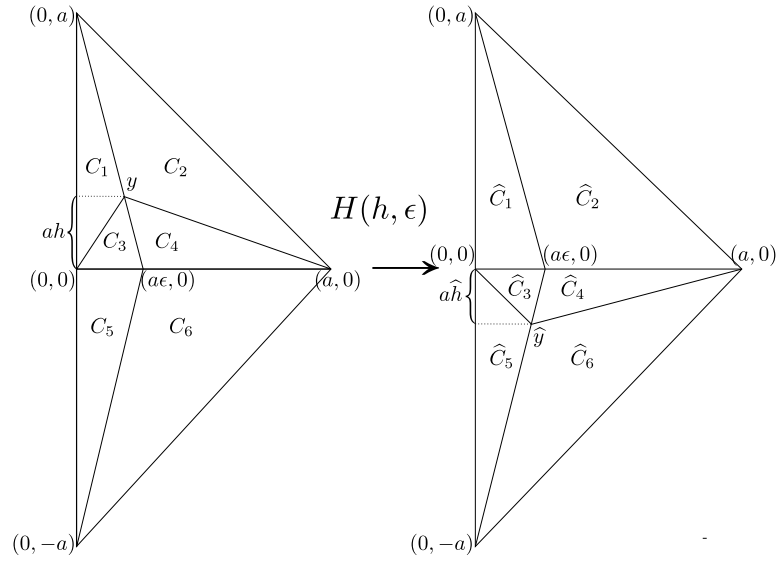
$$\frac{Leb(C_1)}{Leb(\hat{C}_1)} = \frac{Leb(C_2)}{Leb(\hat{C}_2)} = \frac{|[(0, a), y(h, \epsilon)]|}{|[(0, a), (0, \epsilon a)]|} = \frac{|[(0, a), (0, ah)]|}{|[(0, a), (0, 0)]|} = 1 - h.$$

Ponadto

$$\frac{Leb(C_3)}{Leb(\hat{C}_3)} = \frac{Leb(C_4)}{Leb(\hat{C}_4)} = \frac{|[(0, 0), (0, ah)]|}{|[(0, 0), (0, -ah)]|} = 1 + h.$$

W końcu

$$\frac{Leb(C_5)}{Leb(\hat{C}_5)} = \frac{Leb(C_6)}{Leb(\hat{C}_6)} = \frac{|[(0, -a), (0, \epsilon a)]|}{|[(0, -a), \hat{y}(h, \epsilon)]|} = \frac{|[(0, -a), (0, 0)]|}{|[(0, a), (0, -ah)]|} = \frac{1}{1 + \hat{h}} = 1 + h.$$


 RYSUNEK 1. Działanie $H(h, \epsilon)$.

Zdefiniujmy $H(h, \epsilon) : V \rightarrow V$ jako kawałkami afiniczny homeomorfizm taki, że

- (7.3) (i) $H(h, \epsilon)(C_i) = \hat{C}_i$, $H(h, \epsilon)|_{C_i}$ jest afiniczny dla $i = 1, \dots, 6$;
 (ii) punkty $(0, 0)$, $(0, a)$, $(0, -a)$, $(a, 0)$ są punktami stałymi dla $H(h, \epsilon)$,
 (iii) $H(h, \epsilon)(y) = (a\epsilon, 0)$ oraz $H(h, \epsilon)(a\epsilon, 0) = \hat{y}$.

Zauważmy, że z lematu 7.1 wynika, że homeomorfizm $H(h, \epsilon)$ jest jednoznacznie zdefiniowany na całym V oraz

$$(7.4) \quad H(h, \epsilon)|_{\partial V} = Id|_{\partial V}.$$

Co więcej

$$\begin{aligned} \text{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_1})(0, a) &= (0, a); \quad \text{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_1})(\epsilon a(1-h), ha) = (0, \epsilon a), \\ \text{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_2})(-a, a) &= (-a, a); \\ \text{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_2})(\epsilon(1-h) - 1)a, ha) &= (0, -(1-\epsilon)a), \\ \text{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_3})(\epsilon a(1-h), ha) &= (0, \epsilon a); \\ \text{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_3})(0, \epsilon a) &= (\epsilon a(1-\hat{h}), -\hat{h}a), \\ \text{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_4})(\epsilon - \epsilon h - 1)a, ha) &= (0, -(1-\epsilon)a); \\ \text{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_4})(0, -(1-\epsilon)a) &= ((\epsilon(1-\hat{h}) - 1)a, -\hat{h}a), \\ \text{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_5})(0, \epsilon a) &= (\epsilon a(1-\hat{h}), -\hat{h}a); \quad \text{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_5})(0, -a) = (0, -a), \\ \text{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_6})(0, -(1-\epsilon)a) &= ((\epsilon(1-\hat{h}) - 1)a, -\hat{h}a); \\ \text{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_6})(-a, -a) &= (-a, -a). \end{aligned}$$

Stąd

$$\text{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_1}) := \begin{bmatrix} 1 + \frac{h}{1-h} & 0 \\ \frac{-h}{\epsilon(1-h)} & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned}\operatorname{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_2}) &:= \begin{bmatrix} 1 - \frac{\epsilon h}{(1-h)(1-\epsilon)} & \frac{-\epsilon h}{(1-h)(1-\epsilon)} \\ \frac{h}{(1-h)(1-\epsilon)} & 1 + \frac{h}{(1-h)(1-\epsilon)} \end{bmatrix}; \\ \operatorname{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_3}) &:= \begin{bmatrix} 1 - \frac{h}{1+h} & \frac{2\epsilon}{1+h} \\ \frac{-h}{\epsilon(1+h)} & 1 - \frac{2h}{1+h} \end{bmatrix}; \\ \operatorname{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_4}) &:= \begin{bmatrix} 1 + \frac{\epsilon h}{(1+h)(1-\epsilon)} & \frac{\epsilon(2+h-2\epsilon)}{(1+h)(1-\epsilon)} \\ \frac{h}{(1+h)(1-\epsilon)} & 1 - \frac{h(1-2\epsilon)}{(1+h)(1-\epsilon)} \end{bmatrix}; \\ \operatorname{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_5}) &:= \begin{bmatrix} 1 - \frac{h}{1+h} & 0 \\ \frac{-h}{\epsilon(1+h)} & 1 \end{bmatrix}; \\ \operatorname{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_6}) &:= \begin{bmatrix} 1 + \frac{\epsilon h}{(1+h)(1-\epsilon)} & \frac{-h\epsilon}{(1+h)(1-\epsilon)} \\ \frac{h}{(1+h)(1-\epsilon)} & 1 - \frac{h}{(1+h)(1-\epsilon)} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Z (7.2) mamy, że

(7.5)

$$\det(\operatorname{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_1})) = \det(\operatorname{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_2})) = \frac{\operatorname{Leb}(\hat{C}_1)}{\operatorname{Leb}(C_1)} = \frac{\operatorname{Leb}(\hat{C}_2)}{\operatorname{Leb}(C_2)} = \frac{1}{1-h} \geq 1$$

oraz podobnie

$$\begin{aligned}(7.6) \quad \det(\operatorname{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_3})) &= \det(\operatorname{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_4})) \\ &= \det(\operatorname{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_5})) = \det(\operatorname{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_6})) = \frac{1}{1+h} \leq 1.\end{aligned}$$

Warto zauważyć, że odwzorowania afiniczne $H(h, \epsilon)|_{C_1}$, $H(h, \epsilon)|_{C_3}$ oraz $H(h, \epsilon)|_{C_5}$ mają punkt stały w $(0, 0)$, natomiast $H(h, \epsilon)|_{C_2}$, $H(h, \epsilon)|_{C_4}$ i $H(h, \epsilon)|_{C_6}$ w $(a, 0)$.

Możemy również zdefiniować homeomorfizm $H(h, \epsilon) : V \rightarrow V$ dla $-\frac{1}{2} < h \leq 0$. Niech $J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie odbiciem wzdłuż osi odciętych. Zauważmy, że $JV = V$, $JV_1 = V_2$ oraz $JV_2 = V_1$. Zdefiniujmy

$$\hat{h} := \frac{h}{1+|h|}, \quad C_i(h, \epsilon) := J(C_i(-h, \epsilon)), \quad \hat{C}_i(h, \epsilon) := J(\hat{C}_i(-h, \epsilon))$$

oraz

$$(7.7) \quad H(h, \epsilon) := J \circ H(-h, \epsilon) \circ J.$$

Wówczas dla $i = 1, \dots, 6$ mamy

$$\operatorname{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_i}) = J \circ \operatorname{lin}(H(-h, \epsilon)|_{C_i}) \circ J.$$

Skoro J jest izometrią, to z (7.5) otrzymujemy również

$$\det(\operatorname{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_1})) = \det(\operatorname{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_2})) = \frac{1}{1+h} \geq 1.$$

Podobnie z (7.6) wynika, że

$$\begin{aligned}\det(\operatorname{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_3})) &= \det(\operatorname{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_4})) \\ &= \det(\operatorname{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_5})) = \det(\operatorname{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_6})) = \frac{1}{1-h} \leq 1.\end{aligned}$$

Zatem w ogólności, dla $-\frac{1}{2} < h < \frac{1}{2}$ mamy

$$(7.8) \quad \det(\operatorname{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_1})) = \det(\operatorname{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_2})) = \frac{1}{1-|h|} \geq 1,$$

oraz

$$(7.9) \quad \begin{aligned} \det(\operatorname{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_3})) &= \det(\operatorname{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_4})) \\ &= \det(\operatorname{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_5})) = \det(\operatorname{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_6})) = \frac{1}{1 + |h|} \leq 1. \end{aligned}$$

UWAGA 7.2. Z (7.7) otrzymujemy, że dla każdego $-\frac{1}{2} < h < \frac{1}{2}$ zachodzi

$$\operatorname{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_1}) := \begin{bmatrix} 1 + \frac{|h|}{1-|h|} & 0 \\ \frac{-h}{\epsilon(1+|h|)} & 1 \end{bmatrix};$$

$$\operatorname{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_2}) := \begin{bmatrix} 1 - \frac{\epsilon|h|}{(1-|h|)(1-\epsilon)} & \frac{-\epsilon h}{(1-|h|)(1-\epsilon)} \\ \frac{h}{(1-|h|)(1-\epsilon)} & 1 + \frac{|h|}{(1-|h|)(1-\epsilon)} \end{bmatrix};$$

$$\operatorname{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_3}) := \begin{bmatrix} 1 - \frac{|h|}{1+|h|} & \frac{\operatorname{sgn}(h) \cdot 2\epsilon}{1+|h|} \\ \frac{-h}{\epsilon(1+|h|)} & 1 - \frac{2|h|}{1+|h|} \end{bmatrix};$$

$$\operatorname{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_4}) := \begin{bmatrix} 1 + \frac{\epsilon|h|}{(1+|h|)(1-\epsilon)} & \frac{\operatorname{sgn}(h)\epsilon(2+|h|-2\epsilon)}{(1+|h|)(1-\epsilon)} \\ \frac{h}{(1+|h|)(1-\epsilon)} & 1 - \frac{|h|(1-2\epsilon)}{(1+|h|)(1-\epsilon)} \end{bmatrix};$$

$$\operatorname{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_5}) := \begin{bmatrix} 1 - \frac{|h|}{1+|h|} & 0 \\ \frac{-h}{\epsilon(1+|h|)} & 1 \end{bmatrix};$$

$$\operatorname{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_6}) := \begin{bmatrix} 1 + \frac{\epsilon|h|}{(1+|h|)(1-\epsilon)} & \frac{-h\epsilon}{(1+|h|)(1-\epsilon)} \\ \frac{h}{(1+|h|)(1-\epsilon)} & 1 - \frac{|h|}{(1+|h|)(1-\epsilon)} \end{bmatrix}.$$

Wtedy mamy także następujące postaci macierzy odwrotnych

$$\operatorname{lin}(H^{-1}(h, \epsilon)|_{\hat{C}_1}) := \begin{bmatrix} 1 - |h| & 0 \\ \frac{h}{\epsilon} & 1 \end{bmatrix}; \quad \operatorname{lin}(H^{-1}(h, \epsilon)|_{\hat{C}_2}) := \begin{bmatrix} 1 + \frac{\epsilon|h|}{1-\epsilon} & \frac{\epsilon h}{1-\epsilon} \\ \frac{-h}{1-\epsilon} & 1 - \frac{|h|}{1-\epsilon} \end{bmatrix};$$

$$\operatorname{lin}(H^{-1}(h, \epsilon)|_{\hat{C}_3}) := \begin{bmatrix} 1 - |h| & -\operatorname{sgn}(h) \cdot 2\epsilon \\ h & 1 \end{bmatrix};$$

$$\operatorname{lin}(H^{-1}(h, \epsilon)|_{\hat{C}_4}) := \begin{bmatrix} 1 + \frac{\epsilon|h|}{1-\epsilon} & \frac{-\operatorname{sgn}(h)\epsilon(2+|h|-2\epsilon)}{1-\epsilon} \\ \frac{-h}{1-\epsilon} & 1 + \frac{\epsilon|h|}{1-\epsilon} \end{bmatrix};$$

$$\operatorname{lin}(H^{-1}(h, \epsilon)|_{\hat{C}_5}) := \begin{bmatrix} 1 + |h| & 0 \\ h & 1 \end{bmatrix}; \quad \operatorname{lin}(H^{-1}(h, \epsilon)|_{\hat{C}_6}) := \begin{bmatrix} 1 - \frac{\epsilon|h|}{1-\epsilon} & \frac{h\epsilon}{1-\epsilon} \\ \frac{-h}{1-\epsilon} & 1 + \frac{|h|}{1-\epsilon} \end{bmatrix}.$$

LEMAT 7.3. Dla dowolnych $h_1, h_2 \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ będących tego samego znaku oraz $i = 1, \dots, 6$ zachodzi

$$(7.10) \quad \|\operatorname{lin}(H(h_1, \epsilon)|_{C_i(h_1, \epsilon)}) - \operatorname{lin}(H(h_2, \epsilon)|_{C_i(h_2, \epsilon)})\| \leq \frac{16}{\epsilon} |h_1 - h_2|$$

oraz

$$(7.11) \quad \|\operatorname{lin}(H^{-1}(h_1, \epsilon)|_{\hat{C}_i(h_1, \epsilon)}) - \operatorname{lin}(H^{-1}(h_2, \epsilon)|_{\hat{C}_i(h_2, \epsilon)})\| \leq \frac{16}{\epsilon} |h_1 - h_2|.$$

DOWÓD. Z (7.1) wynika, że

$$(7.12) \quad \left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\| \leq |a| + |b| + |c| + |d|.$$

Dla ustalonego $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ (tj. $\frac{1}{\epsilon} > 2$) zauważmy, że wszystkie współczynniki macierzy $\text{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_i})$ dla $i = 1, \dots, 6$, za wyjątkiem $\text{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_4})_{12}$, przyjmują jedną z postaci: $1 + C \frac{|h|}{1-|h|}$, $C \frac{|h|}{1-|h|}$, $1 + C \frac{|h|}{1+|h|}$, $C \frac{|h|}{1+|h|}$ lub $C \frac{1}{1+|h|}$, gdzie $|C| < \frac{1}{\epsilon}$. Natomiast $\text{lin}(H(h, \epsilon)|_{C_4})_{12}$ można przedstawić w postaci $C \frac{1}{1+|h|} + D \frac{|h|}{1+|h|}$, gdzie $|C|, |D| < 2 < \frac{1}{\epsilon}$. Warto zaznaczyć, że wartości stałych C i D zależą wyłącznie od znaku liczby h , lecz nie zależą od modułu h . Zauważmy ponadto, że dla dowolnych h_1, h_2 mamy

$$\left| \frac{|h_1|}{1-|h_1|} - \frac{|h_2|}{1-|h_2|} \right| = \left| \frac{|h_1| - |h_2|}{(1-|h_1|)(1-|h_2|)} \right| \leq 4|h_1 - h_2|,$$

$$\left| \frac{|h_1|}{1+|h_1|} - \frac{|h_2|}{1+|h_2|} \right| = \left| \frac{|h_1| - |h_2|}{(1+|h_1|)(1+|h_2|)} \right| \leq |h_1 - h_2|,$$

$$\left| \frac{1}{1-|h_1|} - \frac{1}{1-|h_2|} \right| = \left| \frac{|h_2| - |h_1|}{(1-|h_1|)(1-|h_2|)} \right| \leq 4|h_1 - h_2|$$

oraz

$$\left| \frac{1}{1+|h_1|} - \frac{1}{1+|h_2|} \right| = \left| \frac{|h_2| - |h_1|}{(1+|h_1|)(1+|h_2|)} \right| \leq |h_1 - h_2|.$$

Stąd oraz z (7.12), jeśli h_1, h_2 są tego samego znaku, to dla $i = 1, \dots, 6$ uzyskujemy

$$\left\| \text{lin}(H(h_1, \epsilon)|_{C_i(h_1, \epsilon)}) - \text{lin}(H(h_2, \epsilon)|_{C_i(h_2, \epsilon)}) \right\| \leq \frac{16}{\epsilon} |h_1 - h_2|,$$

co dowodzi (7.10) Podobnie zauważmy, że wszystkie współczynniki macierzy $\text{lin}(H^{-1}(h, \epsilon)|_{\hat{C}_i})$ dla $i = 1, \dots, 6$, za wyjątkiem $\text{lin}(H^{-1}(h, \epsilon)|_{\hat{C}_4})_{12}$, są stałe, postaci $1 + C|h|$ lub $C|h|$, gdzie $|C| < \frac{1}{\epsilon}$. Natomiast $\text{lin}(H^{-1}(h, \epsilon)|_{\hat{C}_4})_{12}$ jest postaci $C + D|h|$, gdzie $|C|, |D| < \frac{1}{\epsilon}$. Podobnie jak wcześniej, stałe C i D zależą wyłącznie od znaku h , ale nie zależą od modułu h . Zatem ponownie korzystając z (7.12) uzyskujemy, że dla $i = 1, \dots, 6$ mamy

$$\left\| \text{lin}(H^{-1}(h_1, \epsilon)|_{\hat{C}_i(h_1, \epsilon)}) - \text{lin}(H^{-1}(h_2, \epsilon)|_{\hat{C}_i(h_2, \epsilon)}) \right\| \leq \frac{16}{\epsilon} |h_1 - h_2|,$$

o ile h_1 i h_2 są tego samego znaku. To kończy dowód (7.11), a zarazem całego lematu. \square

Na przestrzeni homeomorfizmów $\text{Hom}(X)$ dowolnej zwartej przestrzeni metrycznej (X, d) , będziemy rozważać standardową metrykę

$$d_{\text{Hom}}(H, G) = \max \left\{ \sup_{x \in X} d(H(x), G(x)), \sup_{x \in X} d(H^{-1}(x), G^{-1}(x)) \right\}.$$

LEMAT 7.4. Dla ustalonego $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ oraz dla $h_1, h_2 \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ mamy

$$(7.13) \quad d_{\text{Hom}}(H(h_1, \epsilon), H(h_2, \epsilon)) \leq \frac{32a}{\epsilon} |h_2 - h_1|.$$

DOWÓD. Najpierw udowodnimy, że

$$(7.14) \quad \|H(h_1, \epsilon)(x) - H(h_2, \epsilon)(x)\| \leq \frac{32a}{\epsilon} |h_2 - h_1|,$$

dla każdego $x \in V$.

Liczby h_1 i h_2 są tych samych znaków Załóżmy, że h_1 i h_2 są liczbami nieujemnymi oraz $h_1 \geq h_2$. Rozważmy trójkąt W_1 z wierzchołkami w punktach $(0, 0), y(h_1, \epsilon), y(h_2, \epsilon)$ oraz trójkąt W_2 z wierzchołkami $(a, 0), y(h_1, \epsilon), y(h_2, \epsilon)$. Zauważmy, że jeżeli $x \in V \setminus (W_1 \cup W_2)$, to $x \in C_i(h_1, \epsilon) \Leftrightarrow x \in C_i(h_2, \epsilon)$. Z tego wynika, że zarówno $H(h_1, \epsilon)$, jak i $H(h_2, \epsilon)$ działają na x poprzez odwzorowania afiniczne, których części liniowe mają tę samą postać. Stąd i z faktu, że dla ustalonego $i = 1, \dots, 6$ odwzorowania $H(h_1, \epsilon)|_{C_i(h_1, \epsilon)}$ oraz $H(h_2, \epsilon)|_{C_i(h_2, \epsilon)}$ mają te same punkty stałe, uzyskujemy

$$H(h_1, \epsilon)(x) - H(h_2, \epsilon)(x) = \text{lin}(H(h_1, \epsilon)|_{C_i(h_1, \epsilon)})x - \text{lin}(H(h_2, \epsilon)|_{C_i(h_2, \epsilon)})x,$$

dla każdego $x \in V \setminus (W_1 \cup W_2)$. Zauważmy, że z (7.10) dla każdego $i = 1, \dots, 6$, mamy

$$\|\text{lin}(H(h_1, \epsilon)|_{C_i(h_1, \epsilon)}) - \text{lin}(H(h_2, \epsilon)|_{C_i(h_2, \epsilon)})\| \leq \frac{16}{\epsilon}(h_1 - h_2).$$

Z tego wynika, że

$$\sup_{x \in V \setminus (W_1 \cup W_2)} \|H(h_1, \epsilon)(x) - H(h_2, \epsilon)(x)\| \leq \frac{16}{\epsilon}(h_1 - h_2)\|x\| \leq \frac{32a}{\epsilon}(h_1 - h_2).$$

Następnie, zauważmy że $W_1 = C_3(h_1, \epsilon) \cap C_1(h_2, \epsilon)$ oraz $W_2 = C_4(h_1, \epsilon) \cap C_2(h_2, \epsilon)$. Udowodnimy teraz, że dla każdego $x \in W_1 \cup W_2$ mamy $\|H(h_1, \epsilon)(x) - H(h_2, \epsilon)(x)\| \leq 6a(h_1 - h_2)$. Przypuśćmy, że $x \in W_1$. Dowód dla $x \in W_2$ jest analogiczny. Rozważmy odcinek $I_x \subset W_1$, którego końce leżą na odcinkach $[(0, 0), y(h_1, \epsilon)]$ oraz $[(0, 0), y(h_2, \epsilon)]$, taki że $x \in I_x$ oraz jest on równoległy do odcinka $[y(h_1, \epsilon), y(h_2, \epsilon)]$. Wtedy

$$(7.15) \quad |I_x| \leq \|y(h_1, \epsilon) - y(h_2, \epsilon)\| = a\sqrt{1 + \epsilon^2}(h_1 - h_2) \leq 2a(h_1 - h_2).$$

Zauważmy, że I_x dzieli odcinki $[(0, 0), y(h_1, \epsilon)]$ oraz $[(0, 0), y(h_2, \epsilon)]$ w tych samych proporcjach. Ponieważ $H(h_1, \epsilon)$ oraz $H(h_2, \epsilon)$ działają na W_1 jako odwzorowania afiniczne a przekształcenia te nie zmieniają stosunków długości między równoległymi odcinkami oraz

$$H(h_1, \epsilon)[(0, 0), y(h_1, \epsilon)] = H(h_2, \epsilon)[(0, 0), y(h_2, \epsilon)] = [(0, 0), (0, \epsilon a)],$$

otrzymujemy stąd że $H(h_1, \epsilon)(I_x)$ i $H(h_2, \epsilon)(I_x)$ są odcinkami ze wspólnym końcem na odcinku $[(0, 0), (0, \epsilon a)]$. Ponownie korzystając z faktu, że odwzorowania afiniczne zachowują proporcje pomiędzy równoległymi odcinkami, a także równoległość odcinków, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{|H(h_1, \epsilon)(I_x)|}{|I_x|} &= \frac{|H(h_1, \epsilon)[y(h_1, \epsilon), y(h_2, \epsilon)]|}{|[y(h_1, \epsilon), y(h_2, \epsilon)]|} = \frac{|H(h_1, \epsilon)[y(h_1, \epsilon), (\epsilon a, 0)]|}{|[y(h_1, \epsilon), (\epsilon a, 0)]|} \\ &= \frac{|[\hat{y}(h_1, \epsilon), (\epsilon a, 0)]|}{|[y(h_1, \epsilon), (\epsilon a, 0)]|} = \frac{\hat{h}_1}{h_1} = \frac{1}{1 + h_1} \leq 1 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \frac{|H(h_2, \epsilon)(I_x)|}{|I_x|} &= \frac{|H(h_2, \epsilon)[y(h_1, \epsilon), y(h_2, \epsilon)]|}{|[y(h_1, \epsilon), y(h_2, \epsilon)]|} = \frac{|H(h_2, \epsilon)[(0, a), y(h_2, \epsilon)]|}{|[(0, a), y(h_2, \epsilon)]|} \\ &= \frac{|[(0, a), (\epsilon a, 0)]|}{|[(0, a), y(h_2, \epsilon)]|} = \frac{1}{1 - h_2} \leq 2. \end{aligned}$$

Skoro $H(h_1, \epsilon)(x) \in H(h_1, \epsilon)(I_x)$ oraz $H(h_2, \epsilon)(x) \in H(h_2, \epsilon)(I_x)$ a także $H(h_1, \epsilon)(I_x)$ i $H(h_2, \epsilon)(I_x)$ mają wspólny koniec, to dostajemy, że

$$\begin{aligned} \|H(h_1, \epsilon)(x) - H(h_2, \epsilon)(x)\| &\leq |H(h_1, \epsilon)(I_x)| + |H(h_2, \epsilon)(I_x)| \leq 3|I_x| \\ &\leq 6a(h_1 - h_2) \leq \frac{32}{\epsilon}a(h_1 - h_2). \end{aligned}$$

Wykazaliśmy zatem, że gdy h_1 i h_2 są nieujemne, to zachodzi (7.14). Przypadek, gdy h_1 i h_2 są niedodatnie wynika z (7.7) i z tego, że J jest izometrią.

Liczby h_1 i h_2 są różnych znaków. Niech $h_0 = 0$. Wtedy $H(h_0, \epsilon) = Id$. Używając poprzedniego przypadku otrzymujemy, że

$$\|H(h_2, \epsilon)(x) - x\| \leq \frac{32}{\epsilon}a|h_0 - h_2|,$$

oraz

$$\|H(h_1, \epsilon)(x) - x\| \leq \frac{32}{\epsilon}a|h_1 - h_0|.$$

Ponieważ h_1, h_2 są różnych znaków, to liczby $h_0 - h_2$ i $h_1 - h_0$ są tego samego znaku. Z tego wynika, że

$$\|H(h_1, \epsilon)(x) - H(h_2, \epsilon)(x)\| \leq \|H(h_1, \epsilon)(x) - x\| + \|H(h_2, \epsilon)(x) - x\| \leq \frac{32}{\epsilon}a|h_2 - h_1|.$$

Poprzez analogiczne rozumowanie jak w dowodzie (7.14) oraz zamianę $H(h_i, \epsilon)$ na $H^{-1}(h_i, \epsilon)$ dla $i = 1, 2$, korzystając z (7.11) można udowodnić, że dla każdego $x \in V$ mamy również

$$(7.16) \quad \|H^{-1}(h_2, \epsilon)(x) - H^{-1}(h_1, \epsilon)(x)\| \leq \frac{32}{\epsilon}a|h_2 - h_1|.$$

Powyższa nierówność razem z (7.14) implikuje (7.13). \square

LEMAT 7.5. Niech V, V_1 and V_2 będą trójkątami zdefiniowanymi jak wyżej. Niech $0 < \hat{\epsilon} < 10^{-8}$. Przypuśćmy, że $f \in L^1(V)$ spełnia

$$(7.17) \quad f > \kappa > 0; \quad \frac{1}{1 + \hat{\epsilon}} < f \text{ lub } f < \frac{1}{1 - \hat{\epsilon}}; \quad \int_V f(x)dx = \text{Leb}(V).$$

Niech $\mu_f := f dx$. Wtedy istnieje kawałkami afiniczny homeomorfizm $H_f : V \rightarrow V$ taki, że

- (i) $(H_f)_*\mu_f(V_i) = \text{Leb}(V_i)$ dla $i = 1, 2$;
- (ii) $H_f|_{\partial V} = Id|_{\partial V}$;
- (iii) istnieje liczba $-\hat{\epsilon} < h_f < \hat{\epsilon}$ taka, że odwzorowanie $x \mapsto \det(DH_f^{-1}(x))$ jest stałe prawie wszędzie na V_1 i V_2 oraz równe odpowiednio $1 - h_f$ oraz $1 + h_f$;
- (iv) stałe Lipschitza H_f i H_f^{-1} są mniejsze niż $\frac{5}{4}$;
- (v) odwzorowania $f \mapsto H_f \in \text{Hom}(V)$ oraz $f \mapsto \det(DH_f^{-1}) \in L^\infty(V)$ są ciągłe, przy czym na zbiorze funkcji spełniających (7.17) rozpatrujemy topologię dziedziczoną z $L^1(V)$.

DOWÓD. Skoro μ_f jest miarą absolutnie ciągłą, to nie istnieją odcinki o dodatniej mierze μ_f w V . Stąd istnieje jedyna taka liczba rzeczywista $-1 < h_f < 1$ oraz punkt $y = y_f = (\sqrt{\hat{\varepsilon}}a(1 - h_f), h_f a)$ taki, że czworokąt o wierzchołkach $\{(0, a), (0, 0), y, (a, 0)\}$ oraz czworokąt o wierzchołkach $\{(0, -a), (0, 0), y, (a, 0)\}$ mają tę samą miarę μ_f równą $\frac{1}{2}Leb(V)$ (jeżeli $h_f = 0$, to oba te czworokąty degenerują się do trójkątów).

Rozważmy trójkąty $C_i = C_i^f := C_i(h_f, \sqrt{\hat{\varepsilon}})$ dla $i = 1, \dots, 6$. Z definicji h_f mamy

$$\mu_f(C_1 \cup C_2) = \mu_f(C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_6) = \frac{1}{2}Leb(V).$$

Oszacujemy teraz h_f . Załóżmy, że $f > \frac{1}{1+\hat{\varepsilon}}$. Ponieważ $Leb(V) = a^2$, to mamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a^2 &= \mu_f(C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_6) = \int_{C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_6} f(x) dx \\ &> \frac{1}{1+\hat{\varepsilon}}Leb(C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_6) = \frac{1}{1+\hat{\varepsilon}}\left(\frac{1}{2}(a + |h_f|a)a\right). \end{aligned}$$

Stąd

$$(7.18) \quad f > \frac{1}{1+\hat{\varepsilon}} \Rightarrow |h_f| < \hat{\varepsilon}.$$

Załóżmy teraz, że $f < \frac{1}{1-\hat{\varepsilon}}$. Wtedy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a^2 &= \mu_f(C_1 \cup C_2) = \int_{C_1 \cup C_2} f(x) dx \\ &< \frac{1}{1-\hat{\varepsilon}}Leb(C_1 \cup C_2) = \frac{1}{1-\hat{\varepsilon}}\left(\frac{1}{2}(a - |h_f|a)a\right). \end{aligned}$$

Z tego wnioskujemy, że

$$(7.19) \quad f < \frac{1}{1-\hat{\varepsilon}} \Rightarrow |h_f| < \hat{\varepsilon}.$$

Definicja H_f . Zdefiniujmy odwzorowanie $H_f := H(h_f, \sqrt{\hat{\varepsilon}})$, będące kawałkami afinicznym homeomorfizmem na V . Zauważmy, że z (7.4) mamy $H_f|_{\partial V} = Id|_{\partial V}$. Ponadto, jeśli $h_f \geq 0$, to

$$(H_f)_*\mu_f(V_1) = \mu_f(C_1 \cup C_2) = \frac{1}{2}Leb(V) = Leb(V_1)$$

oraz

$$(H_f)_*\mu_f(V_2) = \mu_f(C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_6) = \frac{1}{2}Leb(V) = Leb(V_2),$$

natomiast, gdy $h_f \leq 0$, to

$$(H_f)_*\mu_f(V_1) = \mu_f(C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_6) = \frac{1}{2}Leb(V) = Leb(V_2)$$

oraz

$$(H_f)_*\mu_f(V_2) = \mu_f(C_1 \cup C_2) = \frac{1}{2}Leb(V) = Leb(V_1).$$

Stąd H_f spełnia (i) i (ii).

Dodatkowo, z (7.8) i (7.9) mamy, że

$$(7.20) \quad \det(\text{lin}(H_f|_{C_1})) = \det(\text{lin}(H_f|_{C_2})) = \frac{1}{1-|h_f|} \geq 1,$$

oraz

$$(7.21) \quad \begin{aligned} \det(\operatorname{lin}(H_f|_{C_3})) &= \det(\operatorname{lin}(H_f|_{C_4})) \\ &= \det(\operatorname{lin}(H_f|_{C_5})) = \det(\operatorname{lin}(H_f|_{C_6})) = \frac{1}{1 + |h_f|} \leq 1. \end{aligned}$$

Zauważmy, że $V_1 = \hat{C}_1 \cup \hat{C}_2$ i $V_2 = \hat{C}_3 \cup \hat{C}_4 \cup \hat{C}_5 \cup \hat{C}_6$ dla $h_f \geq 0$ oraz $V_1 = \hat{C}_3 \cup \hat{C}_4 \cup \hat{C}_5 \cup \hat{C}_6$ i $V_2 = \hat{C}_1 \cup \hat{C}_2$ dla $h_f \leq 0$. Stąd na podstawie (7.20) i (7.21) otrzymujemy

$$(7.22) \quad \det(D(H_f^{-1})) = 1 - h_f \text{ na } V_1 \text{ oraz } \det(D(H_f^{-1})) = 1 + h_f \text{ na } V_2.$$

Stąd H_f spełnia (iii).

Norma części liniowej. Udowodnimy teraz, że $\|\operatorname{lin}(H_f)|_{\hat{C}_i}\| < \frac{5}{4}$ dla $i = 1, \dots, 6$. Z uwagi 7.2 oraz z tego, że $|h_f| < \hat{\varepsilon}$ mamy, że każda z macierzy $\operatorname{lin}(H_f)|_{C_i}$ jest postaci $\begin{pmatrix} 1+b & c \\ d & 1+e \end{pmatrix}$, gdzie $|b|, |c|, |d|, |e| < 3\sqrt{\hat{\varepsilon}}$. Ponadto z (7.20) oraz (7.21), a także z (7.18) i (7.19) mamy, że

$$|\det(\operatorname{lin}(H_f)|_{C_i})| \geq \frac{1}{1 + |h_f|} > \frac{1}{1 + \hat{\varepsilon}} \text{ dla } i = 1, \dots, 6.$$

Stąd, używając wzoru (7.1) oraz tego, że $\hat{\varepsilon} < 10^{-8}$, otrzymujemy, że

$$(7.23) \quad \begin{aligned} &\|\operatorname{lin}(H_f)|_{C_i}\| \\ &= \sqrt{\frac{(1+a)^2 + b^2 + c^2 + (1+d)^2 + \sqrt{((1+a)^2 + b^2 + c^2 + (1+d)^2)^2 - \det(\operatorname{lin}(H_f)|_{C_i})^2}}{2}} \\ &\leq \sqrt{\frac{(1+|a|)^2 + |b|^2 + |c|^2 + (1+|d|)^2 + \sqrt{((1+|a|)^2 + |b|^2 + |c|^2 + (1+|d|)^2)^2 - \det(\operatorname{lin}(H_f)|_{C_i})^2}}{2}} \\ &< \sqrt{\frac{2(1+3\sqrt{\hat{\varepsilon}})^2 + 2(3\sqrt{\hat{\varepsilon}})^2 + \sqrt{(2(1+3\sqrt{\hat{\varepsilon}})^2 + 2(3\sqrt{\hat{\varepsilon}})^2)^2 - 4(\det(\operatorname{lin}(H_f)|_{C_i}))^2}}{2}} \\ &< \sqrt{\frac{2+12\sqrt{\hat{\varepsilon}}+36\hat{\varepsilon} + \sqrt{(2+12\sqrt{\hat{\varepsilon}}+36\hat{\varepsilon})^2 - 4\left(\frac{1}{1+\hat{\varepsilon}}\right)^2}}{2}} \\ &< \sqrt{\frac{2+13\sqrt{\hat{\varepsilon}} + \sqrt{(2+13\sqrt{\hat{\varepsilon}})^2 - 4(1-2\hat{\varepsilon})}}{2}} = \sqrt{\frac{2+13\sqrt{\hat{\varepsilon}} + \sqrt{52\sqrt{\hat{\varepsilon}}+177\hat{\varepsilon}}}{2}} \\ &< \sqrt{\frac{2+13\sqrt{\hat{\varepsilon}}+8\sqrt[4]{\hat{\varepsilon}}}{2}} < \sqrt{1 + 5\sqrt[4]{\hat{\varepsilon}}} < \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

W ten sam sposób dowodzimy, że $\|\operatorname{lin}(H_f)^{-1}|_{\hat{C}_i}\| < \frac{5}{4}$. Stąd H_f spełnia (iv).

Ciągłość odwzorowania $f \rightarrow h_f$. Przypuśćmy, że $f, g \in L^1(V)$ spełniają (7.17). Z lematu 7.4 wiemy, że

$$(7.24) \quad d_{\operatorname{Hom}}(H_f, H_g) \leq \frac{32a}{\sqrt{\hat{\varepsilon}}} |h_f - h_g|.$$

Udowodnimy teraz, że

$$(7.25) \quad |h_f - h_g| \leq C \|f - g\|_{L^1},$$

dla pewnej stałej $C > 0$.

Przypadek, gdy h_f i h_g są tego samego znaku. Przypuśćmy, że $h_f \geq h_g \geq 0$ lub $0 \geq h_g \geq h_f$. Wtedy

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2 = \mu_f(C_1^f \cup C_2^f) - \mu_g(C_1^g \cup C_2^g) \\ &= \int_{C_1^f \cup C_2^f} f(x)dx - \int_{C_1^g \cup C_2^g} g(x)dx \\ &= \int_{C_1^g \cup C_2^g} (f - g)(x)dx - \int_{(C_1^f \cup C_2^f) \setminus (C_1^g \cup C_2^g)} f(x)dx \\ &\leq \|f - g\|_{L^1} - |h_f - h_g| \frac{a\kappa}{2}, \end{aligned}$$

a stąd

$$|h_f - h_g| \leq \frac{2\|f - g\|_{L^1}}{a\kappa}.$$

Zatem (7.25) jest spełnione dla $C = \frac{2}{a\kappa}$.

Przypadek, gdy h_f, h_g są różnych znaków. Przypuśćmy, że $h_f \geq 0 \geq h_g$. Wtedy

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2 = \mu_f(C_1^f \cup C_2^f) - \mu_g(C_3^g \cup C_4^g \cup C_5^g \cup C_6^g) \\ &= \int_{C_1^f \cup C_2^f} f(x)dx - \int_{C_3^g \cup C_4^g \cup C_5^g \cup C_6^g} g(x)dx \\ &= \int_{C_3^g \cup C_4^g \cup C_5^g \cup C_6^g} (f - g)(x)dx - \int_{(C_3^g \cup C_4^g \cup C_5^g \cup C_6^g) \setminus (C_1^f \cup C_2^f)} f(x)dx \\ &\leq \|f - g\|_{L^1} - (h_f - h_g) \frac{a\kappa}{2}. \end{aligned}$$

Zatem otrzymujemy, że

$$0 \leq h_f - h_g \leq \frac{2\|f - g\|_{L^1}}{a\kappa}.$$

To dowodzi (7.25), również dla stałej $C = \frac{2}{a\kappa}$.

Poprzez użycie (7.24) i (7.25), otrzymujemy

$$d_{Hom}(H_f, H_g) \leq \frac{32a}{\sqrt{\hat{\varepsilon}}} |h_f - h_g| < \frac{32a}{\sqrt{\hat{\varepsilon}}} C \|f - g\|_{L^1}.$$

To dowodzi ciągłości $f \mapsto H_f$.

Na podstawie (7.22), ciągłość odwzorowania $f \mapsto h_f$ pociąga za sobą również ciągłość odwzorowania $f \mapsto \det(DH_f^{-1}) \in L^\infty(V)$. Stąd warunek (v) jest udowodniony, co kończy dowód lematu. \square

Niech (X, μ) będzie standardową probabilistyczną przestrzenią mierzalną. Dla $0 < s_1 < s_2$ zdefiniujemy $\mathcal{W}(X, s_1, s_2) \subset L^1(X, \mu)$ w następujący sposób:

$$(7.26) \quad \mathcal{W}(X, s_1, s_2) := \{f \in L^1(X); s_1 < f < s_2\}.$$

Zbiory powyższej postaci będziemy traktować jako przestrzenie metryczne z metryką indukowaną z $L^1(X, \mu)$.

Niech V będzie trójkątem o wierzchołkach w punktach $(0, -a), (0, a), (a, 0)$.

LEMAT 7.6. Niech $H : \mathcal{W}(V, s_1, s_2) \rightarrow Hom(V)$ będzie odwzorowaniem ciągłym takim, że istnieje $\ell > 0$, dla którego homeomorfizm $H(f)^{-1}$ jest lipschitzowski ze stałą ℓ dla każdego $f \in \mathcal{W}(V, s_1, s_2)$. Wtedy odwzorowanie

$$\mathcal{W}(V, s_1, s_2) \ni f \mapsto f \circ H(f) \in L^1(V)$$

jest ciągłe.

DOWÓD. Weźmy $f \in \mathcal{W}(V, s_1, s_2)$ oraz $\epsilon > 0$. Niech $f_\epsilon : V \rightarrow \mathbb{R}$ będzie jednostajnie ciągłą funkcją taką, że $\|f_\epsilon - f\|_{L^1} < \epsilon$. Niech $0 < \delta < \epsilon$ będzie takie, że

$$(7.27) \quad \|x - y\| < \delta \Rightarrow |f_\epsilon(x) - f_\epsilon(y)| < \epsilon.$$

Rozważmy $0 < \delta' < \epsilon$ takie, że dla każdego $g \in \mathcal{W}(V, s_1, s_2)$ mamy

$$(7.28) \quad \|f - g\|_{L^1} < \delta' \Rightarrow d_{Hom}(H(f), H(g)) < \delta.$$

Rozważmy dowolną funkcję $g \in \mathcal{W}(V, s_1, s_2)$ taką, że $\|f - g\|_{L^1} < \delta'$. Skoro $H(g)^{-1}$ jest lipschitzowskie ze stałą ℓ , to $H(g)_*Leb$ jest miarą absolutnie ciągłą z gęstością ograniczoną przez ℓ^2 . Stąd, dla każdego $h \in L^1(V)$ mamy

$$(7.29) \quad \|h \circ H(g)\|_{L^1} = \int_V |h \circ H(g)(x)| dx \leq \int_V \ell^2 |h(x)| dx = \ell^2 \|h\|_{L^1}.$$

Zatem

$$(7.30) \quad \|f \circ H(f) - g \circ H(g)\|_{L^1} \leq \|f \circ H(f) - f \circ H(g)\|_{L^1} + \|f \circ H(g) - g \circ H(g)\|_{L^1},$$

oraz z (7.29) mamy

$$(7.31) \quad \|f \circ H(g) - g \circ H(g)\|_{L^1} \leq \ell^2 \|f - g\|_{L^1}.$$

Ponadto

$$(7.32) \quad \begin{aligned} \|f \circ H(f) - f \circ H(g)\|_{L^1} &\leq \|f \circ H(f) - f_\epsilon \circ H(f)\|_{L^1} + \|f_\epsilon \circ H(f) - f_\epsilon \circ H(g)\|_{L^1} \\ &\quad + \|f_\epsilon \circ H(g) - f \circ H(g)\|_{L^1} \\ &\leq 2\ell^2 \|f - f_\epsilon\|_{L^1} + \|f_\epsilon \circ H(f) - f_\epsilon \circ H(g)\|_{L^1}, \end{aligned}$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z (7.29). Z (7.28) oraz (7.27) otrzymujemy

$$(7.33) \quad \|f_\epsilon \circ H(f) - f_\epsilon \circ H(g)\|_{L^1} < \epsilon.$$

Podsumowując, z (7.30), (7.31), (7.32) oraz (7.33) otrzymujemy

$$\|f \circ H(f) - g \circ H(g)\|_{L^1} \leq \ell^2 \|f - g\|_{L^1} + 2\ell^2 \|f - f_\epsilon\|_{L^1} + \epsilon \leq (3\ell^2 + 1)\epsilon,$$

co dowodzi tezy. \square

UWAGA 7.7. Analogiczny rezultat jak w lemacie 7.6 otrzymujemy, jeżeli zastąpimy V przez dowolną 2-wymiarową powierzchnię riemannowską M .

LEMAT 7.8. Niech $0 < \hat{\epsilon} < 10^{-8}$. Wtedy dla każdej $f \in \mathcal{W}(V, \frac{1}{1+\hat{\epsilon}}, \frac{1}{1-\hat{\epsilon}})$ takiej, że $\int_V f dx = Leb(V)$ i $\mu_f := f dx$ istnieje homeomorfizm $\mathfrak{H}_f : V \rightarrow V$ taki, że

- (i) $(\mathfrak{H}_f)_* \mu_f = Leb$;
- (ii) $\mathfrak{H}_f|_{\partial V} = Id|_{\partial V}$;
- (iii) odwzorowanie $W(V, \frac{1}{1+\hat{\epsilon}}, \frac{1}{1-\hat{\epsilon}}) \ni f \mapsto \mathfrak{H}_f \in Hom(V)$ jest ciągłe.

DOWÓD. Załóżmy, że $f \in \mathcal{W}(V, \frac{1}{1+\hat{\epsilon}}, \frac{1}{1-\hat{\epsilon}})$. Oznaczmy przez V_1^1 i V_2^1 dwie połowy V będące równoramienne prostokątnymi trójkątami takimi, że $\text{diam}(V_1^1) = \text{diam}(V_2^1) = \sqrt{2}a$. Postępując indukcyjnie, dla $n \in \mathbb{N}$ zdefiniujemy rodzinę $\{V_i^n\}_{i=1}^{2^n}$ równoramienne prostokątnych trójkątów dzielących V takich, że $V_i^n = V_{2i-1}^{n+1} \cup V_{2i}^{n+1}$ dla $i = 1, \dots, 2^n$. Wówczas

$$(7.34) \quad \text{diam}(V_i^n) = \frac{a}{\sqrt{2}^{n-2}}.$$

Homeomorfizm \mathfrak{H}_f konstruujemy indukcyjnie jako granicę odwzorowań kawałkami afinicznymi.

W pierwszym kroku, używając lematu 7.5, otrzymujemy kawałkami afiniczny homeomorfizm $H_f^1 : V \rightarrow V$ taki, że

$$(7.35) \quad (H_f^1)_* \mu_f(V_1^1) = (H_f^1)_* \mu_f(V_2^1) = \frac{1}{2} \text{Leb}(V) \text{ oraz } H_f^1|_{\partial V} = \text{Id}|_{\partial V}.$$

Ponadto wyznacznik $\det(D(H_f^1)^{-1})$ jest stały prawie wszędzie na V_1^1 i V_2^1 i spełnia nierówność

$$1 - \hat{\varepsilon} < \det(D(H_f^1)^{-1}) < 1 + \hat{\varepsilon}.$$

Co więcej

$$(7.36) \quad H_f^1 \text{ oraz } (H_f^1)^{-1} \text{ są lipschitzowskie ze stałą } \frac{5}{4}$$

oraz

$$(7.37)$$

$$\text{odwzorowania } W(V, \frac{1}{1+\hat{\varepsilon}}, \frac{1}{1-\hat{\varepsilon}}) \ni f \mapsto H_f^1 \in \text{Hom}(V)$$

$$\text{oraz } W(V, \frac{1}{1+\hat{\varepsilon}}, \frac{1}{1-\hat{\varepsilon}}) \ni f \mapsto \det(D(H_f^1)^{-1}) \in L^\infty(V) \text{ są ciągłe.}$$

Przypuśćmy teraz, że dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ skonstruowaliśmy kawałkami afiniczne homeomorfizmy $H_f^j : V \rightarrow V$ dla $j = 1, \dots, n$ takie, że dla każdego $i = 1, \dots, 2^n$ mamy

$$(7.38)$$

$$(H_f^n \circ \dots \circ H_f^1)_* \mu_f(V_i^n) = \frac{1}{2^n} \text{Leb}(V) = \text{Leb}(V_i^n) \text{ oraz } H_f^j|_{\partial V} = \text{Id}|_{\partial V} \text{ dla } j = 1, \dots, n.$$

Ponadto założmy, że

$$(7.39) \quad \text{dla każdego } i = 1, \dots, 2^n \text{ wyznacznik } \det(D(H_f^n \circ \dots \circ H_f^1)^{-1}) \text{ jest stały prawie wszędzie na trójkącie } V_i^n$$

i jest na tymże trójkącie równy

$$(7.40) \quad (1 - \hat{\varepsilon})^n < d_i^n < (1 + \hat{\varepsilon})^n,$$

a także, że dla każdego $j = 1, \dots, n$ homeomorfizmy H_f^j oraz $(H_f^j)^{-1}$ są lipschitzowskie ze stałą $\frac{5}{4}$. Przy powyższych założeniach miara $(H_f^n \circ \dots \circ H_f^1)_* \mu_f$ jest absolutnie ciągła, a jej gęstość $f_n : V \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ spełnia

$$f_n(x) = d_i^n \cdot f((H_f^n \circ \dots \circ H_f^1)^{-1}x), \text{ jeśli } x \in V_i^n,$$

oraz z (7.38)

$$(7.41) \quad \int_{V_i^n} f_n(x) dx = (H_f^n \circ \dots \circ H_f^1)_* \mu_f(V_i^n) = \text{Leb}(V_i^n)$$

dla dowolnego $1 \leq i \leq 2^n$. Ponadto z (7.40) mamy

$$(7.42) \quad \frac{(1 - \hat{\varepsilon})^n}{1 + \hat{\varepsilon}} < f_n < \frac{(1 + \hat{\varepsilon})^n}{1 - \hat{\varepsilon}}.$$

Niech $1 \leq i \leq 2^n$. Przypomnijmy, że $\frac{1}{1+\hat{\varepsilon}} < f < \frac{1}{1-\hat{\varepsilon}}$. Stąd, jeżeli $d_i^n < 1$, to

$$f_n(x) < \frac{d_i^n}{1 - \hat{\varepsilon}} < \frac{1}{1 - \hat{\varepsilon}} \text{ dla każdego } x \in V_i^n,$$

a jeżeli $d_i^n \geq 1$, to

$$f_n(x) > \frac{d_i^n}{1 + \hat{\varepsilon}} \geq \frac{1}{1 + \hat{\varepsilon}} \text{ dla każdego } x \in V_i^n.$$

Stąd, z (7.41) oraz z (7.42) wynika, że $f_n : V_i^n \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ jest dodatnią gęstością spełniającą (7.17). Stąd dla dowolnego $1 \leq i \leq 2^n$ możemy zastosować lemat 7.5 do trójkąta V_i^n i gęstości $f_n : V_i^n \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, otrzymując w ten sposób kawałkami afiniczny homeomorfizm $H_f^{n+1,i} : V_i^n \rightarrow V_i^{n+1}$ taki, że

(7.43)

$$(H_f^{n+1,i})_*(\mu_{f_n}|_{V_i^n})(V_{2i-1}^{n+1}) = (H_f^{n+1,i})_*(\mu_{f_n}|_{V_i^n})(V_{2i}^{n+1}) = \frac{1}{2} \text{Leb}(V_i^n) = \frac{1}{2^{n+1}} \text{Leb}(V),$$

(7.44)

$$H_f^{n+1,i}|_{\partial V_i^n} = \text{Id}|_{\partial V_i^n},$$

(7.45)

$$H_f^{n+1,i} \text{ oraz } (H_f^{n+1,i})^{-1} \text{ są lipschitzowskie ze stałą } \frac{5}{4},$$

(7.46)

$$\det D((H_f^{n+1,i})^{-1}) \text{ jest stały prawie wszędzie na } V_{2i-1}^{n+1} \text{ i } V_{2i}^{n+1} \\ \text{ oraz } 1 - \hat{\varepsilon} < \det D((H_f^{n+1,i})^{-1}) < 1 + \hat{\varepsilon}$$

oraz

(7.47)

$$\text{odwzorowania } f_n \mapsto H_f^{n+1,i} \text{ oraz } f_n \mapsto \det D((H_f^{n+1,i})^{-1}) \text{ są ciągłe.}$$

Następnie zdefiniujemy kawałkami afiniczny homeomorfizm $H_f^{n+1} : V \rightarrow V$ dany przez

$$H_f^{n+1}(x) := H_f^{n+1,i}(x), \text{ jeśli } x \in V_i^n.$$

Wtedy

(7.48)

$$H_f^{n+1}(V_i^n) = V_i^{n+1} \text{ dla dowolnego } 1 \leq i \leq 2^n$$

oraz, na podstawie (7.44), mamy

(7.49)

$$H_f^{n+1}|_{\partial V} = \text{Id}|_{\partial V}.$$

Ponadto z (7.43), dla dowolnego $i = 1, \dots, 2^{n+1}$ mamy

(7.50)

$$(H_f^{n+1} \circ \dots \circ H_f^1)_* \mu_f(V_i^{n+1}) = (H_f^{n+1})_* \mu_{f_n}(V_i^{n+1}) = \frac{1}{2^{n+1}} \text{Leb}(V) = \text{Leb}(V_i^{n+1}).$$

Co więcej, z (7.45) oraz z (7.48) wynika, że

(7.51)

$$H_f^{n+1} \text{ oraz } (H_f^{n+1})^{-1} \text{ są lipschitzowskie ze stałą } \frac{5}{4}.$$

Na podstawie (7.46), $\det D(H_f^{n+1})^{-1}$ jest stały prawie wszędzie na każdym trójkącie V_j^{n+1} dla $j = 1, \dots, 2^{n+1}$, a zatem z (7.39) $\det D(H_f^{n+1} \circ \dots \circ H_f^1)^{-1}$ również jest stały na każdym trójkącie V_j^{n+1} dla $j = 1, \dots, 2^{n+1}$. Dodatkowo, z (7.40) oraz (7.46) wynika, że

(7.52)

$$(1 - \hat{\varepsilon})^{n+1} < \det D(H_f^{n+1} \circ \dots \circ H_f^1)^{-1} < (1 + \hat{\varepsilon})^{n+1}.$$

Warto także zaznaczyć, że z (7.47) mamy, że

(7.53)

$$\text{odwzorowania } f_n \mapsto H_f^{n+1} \text{ oraz } f_n \mapsto \det D(H_f^{n+1} \circ \dots \circ H_f^1)^{-1} \text{ są ciągłe.}$$

Skonstruowaliśmy zatem kawałkami afiniczny homeomorfizm H_f^{n+1} spełniający (7.50), (7.49) oraz (7.52), co kończy krok indukcyjny konstrukcji homeomorfizmów.

Pokażemy teraz, że

$$(7.54) \quad \mathfrak{H}_f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} H_f^n \circ \dots \circ H_f^1(x)$$

istnieje i zadaje homeomorfizm $\mathfrak{H}_f : V \rightarrow V$. Najpierw zauważmy, że z (7.48) wynika

$$(7.55) \quad H_f^m(V_i^n) = V_i^n \text{ dla } i = 1, \dots, 2^n \text{ oraz } m > n.$$

Ponadto z (7.34) otrzymujemy, że

$$(7.56) \quad \max_{i=1, \dots, 2^n} \text{diam}(V_i^n) \rightarrow 0, \text{ gdy } n \rightarrow \infty.$$

To implikuje, że $\{H_f^n \circ \dots \circ H_f^1\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Rzeczywiście, dla każdego $\epsilon > 0$ na podstawie (7.56) możemy wybrać $N \in \mathbb{N}$ takie, że $\max_{i=1, \dots, 2^N} \text{diam}(V_i^N) < \epsilon$. Co więcej, z (7.55) dla wszystkich $m, n \geq N$ mamy

$$H_f^n \circ \dots \circ H_f^1(x) \in V_i^N \iff H_f^m \circ \dots \circ H_f^1(x) \in V_i^N.$$

Stąd dla każdych $m, n \geq N$ oraz dla wszystkich $x \in V$ zachodzi

$$\|H_f^n \circ \dots \circ H_f^1(x) - H_f^m \circ \dots \circ H_f^1(x)\| < \epsilon,$$

a zatem $\{H_f^n \circ \dots \circ H_f^1\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Z tego wynika, że odwzorowanie $\mathfrak{H}_f : V \rightarrow V$ dane przez (7.54) jest dobrze definiowane a zbieżność w (7.54) jest jednostajna. To implikuje, że \mathfrak{H}_f jest ciągłe. Skoro z (7.35) oraz (7.49) mamy $H_f^n|_{\partial V} = Id|_{\partial V}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to mamy również, że $\mathfrak{H}_f|_{\partial V} = Id|_{\partial V}$, a zatem \mathfrak{H}_f spełnia warunek (ii).

Dla dowolnych liczb $n \in \mathbb{N}$ oraz $i = 1, \dots, 2^n$ niech $W_i^n := (H_f^n \circ \dots \circ H_f^1)^{-1}(V_i^n)$. Z (7.55) mamy

$$(7.57) \quad W_i^n = (H_f^m \circ \dots \circ H_f^1)^{-1}(V_i^n) \text{ dla } m \geq n.$$

Z tego wynika, że dla dowolnego $x \in V$ oraz $m, n \geq N$ mamy

$$(7.58) \quad (H_f^n \circ \dots \circ H_f^1)^{-1}(x) \in W_i^N \iff x \in V_i^N \iff (H_f^m \circ \dots \circ H_f^1)^{-1}(x) \in W_i^N.$$

Z (7.36) oraz z (7.51) mamy, że $(H_f^n)^{-1}$ jest homeomorfizmem lipschitzowskim ze stałą Lipschitza równą $\frac{5}{4}$. Zatem z (7.34) mamy

$$\text{diam}(W_i^n) \leq \text{diam}(V_i^n) \left(\frac{5}{4}\right)^n = 2a \left(\frac{5}{4\sqrt{2}}\right)^n,$$

a więc

$$(7.59) \quad \max_{i=1, \dots, 2^n} \text{diam}(W_i^n) \rightarrow 0 \text{ dla } n \rightarrow \infty.$$

Używając (7.59) i (7.58) oraz powtarzając te same argumenty co dla \mathfrak{H}_f poprzez zastąpienie V_i^n przez W_i^n , otrzymujemy, że odwzorowanie $\mathfrak{G}_f : V \rightarrow V$ dane przez

$$\mathfrak{G}_f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} (H_f^n \circ \dots \circ H_f^1)^{-1}(x)$$

jest poprawnie zdefiniowane i ciągłe. Pokażemy teraz, że $\mathfrak{H}_f \circ \mathfrak{G}_f = Id$ oraz $\mathfrak{G}_f \circ \mathfrak{H}_f = Id$. Zauważmy najpierw, że ze względu na (7.57) oraz zwartość V_i^n i W_i^n , mamy

$$(7.60) \quad \mathfrak{H}_f(W_i^n) = V_i^n \text{ i } \mathfrak{G}_f(V_i^n) = W_i^n \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N} \text{ oraz } i = 1, \dots, 2^n.$$

Zatem $\mathfrak{H}_f \circ \mathfrak{G}_f(V_i^n) = V_i^n$ i $\mathfrak{G}_f \circ \mathfrak{H}_f(W_i^n) = W_i^n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $i = 1, \dots, 2^n$. Stąd, dla każdego $x \in V$ mamy

$$\|\mathfrak{H}_f(\mathfrak{G}_f(x)) - x\| \leq \max_{i=1, \dots, 2^N} \text{diam}(W_i^N) \text{ i } \|\mathfrak{G}_f(\mathfrak{H}_f(x)) - x\| \leq \max_{i=1, \dots, 2^N} \text{diam}(V_i^N).$$

Z powyższego oraz z (7.56) i (7.59) otrzymujemy, że $\mathfrak{H}_f \circ \mathfrak{G}_f = Id$ i $\mathfrak{G}_f \circ \mathfrak{H}_f = Id$. Innymi słowy, \mathfrak{H}_f jest homeomorfizmem.

Zauważmy, że rodzina zbiorów $\{V_i^n; n \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, 2^n\}$ generuje σ -algebrę borelowską na V . Jako, że z (7.60) oraz (7.57) dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$ oraz $i = 1, \dots, 2^n$ mamy

$$(7.61) \quad (\mathfrak{H}_f)^{-1}(V_i^n) = W_i^n = (H_f^n \circ \dots \circ H_f^1)^{-1}(V_i^n),$$

to z (7.35) oraz (7.50) dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$ oraz $i = 1, \dots, 2^n$ uzyskujemy

$$(\mathfrak{H}_f)_* \mu_f(V_i^n) = (H_f^n \circ \dots \circ H_f^1)_* \mu_f(V_i^n) = Leb(V_i^n).$$

Stąd $(\mathfrak{H}_f)_* \mu_f = Leb$, czyli \mathfrak{H}_f spełnia warunek (i).

Aby zakończyć dowód, pokażemy teraz, że \mathfrak{H}_f zależy w sposób ciągły od f . Ustalmy $\epsilon > 0$ i wybierzmy $m \in \mathbb{N}$ takie, że $2(5/4\sqrt{2})^m < \epsilon/3$. Niech $f : V \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ będzie mierzalną funkcją ze zbioru $\mathcal{W}(V, \frac{1}{1+\epsilon}, \frac{1}{1-\epsilon})$. Wtedy

$$\max_{i=1, \dots, 2^m} \text{diam}(V_i^m) < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{i} \quad \max_{i=1, \dots, 2^m} \text{diam}(W_i^m) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Ponieważ $(\mathfrak{H}_f)^{-1}(V_i^m) = W_i^m = (H_f^m \circ \dots \circ H_f^1)^{-1}(V_i^m)$ (patrz (7.61)), to stąd wynika, że

$$\sup_{x \in V} \|\mathfrak{H}_f(x) - H_f^m \circ \dots \circ H_f^1(x)\| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{i} \quad \sup_{x \in V} \|(\mathfrak{H}_f)^{-1}(x) - (H_f^m \circ \dots \circ H_f^1)^{-1}(x)\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Zatem

$$(7.62) \quad d_{Hom}(\mathfrak{H}_f, H_f^m \circ \dots \circ H_f^1) < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{dla każdego } f \in \mathcal{W}(V, \frac{1}{1+\epsilon}, \frac{1}{1-\epsilon}).$$

Aby wykazać ciągłość odwzorowania $f \mapsto H_f^m \circ \dots \circ H_f^1$ posłużymy się indukcją matematyczną. Z (7.37), odwzorowania $f \mapsto H_f^1 \in Hom(V)$ i $f \mapsto \det D(H_f^1)^{-1} \in L^\infty(V)$ są ciągłe. Przypuśćmy teraz, że dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ odwzorowania

$$(7.63) \quad f \mapsto H_f^k \circ \dots \circ H_f^1 \in Hom(V) \quad \text{i} \quad f \mapsto \det D(H_f^k \circ \dots \circ H_f^1)^{-1} \in L^\infty(V)$$

są ciągłe. Dowiedzimy teraz, że

$$f \mapsto H_f^{k+1} \circ \dots \circ H_f^1 \quad \text{i} \quad f \mapsto \det D(H_f^{k+1} \circ \dots \circ H_f^1)^{-1}$$

również są ciągłe. Ponieważ z (7.36) i (7.51) dla każdego $i = 1, \dots, k$, odwzorowania H_f^i i $(H_f^i)^{-1}$ są lipschitzowskimi homeomorfizmami ze stałą $\frac{5}{4}$, to

$$(7.64) \quad H_f^k \circ \dots \circ H_f^1 \quad \text{oraz} \quad (H_f^k \circ \dots \circ H_f^1)^{-1} \quad \text{są lipschitzowskie ze stałą } (\frac{5}{4})^k.$$

Ponadto z (7.42) mamy

$$f_k = \det D(H_f^k \circ \dots \circ H_f^1)^{-1} \cdot \left(f \circ (H_f^k \circ \dots \circ H_f^1)^{-1} \right) \in \mathcal{W}(V, \frac{(1-\epsilon)^k}{1+\epsilon}, \frac{(1+\epsilon)^k}{1-\epsilon}).$$

Z (7.53) otrzymujemy, że H_f^{k+1} zależy w sposób ciągły od f_k . Ze względu na (7.63) i (7.64), z lematu 7.6 wynika, że $f \mapsto f \circ (H_f^k \circ \dots \circ H_f^1)^{-1} \in L^1(V)$ jest odwzorowaniem ciągłym. Razem z (7.63) to daje ciągłość odwzorowania

$$f \mapsto f_k = f \circ (H_f^k \circ \dots \circ H_f^1)^{-1} \cdot \det D(H_f^k \circ \dots \circ H_f^1)^{-1} \in L^1(V).$$

Z tego wynika, że H_f^{k+1} zależy w sposób ciągły od f .

Ponownie korzystając z faktu, że dla każdego $i = 1, \dots, k+1$ odwzorowania H_f^i i $(H_f^i)^{-1}$ są lipschitzowskie ze stałą $\frac{5}{4}$, dla każdego $x \in V$ oraz dla dowolnych $f, g \in \mathcal{W}(V, \frac{1}{1+\varepsilon}, \frac{1}{1-\varepsilon})$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \|H_f^{k+1}(H_f^k \circ \dots \circ H_f^1(x)) - H_g^{k+1}(H_g^k \circ \dots \circ H_g^1(x))\| \\ & \leq \|H_f^{k+1}(H_f^k \circ \dots \circ H_f^1(x)) - H_g^{k+1}(H_f^k \circ \dots \circ H_f^1(x))\| \\ & \quad + \|H_g^{k+1}(H_f^k \circ \dots \circ H_f^1(x)) - H_g^{k+1}(H_g^k \circ \dots \circ H_g^1(x))\| \\ & \leq d_{Hom}(H_f^{k+1}, H_g^{k+1}) + \frac{5}{4}d_{Hom}(H_f^k \circ \dots \circ H_f^1, H_g^k \circ \dots \circ H_g^1) \end{aligned}$$

oraz analogicznie

$$\begin{aligned} & \| (H_f^k \circ \dots \circ H_f^1)^{-1}(H_f^{k+1})^{-1}(x) - (H_g^k \circ \dots \circ H_g^1)^{-1}(H_g^{k+1})^{-1}(x) \| \\ & \leq \left(\frac{5}{4}\right)^k d_{Hom}(H_f^{k+1}, H_g^{k+1}) + d_{Hom}(H_f^k \circ \dots \circ H_f^1, H_g^k \circ \dots \circ H_g^1). \end{aligned}$$

To dowodzi ciągłej zależności $H_f^{k+1} \circ \dots \circ H_f^1$ od f . Skoro H_f^i są kawałkami afinicznymi homeomorfizmami, to

$$(7.65) \quad D(H_f^{k+1} \circ \dots \circ H_f^1)^{-1} = D(H_f^{k+1})^{-1}D(H_f^k \circ \dots \circ H_f^1)^{-1} \text{ prawie wszędzie.}$$

Z (7.53), odwzorowanie $f_k \mapsto \det D(H_f^{k+1})^{-1} \in L^\infty(V)$ jest ciągle. Z tego, że odwzorowanie $f \mapsto f_k \in L^1(V)$ jest ciągle, wynika że $f \mapsto \det D(H_f^{k+1})^{-1} \in L^\infty(V)$ również jest ciągle. Stąd, z (7.63) oraz z (7.65), otrzymujemy ciągłość odwzorowania

$$f \mapsto \det D(H_f^{k+1} \circ \dots \circ H_f^1)^{-1} \in L^\infty(V),$$

co kończy rozumowanie indukcyjne, tzn. odwzorowania dane w (7.63) są ciągłe dla każdego $k \in \mathbb{N}$.

Ustalmy dowolną funkcję $f \in \mathcal{W}(V, \frac{1}{1+\varepsilon}, \frac{1}{1-\varepsilon})$. Wtedy istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego $g \in \mathcal{W}(V, \frac{1}{1+\varepsilon}, \frac{1}{1-\varepsilon})$ spełniającego $\|f - g\|_{L^1} < \delta$ mamy

$$d_{Hom}(H_f^m \circ \dots \circ H_f^1, H_g^m \circ \dots \circ H_g^1) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Razem z (7.62) to daje

$$d_{Hom}(\mathfrak{H}_f, \mathfrak{H}_g) < \varepsilon,$$

co kończy dowód ciągłości odwzorowania $f \mapsto \mathfrak{H}_f$, a więc warunku (iii). \square

UWAGA 7.9. Zauważmy, że teza powyższego lematu jest prawdziwa dla dowolnego trójkąta na płaszczyźnie, gdyż każde dwa trójkąty są sprzężone poprzez odwzorowanie afiniczne (choć ε może się zmieniać).

Poniższe twierdzenie jest głównym rezultatem tego rozdziału.

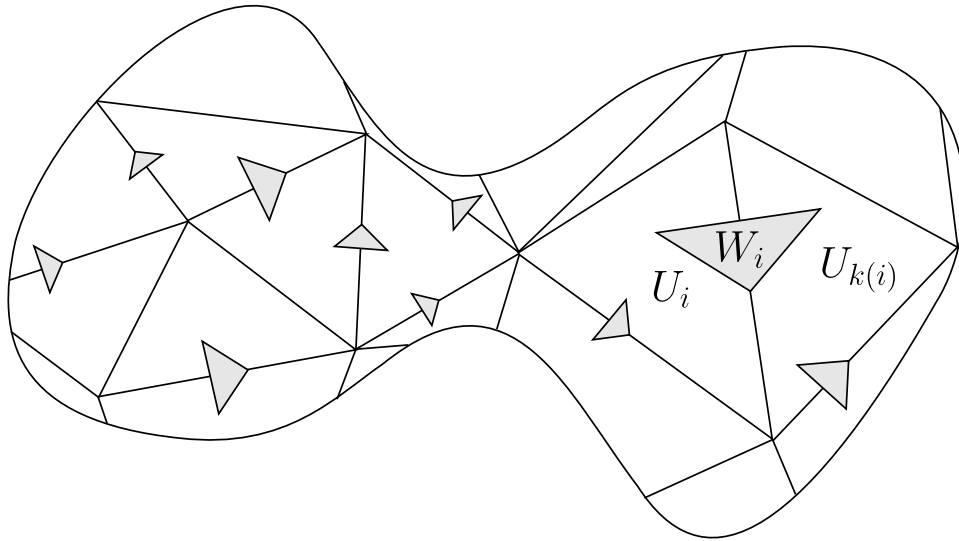
TWIERDZENIE 7.10. *Niech (M, Σ, ζ) będzie powierzchnią translacyjną. Wtedy istnieje $\varepsilon_\zeta = \varepsilon > 0$ takie, że dla wszystkich*

$$(7.66) \quad f \in \mathcal{W}(M, \frac{1}{1+\varepsilon}, \frac{1}{1-\varepsilon}) \text{ spełniających } \int_M f d\lambda_\zeta = \lambda_\zeta(M),$$

istnieje homeomorfizm $\mathcal{H}_f : (M, \Sigma) \rightarrow (M, \Sigma)$ taki, że $(\mathcal{H}_f)_\mu_f = \lambda_\zeta$, gdzie $\mu_f = f\lambda_\zeta$. Co więcej, odwzorowanie*

$$\mathcal{W}(M, \frac{1}{1+\varepsilon}, \frac{1}{1-\varepsilon}) \ni f \mapsto \mathcal{H}_f \in Hom(M)$$

jest ciągle.


 RYSUNEK 2. Triangulacja M i wybór małych trójkątów.

DOWÓD. Na (M, Σ) rozważmy triangulację złożoną z $m + 1$ trójkątów taką, że każdy punkt z Σ jest jednym z jej wierzchołków. Ze spójności M , istnieje uporządkowanie $\{U_i : 0 \leq i \leq m\}$ trójkątów tej triangulacji takie, że dla każdego $i = 1, \dots, m$ trójkąt U_i ma wspólną krawędź z $U_{k(i)}$ dla pewnego $0 \leq k(i) < i$. Rzeczywiście, wybierzmy jakikolwiek trójkąt z triangulacji jako U_0 . Następnie wybierzmy dowolny sąsiadujący z U_0 trójkąt jako U_1 i niech $k(1) = 0$. Przypuśćmy teraz, że dla pewnego $1 \leq l \leq m$ wybraliśmy trójkąty $\{U_i : 0 \leq i \leq l\}$ takie, że $k(i) < i$ dla $1 \leq i \leq l$. Jeżeli $l = m$ to kończymy procedurę. Jeżeli $l < m$ to wybierzmy jako U_{l+1} dowolny trójkąt posiadający wspólną krawędź z $\bigcup_{i=0}^l U_i$. Ze spójności, ten trójkąt istnieje. Niech także $0 \leq k(l+1) \leq l$ będzie dowolne takie, że U_{l+1} ma wspólną krawędź z $U_{k(l+1)}$.

Dla każdego $i = 1, \dots, m$ rozważmy mały równoramienny trójkąt prostokątny $W_i \subset U_i \cup U_{k(i)}$ taki, że jego najkrótsza wysokość leży na wspólnej krawędzi U_i i $U_{k(i)}$ oraz $W_i \cap W_j = \emptyset$ jeżeli $i \neq j$. Ponadto zakładamy, że każdy z trójkątów W_i ma taki sam rozmiar i wybierzmy taką lokalną parametryzację wokół W_i , że W_i ma wierzchołki w punktach $(0, -a)$, $(0, a)$ i $(a, 0)$ oraz $(0, -a) \in U_i$ dla każdego $i = 1, \dots, m$.

Niech $B = [b_{ij}]_{i,j \in \{1, \dots, m\}}$ będzie macierzą daną wzorem

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } i = j; \\ -1 & \text{jeżeli } i = k(j); \\ 0 & \text{w p. w.} \end{cases}$$

Zauważmy, że B jest macierzą trójkątną, a więc z racji, że na przekątnej posiada same jedynki, jest macierzą odwracalną. Dla każdej dodatniej funkcji $f \in \mathcal{W}(M, 0, 2)$ oznaczmy przez $v(f) \in \mathbb{R}^m$ rozwiązanie poniższego układu równań liniowych

$$(7.67) \quad Bv(f) = [\lambda_\zeta(U_i) - \mu_f(U_i)]_{i=1, \dots, m}.$$

Wtedy $\mathcal{W}(M, 0, 2) \ni f \mapsto v(f) \in \mathbb{R}^m$ jest odwzorowaniem ciągłym oraz $v(1) = 0$. Niech $0 < \hat{\varepsilon} < 10^{-8}$. Z ciągłości odwzorowania $f \mapsto v(f)$, możemy wybrać $0 < \varepsilon < \frac{\hat{\varepsilon}}{3}$

takie, że

$$(7.68) \quad \max_{i=1,\dots,m} |v_i(f)| < \frac{a^2 \hat{\varepsilon}}{12},$$

dla każdego f spełniającego (7.66).

Niech f spełnia (7.66). Skonstruujemy teraz dla każdego $i = 1, \dots, m$ kawałkami afiniczne homeomorfizm $G_f^i : W_i \rightarrow W_i$ taki, że G_f^i zależy w sposób ciągły od f , $G_f^i|_{\partial W_i} = Id$ oraz

$$(7.69) \quad 1 - \frac{\hat{\varepsilon}}{3} < \det(D(G_f^i)^{-1}(x)) < 1 + \frac{\hat{\varepsilon}}{3} \text{ prawie wszędzie na } W_i.$$

Wówczas rozważmy homeomorfizm $\mathcal{G}_f : M \rightarrow M$ dany przez

$$\mathcal{G}_f(x) = \begin{cases} G_f^i(x) & \text{jeżeli } x \in W_i \text{ dla pewnego } i = 1, \dots, m, \\ x & \text{w p. w.} \end{cases}$$

dla którego zachodzi

$$(7.70) \quad 1 - \frac{\hat{\varepsilon}}{3} < \det(D(\mathcal{G}_f)^{-1}(x)) < 1 + \frac{\hat{\varepsilon}}{3} \text{ prawie wszędzie na } M.$$

Ponadto G_f^i będziemy konstruować w taki sposób, że

$$(7.71) \quad (\mathcal{G}_f)_* \mu_f(U_j) = \lambda_\zeta(U_j) \text{ dla wszystkich } 0 \leq j \leq m.$$

Do skonstruowania homeomorfizmów G_f^i użyjemy konstrukcji i oznaczeń poprzedzających lemat 7.5. Zauważmy najpierw, że dla każdego $i = 1, \dots, m$ możemy wybrać $-1 < h_f^i < 1$ takie, że czworokąt $Q_f^i \subset W_i$ z wierzchołkami w punktach $(0,0)(0, -a), (a, 0)$ i $y_f^i := (\sqrt{\hat{\varepsilon}}a(1 - |h_f^i|), h_f^i a)$ ma miarę

$$(7.72) \quad \mu_f(Q_f^i) = \mu_f(W_i \cap U_i) + v_i(f).$$

Rzeczywiście, ponieważ $\frac{1}{1+\varepsilon} < f$, to

$$\mu_f(W_i \cap U_i) \geq \frac{1}{1+\varepsilon} \lambda_\zeta(W_i \cap U_i) = \frac{a^2}{2(1+\varepsilon)} \geq \frac{a^2}{4} > |v_i(f)|$$

i analogicznie

$$\mu_f(W_i \cap U_{k(i)}) > |v_i(f)|.$$

Stąd

$$0 < \mu_f(W_i \cap U_i) + v_i(f) < \mu_f(W_i),$$

co, razem z absolutną ciągłością μ_f , implikuje istnienie $-1 < h_f^i < 1$ dla $i = 1, \dots, m$.

Oszacujemy teraz $|h_f^i|$. Skoro $|v_i(f)|$ jest miarą μ_f trójkąta o wierzchołkach $(0,0), (a,0)$ i y_f^i w W_i , $a|h_f^i|$ jest jego wysokością oraz $\frac{1}{1+\varepsilon} < f$, to

$$|v_i(f)| \geq \frac{1}{1+\varepsilon} \frac{a^2 |h_f^i|}{2}.$$

Stąd z (7.68) otrzymujemy, że

$$(7.73) \quad |h_f^i| \leq \frac{2(1+\varepsilon)|v_i(f)|}{a^2} < \frac{(1+\varepsilon)\hat{\varepsilon}}{6} < \frac{\hat{\varepsilon}}{3} < \frac{1}{2}.$$

Niech $G_f^i : W_i \rightarrow W_i$ będzie dane przez $G_f^i := H(h_f^i, \sqrt{\hat{\varepsilon}})$ dla $i = 1, \dots, m$ tak jak w (7.3). Ponieważ $(G_f^i)^{-1}(W_i \cap U_i) = Q_f^i$, to z (7.72) otrzymujemy

$$(\mathcal{G}_f)_* \mu_f(W_i \cap U_i) = \mu_f(Q_f^i) = \mu_f(W_i \cap U_i) + v_i(f).$$

W ten sam sposób otrzymujemy

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}_f)_* \mu_f(W_i \cap U_{k(i)}) &= \mu_f(W_i \setminus Q_f^i) \\ &= \mu_f(W_i) - (\mu_f(W_i \cap U_i) + v_i(f)) = \mu_f(W_i \cap U_{k(i)}) - v_i(f). \end{aligned}$$

Z definicji $v_i(f)$ i z faktu, że W_i i W_j są rozłączne dla $i \neq j$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}_f)_*(\mu_f)(U_i) &= (\mathcal{G}_f)_*(\mu_f)\left(U_i \setminus \left(W_i \cup \bigcup_{j;k(j)=i} W_j\right)\right) \\ &\quad + (\mathcal{G}_f)_*(\mu_f)(W_i \cap U_i) + \sum_{j;k(j)=i} (\mathcal{G}_f)_*(\mu_f)(W_j \cap U_i) \\ &= \mu_f(U_i \setminus (W_i \cup \bigcup_{j;k(j)=i} W_j)) + (\mu_f(W_i \cap U_i) \\ &\quad + v_i(f)) + \sum_{j;k(j)=i} (\mu_f(W_j \cap U_i) - v_j(f)) \\ &= \mu_f(U_i) + v_i(f) - \sum_{j;k(j)=i} v_j(f) = \mu_f(U_i) + (Bv(f))_i = \lambda_\zeta(U_i) \end{aligned}$$

dla $i = 1, \dots, m$. Z (7.66) dostajemy także

$$(\mathcal{G}_f)_*(\mu_f)(M) = \mu_f(M) = \lambda_\zeta(M),$$

a zatem

$$(\mathcal{G}_f)_*(\mu_f)(U_0) = \lambda_\zeta(U_0).$$

Stąd warunek (7.71) jest spełniony. Ponadto (7.73) razem z (7.8) i (7.9) implikują (7.69).

Musimy jeszcze udowodnić, że G_f^i zależy w sposób ciągły od f . Z lematu 7.4 wystarczy udowodnić, że h_f^i zależy w sposób ciągły od f .

Rozważmy f spełniające (7.66) i niech $\delta > 0$. Skoro $v(g)$ zależy w sposób ciągły od g , to istnieje $0 < \delta' \leq \delta$ taka, że

$$\|f - g\|_{L^1} < \delta' \implies \max_{i=1, \dots, m} |v_i(f) - v_i(g)| < \delta.$$

Oszacujemy teraz różnicę miar Lebesgue'a czworokątów Q_f^i oraz Q_g^i danych przez wierzchołki $(0, 0)$, $(0, -a)$, $(a, 0)$, y_f^i oraz przez $(0, 0)$, $(0, -a)$, $(a, 0)$, y_g^i . Korzystając z tego, że $f > \frac{1}{1+\varepsilon}$ a także z (7.72) uzyskujemy

$$\begin{aligned} \frac{a^2 |h_f^i - h_g^i|}{2} &= |\text{Leb}(Q_f^i) - \text{Leb}(Q_g^i)| = \text{Leb}(Q_f^i \Delta Q_g^i) \leq (1 + \varepsilon) \mu_f(Q_f^i \Delta Q_g^i) \\ &= (1 + \varepsilon) |\mu_f(Q_f^i) - \mu_f(Q_g^i)| \leq (1 + \varepsilon) (|\mu_f(Q_f^i) - \mu_g(Q_g^i)| + |\mu_g(Q_g^i) - \mu_f(Q_g^i)|) \\ &\leq (1 + \varepsilon) (|\mu_f(W_i \cap U_i) - v_i(f) - \mu_g(W_i \cap U_i) + v_i(g)| + \int_{Q_g^i} |f - g| d\lambda_\zeta) \\ &\leq (1 + \varepsilon) (|\mu_f(W_i \cap U_i) - \mu_g(W_i \cap U_i)| + |v_i(f) - v_i(g)| + \int_{W_i} |f - g| d\lambda_\zeta) \\ &\leq (1 + \varepsilon) \left(\int_{W_i \cap U_i} |f - g| d\lambda_\zeta + \delta + \int_{W_i} |f - g| d\lambda_\zeta \right) \leq (1 + \varepsilon) (2\|f - g\|_{L^1} + \delta). \end{aligned}$$

Stąd dla każdego g spełniającego (7.66) oraz takiego, że $\|f-g\|_{L^1} < \delta'$, otrzymujemy, że dla każdego $i = 1, \dots, m$ zachodzi

$$\max_{i=1, \dots, m} |h_f^i - h_g^i| < \frac{6\delta}{a^2},$$

co implikuje, że

(7.74)

odwzorowanie $\mathcal{W}(M, \frac{1}{1+\varepsilon}, \frac{1}{1-\varepsilon}) \ni f \mapsto h_f^i \in \mathbb{R}$ jest ciągle dla każdego $i = 1, \dots, m$.

Podsumowując, uzyskaliśmy, że homeomorfizm G_f^i jest zależny w sposób ciągły od f dla każdego $i = 1, \dots, m$, a zatem z definicji \mathcal{G}_f mamy również, że

(7.75) odwzorowanie $\mathcal{W}(M, \frac{1}{1+\varepsilon}, \frac{1}{1-\varepsilon}) \ni f \mapsto \mathcal{G}_f \in \text{Hom}(V)$ jest ciągle.

Co więcej, ze względu na (7.8) i (7.9) oraz (7.74) mamy także, że

(7.76) odwzorowanie $\mathcal{W}(M, \frac{1}{1+\varepsilon}, \frac{1}{1-\varepsilon}) \ni f \mapsto \det(D\mathcal{G}_f^{-1}) \in L^\infty(M)$ jest ciągle.

Warto także zaznaczyć, że ze względu na postać macierzy danych przez uwagę 7.2 oraz to, że ich współczynniki są ograniczone przez 4, istnieje stała $\ell > 0$, niezależna od funkcji f spełniających (7.66) taka, że

(7.77) \mathcal{G}_f jest odwzorowaniem lipschitzowskim ze stałą ℓ .

Skonstruowaliśmy homeomorfizm $\mathcal{G}_f : M \rightarrow M$ taki, że miary $(\mathcal{G}_f)_*\mu_f$ oraz λ_ζ na trójkątach U_i przyjmują identyczne wartości dla $i = 0, \dots, m$. Używając lematu (7.8) będziemy teraz konstruować homeomorfizmy wewnątrz trójkątów U_i tak, aby dla każdego $i = 0, \dots, m$ obraz miary $(\mathcal{G}_f)_*\mu_f|_{U_i}$ był równy $\lambda_\zeta|_{U_i}$.

Ponieważ f spełnia (7.66) i $\varepsilon < \frac{\varepsilon_3}{3}$, to korzystając z (7.70) otrzymujemy, że $(\mathcal{G}_f)_*\mu_f$ jest miarą absolutnie ciąglą z gęstością $\hat{f} = (f \circ \mathcal{G}_f^{-1}) \cdot \det D(\mathcal{G}_f^{-1})$, która spełnia

$$\frac{1}{1+\hat{\varepsilon}} < \frac{1 - \frac{\varepsilon_3}{3}}{1 + \frac{\varepsilon_3}{3}} < \hat{f} < \frac{1 + \frac{\varepsilon_3}{3}}{1 - \frac{\varepsilon_3}{3}} < \frac{1}{1-\hat{\varepsilon}}.$$

Ponadto, z (7.71) mamy

$$\int_{U_i} \hat{f} d\lambda_\zeta = (\mathcal{G}_f)_*\mu_f(U_i) = \lambda_\zeta(U_i) \text{ dla każdego } i = 0, \dots, m.$$

Zatem, na każdym trójkącie U_i gęstość \hat{f} spełnia założenia lematu 7.8. Korzystając z lematu 7.8, dla każdego $i = 0, \dots, m$ otrzymujemy homeomorfizm $\mathfrak{H}_{\hat{f}}^i : U_i \rightarrow U_i$, spełniający

$$(\mathfrak{H}_{\hat{f}}^i)_*(\mathcal{G}_f)_*\mu_f|_{U_i} = (\mathfrak{H}_{\hat{f}}^i)_*\mu_{\hat{f}}|_{U_i} = \lambda_\zeta|_{U_i},$$

a ponadto $\mathfrak{H}_{\hat{f}}^i|_{\partial U_i} = Id$. Zatem możemy zdefiniować homeomorfizm $H_{\hat{f}} : M \rightarrow M$ taki, że

$$H_{\hat{f}}(x) := \mathfrak{H}_{\hat{f}}^i(x) \text{ jeśli } x \in U_i.$$

Wtedy $(H_{\hat{f}} \circ \mathcal{G}_f)_*\mu_f = (H_{\hat{f}})_*((\mathcal{G}_f)_*\mu_f) = \lambda_\zeta$. Niech

$$\mathcal{H}_f := H_{\hat{f}} \circ \mathcal{G}_f \in \text{Hom}(M).$$

Z powyższego mamy

(7.78) $(\mathcal{H}_f)_*\mu_f = \lambda_\zeta$.

Aby zakończyć dowód twierdzenia, musimy jeszcze udowodnić, że odwzorowanie $f \mapsto \mathcal{H}_f$ jest ciągle.

Z lematu 7.8 \mathfrak{H}_f^i zależy w sposób ciągły od \hat{f} , a stąd odwzorowanie $\hat{f} \mapsto H_{\hat{f}}$ jest ciągle. Ponadto z (7.76) mamy, że przekształcenie $f \mapsto \det(D\mathcal{G}_f^{-1}) \in L^\infty(M)$ jest ciągle, a z (7.77), że homeomorfizm $\mathcal{G}_f : M \rightarrow M$ jest lipschitzowski z pewną stałą $\ell > 0$, niezależną od f . Jako, że zachodzi (7.75), to z lematu 7.6 i uwagi 7.7 wynika, że odwzorowanie $f \mapsto f \circ \mathcal{G}_f^{-1}$ jest ciągle. Stąd przekształcenie

$$\mathcal{W}(M, \frac{1}{1+\varepsilon}, \frac{1}{1-\varepsilon}) \ni f \mapsto \hat{f} = (f \circ \mathcal{G}_f^{-1}) \cdot \det D(\mathcal{G}_f^{-1}) \in \mathcal{W}(M, \frac{1}{1+\varepsilon}, \frac{1}{1-\varepsilon})$$

jest ciągle, co z kolei razem z faktem, że odwzorowanie $\hat{f} \mapsto H_{\hat{f}}$ również jest ciągle implikuje, że

$$(7.79) \quad \text{odwzorowanie } \mathcal{W}(M, \frac{1}{1+\varepsilon}, \frac{1}{1-\varepsilon}) \ni f \mapsto H_f \in \text{Hom}(M) \text{ jest ciągle.}$$

Pokażemy teraz, że $f \mapsto \mathcal{H}_f$ jest odwzorowaniem ciągłym. Rozważmy zatem dowolne f spełniające (7.66). Ponieważ $H_{\hat{f}} : M \rightarrow M$ jest jednostajnie ciągle (ze względu na zwartość M), dla każdego $\varepsilon > 0$ możemy znaleźć $\delta > 0$ taką, że

$$d_M(x, y) < \delta \Rightarrow (d_M(H_{\hat{f}}(x), H_{\hat{f}}(y)) < \varepsilon \wedge d_M(H_{\hat{f}}^{-1}(x), H_{\hat{f}}^{-1}(y)) < \varepsilon).$$

Niech $\delta' > 0$ będzie takie, że dla każdej funkcji $g \in L^1(M, \lambda_\zeta)$ spełniającej (7.66) oraz $\|f - g\|_{L^1} < \delta'$ zachodzi $d_{\text{Hom}}(H_{\hat{f}}, H_{\hat{g}}) < \varepsilon$ oraz $d_{\text{Hom}}(\mathcal{G}_f, \mathcal{G}_g) < \delta$. Taka liczba δ' istnieje ze względu na (7.75) oraz (7.79). Wtedy dla każdego $x \in M$ i dla każdej funkcji g spełniającej (7.66) takiej, że $\|f - g\| < \delta'$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} & d_M(H_{\hat{f}} \circ \mathcal{G}_f(x), H_{\hat{g}} \circ \mathcal{G}_g(x)) \\ & \leq d_M(H_{\hat{f}} \circ \mathcal{G}_f(x), H_{\hat{f}} \circ \mathcal{G}_g(x)) + d_M(H_{\hat{f}} \circ \mathcal{G}_g(x), H_{\hat{g}} \circ \mathcal{G}_g(x)) < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Analogicznie

$$d_{\text{Hom}}((H_{\hat{f}} \circ \mathcal{G}_f)^{-1}(x), (H_{\hat{g}} \circ \mathcal{G}_g)^{-1}(x)) < 2\varepsilon.$$

To kończy dowód ciągłości przekształcenia $f \mapsto \mathcal{H}_f$ co razem z (7.78), dowodzi całego twierdzenia. □

Lokalne ciągłe włożenie przestrzeni moduli

W tym rozdziale dla każdej struktury translacyjnej ζ z przestrzeni moduli \mathcal{M} skonstruujemy jej otoczenie oraz działające na nim odwzorowanie ciągłe do przestrzeni potoków zachowujących miarę tak, aby potok przyporządkowany ζ był izomorficzny z pionowym potokiem translacyjnym na (M, ζ) . Zrobimy to w dwóch krokach. Najpierw, dla każdego $\zeta \in \mathcal{M}(M, \Sigma, \kappa)$ skonstruujemy otwarte otoczenie $\mathcal{U}_\zeta \subset \mathcal{M}(M, \Sigma, \kappa)$ takie, że dla każdego $\omega \in \mathcal{U}_\zeta$ istnieje kawałkami afiniczny homeomorfizm $\mathfrak{h}_\omega : M \rightarrow M$ spełniający $(\mathfrak{h}_\omega)_*\lambda_\omega = f_\omega\lambda_\zeta$ dla pewnej funkcji mierzalnej $\frac{1}{1+\varepsilon_\zeta} < f_\omega < \frac{1}{1-\varepsilon_\zeta}$, gdzie $\varepsilon_\zeta > 0$ jest dane przez twierdzenie 7.10. Będziemy także wymagać, żeby przekształcenie $\mathcal{U}_\zeta \ni \omega \mapsto f_\omega \in \mathcal{W}(M, \frac{1}{1+\varepsilon_\zeta}, \frac{1}{1-\varepsilon_\zeta})$ było ciągłe. Następnie, użyjemy twierdzenia 7.10, aby skonstruować homeomorfizm $\mathcal{H}_\omega : M \rightarrow M$ taki, że $(\mathcal{H}_\omega \circ \mathfrak{h}_\omega)_*\lambda_\omega = \lambda_\zeta$. Ponadto pokażemy, że istnienie tych homeomorfizmów implikuje istnienie ciągłego włożenia $\mathfrak{S} : \mathcal{U}_\zeta \rightarrow \text{Flow}(M, \lambda_\zeta)$ takiego, że $\mathfrak{S}(\omega)$ jest sprzężony poprzez homeomorfizm $\mathcal{H}_\omega \circ \mathfrak{h}_\omega$ z \mathcal{T}^ω - pionowym potokiem translacyjnym na (M, ω) . Będziemy używać następującego rezultatu.

LEMAT 8.1. *Niech (M, ω) będzie powierzchnią translacyjną, $\varepsilon > 0$ oraz $-1 \leq a \leq 1$. Rozważmy $x \in M$ spełniający $\sup_{t \in [0, a]} d_\omega(\mathcal{T}_t^\omega x, \sigma) > \varepsilon$ dla każdego punktu osobliwego $\sigma \in \Sigma$. Wówczas dla każdego $y \in M$ takiego, że $d_\omega(x, y) < \varepsilon$ segment orbity $\mathcal{T}_t^\omega y$ dla $t \in [0, a]$ jest dobrze zdefiniowany oraz $d_\omega(\mathcal{T}_t^\omega x, \mathcal{T}_t^\omega y) < \varepsilon$.*

DOWÓD. Ponieważ $d_\omega(x, y) < \varepsilon$, więc istnieje krzywa $\gamma : [0, 1] \rightarrow M \setminus \Sigma$ klasy C^1 taka, że $\gamma(0) = x$ oraz $\gamma(1) = y$ o długości $|\gamma|$ mniejszej niż ε . Wówczas dla każdego $t \in [0, a]$ pokażemy, że $\mathcal{T}_t^\omega \gamma$ jest krzywą w $M \setminus \Sigma$ klasy C^1 o długości takiej samej jak krzywa γ . Stąd

$$d_\omega(\mathcal{T}_t^\omega x, \mathcal{T}_t^\omega y) \leq |\mathcal{T}_t^\omega \gamma| < \varepsilon$$

Naszą roboczą tezę wykażemy dla $t \in [0, a]$, gdy $a \geq 0$. Gdy $a \leq 0$ dowód przebiega analogicznie. Zauważmy, że dla każdego $r \in [0, 1]$ odległość w metryce d_ω punktu $\gamma(r)$ od x jest nie większa niż $|\gamma|$. Rzeczywiście, jeśli $\gamma_{[0, r]}$ oznacza fragment krzywej γ zaczynający się w punkcie $\gamma(0) = x$, a kończący w $\gamma(r)$, to

$$d_\omega(x, \gamma(r)) = d_\omega(\gamma(0), \gamma(r)) \leq |\gamma_{[0, r]}| \leq |\gamma| < \varepsilon.$$

Niech $0 = t_0 < \dots < t_n = a$ będą takimi punktami, że dla każdego $1 \leq k < n$ zachodzi $|t_{k+1} - t_k| < \varepsilon - |\gamma|$.

Niech $0 \leq t \leq t_1$. Wtedy dla każdego $r \in [0, 1]$ oraz $\sigma \in \Sigma$ mamy

$$d_\omega(\gamma(r), \sigma) \geq d_\omega(x, \sigma) - d_\omega(\gamma(r), x) > \varepsilon - |\gamma|.$$

Stąd segment orbity $\mathcal{T}_t^\omega \gamma(r)$ dla $t \in [t_0, t_1]$ jest dobrze zdefiniowany. Ponadto,

$$d_\omega(x, \mathcal{T}_t^\omega \gamma(r)) \leq d_\omega(x, \gamma(r)) + d_\omega(\gamma(r), \mathcal{T}_t^\omega \gamma(r)) \leq |\gamma| + t < |\gamma| + \varepsilon - |\gamma| = \varepsilon.$$

Skoro $\sup_{\sigma \in \Sigma} d_\omega(x, \sigma) > \varepsilon$, to z powyższej nierówności wynika, że dla dowolnego $t \in [0, t_1]$ oraz $r \in [0, 1]$ mamy $\mathcal{T}_t^\omega \gamma(r) \notin \Sigma$. Zatem odwzorowanie \mathcal{T}_t^ω jest gładkie w pewnym otoczeniu krzywej γ oraz jego pochodna w każdym punkcie tego otoczenia

jest równa identyczności (w lokalnych współrzędnych \mathcal{T}_t^ω jest przesunięciem). Stąd dla dowolnego $t \in [0, t_1]$ obraz $\mathcal{T}_t(\gamma)$ jest krzywą klasy C^1 z parametryzacją $\mathcal{T}_t^\omega \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow M \setminus \Sigma$. Wyznamy teraz długość $\mathcal{T}_t\gamma$ dla $t \in [0, t_1]$:

$$|\mathcal{T}_t^\omega \gamma| = \int_0^1 \left\| \frac{d}{dr} \mathcal{T}_t^\omega(\gamma(r)) \right\| dr = \int_0^1 \|D(\mathcal{T}_t^\omega)_{\gamma(r)} \gamma'(r)\| dr = \int_0^1 \|\gamma'(r)\| dr = |\gamma|,$$

co należało dowieść.

Załóżmy, że dowiedliśmy już tezy dla $t \in [t_0, t_k]$ dla pewnego $0 \leq k < n$. Aby dowieść tezy dla $k+1$ zauważmy, że powtarzając argumenty jak dla $k=0$, uzyskujemy, że dla $t \in [t_k, t_{k+1}]$ mamy

$$\begin{aligned} d_\omega(\mathcal{T}_{t_k}^\omega x, \mathcal{T}_t^\omega \gamma(r)) &= d_\omega(\mathcal{T}_{t_k}^\omega \gamma(0), \mathcal{T}_{t-t_k}^\omega \mathcal{T}_{t_k}^\omega \gamma(r)) \\ &\leq |\mathcal{T}_{t_k}^\omega \gamma| + d_\omega(\mathcal{T}_{t_k}^\omega \gamma(r), \mathcal{T}_{t-t_k}^\omega \mathcal{T}_{t_k}^\omega \gamma(r)) \leq |\gamma| + t - t_k < \epsilon. \end{aligned}$$

Stąd w analogiczny sposób jak dla $k=0$ wnioskujemy, że $\mathcal{T}_t\gamma$ dla $t \in [t_k, t_{k+1}]$ jest krzywą klasy C^1 nie zawierającą punktów osobliwych oraz jej długość jest równa $|\gamma|$. Zatem rozumowanie indukcyjne kończy dowód tezy roboczej, co pociąga tezę lematu. \square

Ustalmy wektor indeksów punktów singularnych $\kappa \in \mathbb{N}^m$. Zachodzi wtedy następujący rezultat.

LEMAT 8.2. *Dla dowolnej struktury translacyjnej $\zeta \in \mathcal{M}(M, \Sigma, \kappa)$ istnieje otoczenie $\mathcal{U}_\zeta \subset \mathcal{M}(M, \Sigma, \kappa)$ takie, że dla każdego $\omega \in \mathcal{U}_\zeta$ spełnione są następujące warunki:*

- (i) *istnieje triangulacja $\mathcal{Y}(\omega)$ przestrzeni (M, ω) , której elementy w strukturze płaskiej ω są trójkątami na płaszczyźnie, oraz kawałkami afiniczny homeomorfizm $\mathfrak{h}_\omega : (M, \omega) \rightarrow (M, \zeta)$, który jest odwzorowaniem afinicznym na elementach $\mathcal{Y}(\omega)$, elementy Σ są jego punktami stałymi, a ponadto \mathfrak{h}_ω jest przekształceniem lipschitzowskim ze stałą Lipschitza $\frac{11}{10}$;*
- (ii) *$(\mathfrak{h}_\omega)_* \lambda_\omega$ jest miarą absolutnie ciągłą względem λ_ζ z kawałkami stałą gęstością f_ω spełniającą $\frac{1}{1+\epsilon_\zeta} < f_\omega < \frac{1}{1-\epsilon_\zeta}$;*
- (iii) *przekształcenie $\mathcal{U}_\zeta \ni \omega \mapsto f_\omega \in L^1(M, \lambda_\zeta)$ jest ciągłe.*

Ponadto, dla każdego $\omega \in \mathcal{U}_\zeta$ oraz $0 < \epsilon < \frac{1}{6} \min(1, \text{sys}(\omega))$ istnieje $\delta > 0$ taka, że zachodzi

- (iv) *dla każdego $\bar{\omega} \in \mathcal{U}_\zeta$, jeżeli $d_{\text{Mod}}(\omega, \bar{\omega}) < \delta$ to $\mathfrak{h}_\omega^{-1} \circ \mathfrak{h}_{\bar{\omega}} : (M, \bar{\omega}) \rightarrow (M, \omega)$ jest afiniczny na elementach $\mathcal{Y}(\bar{\omega})$, $\mathfrak{h}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathfrak{h}_\omega : (M, \omega) \rightarrow (M, \bar{\omega})$ jest afiniczny na elementach $\mathcal{Y}(\omega)$, zarówno $\mathfrak{h}_\omega^{-1} \circ \mathfrak{h}_{\bar{\omega}}$, jak i $\mathfrak{h}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathfrak{h}_\omega$ są odwzorowaniami lipschitzowskimi ze stałą $1 + \epsilon$,*

$$\|Id - D(\mathfrak{h}_\omega^{-1} \circ \mathfrak{h}_{\bar{\omega}})|_A\| < \epsilon \text{ dla każdego } A \in \mathcal{Y}(\bar{\omega})$$

oraz

$$\|Id - D(\mathfrak{h}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathfrak{h}_\omega)|_B\| < \epsilon \text{ dla każdego } B \in \mathcal{Y}(\omega);$$

- (v) *dla każdego $\bar{\omega} \in \mathcal{U}_\zeta$ takiego, że $d_{\text{Mod}}(\omega, \bar{\omega}) < \delta$ i dla zbioru*

$$\widetilde{M}(\omega) := \left\{ x \in M; \inf_{\sigma \in \Sigma} d_\omega(\mathcal{T}_t^\omega(x), \sigma) > 4\epsilon \text{ dla każdego } t \in [-1, 1] \right\}$$

mamy $\lambda_\omega(\widetilde{M}(\omega)) > 1 - K\epsilon$, gdzie uniwersalna stała $K > 0$ zależy tylko od κ , oraz dla każdego $x \in \widetilde{M}(\omega)$ mamy

$$(8.1) \quad d_\omega(\mathcal{T}_t^\omega(x), \mathfrak{h}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathfrak{h}_\omega \circ \mathcal{T}_t^{\bar{\omega}} \circ \mathfrak{h}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathfrak{h}_\omega(x)) < \epsilon \text{ dla każdego } t \in [-1, 1]$$

i

$$(8.2) \quad d_\omega(\sigma, \mathfrak{h}_\omega^{-1} \circ \mathfrak{h}_{\bar{\omega}} \circ \mathcal{T}_t^{\bar{\omega}} \circ \mathfrak{h}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathfrak{h}_\omega(x)) > 3\epsilon \text{ dla każdego } t \in [-1, 1] \text{ oraz } \sigma \in \Sigma.$$

DOWÓD. Ustalmy strukturę translacyjną $\zeta \in \mathcal{M}(M, \Sigma, \kappa)$ oraz niech $C \subset \mathcal{M}(M, \Sigma, \kappa)$ będzie składową spójności zawierającą ζ . Możemy zakładać, że ζ nie ma pionowych połączeń siodłowych, a zatem istnieje reprezentacja wielokątna $(\pi, \lambda^\zeta, \tau^\zeta) \in \Theta_\pi^\#$ struktury ζ , gdzie π jest permutacją alfabetu \mathcal{A} należąca do grafu Rauzy'ego stowarzyszonego z C . W przeciwnym wypadku, możemy obrócić ζ , aby otrzymać strukturę ζ' , która nie posiada połączeń siodłowych, skonstruować dla niej triangulację $\mathcal{Y}(\zeta')$, a następnie obrócić z powrotem razem z triangulacją, otrzymując triangulację $\mathcal{Y}(\zeta)$ (warto zaznaczyć, że obrót jest izometrią i działa w sposób ciągły na $\mathcal{M}(M, \Sigma, \kappa)$, patrz [34]).

Oznaczmy przez $\min(\zeta)$ najmniejszą odległość pomiędzy różnymi punktami postaci

$$\sum_{a \in \mathcal{A}; \pi_0(a) \leq j} \lambda_a^\zeta, \quad \sum_{a \in \mathcal{A}; \pi_1(a) \leq j} \lambda_a^\zeta, \quad T_{\pi, \lambda^\zeta}^{-1} \left(\sum_{a \in \mathcal{A}; \pi_0(a) \leq j} \lambda_a^\zeta \right), \quad T_{\pi, \lambda^\zeta} \left(\sum_{a \in \mathcal{A}; \pi_1(a) \leq j} \lambda_a^\zeta \right), \quad 0 \leq j \leq d.$$

Niech $\varepsilon_1 > 0$ będzie liczbą spełniającą

$$(8.3) \quad \varepsilon_1 < \min \left\{ \frac{1}{2} \min(\zeta), \frac{1}{\#\mathcal{A}} \min_{0 \leq i \leq d} \left\{ \left| \sum_{a \in \mathcal{A}; \pi_0(a) \leq i} \tau_a^\zeta \right|, \left| \sum_{a \in \mathcal{A}; \pi_1(a) \leq i} \tau_a^\zeta \right| \right\} \right\}.$$

Rozważmy otoczenie

$$\mathcal{Z}_\zeta := \{\omega \in C; d_{Mod}(\zeta, \omega) < \varepsilon_1\}.$$

W szczególności, jeśli $\omega \in \mathcal{Z}_\zeta$, to istnieją parametry $(\pi, \lambda^\omega, \tau^\omega) \in \Theta_\pi^\#$ takie, że $\omega = M(\pi, \lambda^\omega, \tau^\omega)$ oraz dla każdego $a \in \mathcal{A}$ zachodzi $|\lambda_a^\zeta - \lambda_a^\omega| < \varepsilon_1$ oraz $|\tau_a^\zeta - \tau_a^\omega| < \varepsilon_1$. Dla każdego $\omega \in \mathcal{Z}_\zeta$, niech $\mathcal{P}(\omega) \subset \mathbb{C}$ będzie wielokątem wyznaczonym przez $(\pi, \lambda^\omega, \tau^\omega)$ i niech

$$R_i(\omega) := \sum_{\{\alpha; \pi_0(\alpha) \leq i\}} (\lambda_\alpha^\omega + i\tau_\alpha^\omega) \quad \text{oraz} \quad R'_i(\omega) := \sum_{\{\alpha; \pi_1(\alpha) \leq i\}} (\lambda_\alpha^\omega + i\tau_\alpha^\omega) \quad \text{dla } i = 0, \dots, d.$$

Zauważmy, że $R_0(\omega) = R'_0(\omega) = 0$, $R_d(\omega) = R'_d(\omega)$, a zbiór

$$\{R_0(\omega), R_1(\omega), \dots, R_d(\omega), R'_1(\omega), \dots, R'_{d-1}(\omega)\}$$

składa się z wierzchołków $\mathcal{P}(\omega)$. Dla $i = 1, \dots, d-1$ rozważmy pionowe odcinki łączące $R_i(\omega)$ i $R'_i(\omega)$ z przeciwną stroną brzegu $\mathcal{P}(\omega)$. Oznaczmy przez $Q_i(\omega)$ i $Q'_i(\omega)$ odpowiednie drugie końce tychże odcinków (patrz rys. 1). Z wyboru ε_1 wynika, że punkty $Q_i(\omega)$ i $Q'_i(\omega)$ nie są wierzchołkami $\mathcal{P}(\omega)$. Skoro każda krawędź z górnej części brzegu wielokąta jest zidentyfikowana z jedną z krawędzi z dolnej części brzegu wielokąta, to istnieją reprezentacje punktów $Q_i(\omega)$ i $Q'_i(\omega)$ na przeciwnych połowach brzegu wielokąta, które oznaczymy odpowiednio przez $S_i(\omega)$ i $S'_i(\omega)$. Zauważmy, że

$$\operatorname{Re}(S_i(\omega)) = T_{\pi, \lambda^\omega}^{-1}(\operatorname{Re}(R_i(\omega))) \quad \text{i} \quad \operatorname{Re}(S'_i(\omega)) = T_{\pi, \lambda^\omega}(\operatorname{Re}(R'_i(\omega))),$$

gdzie T_{π, λ^ω} jest przekładaniem odcinków danym przez (π, λ^ω) .

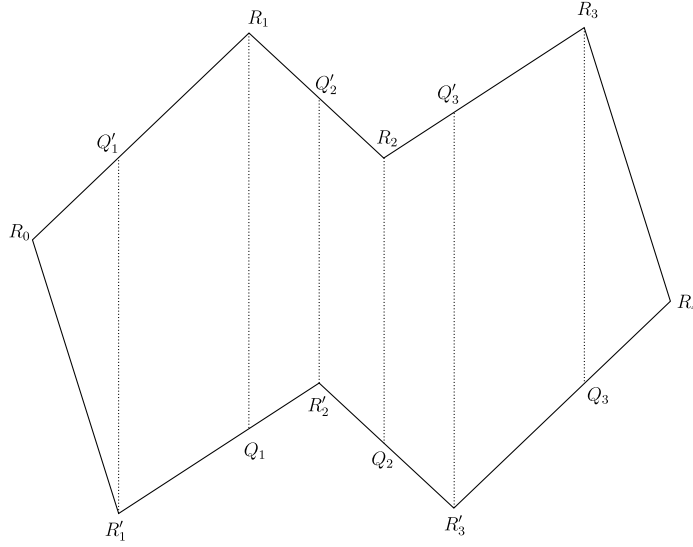
Z wyboru ε_1 wynika, że wszystkie liczby postaci

$$\operatorname{Re}(R_0(\omega)), \operatorname{Re}(R_d(\omega)), \operatorname{Re}(S_i(\omega)), \operatorname{Re}(S'_i(\omega)),$$

$$\operatorname{Re}(R_i(\omega)) = \operatorname{Re}(Q_i(\omega)), \operatorname{Re}(R'_i(\omega)) = \operatorname{Re}(Q'_i(\omega)) \quad \text{dla } i = 1, \dots, d-1$$

są parami różne. Niech

$$\widehat{\mathcal{V}}(\omega) := \{R_0(\omega), \dots, R_d(\omega), R'_1(\omega), \dots, R'_{d-1}(\omega), \\ S_1(\omega), \dots, S_{d-1}(\omega), S'_1(\omega), \dots, S'_{d-1}(\omega)\}.$$


 RYSUNEK 1. Wierzchołki $\mathcal{P}(\omega)$ i ich rzutowania na przeciwne połowy.

Zbiór $\hat{\mathcal{V}}(\omega)$ jest w istocie wyznaczony przez parametry $(\lambda^\omega, \tau^\omega)$. Rozważmy ciąg $\{V_j(\omega)\}_{j=0}^{4d-3}$, który jest uporządkowaniem elementów $\hat{\mathcal{V}}(\omega)$, tak, że ciąg $\{\text{Re}(V_j(\omega))\}_{j=0}^{4d-3}$ jest rosnący.

Ponownie z wyboru ε_1 wynika, że dla każdej struktury $\omega \in \mathcal{Z}_\zeta$, uporządkowania zbiorów $\hat{\mathcal{V}}(\zeta)$ i $\hat{\mathcal{V}}(\omega)$ są takie same, to znaczy

$$\begin{aligned} V_j(\omega) = R_i(\omega) &\Leftrightarrow V_j(\zeta) = R_i(\zeta), & V_j(\omega) = R'_i(\omega) &\Leftrightarrow V_j(\zeta) = R'_i(\zeta), \\ V_j(\omega) = S_i(\omega) &\Leftrightarrow V_j(\zeta) = S_i(\zeta), & V_j(\omega) = S'_i(\omega) &\Leftrightarrow V_j(\zeta) = S'_i(\zeta) \end{aligned}$$

dla każdego $j = 0, \dots, 4d - 3$.

Dla każdego $\omega \in \mathcal{Z}_\zeta$ skonstruujemy teraz triangulację (warto zaznaczyć, że nadużywamy w tym momencie słowa „triangulacja”, gdyż jej krawędzie mogą łączyć wierzchołki, które na powierzchni (M, ω) są tym samym punktem) $\mathcal{V}(\omega)$ wielokąta $\mathcal{P}(\omega)$. Niech $\{r(k)\}_{0 \leq k \leq 2d-1}$ będzie ściśle rosnącym ciągiem zawartym w zbiorze $\{0, \dots, 4d - 3\}$ takim, że punkty $V_{r(k)}(\omega)$ są wszystkimi wierzchołkami wielokąta $\mathcal{P}(\omega)$. Wówczas $r(0) = 0$ oraz $V_{r(0)}(\omega) = R_0(\omega)$ a także $r(2d - 1) = 4d - 3$ oraz $V_{r(2d-1)}(\omega) = R_d(\omega)$. Niech $\tilde{V}_{r(k)}(\omega) := Q_i(\omega)$, jeżeli $V_{r(k)}(\omega) = R_i(\omega)$ i podobnie niech $\tilde{V}_{r(k)}(\omega) := Q'_i(\omega)$, jeżeli $V_{r(k)}(\omega) = R'_i(\omega)$ dla każdego $k = 1, \dots, 2d - 2$.

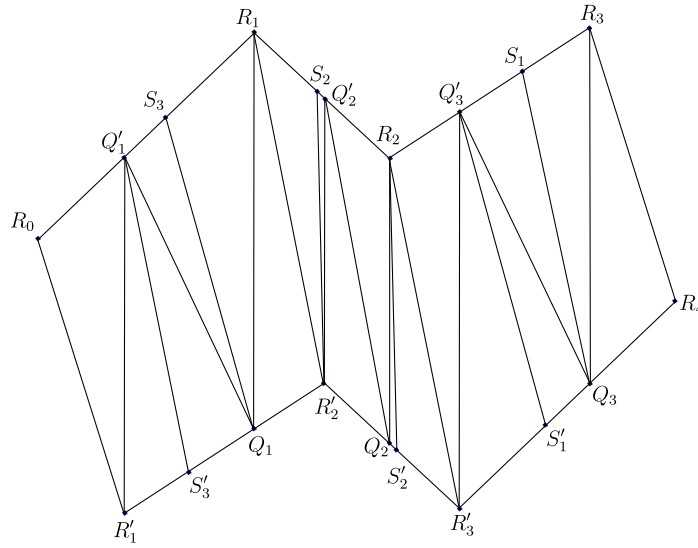
Dla dowolnego $k = 1, \dots, 2d - 2$ definiujemy $V_{4d-3+k}(\omega) := \tilde{V}_{r(k)}(\omega)$ oraz $\mathcal{V}(\omega) := \{V_k\}_{k=0}^{6d-5}$. Innymi słowy $\mathcal{V}(\omega)$ jest rodziną punktów będącą sumą rodzin $\{R_i(\omega)\}_{i=0}^d$, $\{R'_i(\omega)\}_{i=1}^{d-1}$, $\{Q_i(\omega)\}_{i=1}^{d-1}$, $\{Q'_i(\omega)\}_{i=1}^{d-1}$, $\{S_i(\omega)\}_{i=1}^{d-1}$ oraz $\{S'_i(\omega)\}_{i=1}^{d-1}$. Wtedy dla $j = 4d - 2, \dots, 6d - 5$ zachodzi

$$V_j(\omega) = Q_i(\omega) \Leftrightarrow V_j(\zeta) = Q_i(\zeta), \quad V_j(\omega) = Q'_i(\omega) \Leftrightarrow V_j(\zeta) = Q'_i(\zeta).$$

Warto także zaznaczyć, że dla każdego $j = 0, \dots, 6d - 5$ odwzorowanie

$$(8.4) \quad \mathcal{Z}_\zeta \ni \omega \mapsto V_j(\omega) \in \mathbb{C} \text{ jest ciągłe.}$$

Zauważmy, że dla dowolnego $k = 1, \dots, 2d - 2$ pionowe odcinki o końcach w punktach $V_{r(k)}(\omega)$ oraz $\tilde{V}_{r(k)}(\omega)$ dzielą wielokąt $\mathcal{P}(\omega)$ na $2d - 3$ trapezów oraz dwa trójkąty (patrz rys. 1). Podamy teraz procedurę tworzenia triangulacji (M, ω) w obrębie tych trapezów i trójkątów.


 RYSUNEK 2. Triangulacja $\mathcal{Y}(\omega)$ dla wielokąta z rys. 1.

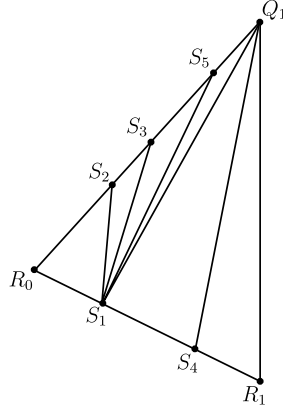
Wskazemy teraz trójkąty, które przychodzą w skład triangulacji $\mathcal{Y}(\omega)$. Rozważmy trójkąt zadany przez punkty $V_{r(0)} = 0, V_{r(1)}, \tilde{V}_{r(1)}$. Jeżeli $r(1) = 1$, to ten trójkąt należy do $\mathcal{Y}(\omega)$. Jeżeli $r(1) > 1$ i $\text{Im}(V_1(\omega)) > 0$ to połączmy odcinkami wszystkie $V_i(\omega)$ takie, że $i \leq r(1)$ i $\text{Im}(V_i(\omega)) < 0$ z punktem $V_1(\omega)$. Dla wszystkich $i \leq r(1)$ takich, że $\text{Im}(V_i(\omega)) > 0$, łączymy odcinkami $V_i(\omega)$ z punktem $V_{r(1)}(\omega)$ lub $\tilde{V}_{r(1)}(\omega)$, wybierając ten, który ma ujemną część urojoną. Jeżeli $r(1) \neq 1$ i $\text{Im}(V_1(\omega)) < 0$, to postępujemy w sposób symetryczny (patrz rys. 3). Wszystkie trójkąty które otrzymaliśmy w powyższej procedurze, dołączamy do $\mathcal{Y}(\omega)$. Poprzez zastosowanie pionowej symetrii osiowej, postępujemy analogicznie dla trójkąta $V_{r(2d-2)}(\omega), \tilde{V}_{r(2d-2)}(\omega), V_{r(2d-1)}(\omega)$.

Dla każdego $k = 1, \dots, 2d - 3$ rozważmy trapez o wierzchołkach $V_{r(k)}(\omega), V_{r(k+1)}(\omega), \tilde{V}_{r(k)}(\omega)$ i $\tilde{V}_{r(k+1)}(\omega)$. Przypomnijmy, że odcinki o końcach w punktach $V_{r(k)}(\omega)$ i $\tilde{V}_{r(k)}(\omega)$ oraz w punktach $V_{r(k)}(\omega)$ i $\tilde{V}_{r(k)}(\omega)$ są pionowe, a więc stanowią podstawy trapezu. W każdym z tych trapezów rozważmy przekątną łączącą lewy górny wierzchołek z prawym dolnym. Jeżeli $r(k+1) = r(k) + 1$, to oba powstałe w ten sposób trójkąty należą do $\mathcal{Y}(\omega)$. Jeżeli $r(k+1) > r(k) + 1$, to dla każdego $r(k) < i < r(k+1)$ łączymy odcinkiem $V_i(\omega)$ z prawym dolnym wierzchołkiem trapezu jeżeli $\text{Im}(V_i(\omega)) > 0$, natomiast jeśli $\text{Im}(V_i(\omega)) < 0$ to łączymy ten punkt z lewym górnym wierzchołkiem trapezu. Dołączamy powstałe w ten sposób trójkąty do $\mathcal{Y}(\omega)$. W ten sposób otrzymaliśmy triangulację $\mathcal{Y}(\omega)$ wielokąta $\mathcal{P}(\omega)$ składającą się z trójkątów, których wierzchołki są w punktach będącymi elementami $\mathcal{V}(\omega)$ (patrz rys. 2). Ze względu na to, że uporządkowanie elementów $\hat{\mathcal{V}}(\omega)$ jest takie samo dla wszystkich $\omega \in \mathcal{Z}_\zeta$, to liczba trójkątów w triangulacjach $\mathcal{Y}(\omega)$, $\omega \in \mathcal{Z}_\zeta$ jest również taka sama. Dokładniej, dla wszystkich $\omega \in \mathcal{Z}_\zeta$ trójkąty w każdej triangulacji $\mathcal{Y}(\omega)$ wyznaczone są przez punkty z $\mathcal{V}(\omega)$ o tych samych indeksach.

Zdefiniujmy teraz $\mathfrak{h}_\omega : (M, \omega) \rightarrow (M, \zeta)$ jako kawałkami afiniczne odwzorowanie takie, że

$$\mathfrak{h}_\omega(V_i(\omega)) = V_i(\zeta) \text{ dla każdego } i = 0, \dots, 6d - 5,$$

a każdy trójkąt z $\mathcal{Y}(\omega)$ z wierzchołkami $V_j(\omega), V_k(\omega), V_l(\omega)$ jest przesyłany afinicznie na trójkąt dany przez punkty $V_j(\zeta), V_k(\zeta), V_l(\zeta)$, należący do $\mathcal{Y}(\zeta)$. Zauważmy, że


 RYSUNEK 3. Fragment triangulacji $\mathcal{Y}(\omega)$ dla trójkąta z lewej strony.

odwzorowanie \mathfrak{h}_ω jest jednoznacznie zdefiniowane poprzez elementy zbioru $\mathcal{Y}(\omega)$ a ze względu na lemat 7.1 jest ono homeomorfizmem. Ponadto ponieważ $\Sigma \subset \mathcal{Y}(\omega)$, to mamy również, że elementy zbioru Σ są punktami stałymi odwzorowania \mathfrak{h}_ω . W ten sposób dla dowolnego $\omega \in \mathcal{Z}_\zeta$ skonstruowaliśmy kawałkami afiniczny homeomorfizm \mathfrak{h}_ω , który spełnia (i) za wyjątkiem ostatniej własności. Tą własnością, tzn. szacowaniem stałej Lipschitza \mathfrak{h}_ω , zajmiemy się w dalszej części dowodu. Otoczenie \mathcal{Z}_ζ będziemy zmniejszać do właściwego otoczenia \mathcal{U}_ζ tak, aby spełnione były pozostałe własności wymienione w lemacie. Zrobimy to w dwóch krokach.

Zauważmy, że ponieważ dla każdego $A \in \mathcal{Y}(\zeta)$ mamy $\mathfrak{h}_\omega^{-1}(A) \in \mathcal{Y}(\omega)$ oraz zachodzi (8.4), to odwzorowanie $\mathcal{Z}_\zeta \ni \omega \mapsto \lambda_\omega(\mathfrak{h}_\omega^{-1}(A)) \in \mathbb{R}_{>0}$ jest ciągle. Ponadto jeśli $\omega = \zeta$, to $\mathfrak{h}_\omega = Id$. Wybierzmy zatem $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$ takie, że

$$(8.5) \quad d_{Mod}(\zeta, \omega) < \varepsilon_2 \Rightarrow 1 - \varepsilon_\zeta < \frac{\lambda_\zeta(A)}{\lambda_\omega(\mathfrak{h}_\omega^{-1}(A))} < 1 + \varepsilon_\zeta \text{ dla każdego } A \in \mathcal{Y}(\zeta).$$

Oznaczmy $\tilde{\mathcal{U}}_\zeta := \{\omega \in \mathcal{Z}_\zeta; d_{Mod}(\zeta, \omega) < \varepsilon_2\}$. Załóżmy, że $\omega \in \tilde{\mathcal{U}}_\zeta$. Ponieważ \mathfrak{h}_ω jest homeomorfizmem kawałkami afinicznym, to $(\mathfrak{h}_\omega)_* \lambda_\omega$ jest miarą absolutnie ciągłą względem λ_ζ i posiada kawałkami stałą gęstość f_ω daną wzorem

$$(8.6) \quad f_\omega(x) = \frac{\lambda_\omega(\mathfrak{h}_\omega^{-1}(A))}{\lambda_\zeta(A)} \text{ dla każdego } x \in A \text{ oraz } A \in \mathcal{Y}(\zeta),$$

spełniająca

$$\frac{1}{1 + \varepsilon_\zeta} < f_\omega < \frac{1}{1 - \varepsilon_\zeta},$$

a więc zachodzi warunek (ii). Co więcej, zauważmy, że dla każdego $A \in \mathcal{Y}(\zeta)$ z ciągłości odwzorowania $\omega \mapsto \lambda_\omega(\mathfrak{h}_\omega^{-1}(A))$ oraz ze wzoru (8.6) wynika ciągłość przekształcenia

$$\tilde{\mathcal{U}}_\zeta \ni \omega \mapsto f_\omega \in L^1(M, \lambda_\zeta),$$

czyli zachodzi warunek (iii).

Niech $\omega, \bar{\omega} \in \tilde{\mathcal{U}}_\zeta$. Wtedy odwzorowanie $\mathfrak{h}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathfrak{h}_\omega : (M, \omega) \rightarrow (M, \bar{\omega})$ jest kawałkami afinicznym homeomorfizmem, który jest afiniczny na elementach $\mathcal{Y}(\omega)$ oraz

$$\mathfrak{h}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathfrak{h}_\omega(V_i(\omega)) = V_i(\bar{\omega}) \text{ dla każdego } i = 0, \dots, 6d - 5.$$

Rozważmy dowolny trójkąt $A \in \mathcal{Y}(\zeta)$ i niech $V_j(\zeta), V_k(\zeta), V_l(\zeta) \in \mathcal{Y}(\zeta)$ będą jego wierzchołkami. Wtedy $\text{lin}(\mathfrak{h}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathfrak{h}_\omega|_{\mathfrak{h}_\omega^{-1}A})$ jest macierzą postaci $B_A(\omega, \bar{\omega}) =$

$[b_{ij}(\omega, \bar{\omega})]_{i,j=1,2}$, gdzie

$$b_{11}(\omega, \bar{\omega}) = \frac{\operatorname{Re}(V_k(\bar{\omega}) - V_j(\bar{\omega})) \operatorname{Im}(V_i(\omega) - V_j(\omega)) - \operatorname{Re}(V_i(\bar{\omega}) - V_j(\bar{\omega})) \operatorname{Im}(V_k(\omega) - V_j(\omega))}{\operatorname{Re}(V_k(\omega) - V_j(\omega)) \operatorname{Im}(V_i(\omega) - V_j(\omega)) - \operatorname{Re}(V_i(\omega) - V_j(\omega)) \operatorname{Im}(V_k(\omega) - V_j(\omega))},$$

$$b_{12}(\omega, \bar{\omega}) = \frac{\operatorname{Re}(V_i(\bar{\omega}) - V_j(\bar{\omega})) \operatorname{Re}(V_k(\omega) - V_j(\omega)) - \operatorname{Re}(V_k(\bar{\omega}) - V_j(\bar{\omega})) \operatorname{Re}(V_i(\omega) - V_j(\omega))}{\operatorname{Re}(V_k(\omega) - V_j(\omega)) \operatorname{Im}(V_i(\omega) - V_j(\omega)) - \operatorname{Re}(V_i(\omega) - V_j(\omega)) \operatorname{Im}(V_k(\omega) - V_j(\omega))},$$

$$b_{21}(\omega, \bar{\omega}) = \frac{\operatorname{Im}(V_k(\bar{\omega}) - V_j(\bar{\omega})) \operatorname{Im}(V_i(\omega) - V_j(\omega)) - \operatorname{Im}(V_i(\bar{\omega}) - V_j(\bar{\omega})) \operatorname{Im}(V_k(\omega) - V_j(\omega))}{\operatorname{Re}(V_k(\omega) - V_j(\omega)) \operatorname{Im}(V_i(\omega) - V_j(\omega)) - \operatorname{Re}(V_i(\omega) - V_j(\omega)) \operatorname{Im}(V_k(\omega) - V_j(\omega))},$$

oraz

$$b_{22}(\omega, \bar{\omega}) = \frac{\operatorname{Re}(V_k(\omega) - V_j(\omega)) \operatorname{Im}(V_i(\bar{\omega}) - V_j(\bar{\omega})) - \operatorname{Re}(V_i(\omega) - V_j(\omega)) \operatorname{Im}(V_k(\bar{\omega}) - V_j(\bar{\omega}))}{\operatorname{Re}(V_k(\omega) - V_j(\omega)) \operatorname{Im}(V_i(\omega) - V_j(\omega)) - \operatorname{Re}(V_i(\omega) - V_j(\omega)) \operatorname{Im}(V_k(\omega) - V_j(\omega))}.$$

Zauważmy, że aby otrzymać wzór na $B_A(\bar{\omega}, \omega) = (B_A(\omega, \bar{\omega}))^{-1} = \operatorname{lin}(\mathfrak{h}_\omega^{-1} \circ \mathfrak{h}_{\bar{\omega}}|_{\mathfrak{h}_{\bar{\omega}}^{-1}A})$ wystarczy w powyższych wzorach zamienić ω na $\bar{\omega}$ i na odwrót. Zauważmy ponadto, że $B_A(\omega, \omega) = Id$.

Ustalmy $\omega \in \tilde{\mathcal{U}}_\zeta$ oraz $0 < \epsilon < \frac{1}{6}$. Zauważmy, że z (8.4) wynika, że dla każdego $A \in \mathcal{Y}(\zeta)$ odwzorowania

$$(8.7) \quad \bar{\omega} \mapsto B_A(\omega, \bar{\omega}) \quad \text{oraz} \quad \bar{\omega} \mapsto B_A(\bar{\omega}, \omega) \quad \text{są ciągłe.}$$

Zatem istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego $A \in \mathcal{Y}(\zeta)$ zachodzi

$$(8.8) \quad d_{Mod}(\omega, \bar{\omega}) < \delta \Rightarrow \|Id - B_A(\omega, \bar{\omega})\| < \epsilon \wedge \|Id - B_A(\bar{\omega}, \omega)\| < \epsilon.$$

Stąd wynika, że dla każdego $\bar{\omega} \in \tilde{\mathcal{U}}_\zeta$ spełniającego $d_{Mod}(\omega, \bar{\omega}) < \delta$ kawałkami afiniczne homeomorfizmy $\mathfrak{h}_\omega^{-1} \circ \mathfrak{h}_{\bar{\omega}}$ oraz $\mathfrak{h}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathfrak{h}_\omega$ są lipschitzowskie ze stałą Lipschitza $1 + \epsilon$. Wykazaliśmy zatem, że spełniony jest warunek (iv).

Biorąc $\epsilon = 1/10$ oraz $\bar{\omega} = \zeta$ w (8.8), możemy znaleźć $0 < \epsilon_3 < \epsilon_2$ takie, że dla każdego $\omega \in \tilde{\mathcal{U}}_\zeta$ spełniającego $d_{Mod}(\omega, \zeta) < \epsilon_3$ zachodzi

$$\|Id - B_A(\omega, \zeta)\| < \frac{11}{10} \wedge \|Id - B_A(\zeta, \omega)\| < \frac{11}{10} \quad \text{dla każdego} \quad A \in \mathcal{Y}(\zeta).$$

Zatem jeśli $\mathcal{U}_\zeta := \{\omega \in \tilde{\mathcal{U}}_\zeta; d_{Mod}(\zeta, \omega) < \epsilon_3\}$ oraz $\omega \in \mathcal{U}_\zeta$, to homeomorfizmy \mathfrak{h}_ω i \mathfrak{h}_ω^{-1} są lipschitzowskie ze stałą $\frac{11}{10}$, czyli spełniony jest ostatni warunek z punktu (i).

Aby udowodnić warunek (v), zauważmy, że zbiór punktów, które nie znajdują się w 4ϵ -owym otoczeniu przychodzących i wychodzących odcinków separatrys długości 1, są elementami zbioru $\tilde{M}(\omega) \subset M$. Z tego wynika, że dopełnienie $\tilde{M}(\omega)^c$ ma miarę λ_ω co najwyżej $8(1 + 4\epsilon)\epsilon$ razy liczba przychodzących i wychodzących separatrys (czyli $2 \sum_{i=1}^m (\kappa_i + 1)$), co wyznacza wartość stałej $K := 32 \sum_{i=1}^m (\kappa_i + 1)$. Wtedy dla każdego $\omega \in \mathcal{U}_\zeta$ zachodzi $\lambda_\omega(\tilde{M}(\omega)) > 1 - K\epsilon$.

Ustalmy $\omega \in \mathcal{U}_\zeta$. Dla każdej $\bar{\omega} \in \mathcal{U}_\zeta$ oznaczmy przez $X^{\bar{\omega}} : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ jednostkowe stałe pionowe pole wektorowe na $(M, \bar{\omega})$ zdefiniowane na $M \setminus \Sigma$, równe $(0, 1)$, które wyznacza potok $\mathcal{T}^{\bar{\omega}}$. Rozważmy potok $\mathcal{S}^{\bar{\omega}, \omega}$ będący przeniesieniem potoku $\mathcal{T}^{\bar{\omega}}$ na (M, ω) poprzez odwzorowanie $\mathfrak{h}_\omega^{-1} \circ \mathfrak{h}_{\bar{\omega}}$, tzn.

$$\mathcal{S}_t^{\bar{\omega}, \omega} = \mathfrak{h}_\omega^{-1} \circ \mathfrak{h}_{\bar{\omega}} \circ \mathcal{T}_t^{\bar{\omega}} \circ \mathfrak{h}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathfrak{h}_\omega \quad \text{dla każdego} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Jest to potok, którego orbity są ciągłe i kawałkami liniowe, są one liniowe na trójkątach będących elementami triangulacji $\mathcal{Y}(\omega)$.

Rozważmy zbiór $\widehat{M}(\omega) \subset M \setminus \Sigma$ punktów $x \in M \setminus \Sigma$, dla których orbita potoku $\mathcal{S}^{\bar{\omega}, \omega}$ jest liniowa na pewnym odcinku czasu wokół zero. Jeśli $x \in \widehat{M}(\omega)$ zawarty jest w trójkącie $\mathfrak{h}_\omega^{-1}(A) \in \mathcal{Y}(\omega)$, to fragment orbity x na pewnym odcinku czasu wokół

zera jest liniowy i zawarty w $\mathfrak{h}_\omega^{-1}(A)$. Ponieważ $\mathfrak{h}_\omega^{-1} \circ \mathfrak{h}_{\bar{\omega}} : \mathfrak{h}_{\bar{\omega}}^{-1}(A) \rightarrow \mathfrak{h}_\omega^{-1}(A)$ jest odwzorowaniem afinicznym postaci

$$(B_A(\bar{\omega}, \omega), v)x = B_A(\bar{\omega}, \omega)x + v,$$

gdzie $v \in \mathbb{R}^2$, zatem na tym odcinku czasu mamy

$$\mathcal{S}_t^{\bar{\omega}, \omega} x = (B_A(\bar{\omega}, \omega), v) \circ \mathcal{T}_t^{\bar{\omega}} \circ (B_A(\bar{\omega}, \omega), v)^{-1} x.$$

Wtedy

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{S}_t^{\bar{\omega}, \omega}(x))|_{t=0} = B_A(\bar{\omega}, \omega) \frac{d}{dt} \mathcal{T}_t^{\bar{\omega}}((B_A(\bar{\omega}, \omega), v)^{-1} x)|_{t=0} = B_A(\bar{\omega}, \omega)(0, 1).$$

Należy ponadto zaznaczyć, że jeśli $x \in \widehat{M}(\omega)$ należy do dwóch trójkątów $\mathfrak{h}_{\bar{\omega}}^{-1}(A), \mathfrak{h}_{\bar{\omega}'}^{-1}(A) \in \mathcal{Y}(\bar{\omega})$, to fragment orbity leży na wspólnej krawędzi tych trójkątów oraz wektory $B_A(\bar{\omega}, \omega)(0, 1)$ oraz $B_{A'}(\bar{\omega}, \omega)(0, 1)$ są identyczne.

Rozważmy zatem pole wektorowe $Y^{\bar{\omega}, \omega}$ na $\widehat{M}(\omega)$ takie, że

$$Y^{\bar{\omega}, \omega}(x) = B_A(\bar{\omega}, \omega)(0, 1), \quad \text{gdy } x \in \mathfrak{h}_\omega^{-1}A.$$

Wtedy jeśli $d_{Mod}(\omega, \bar{\omega}) < \delta$, to z (8.8) otrzymujemy, że

$$(8.9) \quad \|(0, 1) - Y^{\bar{\omega}, \omega}(x)\| < \epsilon \quad \text{dla wszystkich } x \in \widehat{M}(\omega).$$

Załóżmy, że $x \in \widehat{M}(\omega)$ oraz $t_-(x) < 0 < t_+(x)$ są takie, że fragment orbity $\{\mathcal{S}_t^{\bar{\omega}, \omega}(x)\}_{t \in [t_-(x), t_+(x)]}$ jest zawarty w $\mathfrak{h}_\omega^{-1}A$ oraz w dziedzinie pewnej mapy atlasu definiującego powierzchnię translacyjną (M, ω) . Wtedy dla każdego $t_-(x) \leq t \leq t_+(x)$ zachodzi

$$(8.10) \quad \mathcal{S}_t^{\bar{\omega}, \omega}(x) = x + tB_A(\bar{\omega}, \omega)(0, 1) = x + \int_0^t Y^{\bar{\omega}, \omega}(\mathcal{S}_s^{\bar{\omega}, \omega}(x)) ds.$$

Niech $x \in M \setminus \Sigma$ oraz wybierzmy dowolne liczby $t_-(x) \leq 0 \leq t_+(x)$ takie, że fragment orbity $\{\mathcal{S}_t^{\bar{\omega}, \omega}(x)\}_{t \in [t_-(x), t_+(x)]}$ jest zawarty w dziedzinie pewnej mapie atlasu definiującego powierzchnię translacyjną (M, ω) . Wtedy jako, że potok $\mathcal{S}^{\bar{\omega}, \omega}$ ma ciągłe orbity, to z (8.10) otrzymujemy, że w lokalnych współrzędnych zachodzi

$$\mathcal{S}_t^{\bar{\omega}, \omega}(x) = x + \int_0^t Y^{\bar{\omega}, \omega}(\mathcal{S}_s^{\bar{\omega}, \omega}(x)) ds \quad \text{dla każdego } t \in [t_-(x), t_+(x)].$$

Rzeczywiście, wystarczy podzielić przedział $[0, t]$ na fragmenty, w których orbita jest zawarta w elementach triangulacji, a następnie skorzystać z (8.10) oraz z ciągłości orbit potoku $\mathcal{S}^{\bar{\omega}, \omega}$. Zatem, korzystając z (8.9), dla dowolnego $t \in [t_-(x), t_+(x)]$ mamy

$$(8.11) \quad \begin{aligned} d_\omega(\mathcal{T}_t^\omega x, \mathcal{S}_t^{\bar{\omega}, \omega} x) &\leq \left\| x + t(0, 1) - \left(x + \int_0^t Y^{\bar{\omega}, \omega}(\mathcal{S}_s^{\bar{\omega}, \omega}(x)) ds \right) \right\| \\ &\leq \int_0^t \|(0, 1) - Y^{\bar{\omega}, \omega}(\mathcal{S}_s^{\bar{\omega}, \omega}(x))\| ds < |t|\epsilon. \end{aligned}$$

Niech $0 < \epsilon < \frac{1}{6} \min(1, sys(\omega))$ oraz $x \in \widehat{M}(\omega)$. Niech $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$ będą takimi liczbami, że $t_{i+1} - t_i < \epsilon$ dla $i = 0, \dots, n-1$. Używając indukcji matematycznej wykażemy teraz, że

$$d_\omega(\mathcal{T}_t^\omega x, \mathcal{S}_t^{\bar{\omega}, \omega}(x)) < \epsilon \quad \text{dla } t \in [0, 1].$$

Jako, że $x \in \widehat{M}(\omega)$, to $\bigcup_{0 \leq t \leq t_1} B(\mathcal{T}_t^\omega(x), 2\epsilon) \subset M \setminus \Sigma$ oraz jest to zbiór zawarty w kuli otwartej o promieniu $\frac{5}{2}\epsilon$. Ponieważ $\epsilon < \frac{1}{6} sys(\omega)$ to $\bigcup_{0 \leq t \leq t_1} B(\mathcal{T}_t^\omega(x), 2\epsilon)$ jest zawarty

w dziedzinie jednej z map definiujących strukturę translacyjną (M, ω) . Wówczas z punktu (iv) uzyskujemy, że dla $t \in [0, t_1]$ zachodzi

$$d_\omega(x, \mathcal{S}_t^{\bar{\omega}, \omega}(x)) < (1 + \epsilon)d_{\bar{\omega}}(\mathfrak{h}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathfrak{h}_\omega(x), \mathcal{T}_t^{\bar{\omega}} \circ \mathfrak{h}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathfrak{h}_\omega(x)) \leq (1 + \epsilon)t < \frac{7}{6}t < \frac{7}{6}\epsilon.$$

Zatem dla każdego $t \in [0, t_1]$ zachodzi

$$\mathcal{S}_t^{\bar{\omega}, \omega}(x) \in \bigcup_{0 \leq t \leq t_1} B(\mathcal{T}_t^\omega(x), 2\epsilon) \subset M \setminus \Sigma.$$

Stąd oraz z (8.11) uzyskujemy

$$d_\omega(\mathcal{T}_t^\omega(x), \mathcal{S}_t^{\bar{\omega}, \omega}(x)) < t_1\epsilon,$$

dla $t \in [0, t_1]$.

Założmy teraz, że dla pewnego $1 \leq m < n$ wykazaliśmy

$$(8.12) \quad d_\omega(\mathcal{T}_t^\omega(x), \mathcal{S}_t^{\bar{\omega}, \omega}(x)) < t_m\epsilon \quad \text{dla } t \in [0, t_m].$$

Wykażemy teraz, że

$$d_\omega(\mathcal{T}_t^\omega(x), \mathcal{S}_t^{\bar{\omega}, \omega}(x)) < t_{m+1}\epsilon \quad \text{dla } t \in [t_m, t_{m+1}].$$

Zauważmy, że skoro $x \in \widetilde{M}(\omega)$, to zbiór $\bigcup_{t_m \leq t \leq t_{m+1}} B(\mathcal{T}_t^\omega(x), \frac{13}{6}\epsilon) \subset M \setminus \Sigma$ jest zawarty w kuli otwartej o promieniu $\frac{8}{3}\epsilon$ o środku w punkcie $\mathcal{T}_{(t_m+t_{m+1})/2}^\omega x$ także zawartej w $M \setminus \Sigma$. Stąd oraz z tego, że $\epsilon < \frac{1}{6}\text{sys}(\omega)$, tenże zbiór zawiera się w dziedzinie jednej z map definiujących strukturę translacyjną (M, ω) .

Zauważmy, że dla $t \in [t_m, t_{m+1}]$ zachodzi

$$\begin{aligned} d_\omega(\mathcal{T}_t^\omega(x), \mathcal{T}_{t-t_m}^\omega(\mathcal{S}_{t_m}^{\bar{\omega}, \omega}(x))) &\leq d_\omega(\mathcal{T}_t^\omega(x), \mathcal{S}_{t_m}^{\bar{\omega}, \omega}(x)) + d_\omega(\mathcal{S}_{t_m}^{\bar{\omega}, \omega}(x), \mathcal{T}_{t-t_m}^\omega(\mathcal{S}_{t_m}^{\bar{\omega}, \omega}(x))) \\ &< t_m\epsilon + (t - t_m) < 2\epsilon. \end{aligned}$$

Ponadto korzystając z (iv) uzyskujemy

$$\begin{aligned} d_\omega(\mathcal{T}_{t_m}^\omega(x), \mathcal{S}_{t-t_m}^{\bar{\omega}, \omega}(\mathcal{S}_{t_m}^{\bar{\omega}, \omega}(x))) &\leq d_\omega(\mathcal{T}_{t_m}^\omega(x), \mathcal{S}_{t_m}^{\bar{\omega}, \omega}(x)) + d_\omega(\mathcal{S}_{t_m}^{\bar{\omega}, \omega}(x), \mathcal{S}_{t-t_m}^{\bar{\omega}, \omega}(\mathcal{S}_{t_m}^{\bar{\omega}, \omega}(x))) \\ &< t_m\epsilon + (1 + \epsilon)d_{\bar{\omega}}(\mathfrak{h}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathfrak{h}_{\bar{\omega}}(\mathcal{S}_{t_m}^{\bar{\omega}, \omega}(x)), \mathcal{T}_{t-t_m}^{\bar{\omega}}(\mathfrak{h}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathfrak{h}_{\bar{\omega}}(\mathcal{S}_{t_m}^{\bar{\omega}, \omega}(x)))) \\ &\leq t_m\epsilon + (1 + \epsilon)(t - t_m) < \frac{13}{6}\epsilon. \end{aligned}$$

Zatem dla $t \in [t_m, t_{m+1}]$ zachodzi

$$(8.13) \quad \mathcal{T}_{t-t_m}^\omega(\mathcal{S}_{t_m}^{\bar{\omega}, \omega}(x)), \mathcal{S}_{t-t_m}^{\bar{\omega}, \omega}(\mathcal{S}_{t_m}^{\bar{\omega}, \omega}(x)) \in B(\mathcal{T}_{t_m}^\omega(x), \frac{13}{6}\epsilon) \subset M \setminus \Sigma.$$

Stąd oraz z tego, że kula $B(\mathcal{T}_{t_m}^\omega(x), \frac{13}{6}\epsilon)$ jest zawarta w dziedzinie jednej z map definiujących strukturę translacyjną (M, ω) , korzystając z (8.11) uzyskujemy, że dla $t \in [t_m, t_{m+1}]$ zachodzi

$$(8.14) \quad d_\omega(\mathcal{T}_{t-t_m}^\omega(\mathcal{S}_{t_m}^{\bar{\omega}, \omega}(x)), \mathcal{S}_t^{\bar{\omega}, \omega}(x)) \leq (t - t_m)\epsilon \leq (t_{m+1} - t_m)\epsilon.$$

Korzystając z faktu, że $x \in \widetilde{M}(\omega)$, z (8.12) oraz z lematu 8.1 dla $x := \mathcal{T}_{t_m}^\omega(x)$, $y := \mathcal{S}_{t_m}^{\bar{\omega}, \omega}(x)$, $\epsilon := t_m\epsilon$ oraz $a := t_{m+1} - t_m$ uzyskujemy

$$d_\omega(\mathcal{T}_{t-t_m}^\omega(\mathcal{S}_{t_m}^{\bar{\omega}, \omega}(x)), \mathcal{T}_t^\omega(x)) < t_m\epsilon \quad \text{dla każdego } t \in [t_m, t_{m+1}].$$

To razem z (8.14) implikuje, że dla każdego $t \in [t_m, t_{m+1}]$ zachodzi

$$\begin{aligned} d_\omega(\mathcal{T}_t^\omega(x), \mathcal{S}_t^{\bar{\omega}, \omega}(x)) &\leq d_\omega(\mathcal{T}_{t-t_m}^\omega(\mathcal{S}_{t_m}^{\bar{\omega}, \omega}(x)), \mathcal{T}_t^\omega(x)) + d_\omega(\mathcal{T}_{t-t_m}^\omega(\mathcal{S}_{t_m}^{\bar{\omega}, \omega}(x)), \mathcal{S}_t^{\bar{\omega}, \omega}(x)) \\ &< t_m \epsilon + (t_{m+1} - t_m) \epsilon = t_{m+1} \epsilon, \end{aligned}$$

co kończy rozumowanie indukcyjne. Wykazaliśmy w ten sposób, że dla każdego $t \in [0, 1]$ mamy

$$d_\omega(\mathcal{T}_t^\omega(x), \mathcal{S}_t^{\bar{\omega}, \omega}(x)) < \epsilon.$$

Analogicznie możemy wykazać, że dla każdego $t \in [-1, 0]$ powyższa nierówność także zachodzi. Udowodniliśmy tym samym (8.1).

Skoro $x \in \widetilde{M}(\omega)$, to korzystając z (8.1) otrzymujemy, że dla każdego $\sigma \in \Sigma$ oraz $t \in [-1, 1]$ mamy

$$d_\omega(\sigma, \mathcal{S}_t^{\bar{\omega}, \omega}(x)) \geq d_\omega(\sigma, \mathcal{T}_t^\omega(x)) - d_\omega(\mathcal{T}_t^\omega(x), \mathcal{S}_t^{\bar{\omega}, \omega}(x)) > 4\epsilon - \epsilon = 3\epsilon.$$

To kończy dowód (8.2), a zatem i całego lematu. \square

LEMAT 8.3. *Niech $\omega \in \mathcal{M}(M, \Sigma, \kappa)$ i niech D będzie prostokątem w (M, ω) . Dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdej mierzalnej funkcji $F : D \rightarrow (M, \omega)$, spełniającej*

$$(8.15) \quad F_*(\lambda_\omega|_D) = \lambda_\omega|_{F(D)}$$

oraz

$$(8.16) \quad \sup_{x \in D} d_\omega(x, F(x)) < \delta,$$

mamy

$$(8.17) \quad \lambda_\omega(D) - \lambda_\omega(D \cap F(D)) < \epsilon.$$

DOWÓD. Niech $\epsilon > 0$. Zakładamy, że $\epsilon < \lambda_\omega(D)$, gdyż w przeciwnym wypadku rezultat jest trywialny. Wybierzmy $\delta > 0$ taką, że zbiór

$$\hat{D} := \{x \in D; \forall y \in M \ d_\omega(x, y) < \delta \Rightarrow y \in D\}$$

ma miarę $\lambda_\omega(\hat{D}) > \lambda_\omega(D) - \epsilon$. Wtedy dla każdej mierzalnej funkcji $F : D \rightarrow (M, \omega)$ spełniającej (8.16) otrzymujemy, że $F(\hat{D}) \subset D$. Stąd i z (8.15) uzyskujemy

$$\lambda_\omega(D \cap F(D)) \geq \lambda_\omega(F(\hat{D})) \geq \lambda_\omega(\hat{D}) > \lambda_\omega(D) - \epsilon.$$

\square

Przystąpimy teraz do dowodu głównego twierdzenia w tym rozdziale.

TWIERDZENIE 8.4. *Niech $\zeta \in \mathcal{M}(M, \Sigma, \kappa)$ i niech \mathcal{U}_ζ będzie otwartym otoczeniem danym przez lemat 8.2. Wtedy istnieje ciągle przekształcenie $\mathfrak{S} : \mathcal{U}_\zeta \rightarrow \text{Flow}(M, \lambda_\zeta)$ takie, że dla każdego $\omega \in \mathcal{U}_\zeta$ pionowy potok translacyjny na (M, ω) jest izomorficzny w sensie teoriomiarowym poprzez homeomorfizm z zachowującym miarę potokiem $\mathfrak{S}(\omega)$ na (M, λ_ζ) .*

DOWÓD. Z punktów (i) i (ii) w lemacie 8.2, dla każdego $\omega \in \mathcal{U}_\zeta$ istnieje homeomorfizm $\mathfrak{h}_\omega : M \rightarrow M$, dla którego elementy zbioru Σ są punktami stałymi oraz $(\mathfrak{h}_\omega)_* \lambda_\omega = f_\omega \lambda_\zeta$, gdzie f_ω spełnia $\frac{1}{1+\epsilon_\zeta} < f_\omega < \frac{1}{1-\epsilon_\zeta}$. Możemy zatem zastosować twierdzenie 7.10, aby uzyskać homeomorfizm $\mathcal{H}_\omega := \mathcal{H}_{f_\omega} : M \rightarrow M$, który zależy w sposób ciągły od f_ω oraz $(\mathcal{H}_{f_\omega})_*(f_\omega \lambda_\zeta) = \lambda_\zeta$. Z punktu (iii) w lemacie

8.2, otrzymujemy, że odwzorowanie $\omega \mapsto f_\omega$ jest ciągłe. Zatem jako złożenie dwóch odwzorowań ciągłych, przekształcenie

$$(8.18) \quad \mathcal{U}_\zeta \ni \omega \mapsto \mathcal{H}_\omega \in \text{Hom}(M) \text{ jest ciągłe.}$$

Zadamy teraz homeomorfizm na M wzorem

$$\mathcal{K}_\omega := \mathcal{H}_\omega \circ \mathfrak{h}_\omega.$$

Zauważmy, że $(\mathcal{K}_\omega)_* \lambda_\omega = \lambda_\zeta$, natomiast potok $\mathcal{K}_\omega \circ \mathcal{T}^\omega \circ \mathcal{K}_\omega^{-1}$ zachowuje miarę λ_ζ . Zatem aby zakończyć dowód, pokażemy teraz, że odwzorowanie

$$\mathcal{U}_\zeta \ni \omega \mapsto \mathcal{K}_\omega \circ \mathcal{T}^\omega \circ \mathcal{K}_\omega^{-1} =: \mathfrak{S}(\omega) \in \text{Flow}(M, \lambda_\zeta)$$

jest ciągłe.

Ustalmy $\omega \in \mathcal{U}_\zeta$. Udowodnimy teraz ciągłość odwzorowania \mathfrak{S} w punkcie ω . Na (M, ω) wybierzmy rodzinę \mathcal{Q} składającą się z otwartych prostokątów, taką że \mathcal{Q} generuje σ -algebrę borelowską na M . Możemy zakładać, że dla każdego $Q \in \mathcal{Q}$ mamy $\lambda_\omega(Q) \leq \frac{1}{4}$. Zauważmy, że przekształcenie $\mathcal{K}_\omega^{-1} : (M, \lambda_\zeta) \rightarrow (M, \lambda_\omega)$ jest teoriomiarowym izomorfizmem. Stąd, ze względu na uwagę 2.11, aby dowieść, że \mathfrak{S} jest ciągłe, wystarczy udowodnić, że odwzorowanie $\mathcal{U}_\zeta \ni \bar{\omega} \mapsto \mathcal{K}_\omega^{-1} \circ \mathfrak{S}(\bar{\omega}) \circ \mathcal{K}_\omega \in \text{Flow}(X, \lambda_\omega)$ jest ciągłe. Innymi słowy, wystarczy pokazać, że dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ i dla każdego prostokąta $Q \in \mathcal{Q}$, istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że

$$(8.19) \quad d_{\text{Mod}}(\omega, \bar{\omega}) < \delta \Rightarrow \sup_{t \in [-1, 1]} \lambda_\omega(\mathcal{T}_t^\omega Q \Delta \mathcal{K}_\omega^{-1} \circ \mathfrak{S}(\bar{\omega})_t \circ \mathcal{K}_\omega Q) < \varepsilon.$$

Ustalmy $Q \in \mathcal{Q}$ i $\varepsilon > 0$. Wykażemy teraz (8.19) dla Q . Oznaczmy przez k ilość przecięć prostokąta Q z przychodzącymi i wychodzącymi odcinkami separatrys długości 2 startujących z punktów osobliwych $\sigma \in \Sigma$. Poprzez ewentualne wydłużenie tych odcinków, otrzymujemy odcinki $v_j \subset Q$ dla $j = 1, \dots, k$ takie, że punkty końcowe v_j leżą na poziomych krawędziach Q . Wybierzmy liczbę $0 < \varepsilon_Q < \varepsilon$ taką, że podzbiór $\tilde{Q} \subseteq Q$ otrzymany z Q poprzez wycięcie wszystkich prostokątów o szerokości $4\varepsilon_Q$, dla których v_j jest jedną z pionowych krawędzi, spełnia

$$(8.20) \quad \lambda_\omega(\tilde{Q}) > (1 - \varepsilon)\lambda_\omega(Q).$$

Zauważmy, że \tilde{Q} jest sumą $l \leq k + 1$ prostokątów D_j dla $j = 1, \dots, l$. Z lematu 8.3, istnieje liczba $\gamma > 0$ taka, że dla każdego $j = 1, \dots, l$ i dla każdego odwzorowania $F : D_j \rightarrow M$ takiego, że $F_*(\lambda_\omega|_{D_j}) = \lambda_\omega|_{F(D_j)}$ oraz $\sup_{x \in D_j} d_\omega(x, F(x)) < 4\gamma$ mamy

$$(8.21) \quad \lambda_\omega(D_j \cap F(D_j)) > (1 - \varepsilon)\lambda_\omega(D_j).$$

Rozważmy $0 < \varepsilon < \min\{\gamma, \varepsilon_Q\}$. Z (8.18) otrzymujemy, że $\bar{\omega} \mapsto \mathcal{H}_{\bar{\omega}}$ jest odwzorowaniem ciągłym, a zatem przekształcenie $\bar{\omega} \mapsto \mathcal{H}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathcal{H}_\omega$ także jest ciągłe. Stąd możemy wybrać $\delta > 0$ taką, że dla każdej struktury translacyjnej $\bar{\omega} \in \mathcal{U}_\zeta$ zachodzi następująca implikacja

$$(8.22) \quad d_{\text{Mod}}(\omega, \bar{\omega}) < \delta \implies \left(\sup_{x \in M} d_\zeta(\mathcal{H}_\omega^{-1} \circ \mathcal{H}_{\bar{\omega}}(x), x) < \varepsilon \quad \wedge \quad \sup_{x \in M} d_\zeta(\mathcal{H}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathcal{H}_\omega(x), x) < \varepsilon \right).$$

Ponadto, stosując punkt (iv) z lematu 8.2 dla ε oraz wybierając mniejszą $\delta > 0$, jeżeli zajdzie taka konieczność, uzyskujemy, że $d_{\text{Mod}}(\omega, \bar{\omega}) < \delta$ implikuje lipschitzowskość kawałkami afinicznymi homeomorfizmów $\mathfrak{h}_\omega^{-1} \circ \mathfrak{h}_{\bar{\omega}} : (M, \bar{\omega}) \rightarrow (M, \omega)$ oraz $\mathfrak{h}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathfrak{h}_\omega : (M, \omega) \rightarrow (M, \bar{\omega})$ ze stałą $1 + \varepsilon$.

Odtąd będziemy zakładać, że $d_{Mod}(\bar{\omega}, \omega) < \delta$. Wówczas punkt (v) z lematu 8.2 implikuje, że zbiór $\widetilde{M}(\omega)$ spełnia $\lambda_\omega(\widetilde{M}(\omega)) > 1 - K\epsilon$ oraz

$$(8.23) \quad d_\omega(\mathcal{T}_t^\omega(x), \mathfrak{h}_\omega^{-1} \circ \mathfrak{h}_{\bar{\omega}} \circ \mathcal{T}_t^{\bar{\omega}} \circ \mathfrak{h}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathfrak{h}_\omega(x)) < \epsilon \text{ dla } x \in \widetilde{M}(\omega) \text{ dla każdego } t \in [-1, 1].$$

Także z punktu (v) w lemacie 8.2 otrzymujemy, że dla każdego $\sigma \in \Sigma$ mamy

$$(8.24) \quad d_\omega(\sigma, \mathfrak{h}_\omega^{-1} \circ \mathfrak{h}_{\bar{\omega}} \circ \mathcal{T}_t^{\bar{\omega}} \circ \mathfrak{h}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathfrak{h}_\omega(x)) > 3\epsilon \text{ dla } x \in \widetilde{M}(\omega) \text{ dla każdego } t \in [-1, 1].$$

Skoro $\epsilon < \epsilon_Q$, to z definicji $\widetilde{M}(\omega)$ mamy, że $\widetilde{Q} \subset \widetilde{M}(\omega)$.

Oszacujemy teraz odległość pomiędzy orbitami potoków $\mathfrak{h}_\omega^{-1} \circ \mathfrak{h}_{\bar{\omega}} \circ \mathcal{T}_t^{\bar{\omega}} \circ \mathfrak{h}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathfrak{h}_\omega$ oraz

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\omega^{-1} \circ \mathfrak{S}(\bar{\omega}) \circ \mathcal{K}_\omega &= \mathcal{K}_\omega^{-1} \circ \mathcal{K}_{\bar{\omega}} \circ \mathcal{T}_t^{\bar{\omega}} \circ \mathcal{K}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathcal{K}_\omega \\ &= \mathfrak{h}_\omega^{-1} \circ \mathcal{H}_\omega^{-1} \circ \mathcal{H}_{\bar{\omega}} \circ \mathfrak{h}_{\bar{\omega}} \circ \mathcal{T}_t^{\bar{\omega}} \circ \mathfrak{h}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathcal{H}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathcal{H}_\omega \circ \mathfrak{h}_\omega. \end{aligned}$$

Z (8.22) otrzymujemy, że

$$d_\zeta(\mathfrak{h}_\omega(x), \mathcal{H}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathcal{H}_\omega \circ \mathfrak{h}_\omega(x)) < \epsilon$$

dla każdego $x \in M$. Z punktu (i) w lemacie 8.2, $\mathfrak{h}_{\bar{\omega}}^{-1} : (M, \zeta) \rightarrow (M, \omega)$ jest lipschitzowski ze stałą $\frac{11}{10}$. Zatem otrzymujemy

$$(8.25) \quad d_\omega(\mathfrak{h}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathfrak{h}_\omega(x), \mathfrak{h}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathcal{H}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathcal{H}_\omega \circ \mathfrak{h}_\omega(x)) < \frac{11}{10}\epsilon \text{ dla każdego } x \in M.$$

Skoro $\mathfrak{h}_\omega^{-1} \circ \mathfrak{h}_{\bar{\omega}}$ jest odwzorowaniem lipschitzowskim ze stałą $1 + \epsilon$, które ponadto ustala punkty z Σ , to z (8.24) wynika, że dla każdego $x \in \widetilde{M}(\omega)$ zachodzi

$$\begin{aligned} &\min_{\sigma \in \Sigma} \inf_{t \in [-1, 1]} d_{\bar{\omega}}(\mathcal{T}_t^{\bar{\omega}} \circ \mathfrak{h}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathfrak{h}_\omega(x), \sigma) \\ &\geq \frac{1}{1 + \epsilon} \min_{\sigma \in \Sigma} \inf_{t \in [-1, 1]} d_{\bar{\omega}}(\mathfrak{h}_\omega^{-1} \circ \mathfrak{h}_{\bar{\omega}}(x) \circ \mathcal{T}_t^{\bar{\omega}} \circ \mathfrak{h}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathfrak{h}_\omega(x), \sigma) > \frac{3\epsilon}{1 + \epsilon} > 2\epsilon. \end{aligned}$$

dla każdego $x \in \widetilde{M}(\omega)$. Stąd, z (8.25) oraz z lematu 8.1 dla $x := \mathfrak{h}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathfrak{h}_\omega(x)$, $y := \mathfrak{h}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathcal{H}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathcal{H}_\omega \circ \mathfrak{h}_\omega(x)$, $\epsilon := \frac{11}{10}\epsilon$ oraz $a = \pm 1$ uzyskujemy

$$d_\omega(\mathcal{T}_t^{\bar{\omega}}(\mathfrak{h}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathfrak{h}_\omega(x)), \mathcal{T}_t^{\bar{\omega}} \circ \mathfrak{h}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathcal{H}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathcal{H}_\omega \circ \mathfrak{h}_\omega(x)) < \frac{11}{10}\epsilon,$$

dla $t \in [-1, 1]$ i dla każdego $x \in \widetilde{M}(\omega)$. Skoro $\mathfrak{h}_{\bar{\omega}} : (M, \bar{\omega}) \rightarrow (M, \zeta)$ jest odwzorowaniem lipschitzowskim ze stałą $\frac{11}{10}$, to z tego wynika, że

$$d_\zeta(\mathfrak{h}_{\bar{\omega}} \circ \mathcal{T}_t^{\bar{\omega}} \circ \mathfrak{h}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathfrak{h}_\omega(x), \mathfrak{h}_{\bar{\omega}} \circ \mathcal{T}_t^{\bar{\omega}} \circ \mathfrak{h}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathcal{H}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathcal{H}_\omega \circ \mathfrak{h}_\omega(x)) < \frac{121}{100}\epsilon.$$

Poprzez ponowne użycie (8.22) uzyskujemy, że

$$d_\zeta(\mathfrak{h}_{\bar{\omega}} \circ \mathcal{T}_t^{\bar{\omega}} \circ \mathfrak{h}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathfrak{h}_\omega(x), \mathcal{H}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathcal{H}_{\bar{\omega}} \circ \mathfrak{h}_{\bar{\omega}} \circ \mathcal{T}_t^{\bar{\omega}} \circ \mathfrak{h}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathcal{H}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathcal{H}_\omega \circ \mathfrak{h}_\omega(x)) < \frac{221}{100}\epsilon.$$

Skoro \mathfrak{h}_ω^{-1} również jest odwzorowaniem lipschitzowskim ze stałą $\frac{11}{10}$, to otrzymujemy, że dla każdego $x \in \widetilde{M}(\omega)$ oraz $t \in [-1, 1]$ zachodzi

$$d_\omega(\mathfrak{h}_\omega^{-1} \circ \mathfrak{h}_{\bar{\omega}} \circ \mathcal{T}_t^{\bar{\omega}} \circ \mathfrak{h}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathfrak{h}_\omega(x), \mathfrak{h}_\omega^{-1} \circ \mathcal{H}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathcal{H}_{\bar{\omega}} \circ \mathfrak{h}_{\bar{\omega}} \circ \mathcal{T}_t^{\bar{\omega}} \circ \mathfrak{h}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathcal{H}_{\bar{\omega}}^{-1} \circ \mathcal{H}_\omega \circ \mathfrak{h}_\omega(x)) < \frac{2431}{1000}\epsilon.$$

Rozważając powyższą nierówność razem z (8.23) uzyskujemy, że dla każdego $x \in \widetilde{M}(\omega)$ oraz $t \in [-1, 1]$ mamy

$$d_\omega(\mathcal{T}_t^\omega(x), \mathcal{K}_\omega^{-1} \circ \mathfrak{S}(\bar{\omega})_t \circ \mathcal{K}_\omega(x)) < \frac{3431}{1000}\epsilon < 4\epsilon.$$

Stąd, z faktu, że $x \in \widetilde{M}(\omega)$ oraz z lematu 8.1 dla $x := \mathcal{T}_t^\omega(x)$, $y := \mathcal{K}_\omega^{-1} \circ \mathfrak{S}(\bar{\omega})_t \circ \mathcal{K}_\omega(x)$, $\epsilon := 4\epsilon$ oraz $a := -t$ uzyskujemy

$$(8.26) \quad d_\omega\left(x, \mathcal{T}_{-t}^\omega \circ \mathcal{K}_\omega^{-1} \circ \mathfrak{S}(\bar{\omega})_t \circ \mathcal{K}_\omega(x)\right) < 4\epsilon \text{ dla każdego } x \in \widetilde{M}(\omega) \text{ oraz } t \in [-1, 1].$$

Jako, że $D_j \subseteq \widetilde{Q} \subset \widetilde{M}(\omega)$ dla $j = 1, \dots, l$, to nierówność (8.26) jest spełniona dla wszystkich $x \in D_j$. Dla każdego $t \in [-1, 1]$ rozważmy funkcję

$$F_t := \mathcal{T}_{-t}^\omega \circ \mathcal{K}_\omega^{-1} \circ \mathfrak{S}(\bar{\omega})_t \circ \mathcal{K}_\omega.$$

Zauważmy, że F_t zachowuje miarę λ_ω . Zatem z (8.21) uzyskujemy

$$\lambda_\omega\left(D_j \cap \mathcal{T}_{-t}^\omega \circ \mathcal{K}_\omega^{-1} \circ \mathfrak{S}(\bar{\omega})_t \circ \mathcal{K}_\omega(D_j)\right) > (1 - \epsilon)\lambda_\omega(D_j).$$

Stosując dodatkowo \mathcal{T}^ω -niezmienniczość miary λ_ω , otrzymujemy

$$\lambda_\omega\left(\mathcal{T}_t^\omega(D_j) \cap \mathcal{K}_\omega^{-1} \circ \mathfrak{S}(\bar{\omega})_t \circ \mathcal{K}_\omega(D_j)\right) > (1 - \epsilon)\lambda_\omega(\mathcal{T}_t^\omega(D_j)),$$

dla każdego $t \in [-1, 1]$. Poprzez wysumowanie po $j = 1, \dots, l$, uzyskujemy

$$\lambda_\omega\left(\mathcal{T}_t^\omega(\widetilde{Q}) \cap \mathcal{K}_\omega^{-1} \circ \mathfrak{S}(\bar{\omega})_t \circ \mathcal{K}_\omega(\widetilde{Q})\right) > (1 - \epsilon)\lambda_\omega(\mathcal{T}_t^\omega(\widetilde{Q}))$$

a z (8.20) to daje, że

$$\lambda_\omega\left(\mathcal{T}_t^\omega(Q) \cap \mathcal{K}_\omega^{-1} \circ \mathfrak{S}(\bar{\omega})_t \circ \mathcal{K}_\omega(Q)\right) > (1 - 2\epsilon)\lambda_\omega(\mathcal{T}_t^\omega(Q)).$$

Skoro $\lambda_\omega(Q) \leq \frac{1}{4}$, to

$$\lambda_\omega\left(\mathcal{T}_t^\omega(Q) \triangle \mathcal{K}_\omega^{-1} \circ \mathfrak{S}(\bar{\omega})_t \circ \mathcal{K}_\omega(Q)\right) < 4\epsilon\lambda_\omega(Q) \leq \epsilon.$$

Zakończyliśmy tym samym dowód (8.19) a co za tym idzie, całego twierdzenia. \square

Ciągłe włożenie uzyskane w powyższym twierdzeniu jest zdefiniowane tylko lokalnie. Wykażemy jednak, że jest to wystarczające do przeniesienia warunku G_δ z przestrzeni potoków zachowujących miarę do przestrzeni moduli.

LEMAT 8.5. *Niech X będzie metryzowalną przestrzenią topologiczną. Niech $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ będzie rodziną otwartych zbiorów taką, że $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i = X$. Jeżeli $V \subseteq X$ jest takie, że*

$$V \cap U_i \text{ jest zbiorem } G_\delta \text{ dla } i \in \mathbb{N},$$

to V jest zbiorem G_δ .

DOWÓD. Zauważmy, że $V = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \left((V \cap U_i) \cup U_i^c \right)$. Ponieważ X jest przestrzenią metryzowalną, to każdy zbiór domknięty jest zbiorem G_δ . Dowód kończy fakt, że suma dwóch zbiorów G_δ jest zbiorem G_δ . \square

Potoki translacyjne rozłączne ze swoimi odwrotnymi są G_δ -gęste

W tym rozdziale, wykorzystując narzędzia przygotowane w poprzednich rozdziałach, dowodzimy fundamentalnego twierdzenia 9.6, z którego z kolei wynika bezpośrednio twierdzenie 1.1. Na początku rozdziału podany jest również dowód twierdzenia 1.2.

Poniższy kluczowy rezultat wynika z dowodu wniosku 3.3 w [8].

TWIERDZENIE 9.1. *Niech $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ będzie probabilistyczną standardową przestrzenią borelowską oraz niech $Flow(X)$ będzie przestrzenią potoków zachowujących miarę μ na X . Wtedy zbiór słabo mieszających potoków, które są rozłączne ze swoimi odwrotnymi jest G_δ -gęsty.*

Następujący ogólny rezultat pozwoli nam w szczególności przenieść warunek G_δ dla zbioru na dowolną składową spójności przestrzeni moduli.

LEMAT 9.2. *Niech \mathfrak{Prop} będzie własnością taką, że zbiór elementów posiadających tę własność jest podzbiorem G_δ -gęstym w $Flow(X)$. Wtedy na każdej składowej spójności C przestrzeni \mathcal{M} , zbiór struktur translacyjnych, dla których pionowy potok translacyjny ma własność \mathfrak{Prop} jest podzbiorem typu G_δ w C .*

DOWÓD. Niech C będzie składową spójności przestrzeni \mathcal{M} . Przy pomocy twierdzenia 8.4 wiemy, że dla każdego $\zeta \in C$ istnieje otwarte otoczenie \mathcal{U}_ζ i ciągłe odwzorowanie $\mathfrak{S}_\zeta : \mathcal{U}_\zeta \rightarrow Flow(X)$ takie, że dla każdej $\omega \in \mathcal{U}_\zeta$ pionowy potok translacyjny \mathcal{T}^ω jest izomorficzny teoriomiarowo z $\mathfrak{S}_\zeta(\omega)$. Skoro C jest różniczkową topologiczną, to jest σ -zwarta. Zatem istnieje ciąg struktur translacyjnych $\{\zeta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_{\zeta_n} = C$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy, że

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{\zeta_n} &:= \{\omega \in \mathcal{U}_{\zeta_n}; \mathcal{T}^\omega \text{ spełnia } \mathfrak{Prop}\} \\ &= \{\omega \in \mathcal{U}_{\zeta_n}; \mathfrak{S}_{\zeta_n}(\omega) \text{ spełnia } \mathfrak{Prop}\} \\ &= \mathfrak{S}_{\zeta_n}^{-1}\{\mathcal{T} \in Flow(X); \mathcal{T} \text{ spełnia } \mathfrak{Prop}\} \end{aligned}$$

jest zbiorem typu G_δ w \mathcal{U}_{ζ_n} . Z lematu 8.5, to daje, że zbiór tych $\omega \in C$, dla których \mathcal{T}^ω spełnia \mathfrak{Prop} , jest zbiorem typu G_δ w C . \square

Poprzez rozważenie twierdzenia 9.1 razem ze stwierdzeniem 9.2 otrzymujemy poniższy rezultat.

WNIOSEK 9.3. *Zbiór tych struktur translacyjnych ζ , dla których pionowy potok translacyjny na (M, ζ) jest słabo mieszający i rozłączny ze swoim odwrotnym jest zbiorem typu G_δ na każdej składowej spójności C w przestrzeni moduli.*

Przedstawimy teraz oznaczenia, które będziemy używać do końca tego rozdziału. Niech $C \subset \mathcal{M}$ będzie niehipereliptyczną składową spójności przestrzeni moduli, tj. C nie jest postaci $\mathcal{M}^{hyp}(2g-2)$ lub $\mathcal{M}^{hyp}(g-1, g-1)$ dla żadnego $g \geq 2$.

Niech $\pi = (\pi_0, \pi_1)$ będzie permutacją alfabetu \mathcal{A} składającego się z d elementów z odpowiadającej C rozszerzonej klasy Rauzy'ego spełniająca

$$(9.1) \quad \pi_0^{-1}(1) = \pi_1^{-1}(d) \text{ i } \pi_0^{-1}(d) = \pi_1^{-1}(1).$$

Taka permutacja istnieje dzięki twierdzeniu 2.16 a z wyboru C wynika, że nie jest ona symetryczna. Niech Ω_π będzie macierzą translacji stowarzyszoną z π . Z wniosku 5.2 istnieją symbole $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ takie, że

$$(9.2) \quad (\Omega_\pi)_{a_1 a_2} = (\Omega_\pi)_{a_2 a_1} = 0$$

a dla każdego wymiernie niezależnego wektora $\tau \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ liczby

$$(\Omega_\pi \tau)_{a_2} - (\Omega_\pi \tau)_{a_1} \quad \text{oraz} \quad (\Omega_\pi \tau)_{a_1} - ((\Omega_\pi \tau)_{\pi_0^{-1}(1)} + (\Omega_\pi \tau)_{\pi_0^{-1}(d)})$$

są wymiernie niezależne.

Następujący rezultat, będący bezpośrednim wnioskiem z lematu 2.40, jest jednym z głównych narzędzi potrzebnych do uzyskania gęstości w głównym rezultacie tego rozdziału.

LEMAT 9.4. *Zbiór*

$C_* := \{M(\pi, \lambda, \tau) \in C; (\pi, \lambda, \tau) \in \Theta_\pi^*, \lambda_a = 0 \text{ dla } a \in \mathcal{A} \setminus \{\pi_0^{-1}(1), \pi_0^{-1}(d), a_1, a_2\}\}$
jest gęsty w C .

Zanim udowodnimy główny rezultat tego rozdziału dowiedzimy twierdzenia 1.2, które dotyczy gęstości struktur translacyjnych dla których pionowy potok translacyjny jest izomorficzny ze swoim odwrotnym.

DOWÓD TWIERDZENIA 1.2. Korzystając z lematu 2.40 dla zbioru $\mathcal{D} := A \setminus \{\pi_0^{-1}(1), \pi_0^{-1}(d)\}$, otrzymujemy, że zbiór

$$C_{**} := \{M(\pi, \lambda, \tau) \in C; (\pi, \lambda, \tau) \in \Theta_\pi^*, \lambda_a = 0 \text{ dla } a \in \mathcal{A} \setminus \{\pi_0^{-1}(1), \pi_0^{-1}(d)\}\}$$

jest gęsty w C . Dla każdego $(\pi, \lambda, \tau) \in \Theta_\pi^*$ takiego, że $\zeta := M(\pi, \lambda, \tau) \in C_{**}$, zdefiniujemy

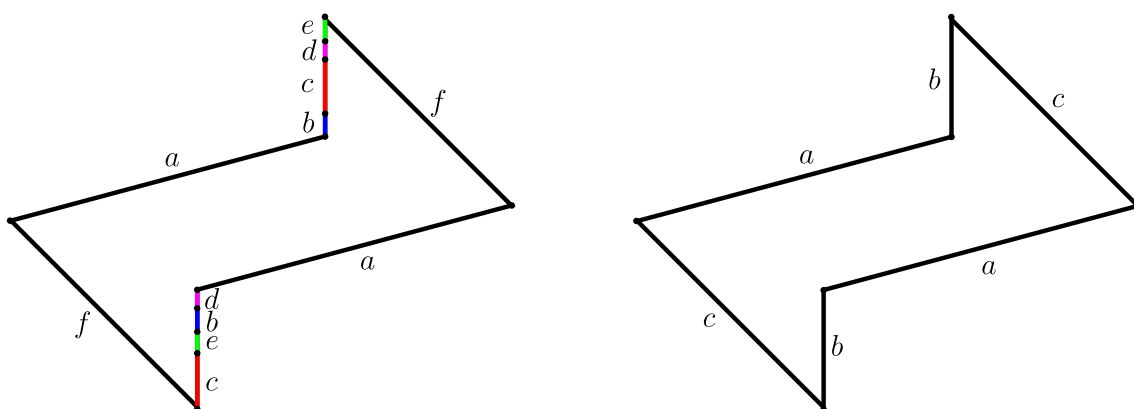
$$\tilde{\lambda}_1 := \lambda_{\pi_0^{-1}(1)}, \quad \tilde{\tau}_1 := \tau_{\pi_0^{-1}(1)} \quad \tilde{\lambda}_d := \lambda_{\pi_0^{-1}(d)}, \quad \tilde{\tau}_d := \tau_{\pi_0^{-1}(d)}$$

oraz

$$\tilde{\lambda}_* := \sum_{2 \leq j \leq d-1} \lambda_{\pi_0^{-1}(j)} = 0, \quad \tilde{\tau}_* := \sum_{2 \leq j \leq d-1} \tau_{\pi_0^{-1}(j)}.$$

Pionowy potok translacyjny na $\zeta = M(\pi, \lambda, \tau) \in C_{**}$ jest teorio-miarowo izomorficzny z pionowym potokiem stowarzyszonym ze strukturą translacyjną (M_*, ζ_*) , wyznaczoną przez wektory $\tilde{\lambda}_1 + i\tilde{\tau}_1, \tilde{\lambda}_* + i\tilde{\tau}_*$ oraz $\tilde{\lambda}_d + i\tilde{\tau}_d$ (patrz rys. 1) oraz permutację symetryczną trzech symboli. Zauważmy że wielokąt wyznaczony przez powyższe wektory jest środkowosymetryczny. Owa symetria zachowuje miarę Lebesgue'a na powierzchni oraz zadaje izomorfizm pomiędzy potokiem pionowym na (M_*, ζ_*) a potokiem do niego odwrotnym. Jako, że pionowe potoki translacyjne na (M_*, ζ_*) oraz (M, ζ) są izomorficzne, to pionowy potok translacyjny na (M, ζ) również jest izomorficzny ze swoim odwrotnym. \square

Reprezentacja specjalna pionowego potoku translacyjnego stowarzyszonego ze strukturą translacyjną ze zbioru C_* zdefiniowanym jak w lemacie 9.4, jest potokiem specjalnym nad przekładaniem odcinków pod kawałkami stałą funkcją dachową z punktami nieciągłości, które pokrywają się z punktami nieciągłości przekładania z podstawy. Ze względu na definicję C_* wszystkie odcinki w podstawie tego potoku



RYSUNEK 1. Struktura translacyjna $\zeta \in C_{**}$ wraz ze stowarzyszoną strukturą ζ_* , której reprezentacja wielokątna jest środkowosymetryczna.

odpowiadające symbolom $a \in \mathcal{A} \setminus \{\pi_0^{-1}(1), \pi_0^{-1}(d), a_1, a_2\}$ są zerowej długości. Stąd oraz z (9.1) i (9.2) pionowy potok stowarzyszony ze strukturą z C_* możemy identyfikować z potokiem specjalnym nad przekładaniem trzech odcinków, z kawałkami stałą funkcją dachową, która ma punkty nieciągłości w punktach nieciągłości przekładania oraz jeden dodatkowy wewnątrz środkowego odcinka. Do takiej reprezentacji możemy zastosować lewo- lub prawostronną indukcję Rauzy'ego. Po zastosowaniu indukcji otrzymujemy reprezentację specjalną nad przekładaniem dwóch odcinków z kawałkami stałą funkcją dachową z trzema punktami nieciągłości, z których jeden pokrywa się z punktem nieciągłości przekładania dwóch odcinków. Równoważnie taki potok można rozważać jako potok specjalny nad obrotem na okręgu i pod funkcją dachową o czterech punktach nieciągłości.

Przedstawimy teraz rezultat, który jest przeformułowaniem twierdzenia 6.7 dla $d = 2$. Jeżeli zajdzie taka potrzeba, podczas dowodu następującego lematu dla każdego $x > 0$ będziemy identyfikować $\mathbb{R}/x\mathbb{Z}$ z $[0, x)$.

LEMAT 9.5. *Istnieje podzbiór $\Delta_0 \subset \Delta := \{(x, y) \in \mathbb{R}_{>0}^2; 0 < y < x\}$ pełnej miary Lebesgue'a w Δ z własnością taką, że dla każdych $(l, \alpha) \in \Delta_0$ istnieje podzbiór $D_{l,\alpha} \subset (\mathbb{R}/l\mathbb{Z})^2$ pełnej miary Lebesgue'a taki, że dla każdych $(\beta_1, \beta_2) \in D_{l,\alpha}$ mamy*

- liczby $0, l - \alpha, \beta_1$ i β_2 są różne w $\mathbb{R}/l\mathbb{Z}$ i
- jeżeli T_α jest obrotem na $\mathbb{R}/l\mathbb{Z}$ o $\alpha \in \mathbb{R}/l\mathbb{Z}$ oraz $h : \mathbb{R}/l\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ jest kawałkami stałą funkcją z czterema punktami nieciągłości w $0, l - \alpha, \beta_1, \beta_2$ oraz wymiennie niezależnymi skokami w β_1 i β_2 , to potok specjalny T_α^h jest słabo mieszający i rozłączny ze swoim potokiem odwrotnym.

DOWÓD. Z twierdzenia 6.7 zastosowanego dla $d = 2$ oraz $r = 2$ istnieje zbiór pełnej miary $\Lambda \subset [0, 1)$ taki, że dla każdego $\alpha \in \Lambda$ istnieje podzbiór $D_\alpha \subset [0, 1)^2$ pełnej miary Lebesgue'a, dla którego jeśli T_α^f jest potokiem specjalnym nad obrotem T_α i pod kawałkami stałą funkcją f z nieciągłościami w $1 - \alpha, \beta_1, \beta_2$ takimi, że $(\beta_1, \beta_2) \in D_\alpha$ oraz skoki w β_1, β_2 są wymiennie niezależne, to potok ten jest słabo mieszający i rozłączny ze swoim odwrotnym.

Dla każdego $l > 0$ definiujemy odwzorowanie $l : [0, 1) \rightarrow [0, l)$ dane przez $l(x) = lx$. Rozważamy również l jako przekształcenie działające z \mathbb{R}/\mathbb{Z} do $\mathbb{R}/l\mathbb{Z}$. Dla każdego $l > 0$ niech $\Lambda_l = l(\Lambda) \subset [0, l) = \mathbb{R}/l\mathbb{Z}$ oraz niech $D_{l,\alpha} = (l \times l)(D_{l^{-1}\alpha}) \subset [0, l)^2 = (\mathbb{R}/l\mathbb{Z})^2$ dla dowolnego $\alpha \in [0, l)$. Definiujemy zbiór $\Delta_0 := \{(x, y); x > 0, y \in \Lambda_x\}$.

Zauważmy, że Δ_0 jest zbiorem pełnej miary Lebesgue'a w Δ a dla każdego $l > 0$ i $\alpha \in \Lambda_l$ zbiór $D_{l,\alpha}$ jest pełnej miary Lebesgue'a w $(\mathbb{R}/l\mathbb{Z})^2$.

Weźmy $(l, \alpha) \in \Delta_0$ oraz $(\beta_1, \beta_2) \in D_{l,\alpha}$. Z definicji Λ i $D_{l^{-1}\alpha}$, punkty $0, l - \alpha, \beta_1$ oraz β_2 są parami różne. Niech $h: \mathbb{R}/l\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ będzie kawałkami stałą funkcją, która ma dokładnie cztery punkty nieciągłości w $0, l - \alpha, \beta_1$ and β_2 . Załóżmy, że skoki d_{β_1} i d_{β_2} w odpowiednio punktach β_1 i β_2 są wymiernie niezależne. Rozważmy potok specjalny \mathcal{T}_α^h na $[0, l)^h$. Odwzorowanie $(l^{-1} \times Id): [0, l)^h \rightarrow [0, 1)^{hol}$ wyznacza izomorfizm pomiędzy potokami \mathcal{T}_α^h i $\mathcal{T}_{l^{-1}\alpha}^{hol}$. Funkcja dachowa $h \circ l$ ma cztery punkty nieciągłości w $0, 1 - l^{-1}\alpha, l^{-1}\beta_1$ oraz $l^{-1}\beta_2$ a także skoki d_{β_1} i d_{β_2} w $l^{-1}\beta_1$ i $l^{-1}\beta_2$ odpowiednio. Co więcej, $l^{-1}\alpha \in \Lambda$ oraz $(l^{-1}\beta_1, l^{-1}\beta_2) \in D_{l^{-1}\alpha}$. Zatem z doboru zbiorów Λ i $D_{l^{-1}\alpha}$ potok $\mathcal{T}_{l^{-1}\alpha}^{hol}$ jest słabo mieszający i rozłączny ze swoim potokiem odwrotnym. Ponieważ $\mathcal{T}_{l^{-1}\alpha}^{hol}$ i \mathcal{T}_α^h są izomorficzne, \mathcal{T}_α^h także jest słabo mieszający i rozłączny ze swoim potokiem odwrotnym. \square

Przedstawimy teraz twierdzenie, z którego bezpośrednio wynika główny rezultat rozprawy, czyli twierdzenie 1.1

TWIERDZENIE 9.6. *W każdej niehipereliptycznej składowej spójności przestrzeni moduli, zbiór takich struktur translacyjnych, że stowarzyszony pionowy potok translacyjny jest słabo mieszający i rozłączny ze swoim potokiem odwrotnym jest zbiorem gęstym typu G_δ .*

DOWÓD. Z uwagi na wniosek 9.3, zbiór struktur translacyjnych, których stowarzyszone pionowe potoki translacyjne są rozłączne ze swoimi odwrotnymi, jest zbiorem typu G_δ w każdej składowej spójności przestrzeni moduli. Pokażemy teraz, że istnieje gęsty podzbiór struktur translacyjnych w każdej niehipereliptycznej składowej spójności C przestrzeni moduli \mathcal{M} takich, że stowarzyszone pionowe potoki są słabo mieszające i rozłączne ze swoimi potokami odwrotnymi.

Ustalmy dowolną niehipereliptyczną składową spójności C przestrzeni moduli \mathcal{M} . Przypomnijmy, że z twierdzenia 2.16 dla pewnego $d \geq 2$ oraz alfabetu \mathcal{A} składającego się z d elementów, istnieje permutacja $\pi = (\pi_0, \pi_1) \in S_0^{\mathcal{A}}$ należąca do rozszerzonego grafu Rauzy'ego stowarzyszonego z C taka, że

$$\pi_1(\pi_0^{-1}(1)) = d \quad \text{oraz} \quad \pi_1(\pi_0^{-1}(d)) = 1.$$

Niech $\Omega := \Omega_\pi$ będzie macierzą translacji odpowiadającą π . Wtedy, ze względu na wniosek 5.2, istnieją dwa różne symbole $a_1, a_2 \in \mathcal{A} \setminus \{\pi_0^{-1}(1), \pi_0^{-1}(d)\}$ takie, że

$$(9.3) \quad \Omega_{a_1 a_2} = \Omega_{a_2 a_1} = 0$$

oraz jeśli $\tau \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ jest wektorem wymiernie niezależnym, to liczby

$$(\Omega\tau)_{a_2} - (\Omega\tau)_{a_1} \quad \text{i} \quad (\Omega\tau)_{a_i} - ((\Omega\tau)_{\pi_0^{-1}(1)} + (\Omega\tau)_{\pi_0^{-1}(d)})$$

są wymiernie niezależne dla $i = 1, 2$.

Niech

$$\Xi_* := \left\{ (\pi, \lambda, \tau) \in \Theta_\pi^*; \lambda_a = 0 \text{ dla } a \in \mathcal{A} \setminus \{\pi_0^{-1}(1), \pi_0^{-1}(d), a_1, a_2\} \right\}$$

Niech ponadto $C_* := \{M(\pi, \lambda, \tau) \in C; (\pi, \lambda, \tau) \in \Xi_*\}$. Z lematu 9.4 jest to gęsty podzbiór C . Zatem aby wykazać gęstość elementów z żadaną własnością w C , wystarczy wykazać, że własność ta jest spełniona dla gęstego podzbioru w C_* . Wykażemy to poprzez wskazanie gęstego zbioru parametrów w Ξ_* takich, że stowarzyszone struktury translacyjne posiadają docelowe własności.

Zauważmy, że ze względu na twierdzenie 2.17, zbiór $\Xi \subset \Xi_*$ dany przez

$$\Xi := \{(\pi, \lambda, \tau) \in \Xi_*; T_{\pi, \lambda} \text{ jest ergodyczne,} \\ \lambda_{\pi_0^{-1}(1)} \neq \lambda_{\pi_0^{-1}(d)}, \tau \text{ jest wymiernie niezależny}\}$$

jest gęsty w Ξ_* .

Niech $\zeta = M(\pi, \lambda, \tau) \in C_*$ spełnia $(\pi, \lambda, \tau) \in \Xi$. Niech \mathcal{T}^ζ będzie pionowym potokiem translacyjnym na (M, ζ) . Przypomnijmy, że potok \mathcal{T}^ζ posiada reprezentację specjalną $\mathcal{T}_{\pi, \lambda}^h$ nad przekładaniem odcinków $T_{\pi, \lambda} : [0, |\lambda|) \rightarrow [0, |\lambda|)$ i pod kawałkami stałą funkcją dachową $h : [0, |\lambda|) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, która jest stała nad przekładanymi odcinkami (patrz podrozdział 2.5). Ponadto jeżeli rozważymy $h = \{h_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ jako wektor wartości, gdzie h_a jest wartością h nad przedziałem odpowiadającym symbolowi a , to

$$(9.4) \quad h_a = -(\Omega\tau)_a \text{ dla } a \in \mathcal{A}.$$

Jednakże, skoro $(\pi, \lambda, \tau) \in \Xi_*$ to mamy, że $\lambda_a = 0$ dla $a \in \mathcal{A} \setminus \{\pi_0^{-1}(1), \pi_0^{-1}(d), a_1, a_2\}$. Zatem możemy „zredukować” dane opisujące powyższy potok specjalny.

Niech $\hat{\pi} = (\hat{\pi}_0, \hat{\pi}_1)$ będzie permutacją alfabetu $\hat{\mathcal{A}} := \{\pi_0^{-1}(1), \pi_0^{-1}(d), a_1, a_2\}$ daną przez

$$\hat{\pi}_0(\pi_0^{-1}(1)) = 1, \quad \hat{\pi}_0(\pi_0^{-1}(d)) = 4, \quad \hat{\pi}_0(a_1) = 2, \quad \hat{\pi}_0(a_2) = 3$$

oraz

$$\hat{\pi}_1(\pi_0^{-1}(1)) = 4, \quad \hat{\pi}_1(\pi_0^{-1}(d)) = 1, \quad \hat{\pi}_1(a_1) = 2, \quad \hat{\pi}_1(a_2) = 3.$$

Dla $a \in \hat{\mathcal{A}}$ niech $\hat{\lambda}_a := \lambda_a$. Ponadto skoro przedziały odpowiadające $a \in \mathcal{A} \setminus \hat{\mathcal{A}}$ są puste oraz zachodzi (9.3), to h możemy rozważać jako wektor $\{h_a\}_{a \in \hat{\mathcal{A}}}$ oraz \mathcal{T}^ζ posiada reprezentację specjalną $\mathcal{T}_{\hat{\pi}, \hat{\lambda}}^h$ nad przekładaniem odcinków $T_{\hat{\pi}, \hat{\lambda}} : [0, |\lambda|) \rightarrow [0, |\lambda|)$.

Rozważmy zbiory $\Xi_0, \Xi_1 \subset \Xi$ następującej postaci

$$\Xi_0 := \{(\pi, \lambda, \tau) \in \Xi; \lambda_{\pi_0^{-1}(1)} > \lambda_{\pi_0^{-1}(d)}\} \text{ oraz } \Xi_1 := \{(\pi, \lambda, \tau) \in \Xi; \lambda_{\pi_0^{-1}(1)} < \lambda_{\pi_0^{-1}(d)}\}.$$

Mamy $\Xi_0 \cup \Xi_1 = \Xi$. Rozważmy dyfeomorfizmy

$$\phi_0 : \{(x, y, z, v) \in \mathbb{R}_{>0}^4; x > v\} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}^4, \quad \phi_1 : \{(x, y, z, v) \in \mathbb{R}_{>0}^4; x < v\} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}^4$$

dane przez

$$\phi_0(x, y, z, v) := (x - v, v, y, z) \quad \text{oraz} \quad \phi_1(x, y, z, v) := (y, z, x, v - x).$$

Przypuśćmy najpierw, że $(\pi, \lambda, \tau) \in \Xi_0$, czyli $\lambda_{\pi_0^{-1}(1)} > \lambda_{\pi_0^{-1}(d)}$. Wtedy po jednym kroku prawostronnej indukcji Rauzy’ego-Veecha dla spinanych prostokątów na $\mathcal{T}_{\hat{\pi}, \hat{\lambda}}^h$ (patrz uwaga 2.36) otrzymujemy potok specjalny $\mathcal{T}_\alpha^{\hat{h}}$ nad obrotem $T_\alpha : [0, \hat{\lambda}_{\pi_0^{-1}(1)} + \hat{\lambda}_{a_1} + \hat{\lambda}_{a_2}) \rightarrow [0, \hat{\lambda}_{\pi_0^{-1}(1)} + \hat{\lambda}_{a_1} + \hat{\lambda}_{a_2})$ o liczbę $\alpha = \alpha(\hat{\lambda}) := \hat{\lambda}_{a_1} + \hat{\lambda}_{a_2} + \hat{\lambda}_{\pi_0^{-1}(d)}$ pod kawałkami stałą funkcją dachową $\hat{h} : [0, \hat{\lambda}_{\pi_0^{-1}(1)} + \hat{\lambda}_{a_1} + \hat{\lambda}_{a_2}) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ z wartościami $h_{\pi_0^{-1}(1)}, h_{\pi_0^{-1}(1)} + h_{\pi_0^{-1}(d)}, h_{a_1}, h_{a_2}$ nad kolejnymi przedziałami, których długości są dane przez wektor $\phi(\hat{\lambda}_{\pi_0^{-1}(1)}, \hat{\lambda}_{a_1}, \hat{\lambda}_{a_2}, \hat{\lambda}_{\pi_0^{-1}(d)})$. Przypomnijmy, że potoki $\mathcal{T}_{\hat{\pi}, \hat{\lambda}}^h$ oraz $\mathcal{T}_\alpha^{\hat{h}}$ są reprezentacjami specjalnymi tego samego potoku, a więc są izomorficzne (patrz uwaga 2.36). Niech $l = l(\hat{\lambda}) := \hat{\lambda}_{\pi_0^{-1}(1)} + \hat{\lambda}_{a_1} + \hat{\lambda}_{a_2}$, $\beta_1 = \beta_1(\hat{\lambda}) := \hat{\lambda}_{\pi_0^{-1}(1)}$ oraz $\beta_2 = \beta_2(\hat{\lambda}) := \hat{\lambda}_{\pi_0^{-1}(1)} + \hat{\lambda}_{a_1}$. Wtedy $\hat{h} : [0, l) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ posiada punkty nieciągłości

w $l - \alpha$, β_1 i β_2 . Skok w punkcie β_1 jest równy $(h_{\pi_0^{-1}(1)} + h_{\pi_0^{-1}(d)}) - h_{a_1}$, podczas gdy w punkcie β_2 jest równy $h_{a_1} - h_{a_2}$. Co więcej, mamy również

$$(h_{\pi_0^{-1}(1)} + h_{\pi_0^{-1}(d)}) - h_{a_1} = -((\Omega\tau)_{\pi_0^{-1}(1)} + (\Omega\tau)_{\pi_0^{-1}(d)}) + (\Omega\tau)_{a_1},$$

i

$$h_{a_1} - h_{a_2} = -(\Omega\tau)_{a_1} + (\Omega\tau)_{a_2}.$$

Ponieważ $(\pi, \lambda, \tau) \in \Xi$, to τ jest wektorem wymiernie niezależnym. Stąd oraz z wniosku 5.2 wynika wymierna niezależność skoków w β_1 i β_2 . Od teraz będziemy traktować T_α jako obrót na $\mathbb{R}/l\mathbb{Z}$. Ponadto będziemy traktować również \hat{h} jako kawałkami stałą funkcję na $\mathbb{R}/l\mathbb{Z}$. Wtedy $\hat{h}: \mathbb{R}/l\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ ma dodatkową nieciągłość w punkcie 0.

Rozważmy dyfeomorfizmy

$$\psi_0: \mathbb{R}_{>0}^4 \rightarrow \{(x, y, z, v) \in \mathbb{R}_{>0}^4; 0 < x - y < z < v < x\},$$

$$\psi_1: \mathbb{R}_{>0}^4 \rightarrow \{(x, y, z, v) \in \mathbb{R}_{>0}^4; 0 < z < v < x - y < x\}$$

dane przez

$$\psi_0(x, y, z, v) := (x + y + z + v, y + z + v, x + y, x + y + z)$$

oraz

$$\psi_1(x, y, z, v) := (x + y + z + v, v, y, y + z).$$

Wtedy

$$\psi_0 \circ \phi_0: \{(x, y, z, v) \in \mathbb{R}_{>0}^4; x > v\} \rightarrow \{(x, y, z, v) \in \mathbb{R}_{>0}^4; 0 < x - y < z < v < x\}$$

oraz

$$\psi_1 \circ \phi_1: \{(x, y, z, v) \in \mathbb{R}_{>0}^4; x > v\} \rightarrow \{(x, y, z, v) \in \mathbb{R}_{>0}^4; 0 < z < v < x - y < x\}$$

są również dyfeomorfizmami. Podsumowując, jeśli $(\pi, \lambda, \tau) \in \Xi_0$ oraz $\zeta = M(\pi, \lambda, \tau)$, to potok \mathcal{T}^ζ jest izomorficzny z potokiem specjalnym nad obrotem o kąt α na okręgu $\mathbb{R}/l\mathbb{Z}$ pod kawałkami liniową funkcją dachową z punktami nieciągłości w $0, l - \alpha, \beta_1, \beta_2$, gdzie $(l, \alpha, \beta_1, \beta_2) = \psi_0 \circ \phi_0(\hat{\lambda})$. Ponadto skoki w punktach β_1 i β_2 są wymiernie niezależne.

Jeśli natomiast $(\pi, \lambda, \tau) \in \Xi_1$ i $\zeta = M(\pi, \lambda, \tau)$, to podobnie jak w poprzednim przypadku, posługując się lewostronną indukcją dla spinanych prostokątów, możemy wykazać, że potok \mathcal{T}^ζ jest izomorficzny z potokiem specjalnym nad obrotem o kąt α na okręgu $\mathbb{R}/l\mathbb{Z}$ pod kawałkami liniową funkcją dachową z punktami nieciągłości w $0, l - \alpha, \beta_1, \beta_2$, gdzie $(l, \alpha, \beta_1, \beta_2) = \psi_1 \circ \phi_1(\hat{\lambda})$. W tym przypadku skoki w punktach β_1 i β_2 wynoszą kolejno $-(\Omega\tau)_{a_1} + (\Omega\tau)_{a_2}$ oraz $-(\Omega\tau)_{a_2} + ((\Omega\tau)_{\pi_0^{-1}(1)} + (\Omega\tau)_{\pi_0^{-1}(d)})$. Ponownie korzystając z wniosku 5.2 oraz z tego, że τ jest wektorem wymiernie niezależnym, uzyskujemy, że skoki w punktach β_1 i β_2 są wymiernie niezależne.

Niech $\Delta_0 \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}_{>0}^2; y \in (0, x)\}$ oraz $D_{l, \alpha} \subset (\mathbb{R}/l\mathbb{Z})^2$ dla $(l, \alpha) \in \Delta_0$ będą zbiorami danymi przez lemat 9.5. Wtedy z lematu 9.5 są one pełnej miary Lebesgue'a oraz dla każdej pary $(l, \alpha) \in \Delta_0$ i $(\beta_1, \beta_2) \in D_{l, \alpha}$ potok specjalny \mathcal{T}_α^f nad obrotem o α na $\mathbb{R}/l\mathbb{Z}$ pod kawałkami stałą funkcją dachową $f: \mathbb{R}/l\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ z punktami nieciągłości w $0, l - \alpha, \beta_1, \beta_2$ oraz wymiernie niezależnymi skokami w β_1 i β_2 jest słabo mieszający i rozłączny ze swoim odwrotnym.

Rozważmy zbiory

$$\mathcal{G}_0 := \{(x, y, z, v) \in \mathbb{R}_{>0}^4; (x, y) \in \Delta_0, \frac{y}{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, (z, v) \in D_{x, y}, 0 < x - y < z < v < x\}$$

oraz

$$\mathcal{G}_1 := \left\{ (x, y, z, v) \in \mathbb{R}_{>0}^4; (x, y) \in \Delta_0, \frac{y}{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, (z, v) \in D_{x,y}, 0 < z < v < x - y < x \right\}$$

Z lematu 9.5, zbiór Δ_0 jest gęsty w $\{(x, y) \in \mathbb{R}_{>0}^2; y < x\}$ a zbiór $D_{x,y}$ jest gęsty w $(0, x)^2$. Stąd \mathcal{G}_0 jest gęstym podzbiorem zbioru $\{(x, y, z, v) \in \mathbb{R}_{>0}^4; 0 < x - y < z < v < x\}$. Jako, że $\psi_0 \circ \phi_0$ jest dyfeomorfizmem, to zbiór $(\psi_0 \circ \phi_0)^{-1}(\mathcal{G}_0)$ jest gęsty w $\{(x, y, z, v) \in \mathbb{R}_{>0}^4; x > v\}$. Zatem zbiór

$$\Gamma_0 := \left\{ (\pi, \lambda, \tau) \in \Xi_0; \hat{\lambda} \in (\psi_0 \circ \phi_0)^{-1}(\mathcal{G}_0) \right\}$$

jest gęsty w Ξ_0 . Analogicznie wykazujemy, że zbiór

$$\Gamma_1 := \left\{ (\pi, \lambda, \tau) \in \Xi_1; \hat{\lambda} \in (\psi_1 \circ \phi_1)^{-1}(\mathcal{G}_1) \right\}$$

jest gęsty w Ξ_1 . Zatem zbiór $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ jest gęsty w Ξ .

Założmy, że $(\pi, \lambda, \tau) \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ i $\zeta = M(\pi, \lambda, \tau)$. Niech $(l(\hat{\lambda}), \alpha(\hat{\lambda}), \beta_1(\hat{\lambda}), \beta_2(\hat{\lambda})) = \psi_i \circ \phi_i(\hat{\lambda})$, gdzie $i = 0, 1$ jest takie, że $\lambda \in \Xi_i$. Wtedy z definicji \mathcal{G}_0 oraz \mathcal{G}_1 mamy $(l(\hat{\lambda}), \alpha(\hat{\lambda})) \in \Delta_0$ oraz $(\beta_1(\hat{\lambda}), \beta_2(\hat{\lambda})) \in D_{l(\hat{\lambda}), \alpha(\hat{\lambda})}$. Ponadto \mathcal{T}^ζ jest izomorficzny z potokiem specjalnym $\mathcal{T}_{\alpha(\hat{\lambda})}^{\hat{h}}$ na $(\mathbb{R}/l(\hat{\lambda})\mathbb{Z})^{\hat{h}}$, gdzie $\hat{h} : \mathbb{R}/l(\hat{\lambda})\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ jest kawałkami stałą funkcją dachową z nieciągłościami w punktach $0, l(\hat{\lambda}) - \alpha(\hat{\lambda}), \beta_1(\hat{\lambda})$ oraz $\beta_2(\hat{\lambda})$. Co więcej, jako, że τ jest wektorem wymiennie niezależnym, to skoki funkcji \hat{h} w punktach $\beta_1(\hat{\lambda})$ i $\beta_2(\hat{\lambda})$ są wymiennie niezależne. Zatem z lematu 9.5 potok $\mathcal{T}_{\alpha(\hat{\lambda})}^{\hat{h}}$, a zatem i \mathcal{T}^ζ , jest słabo mieszący i rozłączny ze swoim odwrotnym.

Ponieważ $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ jest gęstym podzbiorem Ξ , to jest również gęstym podzbiorem Ξ_* . Skoro $M : \Theta_\pi^* \rightarrow C$ dane wzorem $(\pi, \lambda, \tau) \mapsto M(\pi, \lambda, \tau)$ jest ciągle (patrz uwaga 2.13) i $M(\Xi_*) = C_*$, to $M(\Gamma_0 \cup \Gamma_1)$ jest gęstym podzbiorem w C_* . Ponadto z lematu 9.4 wynika, że C_* jest gęsty w C co implikuje, że $M(\Gamma_0 \cup \Gamma_1)$ jest gęstym podzbiorem C . Ponieważ, jak pokazaliśmy wcześniej, dla każdej struktury $\zeta \in M(\Gamma_0 \cup \Gamma_1)$ potok \mathcal{T}^ζ jest słabo mieszący i rozłączny ze swoim odwrotnym, to implikuje ostateczny rezultat. □

Bibliografia

- [1] J. Aaronson, *An introduction to infinite ergodic theory*, Mathematical Surveys and Monographs, 50. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- [2] W. Ambrose, *Representation of ergodic flows*, Ann. of Math. (2) 42 (1941). 723–739.
- [3] H. Anzai, *On an example of a measure preserving transformation which is not conjugate to its inverse*, Proc. Japan Acad. 27 (1951), 517–522.
- [4] A. Avila, G. Forni, *Weak mixing for interval exchange transformations and translation flows*, Ann. of Math. 165 (2007), 637–664
- [5] P. Berk, K. Frączek, *On special flows that are not isomorphic to their inverses*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 35 (2015), 829–855.
- [6] P. Berk, K. Frączek, T. de la Rue, *On typicality of translation flows which are disjoint with their inverse*, arXiv:1703.09111.
- [7] P. Billingsley, *Prawdopodobieństwo i miara*, PWN (1987).
- [8] A.I. Danilenko, V.V. Ryzhikov, *On self-similarities of ergodic flows*, Proc. Lond. Math. Soc. 104 (2012), 431–454.
- [9] A. del Junco, *Disjointness of measure-preserving transformations, minimal self-joinings and category*. Ergodic theory and dynamical systems, I (College Park, Md., 1979–80), pp. 81–89, Progr. Math. 10, Birkhäuser, Boston, Mass. (1981).
- [10] R.H. Fox, R.B. Kershner, *Concerning the transitive properties of geodesics on a rational polyhedron*. Duke Math. J. 2 (1936), 147–150.
- [11] K. Frączek, *Density of mild mixing property for vertical flows of Abelian differentials*, Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009), 4129–4142.
- [12] K. Frączek, J. Kułaga-Przymus, M. Lemańczyk, *Non-reversibility and self-joinings of higher orders for ergodic flows*, J. Anal. Math. 122 (2014), 163–227.
- [13] K. Frączek, M. Lemańczyk, *On disjointness properties of some smooth flows*, Fund. Math. 185 (2005), 117–142.
- [14] K. Frączek, M. Lemańczyk, *A class of special flows over irrational rotations which is disjoint from mixing flows*, Ergodic Theory Dynam. Systems 24 (2004), 1083–1095.
- [15] E. Glasner, *Ergodic theory via joinings*, Mathematical Surveys and Monographs, 101. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [16] C. Goffman, G. Pedrick, *A proof of the homeomorphism of Lebesgue-Stieltjes measure with Lebesgue measure*. Proc. Amer. Math. Soc. 52 (1975), 196–198.
- [17] P.R. Halmos, J. von Neumann, *Operator methods in classical mechanics. II*, Ann. of Math. (2) 43 (1942), 332–350.
- [18] A. Katok, *Interval exchange transformations and some special flows are not mixing*, Israel J. Math. 35 (1980), 301–310.
- [19] A. Katok, E. A. Robinson, Jr. *Cocycles, cohomology and combinatorial constructions in ergodic theory*, Proc. Sympos. Pure Math. 69, Smooth ergodic theory and its applications (Seattle, WA, 1999), 107–173, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [20] M. Keane, *Interval exchange transformations*, Math. Z. 141 (1975), 25–31.
- [21] J. King, *Joining-rank and the structure of finite rank mixing transformations*, J. Analyse Math. 51 (1988), 182–227.
- [22] A.Y. Khinchin, *Continued fractions*, The University of Chicago Press, Chicago-London, 1964.
- [23] M. Kontsevich, A. Zorich, *Connected components of the moduli spaces of Abelian differentials with prescribed singularities*. Invent. Math. 153 (2003), 631–678.
- [24] J. Kułaga, *On the self-similarity problem for smooth flows on orientable surfaces*, Ergodic Theory Dynam. Systems 32 (2012), 1615–1660.

-
- [25] H. Masur, *Interval exchange transformations and measured foliations*. Ann. of Math. (2) 115 (1982), 169–200.
- [26] J. Moser, *On the volume elements on a manifold*. Trans. Amer. Math. Soc. 120 (1965) 286–294.
- [27] G. Rauzy, *Échanges d’intervalles et transformations induites*, Acta Arith. 34 (1979), 315–328.
- [28] V.V. Ryzhikov, *Partial multiple mixing on subsequences can distinguish between automorphisms T and T^{-1}* , Math. Notes 74 (2003), 841–847.
- [29] S.M. Srivastava, *A course on Borel sets*. Graduate Texts in Mathematics 180. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [30] W.A. Veech, *Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps*. Ann. Math. 115 (1982), 201–242.
- [31] W.A. Veech, *Interval exchange transformations*, J. Anal. Math. 33 (1978), 222–272.
- [32] W.A. Veech, *The metric theory of interval exchange transformations. I. Generic spectral properties*, Amer. J. Math. 106 (1984), 1331–1359.
- [33] M. Viana, *Ergodic theory of interval exchange maps*, Rev. Mat. Complut. 19 (2006), 7–100.
- [34] J.C. Yoccoz, *Interval exchange maps and translation surfaces. Homogeneous flows, moduli spaces and arithmetic*, 1–69, Clay Math. Proc. 10, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.
- [35] A. Zorich *Flat surfaces*. Frontiers in number theory, physics, and geometry. I, 437–583, Springer, Berlin, 2006.