



Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
Wydział Matematyki i Informatyki

Marta Kowalczyk

**Zastosowanie metod niezmienniczej analizy
nieliniowej do badania istnienia i bifurkacji
centralnych konfiguracji pewnych zagadnień
mechaniki nieba**

Rozprawa doktorska napisana w Zakładzie Równań Różniczkowych

Wydziału Matematyki i Informatyki UMK w Toruniu

pod kierunkiem

prof. dr. hab. Sławomira Rybickiego

oraz

prof. dr. hab. Andrzeja Maciejewskiego

TORUŃ 2017

*Serdecznie dziękuję
Panu Profesorowi
Sławomirowi Rybickiemu
oraz
Panu Profesorowi
Andrzejowi Maciejewskiemu
za poświęcony czas
i cenne uwagi*

Spis treści

Wstęp	5
1. Preliminaria	14
1.1. Notacja	14
1.2. Grupy Liego	16
1.3. Pierścień Eulera	24
1.4. Niezmienniczy indeks Conley'a	29
1.5. Stopień G -współzmienniczych odwzorowań gradientowych	36
2. Twierdzenia bifurkacyjne dla G-współzmienniczych odwzorowań gradientowych	45
2.1. Definicje i oznaczenia	45
2.2. Warunek konieczny istnienia lokalnej bifurkacji	48
2.3. Warunki dostateczne istnienia lokalnej bifurkacji	50
2.4. Warunki dostateczne istnienia globalnej bifurkacji	54
3. Centralne konfiguracje zagadnienia N ciał	66
3.1. Centralne konfiguracje zagadnienia N ciał - definicja	67
3.2. Bifurkacje centralnych konfiguracji zagadnienia N ciał	72
3.3. Planarne niesymetryczne rodziny centralnych konfiguracji	75
3.3.1. Planarna rodzina sześciokąta foremego z dodatkowym ciałem w środku masy	75
3.3.2. Planarna rodzina dwóch zagnieżdżonych kwadratów	78
3.3.3. Planarna rodzina rozety dla trzynastu ciał	81
3.4. Przestrzenne niesymetryczne rodziny centralnych konfiguracji	86
3.4.1. Przestrzenne rodziny dwóch zagnieżdżonych czworościanów foremnych	86
3.4.2. Przestrzenna rodzina dwóch zagnieżdżonych ośmiościanów foremnych	91
3.4.3. Przestrzenna rodzina dwóch zagnieżdżonych ośmiościanów foremnych z dodatkowym ciałem	93

3.4.4. Przestrzenna rodzina dwóch zagnieżdżonych sześciąt	95
3.4.5. Przestrzenna rodzina dwóch zagnieżdżonych sześciąt z dodatkowym ciałem	97
3.4.6. Przestrzenna rodzina dwóch dualnych wielościanów foremnych problemu czternastu ciał	99
3.4.7. Przestrzenna rodzina problemu $n + 3$ ciał dla $n = 3, 4, 6$	101
Bibliografia	108
Spis rysunków	115
Indeks symboli	117
Indeks	123

Wstęp

Rozważmy N punktów materialnych q_1, \dots, q_N o masach, odpowiednio, $m_1 > 0, \dots, m_N > 0$ poruszających się w \mathbb{R}^d , dla $d = 2$ lub $d = 3$, pod wpływem wzajemnych sił grawitacji oraz zgodnie z prawami ruchu Newtona. Wówczas ruch N ciał można opisać następującym układem równań różniczkowych zwyczajnych:

$$m_j \ddot{q}_j = - \sum_{i=1, i \neq j}^N \gamma m_j m_i \frac{1}{|q_j - q_i|^3} (q_j - q_i), \quad j = 1, \dots, N, \quad (1)$$

gdzie przez $|q_j|$ rozumiemy normę euklidesową q_j oraz γ jest stałą grawitacji. Przestrzeń konfiguracji N ciał definiujemy wykluczając kolizje tych ciał, to znaczy

$$\Omega = \{q = (q_1, \dots, q_N) \in \mathbb{R}^{dN} : q_i \neq q_j \text{ dla } i \neq j\}.$$

Problem poszukiwania nowych rozwiązań układu (1) jest trudnym i ważnym zagadnieniem badanym na przestrzeni wieków. Jednym ze sposobów znajdowania rozwiązań tego zagadnienia jest nakładanie pewnych dodatkowych geometrycznych warunków na ciała.

Jak wiemy układ (1) nie posiada położeń równowagi, czyli konfiguracji N ciał, które pozostają niezmienione w czasie i są rozwiązaniami układu (1).

Kolejnym naturalnym krokiem w poszukiwaniu najprostszych rozwiązań jest badanie konfiguracji, które zmieniają się tylko pod wpływem skalowania oraz tworzą istotną klasę rozwiązań homotetycznych problemu N ciał. Niech zatem $q(t) = R(t)q(0)$, gdzie $R(t) > 0$ jest pewną funkcją skalarną oraz $q(0) = (q_1(0), \dots, q_N(0)) \in \Omega$ jest ustaloną konfiguracją N ciał. Wstawiając $q(t)$ do układu (1) otrzymujemy

$$m_j R^2 \ddot{R} q_j(0) = - \sum_{i=1, i \neq j}^N \gamma m_j m_i \frac{1}{|q_j(0) - q_i(0)|^3} (q_j(0) - q_i(0)), \quad j = 1, \dots, N. \quad (2)$$

Ponieważ prawa strona układu (2) nie zależy od czasu, istnieje stała $\lambda \in \mathbb{R}$ taka, że

$$-\lambda m_j q_j(0) = - \sum_{i=1, i \neq j}^N \gamma m_j m_i \frac{1}{|q_j(0) - q_i(0)|^3} (q_j(0) - q_i(0)), \quad j = 1, \dots, N \quad (3)$$

oraz

$$\ddot{R} = -\frac{\lambda}{R^2}. \quad (4)$$

Równanie (4) jest jednowymiarowym zagadnieniem Keplera (patrz [71]) oraz stała λ jest dodatnia. Równanie to opisuje ruch punktu materialnego o jednostkowej masie poruszającego się po linii prostej w polu nieruchomego centrum grawitacyjnego umieszczonego w początku układu współrzędnych, a $\lambda = \gamma M$, gdzie M jest masą centrum grawitacyjnego. Można zauważyć, że rozwiązanie $R(t)$ z prędkością początkową $\dot{R}(0) = 0$ opisuje kolizję punktu z początkiem układu współrzędnych.

Konfigurację N ciał $q(0) \in \Omega$ spełniającą warunek (3) nazywamy centralną konfiguracją układu (1). Zatem każda centralna konfiguracja generuje rozwiązanie homotetyczne zagadnienia N ciał. Rozwiązania te są częścią bardziej ogólnej klasy rozwiązań homograficznych, to znaczy rozwiązań problemu N ciał, dla których kształt utworzony przez ciała występujące w konfiguracji jest zachowany w każdej chwili czasu. Rozwiązanie $q(t) \in \Omega$ układu (1) nazywamy rozwiązaniem homograficznym, o ile istnieją funkcja skalarna $R(t) > 0$ oraz specjalna macierz ortogonalna $g(t) \in SO(3)$ takie, że $q(t) = R(t)g(t)q(0)$ dla każdego t . Wyróżniamy dwie istotne klasy rozwiązań homograficznych: rozwiązanie $q(t) = R(t)q(0)$ nazywamy homotetycznym, a jeżeli $R(t) = 1$, to $q(t) = g(t)q(0)$ nazywamy względnym położeniem równowagi. Wiadomo, że dla rozwiązania $q(t) \in \Omega$ układu (1) będącego rozwiązaniem homograficznym, konfiguracja N ciał $q(0)$ jest centralna. W przypadku planarnym wstawiając $q(t) = R(t)e^{\phi(t)J}q(0) \in \mathbb{R}^{2N}$ do układu (1) otrzymujemy, że funkcje $(R(t), \phi(t))$ spełniają dwuwymiarowe zagadnienie Keplera

$$\begin{cases} \ddot{R}(t) - R(t)\dot{\phi}(t)^2 = -\frac{\lambda}{R(t)^2} \\ 2\dot{R}(t)\dot{\phi}(t) + R(t)\ddot{\phi}(t) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

oraz $q(0) \in \Omega$ jest centralną konfiguracją układu (1), gdzie J jest standardową macierzą symplektyczną, to znaczy $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. A zatem centralne konfiguracje odgrywają istotną rolę w konstruowaniu ważnej klasy rozwiązań układu (1). Dowodząc istnienia nowych centralnych konfiguracji znajdujemy nowe rozwiązania zagadnienia N ciał, w szczególności także nowe rozwiązania okresowe tego problemu.

Wiemy, że każda konfiguracja dwóch ciał jest centralna. Natomiast dla problemu trzech ciał mamy trzy klasy współliniowych centralnych konfiguracji (jedna klasa odpowiada jednemu

uporządkowaniu ciał na prostej, przy czym utożsamiamy dwie klasy, o ile z jednej można otrzymać drugą poprzez obrót o 180°) odkryte w 1767 roku przez Eulera (patrz [26]) oraz dwie klasy konfiguracji, dla których masy są usytuowane w wierzchołkach trójkąta równobocznego (klasy odpowiadają dwóm możliwym orientacjom trójkąta na płaszczyźnie) znalezione w 1772 roku przez Lagrange’a (patrz [44]). Wintner w książce [91] pokazał, iż trzy współliniowe oraz dwie trójkątne konfiguracje są jedynymi możliwymi centralnymi konfiguracjami problemu trzech ciał. Zauważmy, że dla $N \geq 3$ konfiguracja N ciał o równych masach usytuowanych w wierzchołkach N -kąta foremego jest centralna (dla przykładu patrz [13, 70]).

Jednym z najważniejszych problemów mechaniki nieba jest klasyfikacja wszystkich centralnych konfiguracji problemu N ciał. Problem ten ma długą historię sięgającą XVIII wieku oraz był studiowany przez wielu matematyków włączając Eulera oraz Lagrange’a. Jego istotność została podkreślona przez Smale’a w 1997 roku poprzez umieszczenie go jako szósty z osiemnastu najważniejszych matematycznych problemów XXI wieku (patrz [84]):

„Dla ustalonych dodatnich mas m_1, \dots, m_N problemu N ciał, czy liczba planarnych centralnych konfiguracji jest skończona?”

Już w 1941 roku Wintner sformułował to pytanie w książce [91]. Hampton i Moeckel (patrz [38]) oraz Albouy i Kaloshin (patrz [2]) znaleźli odpowiedź na pytanie Smale’a, odpowiednio, dla problemu czterech i pięciu ciał. Jak dotąd pytanie to pozostaje otwarte dla sześciu i więcej ciał. Istnieją próby udzielenia częściowych odpowiedzi (patrz na przykład [47]) oraz znane są jedynie pewne oszacowania dotyczące liczby centralnych konfiguracji. Dla przykładu Merkel w artykule [54] i Pacella w artykule [62], wykorzystując teorię Morse’a, określili ograniczenie dolne na liczbę przestrzennych, niewspółliniowych centralnych konfiguracji. Podobnie mamy dla planarnych, niewspółliniowych centralnych konfiguracji (patrz [64]). Jeśli chodzi o współliniowe centralne konfiguracje znane jest dokładne oszacowanie. Moulton w artykule [59] pokazał, iż dla danych N mas, liczba klas współliniowych centralnych konfiguracji wynosi dokładnie $\frac{N!}{2}$. Shub w artykule [82] udowodnił natomiast, iż zbiór klas planarnych centralnych konfiguracji jest zwarty.

Klasyfikacja centralnych konfiguracji jest skomplikowanym zagadnieniem, dlatego stosuje się pewne uproszczenia nakładając dodatkowe warunki na masy ciał oraz rozważając wysoce symetryczne konfiguracje. Dla przykładu Palmore w artykule [65] badał konfiguracje składające się z $N - 1$ ciał o masach jednostkowych usytuowanych w wierzchołkach $N - 1$ -kąta foremego oraz dodatkowego ciała o dowolnej dodatniej masie umieszczonego w środku masy. Dostępnych jest wiele przykładów centralnych konfiguracji odkrytych w duchu wspomnianych ograniczeń, dla przykładu patrz [1, 35, 48, 50, 58, 69, 89, 91].

Rodziny centralnych konfiguracji, które badamy w niniejszej rozprawie są następujące:

- planarna rodzina sześciokąta foremnego z dodatkowym ciałem w środku masy (patrz [57]),
- planarna rodzina dwóch zagnieżdżonych kwadratów (patrz [27]),
- planarna rodzina rozety dla trzynastu ciał (patrz [46, 79]),
- przestrzenne rodziny dwóch zagnieżdżonych czworościanów foremnych (patrz [15]),
- przestrzenna rodzina dwóch zagnieżdżonych ośmiościanów foremnych (patrz [14]),
- przestrzenna rodzina dwóch zagnieżdżonych ośmiościanów foremnych z dodatkowym ciałem w środku masy (patrz [87]),
- przestrzenna rodzina dwóch zagnieżdżonych sześciąt (patrz [14]),
- przestrzenna rodzina dwóch zagnieżdżonych sześciąt z dodatkowym ciałem w środku masy (patrz [87]),
- przestrzenna rodzina dwóch dualnych wielościanów foremnych dla problemu czternastu ciał (patrz [18]),
- przestrzenna rodzina dla problemu $n + 3$ ciał dla $n = 3, 4, 6$ (patrz [53]).

Powyższe rodziny składają się z centralnych konfiguracji, które nie są współliniowe, to znaczy ciała występujące w konfiguracjach nie leżą na jednej prostej.

Jak zostało nadmienione powyżej, badanie centralnych konfiguracji jest istotnym zagadnieniem. Ważna klasa rozwiązań problemu N ciał jaką jest klasa rozwiązań homograficznych jest bezpośrednio związana z pojęciem centralnej konfiguracji. Rzeczywiście, konfiguracja N ciał dla rozwiązania homograficznego pozostaje centralna dla każdej chwili czasu t . Najbardziej znanymi rozwiązaniami homograficznymi są te dla problemu trzech ciał pochodzące od Eulera oraz Lagrange'a. Centralne konfiguracje generują jedyne jak dotąd dane jawną formułą rozwiązania zagadnienia N ciał. W szczególności planarne centralne konfiguracje dostarczają rozwiązań okresowych problemu N ciał.

Jest wiele innych powodów, dla których badanie centralnych konfiguracji jest ważne dla rozwoju mechaniki nieba. Na przykład poszukiwanie konfiguracji ciał, które są centralne jest istotne dla analizy orbit całkowitych kolizji ciał. W granicy dla czasu t dążącego do czasu kolizji konfiguracja ciał jest centralna przy pewnej zamianie zmiennych w otoczeniu punktu całkowitej kolizji ciał. Zjawisko to zostało początkowo pokazane dla całkowitego zderzenia wszystkich ciał przez Wintnera w książce [91], a następnie Saari uogólnił powyższe rezultaty studiując

paraboliczne ucieczki ciał. Wiedza o centralnych konfiguracjach zapewnia wgląd w dynamikę wokół całkowitych kolizji oraz asymptotyczne zachowanie rozszerzających się podsystemów (patrz [77]). W artykule [83] można znaleźć informacje dotyczące związku centralnych konfiguracji ze zmianą topologii hiperpowierzchni stałej energii i momentu pędu.

W dalszych rozważaniach bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że $\gamma = 1$. Układ (1) stowarzyszymy z potencjałem newtonowskim $U : \Omega \times (0, +\infty)^N \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanym formułą $U(q, m) = U(q_1, \dots, q_N, m_1, \dots, m_N) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{|q_i - q_j|}$. Stąd konfiguracja N ciał $q \in \Omega$ jest centralną konfiguracją układu (1) wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia układ równań algebraicznych następującej postaci:

$$-\lambda \nabla_q I(q, m) = \nabla_q U(q, m) \quad (6)$$

dla pewnej stałej $\lambda > 0$, gdzie potencjał $I : \Omega \times (0, +\infty)^N \rightarrow \mathbb{R}$ dany formułą $I(q, m) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |q_i|^2$ nazywamy momentem bezwładności. Można pokazać, że $\lambda = \frac{U(q, m)}{2I(q, m)}$. Problem badania centralnych konfiguracji sprowadza się wówczas do analizy równania

$$\nabla_q \hat{\varphi}(q, m) = 0, \quad (7)$$

gdzie gładki potencjał $\hat{\varphi} : \Omega \times (0, +\infty)^N \rightarrow \mathbb{R}$ jest dany wzorem $\hat{\varphi}(q, m) = U(q, m) + \lambda I(q, m)$.

Potencjał newtonowski U stowarzyszony z układem (1) jest jednorodny, a ponadto zależy tylko od wzajemnych odległości pomiędzy ciałami, a nie od ich pozycji, dlatego centralne konfiguracje są niezmiennicze ze względu na operacje skalowania i obrotu. Dokładniej, dla centralnej konfiguracji $q \in \Omega$ oraz dla każdego $\alpha > 0$ i $g \in SO(d)$ konfiguracje αq oraz gq są również centralnymi konfiguracjami ze współczynnikami równymi, odpowiednio, $\frac{\lambda}{\alpha^3}$ oraz λ . Zatem na zbiorze centralnych konfiguracji możemy wprowadzić relację równoważności następująco: mówimy, że centralne konfiguracje q oraz \tilde{q} są równoważne, jeżeli istnieją $\alpha > 0$ oraz $g \in SO(d)$ takie, że $\tilde{q} = \alpha gq$. Innymi słowy utożsamiamy ze sobą dwie centralne konfiguracje, gdy z jednej możemy otrzymać drugą poprzez złożenie operacji skalowania oraz obrotu.

Grupą symetrii w planarnym problemie N ciał jest grupa specjalnych macierzy ortogonalnych $SO(2)$, natomiast w problemie przestrzennym grupą symetrii jest grupa $SO(3)$. Działanie $SO(2)$ na przestrzeni konfiguracji Ω jest wolne, stąd przestrzeń ilorazowa $\Omega/SO(2)$ jest rozmaitością. Zatem można rozważać nowy potencjał zdefiniowany na przestrzeni ilorazowej (patrz [46, 55–57]). W podejściu tym centralne konfiguracje są rozważane nie jako orbity krytyczne, ale jako punkty krytyczne potencjału ilorazowego. Z drugiej strony w sytuacji przestrzennej działanie grupy symetrii $SO(3)$ nie jest wolne, dlatego przestrzeń ilorazowa $\Omega/SO(3)$ nie jest rozmaitością (patrz [62]). Grupa izotropii współliniowej centralnej konfiguracji jest sprzężona z $SO(2)$, natomiast dla przestrzennych centralnych konfiguracji, które nie są współliniowe grupa ta jest trywialna. Współliniowe centralne konfiguracje są niezde-

generowane jako punkty krytyczne odpowiedniego potencjału (patrz [62]), stąd nie zachodzi bifurkacja centralnych konfiguracji z rodzin współliniowych, gdyż warunek konieczny jej istnienia nie jest spełniony. Warunek konieczny stanowi, iż bifurkacja może zachodzić tylko ze zdegenerowanych punktów krytycznych. Oznaczmy przez Ω_0 zbiór współliniowych centralnych konfiguracji. Wówczas przestrzeń ilorazowa $(\Omega \setminus \Omega_0)/SO(3)$ działania grupy $SO(3)$ na przestrzeni konfiguracji $\Omega \setminus \Omega_0$ jest rozmaitością.

W ogólności podejście inne od tego wykorzystującego przestrzeń ilorazową do badania istnienia i bifurkacji centralnych konfiguracji było z sukcesem stosowane. Pacella w artykule [62] studiowała przestrzenne centralne konfiguracje z użyciem niezmienniczej teorii Morse’a, a Pérez-Chavela i Rybicki w artykule [67] stosowali niezmienniczą teorię bifurkacji, dla innych przykładów patrz [31, 51, 81].

W niniejszej rozprawie nie przechodzimy do przestrzeni orbit oraz stosujemy niezmiennicze podejście do problemu badania istnienia i bifurkacji centralnych konfiguracji zagadnienia N ciał. Rezultaty dotyczące lokalnych bifurkacji centralnych konfiguracji uzyskane za pomocą niezmienniczego indeksu Conley’a oraz stopnia współzmienniczych odwzorowań gradientowych są równoważne do tych, które można otrzymać rozważając przestrzeń ilorazową i stosując zwykły indeks Conley’a oraz stopień Brouwera.

Powyższa uwaga stosuje się tylko do zastosowań otrzymanych wyników w mechanice nieba. Poprzez przechodzenie do przestrzeni orbit nie można udowodnić abstrakcyjnych rezultatów zawartych w tej rozprawie, które uzyskaliśmy stosując podejście niezmiennicze. Ponadto rezultaty dotyczące globalnej bifurkacji wymagają zastosowania niezmienniczego podejścia oraz zostały udowodnione dla ortogonalnych reprezentacji zwartej grupy Liego. Nie mamy natomiast odpowiadających im twierdzeń dotyczących globalnej bifurkacji na rozmaitościach i dlatego badamy przestrzeń konfiguracji zamiast przechodzić do przestrzeni orbit, aby dowodzić istnienia globalnych bifurkacji. Innymi słowy abstrakcyjne rezultaty otrzymane w rozprawie są silniejsze niż te potrzebne do badania centralnych konfiguracji.

Przeprowadzanie dowodów i obliczeń na przestrzeni ilorazowej jest teoretycznie łatwe, ale praktycznie trudne. Palmore w artykule [65], przechodząc do przestrzeni orbit, badał pewną jednoparametrową rodzinę centralnych konfiguracji dla problemu N ciał (rodzina $N - 1$ -kąta foremnego z dodatkowym ciałem w środku masy) oraz wykazał, że istnieje dokładnie jedna wartość parametru, dla którego rodzina ta jest zdegenerowana. Jednak wynik ten, podobnie jak wiele innych rezultatów tego autora, okazał się nieprawdziwy. Dokładniej, Meyer i Schmidt w artykule [56] odtworzyli powyższe rezultaty dla problemu czterech i pięciu ciał oraz wykazali, że parametry te są parametrami bifurkacji. Ponadto udowodnili, że w miarę jak wzrasta liczba ciał N pojawia się więcej niż dokładnie jedna wartość parametru, dla którego rozważana rodzina jest zdegenerowana, a także zachodzą bifurkacje z tej rodziny (patrz [57]). Autorzy

przeprowadzili analizę problemu dla $N \leq 13$ i wykazali istnienie wielu orbit lokalnej bifurkacji centralnych konfiguracji wzdłuż rodzin rozpatrywanych przez Palmore'a. Innymi słowy wykazali, że rezultaty Palmore'a są nieprawdziwe.

Rozważane w niniejszej rozprawie rodziny centralnych konfiguracji traktujemy jako rodziny trywialne. Zauważmy, że posiadają one na ogół duże symetrie. Dowodzimy istnienia bifurkacji centralnych konfiguracji z tych rodzin. Interesujące byłyby informacje dotyczące kształtu nowych centralnych konfiguracji bifurkujących z rodzin trywialnych. Otrzymujemy, iż w pewnych przypadkach jest on mniej regularny, wykluczając, że rodziny te mają ten sam typ symetrii jak rodziny trywialne. W rezultacie dostarczamy przykładów centralnych konfiguracji o mniej regularnych kształtach. Innymi słowy dowodzimy zachodzenie zjawiska łamania symetrii centralnych konfiguracji. Informacja dotycząca kształtu jest jedynie lokalna.

Obecność wielu symetrii w badanym problemie powoduje, iż można rozważać symetryczne podzbiory pełnej przestrzeni konfiguracji, które są niezmiennicze ze względu na potoki gradientowe. Badanie tych podzbiorów powoduje znaczne uproszczenie obliczeń. Pojawia się naturalne pytanie, czy spowoduje to uzyskanie silniejszych rezultatów. Rozważając przestrzeń ilorazową oraz ograniczając poszukiwania do symetrycznych podzbiorów możemy nie uzyskać bifurkacji, podczas gdy zachodzi ona w pełnej przestrzeni konfiguracji. Dla przykładu w artykułach [56, 57] zachodzi bifurkacja mniej symetrycznych rodzin centralnych konfiguracji z wysoko symetrycznych rodzin wyjściowych. Meyer i Schmidt rozważali między innymi rodzinę trójkąta równobocznego z masami jednostkowymi z dodatkowym ciałem o dowolnej dodatniej masie usytuowanym w środku masy oraz udowodnili, że z tej rodziny bifurkują mniej symetryczne rodziny (rodziny trójkątów równoramiennych ostrokątnych i rozwartokątnych z dodatkowym ciałem umieszczonym blisko centroidu). Analogicznie dla rodziny kwadratów z piątym ciałem w centroidzie autorzy udowodnili bifurkacje rodzin o mniejszych symetriach (patrz [57]). Podobnie dla planarnej rodziny rozety dla trzynastu ciał dowodzimy istnienia bifurkacji centralnych konfiguracji, które nie są typu rozety. Zatem uzyskane rezultaty są silniejsze niż te, które można uzyskać rozważając niepełną przestrzeń konfiguracji. Podobnie dla planarnej rodziny dwóch zagnieżdżonych kwadratów również uzyskujemy silniejsze wyniki nie rozważając niezmienniczych podzbiorów przestrzeni konfiguracji.

Jak zostało już nadmienione, zamiast przechodzić do przestrzeni $\Omega/SO(d)$ i traktować klasy centralnych konfiguracji jako pojedyncze punkty będziemy rozpatrywać całe $SO(d)$ -orbity centralnych konfiguracji. Dokładniej, problem badania centralnych konfiguracji sprowadzamy do analizy $SO(d)$ -orbit krytycznych $SO(d)$ -niezmienniczego potencjału $\hat{\varphi} : \Omega \times (0, +\infty)^N \rightarrow \mathbb{R}$ klasy C^∞ . W rozważaniach wykorzystujemy pewną znaną rodzinę centralnych konfiguracji i poszukujemy $SO(d)$ -orbit lokalnych i globalnych bifurkacji należących do tej rodziny. Zakładamy zatem, że istnieją ciągle odwzorowania $w : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ oraz $m : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)^N$ takie, że

$\nabla_q \hat{\varphi}(w(\rho), m(\rho)) = 0$, to znaczy odwzorowanie $w : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ definiuje rodzinę centralnych konfiguracji przy pewnych masach ciał zadanych odwzorowaniem $m : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)^N$. Rozważamy równanie następującej postaci:

$$\nabla_q \varphi(q, \rho) = 0, \quad (8)$$

gdzie potencjał $\varphi : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest zdefiniowany wzorem $\varphi(q, \rho) = \hat{\varphi}(q, m(\rho))$. Wówczas rodzinę

$$\mathcal{F} = \bigcup_{\rho \in \mathbb{R}} SO(d)(w(\rho)) \times \{\rho\} \subset (\nabla_q \varphi)^{-1}(\{0\}) \quad (9)$$

nazywamy rodziną $SO(d)$ -orbit rozwiązań trywialnych równania (8) (lub krótko rodziną trywialną centralnych konfiguracji).

Poza symetriami równanie (8) posiada również strukturę gradientową, dlatego stosujemy niezmienniki topologiczne, którymi można posługiwać się w niezmienniczym kontekście. Wykorzystujemy klasyczne niezmienniki takie jak: stopień G -współzmiennicznych odwzorowań gradientowych, gdzie G jest zwartą grupą Liego (patrz [32, 75, 76]) oraz niezmienniczy indeks Conely'a (patrz [5, 29, 30, 32]). Własności wspomnianego stopnia omówiono na przykład w [3, 4, 33].

Cel niniejszej rozprawy jest dwojaki. Z jednej strony dowodzimy pewnych abstrakcyjnych rezultatów dotyczących niezmienniczej teorii bifurkacji. Z drugiej strony stosujemy te rezultaty dla udowodnienia istnienia nowych centralnych konfiguracji zagadnienia N ciał. Formułujemy warunki konieczne i dostateczne na istnienie lokalnych oraz globalnych bifurkacji planarnych i przestrzennych centralnych konfiguracji problemu N ciał. W rozważaniach wykorzystujemy pewną znaną rodzinę centralnych konfiguracji \mathcal{F} oraz poszukujemy orbit lokalnych i globalnych bifurkacji należących do tej rodziny. Problem ten sprowadzamy do obliczania indeksów Morse'a macierzy Hessego $\nabla_q^2 \varphi(w(\rho), \rho)$. W sytuacji lokalnej bifurkacji rozważamy rodzinę rozwiązań trywialnych oraz poszukujemy rozwiązań nietrywialnych w jej pobliżu. Dla globalnej bifurkacji poszukujemy spójnych zbiorów rozwiązań nietrywialnych w pobliżu rodziny trywialnej, które spełniają dodatkowo alternatywę typu Rabinowitza (patrz warunek (2.1.3)).

W niniejszej rozprawie rozpatrujemy topologiczną bifurkację (lokalną oraz globalną, patrz Definicje 2.1.1 oraz 2.1.2), nie natomiast bifurkację w sensie zmiany liczby rozwiązań rozpatrywanych równań. Topologiczną bifurkację, o której mowa w rozprawie badano na przykład w [39, 60, 73, 74]. Jedną z możliwych definicji bifurkacji w sensie zmiany liczby rozwiązań jest następująca: punkt (v_0, ρ_0) jest punktem bifurkacji (ze względu na ρ), o ile $f(v_0, \rho_0) = 0$ oraz liczba rozwiązań (stacjonarnych lub okresowych) równania $\dot{v} = f(v, \rho)$ zmienia się, gdy parametr ρ przechodzi przez wartość ρ_0 , gdzie $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest funkcją klasy C^∞ . Formalną definicję bifurkacji w sensie zmiany liczby rozwiązań można znaleźć na przykład w książce [80]. Definicja ta jest trudna do weryfikacji i była na przykład badana w artykułach [16, 17] w sy-

tuacji małej liczby ciał. Powyższe definicje, topologicznej bifurkacji oraz bifurkacji w sensie zmiany liczby rozwiązań, są niezależne, to znaczy pierwsza z nich może zachodzić, podczas gdy druga nie występuje i odwrotnie.

Sformułujemy i udowodnimy warunki konieczne i dostateczne istnienia lokalnej oraz globalnej bifurkacji rozwiązań nietrywialnych równań gradientowych z symetriami z danej rodziny orbit punktów krytycznych. Rozważamy równanie

$$\nabla_v \varphi(v, \rho) = 0, \quad (10)$$

gdzie potencjał $\varphi : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest G -niezmienniczym potencjałem klasy C^2 rozpatrywanym na zbiorze Ω będącym otwartym i G -niezmienniczym podzbiorem ortogonalnej G -reprezentacji. Warunek konieczny istnienia lokalnej bifurkacji stanowi, iż tylko zdegenerowana G -orbita krytyczna może być orbitą bifurkacji (patrz Twierdzenie 2.2.2). Ponadto definiujemy indeks bifurkacji (patrz Definicja 2.1.3) oraz dowodzimy, iż jego nietrywialność implikuje zachodzenie globalnej bifurkacji orbit punktów krytycznych (patrz Twierdzenie 2.4.5). Przedstawimy, prosto w weryfikacji, algebraiczny warunek stanowiący warunek dostateczny implikujący nietrywialność tego indeksu (patrz Twierdzenie 2.4.6). Warunki dostateczne istnienia lokalnej bifurkacji dane są Twierdzeniami 2.3.3 i 2.3.4 oraz wykorzystują G -niezmienniczy indeks Conley'a. Udowodnimy także pewne globalne twierdzenie bifurkacyjne typu Rabinowitza dla równań gradientowych z symetriami (patrz Twierdzenie 2.4.7). W ostatnim rozdziale rozprawy testujemy uzyskane abstrakcyjne narzędzia na konkretnych rodzinach centralnych konfiguracji, to znaczy stosujemy te abstrakcyjne rezultaty do badania bifurkacji planarnych i przestrzennych centralnych konfiguracji układu (1).

Smoller w artykule [86] udowodnił, że zmiana G -niezmienniczego indeksu Conley'a implikuje zachodzenie lokalnej bifurkacji z rodziny punktów stałych działania grupy G . W rozprawie nie nakładamy żadnego dodatkowego założenia na rodzinę trywialną \mathcal{F} . W szczególności nie zakładamy, aby rodzina ta zawierała się w punktach stałych działania grupy Liego G .

Zauważmy, że algebraiczna struktura newtonowskiego potencjału nie jest istotna z punktu widzenia centralnych konfiguracji. Znaczenia ma ich niezmienniczość ze względu na skalowanie i obrót. Metodę rozważaną w rozprawie można zastosować nie tylko do kilku omawianych tu przykładów, lecz także do innych matematycznych modeli zjawisk opisujących interakcje pomiędzy cząstkami, których zachowanie można opisać za pomocą niezmienniczych potencjałów. Dla przykładu, w dynamice molekularnej, relacje intermolekularne są opisywane szerokim spektrum potencjałów, które są niezmiennicze (patrz [16,17]). Ponadto metodę przedstawioną w tej rozprawie można łatwo zaimplementować w jakimkolwiek środowisku do obliczeń symbolicznych.

Rozdział 1

Preliminaria

W rozdziale tym sformułujemy podstawowe definicje oraz przedstawimy najważniejsze fakty wykorzystywane w dalszej części rozprawy. Terminologia dotycząca zagadnień bifurkacyjnych zostanie omówiona osobno w Rozdziale 2.

1.1 Notacja

Niniejszy podrozdział poświęcony jest omówieniu notacji wykorzystywanej w rozprawie.

Niech X będzie przestrzenią unormowaną z normą $|\cdot|_X$. Symbolami $B_\varepsilon(X, x_0)$, $D_\varepsilon(X, x_0)$ oraz $S_\varepsilon(X, x_0)$ będziemy oznaczać, odpowiednio, kulę otwartą, kulę domkniętą oraz sferę w przestrzeni X o środku w punkcie $x_0 \in X$ i promieniu $\varepsilon > 0$, to znaczy

$$B_\varepsilon(X, x_0) = \{x \in X : |x - x_0|_X < \varepsilon\},$$

$$D_\varepsilon(X, x_0) = \{x \in X : |x - x_0|_X \leq \varepsilon\},$$

$$S_\varepsilon(X, x_0) = \{x \in X : |x - x_0|_X = \varepsilon\}.$$

Natomiast dla oznaczenia kuli otwartej lub kuli domkniętej oraz sfery o środku w punkcie $0 \in X$ będziemy używać, odpowiednio, symboli $B_\varepsilon(X)$, $D_\varepsilon(X)$ oraz $S_\varepsilon(X)$. W przypadku kuli czy sfery o promieniu 1 będziemy wykorzystywać symbole, odpowiednio, $B(X)$, $D(X)$ oraz $S(X)$.

Dla zbioru $A \subset X$ symbolem $A(\varepsilon)$ będziemy oznaczać ε -otoczenie zbioru A , to znaczy $\bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(X, a)$. Natomiast przez otoczenie zbioru A będziemy rozumieć zbiór $Y \subset X$ taki, że $A \subset Y$ oraz istnieje otwarty zbiór $O \subset X$ spełniający warunek postaci $A \subset O \subset Y$.

Niech A będzie podzbiorem przestrzeni unormowanej X . Symbolem $d(x, A)$ będziemy oznaczać odległość zbioru A od punktu $x \in X$. Z kolei $\text{int}(A)$, $\text{cl}(A)$ oraz ∂A będą oznaczać, odpowiednio, wnętrze, domknięcie oraz brzeg zbioru A .

Litery \mathbb{N} , \mathbb{Z} i \mathbb{R} oznaczają kolejno zbiory liczb naturalnych, całkowitych oraz rzeczywistych.

Niech X oraz Y będą przestrzeniami Banacha oraz $f : X \rightarrow Y$ będzie odwzorowaniem klasy C^1 . Wówczas symbolem $Df(x)$, lub równoważnie przez $D_x f(x)$, oznaczamy pochodną Fréchet'a odwzorowania f w punkcie $x \in X$. Dla potencjału $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ klasy C^1 , zmiennej $x = (x_1, \dots, x_n)$, przez $g'_{x_i}(x)$ oznaczamy pochodną cząstkową potencjału g w punkcie $x \in \mathbb{R}^n$ względem zmiennej x_i . W przypadku funkcji jednej zmiennej $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ klasy C^1 będziemy stosować standardowy symbol $\dot{u}(t)$ dla oznaczenia pochodnej funkcji u w punkcie $t \in \mathbb{R}$.

Dodatkowo przez Id_X będziemy oznaczać odwzorowanie identycznościowe dowolnej przestrzeni topologicznej X .

Niech H będzie skończenie wymiarową i rzeczywistą przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. Następnie dla liniowego i samosprężonego operatora $A : H \rightarrow H$ wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned}\sigma(A) &= \{\lambda \in \mathbb{R} : \exists v \neq 0 Av = \lambda v\}, \\ \sigma^+(A) &= \{\lambda \in \sigma(A) : \lambda > 0\}, \\ \sigma^-(A) &= \{\lambda \in \sigma(A) : \lambda < 0\}.\end{aligned}$$

Przypomnijmy, że dla operatora $A : H \rightarrow H$ mamy, że $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. Podprzestrzeń własną operatora A odpowiadającą wartości własnej λ będziemy oznaczać symbolem $\mathbb{E}_A(\lambda)$, a ponadto przyjmijmy $\mathbb{E}_A^+ = \bigoplus_{\lambda \in \sigma^+(A)} \mathbb{E}_A(\lambda)$ oraz $\mathbb{E}_A^- = \bigoplus_{\lambda \in \sigma^-(A)} \mathbb{E}_A(\lambda)$. Dla prostoty zapisu będziemy stosować symbole \mathbb{E}^+ oraz \mathbb{E}^- , odpowiednio, zamiast \mathbb{E}_A^+ i \mathbb{E}_A^- w przypadku, gdy z kontekstu będzie jasno wynikało jakiego operatora podprzestrzenie własne rozważamy.

Definicja 1.1.1. Niech $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ będzie skończenie wymiarową i rzeczywistą przestrzenią Hilberta. Gradientem potencjału $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$ klasy C^1 nazywamy odwzorowanie $\nabla\varphi : H \rightarrow H$ takie, że dla każdych $v, w \in H$ zachodzi następująca równość:

$$\langle \nabla\varphi(v), w \rangle_H = D\varphi(v)w.$$

Jeżeli rozpatrujemy potencjał postaci $\varphi : H \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, to przez $\nabla_v \varphi$ będziemy rozumieć gradient potencjału φ ze względu na zmienną v .

Macierz Hessego (inaczej hesjan) potencjału $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$ klasy C^2 będziemy oznaczać symbolem $\nabla^2\varphi$, gdzie $\nabla^2\varphi(v) = D\nabla\varphi(v)$ dla każdego $v \in H$.

Przez $\langle \cdot, \cdot \rangle$ będziemy oznaczać standardowy iloczyn skalarny w \mathbb{R}^n , a normę indukowaną przez ten iloczyn skalarny symbolem $|\cdot|$. Wówczas dla $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ otrzymujemy, że $\nabla\varphi(v) = (\varphi'_{v_1}(v), \dots, \varphi'_{v_n}(v))$.

Wprowadźmy następujące oznaczenia: przez Id_n rozumiemy macierz identycznościową wy-

miaru $n \times n$, symbolami B^T oraz $\text{trace}(B)$ oznaczamy, odpowiednio, transpozycję oraz ślad macierzy B . Dla macierzy kwadratowej B przez $\det B$ będziemy rozumieć wyznacznik tej macierzy. Co więcej, macierz diagonalną z elementami $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ usytuowanymi na głównej przekątnej będziemy oznaczać poprzez $\text{diag}(b_1, \dots, b_n)$. W analogiczny sposób będziemy rozumieć zapis postaci $\text{diag}(B_1, \dots, B_n)$, gdzie B_1, \dots, B_n są pewnymi macierzami kwadratowymi. Ponadto dla macierzy odwracalnej B symbolem B^{-1} oznaczamy macierz odwrotną do B . Symbolami $M(n)$, $Gl(n)$, $O(n)$ i $SO(n)$ oznaczamy, odpowiednio, grupę macierzy kwadratowych (nad ciałem liczb rzeczywistych) wymiaru $n \times n$ oraz jej podgrupy, macierzy odwracalnych, ortogonalnych oraz ortogonalnych o wyznaczniku równym jedności (tak zwanych specjalnych macierzy ortogonalnych), to znaczy

$$\begin{aligned} Gl(n) &= \{B \in M(n) : \det B \neq 0\}, \\ O(n) &= \{B \in Gl(n) : B^T = B^{-1}\}, \\ SO(n) &= \{B \in O(n) : \det B = 1\}. \end{aligned}$$

W szczególności elementy grupy $SO(2)$ będziemy zapisywać w następujący sposób:

$$SO(2) = \left\{ \Phi(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} : \phi \in [0, 2\pi) \right\}. \quad (1.1.1)$$

Symbolem $m^-(B)$ będziemy oznaczać indeks Morse'a macierzy symetrycznej $B \in M(n)$, to znaczy sumę krotności ujemnych wartości własnych macierzy B .

1.2 Grupy Liego

W podrozdziale tym omówimy podstawowe pojęcia dotyczące grup Liego oraz ich reprezentacji. Przedstawiony tutaj materiał został zaczerpnięty z [6, 23, 25, 32, 40].

Definicja 1.2.1. Trójkę (X, G, ς) nazywamy działaniem grupy topologicznej G na przestrzeni topologicznej X (lub krótko mówimy G -działaniem na przestrzeni X), jeżeli odwzorowanie $\varsigma : G \times X \rightarrow X$ jest ciągle oraz spełnia następujące warunki:

- (1) $\varsigma(e, x) = x$ dla każdego $x \in X$, gdzie e jest elementem neutralnym grupy G ,
- (2) $\varsigma(g_2, \varsigma(g_1, x)) = \varsigma(g_2 g_1, x)$ dla każdych $x \in X$ i $g_1, g_2 \in G$.

Przestrzeń X nazywamy wówczas G -przestrzenią. Dla skrócenia zapisu będziemy pisać gx zamiast $\varsigma(g, x)$.

W szczególności G -przestrzenią z wyróżnionym punktem (lub równoważnie punktowaną G -przestrzenią) nazywamy parę $(X, *)$ składającą się z G -przestrzeni X oraz wyróżnionego

punktu (inaczej punktu bazowego) $*$, który jest punktem stałym działania grupy G , to znaczy $\varsigma(g, *) = *$ dla każdego $g \in G$. Dla skrócenia zapisu zamiast $(X, *)$ będziemy pisać X . Ponadto dla G -przestrzeni X bez wyróżnionego punktu definiujemy G -przestrzeń z punktem bazowym X^+ jak następuje $X^+ = X \cup \{*\}$.

Niech $\overline{sub}(G)$ oznacza zbiór domkniętych podgrup grupy G . Powiemy, że dwie podgrupy $H, K \in \overline{sub}(G)$ są sprzężone, o ile istnieje $g \in G$ takie, że $H = g^{-1}Kg$. Zdefiniowana powyżej relacja jest relacją równoważności, a symbolem (H) będziemy oznaczać klasę sprzężoności elementu $H \in \overline{sub}(G)$. Niech ponadto $\overline{sub}[G]$ oznacza zbiór wszystkich klas sprzężoności domkniętych podgrup grupy G . Definiujemy dalej relację podsprzężenia w następujący sposób: dla $H, K \in \overline{sub}(G)$ mówimy, że H jest podsprzężona z K , co zapisujemy jako $(H) \leq (K)$, jeżeli H jest sprzężona z pewną podgrupą K . Tak zdefiniowana relacja zadaje częściowy porządek na zbiorze $\overline{sub}[G]$. Co więcej, będziemy pisać $(H) < (K)$, o ile $(H) \leq (K)$ oraz $(H) \neq (K)$.

Ustalmy G -przestrzeń X . Jeżeli $x \in X$, to $G_x = \{g \in G : gx = x\} \subset G$ nazywamy grupą izotropii x oraz $G(x) = \{gx : g \in G\} \subset X$ nazywamy G -orbitą x lub po prostu orbitą x . Przypomnijmy, że jeżeli X jest przestrzenią topologiczną Hausdorffa, to $G_x \in \overline{sub}(G)$ oraz grupy izotropii elementów z tej samej G -orbity są sprzężonymi podgrupami grupy G . Co więcej, o G -działaniu (X, G, ς) mówimy, że jest trywialne (odpowiednio wolne), o ile dla każdego $x \in X$ zachodzi $G_x = G$ (odpowiednio $G_x = \{e\}$). Jeżeli G -działanie (X, G, ς) jest trywialne, to G -przestrzeń X będziemy nazywamy trywialną. Ponadto na G -przestrzeni X definiujemy relację \sim w następujący sposób: dla $x, y \in X$ mówimy, że $x \sim y$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje element $g \in G$ taki, że $y = gx$. Powyższa relacja \sim jest relacją równoważności, zbiór ilorazowy względem tej relacji rozpatrywany z topologią ilorazową nazywamy przestrzenią orbit i oznaczamy przez X/G , a klasę abstrakcji elementu $x \in X$ przez $[x]$.

Przykład 1.2.1. Niech $H \in \overline{sub}(G)$. Wtedy G jest H -przestrzenią z działaniem $\varsigma : H \times G \rightarrow G$ zdefiniowanym wzorem $\varsigma(h, g) = gh^{-1}$ dla każdego $h \in H$ oraz $g \in G$. Podobnie jak powyżej na H -przestrzeni G mamy zdefiniowaną relację \sim w następujący sposób: dla $g_1, g_2 \in G$ mówimy, że $g_1 \sim g_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje element $h \in H$ taki, że $g_2 = g_1h^{-1}$. Dla H -przestrzeni G symbolem gH będziemy oznaczać klasę abstrakcji elementu $g \in G$ względem relacji \sim . Ponadto przestrzeń orbit G/H działania grupy H jest G -przestrzenią z naturalnym działaniem $g_2(g_1H) = (g_2g_1)H$ dla każdego $g_1, g_2 \in G$.

Przykład 1.2.2. Niech $H \in \overline{sub}(G)$ oraz niech X będzie H -przestrzenią. Wówczas odwzorowanie $\varsigma : H \times (G \times X) \rightarrow G \times X$ zdefiniowane wzorem $\varsigma(h, (g, x)) = (gh^{-1}, hx)$ dla $h \in H$ oraz $(g, x) \in G \times X$ określa H -działanie na przestrzeni $G \times X$ rozpatrywanej z topologią produktową. Symbolem $G \times_H X$ oznaczamy przestrzeń orbit $(G \times X)/H$. Dla prostoty będziemy pisać $[g, x]$ zamiast $[(g, x)]$ dla oznaczenia klasy abstrakcji elementu $(g, x) \in G \times X$ względem relacji \sim . Ponadto $G \times_H X$ jest G -przestrzenią z działaniem postaci $g_2[g_1, x] = [g_2g_1, x]$ dla

$g_2 \in G$ oraz $[g_1, x] \in G \times_H X$.

Definicja 1.2.2. Niech X będzie G -przestrzenią. Zbiór $A \subset X$ nazywamy niezmienniczym ze względu na działanie grupy G (lub krótko mówimy zbiorem G -niezmienniczym), jeżeli dla każdego $a \in A$ oraz $g \in G$ zachodzi $ga \in A$, to znaczy $G(a) \subset A$.

Definicja 1.2.3. Niech X oraz Y będą G -przestrzeniami. Ciągłe odwzorowanie $f : X \rightarrow Y$ nazywamy G -współzmienniczym (lub równoważnie G -odwzorowaniem), o ile dla każdego $g \in G$ oraz $x \in X$ zachodzi warunek $f(gx) = gf(x)$. W przypadku, gdy $Y = \mathbb{R}$ jest trywialną G -przestrzenią, to G -odwzorowanie $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy G -niezmienniczym potencjałem. Jeżeli G -odwzorowanie $f : X \rightarrow Y$ jest homeomorfizmem, to nazywamy je G -homeomorfizmem, a o G -przestrzeniach X oraz Y mówimy, że są G -homeomorficzne, co zapisujemy symbolicznie w następujący sposób: $X \approx_G Y$.

Przykład 1.2.3. Niech $H \in \overline{\text{sub}}(G)$ oraz niech X i Y będą H -przestrzeniami. Ponadto ustalmy H -odwzorowanie $f : X \rightarrow Y$. Wówczas odwzorowanie $(g, x) \mapsto (g, f(x))$ indukuje G -odwzorowanie $G \times_H f : G \times_H X \rightarrow G \times_H Y$ zdefiniowane formułą $G \times_H f([g, x]) = [g, f(x)]$ dla każdego $[g, x] \in G \times_H X$.

Lemat 1.2.1. Załóżmy, że G jest zwartą grupą topologiczną oraz G -przestrzeń X jest przestrzenią topologiczną Hausdorffa i ustalmy $x \in X$. Wówczas odwzorowanie $f : G/G_x \rightarrow G(x)$ zdefiniowane wzorem $f(gG_x) = gx$ jest G -homeomorfizmem.

Lemat 1.2.2. Niech X będzie G -przestrzenią oraz ustalmy $g \in G$. Wówczas odwzorowanie $\gamma_g : X \rightarrow X$ dane formułą $\gamma_g(x) = gx$ jest homeomorfizmem. W szczególności dla każdego otwartego zbioru $U \subset X$ zbiór $G U = \bigcup_{g \in G} \gamma_g(U) \subset X$ jest również otwarty, a ponadto G -niezmienniczy.

Dowody powyższych lematów można znaleźć na przykład w książce [40].

Definicja 1.2.4. Grupę topologiczną G nazywamy grupą Liego, jeżeli posiada ona strukturę gładkiej rozmaitości oraz działania grupowe $\alpha : G \times G \rightarrow G$ i $\beta : G \rightarrow G$, zdefiniowane formułami $\alpha(g_1, g_2) = g_1 g_2$, $\beta(g) = g^{-1}$ dla $g, g_1, g_2 \in G$, są gładkie.

Przez zwartą grupę Liego rozumiemy grupę Liego, która jest zwarta jako przestrzeń topologiczna.

Przykład 1.2.4. Przykładami grup Liego są $Gl(n)$, $O(n)$ oraz $SO(n)$. Ponadto każda domknięta podgrupa grupy Liego również jest grupą Liego (patrz [40]).

W niniejszej rozprawie będziemy rozważać wyłącznie skończenie wymiarowe grupy Liego.

Definicja 1.2.5. Niech $n \in \mathbb{N}$. Reprezentacją zwartej grupy Liego G (lub inaczej G -reprezentacją) nazywamy parę $\mathbb{V} = (\mathbb{R}^n, \varrho)$, gdzie odwzorowanie $\varrho : G \rightarrow Gl(n)$ jest ciągłym homomorfizmem grup. Wówczas o liczbie n mówimy, że jest wymiarem G -reprezentacji. Reprezentację $\mathbb{V} = (\mathbb{R}^n, \varrho)$ rozważaną z homomorfizmem $\varrho : G \rightarrow O(n)$ nazywamy natomiast ortogonalną reprezentacją zwartej grupy Liego G (lub równoważnie ortogonalną G -reprezentacją). Ponadto mówimy, że G -reprezentacja jest trywialna, o ile $\varrho(g) = Id_n$ dla każdego $g \in G$.

Niech $\mathbb{V} = (\mathbb{R}^n, \varrho)$ będzie G -reprezentacją. Wówczas \mathbb{R}^n jest G -przestrzenią z działaniem $\varsigma : G \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ danym wzorem $\varsigma(g, v) = \varrho(g)v$ oraz dla każdego $g \in G$ odwzorowanie $v \mapsto \varsigma(g, v)$ jest liniowe. Z drugiej strony każde liniowe G -działanie na \mathbb{R}^n definiuje strukturę G -reprezentacji na \mathbb{R}^n , o ile $\varrho(g)v = \varsigma(g, v)$. Dla skrócenia zapisu zamiast $\varrho(g)v$ będziemy pisać gv oraz przez $v \in \mathbb{V}$ będziemy rozumieć $v \in \mathbb{R}^n$. Dla G -reprezentacji $\mathbb{V}_1 = (\mathbb{R}^{n_1}, \varrho_1)$ oraz $\mathbb{V}_2 = (\mathbb{R}^{n_2}, \varrho_2)$ możemy mówić o ich sumie prostej $\mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$, to znaczy G -reprezentacji $(\mathbb{R}^{n_1+n_2}, \varrho_1 \oplus \varrho_2)$, gdzie homomorfizm $\varrho_1 \oplus \varrho_2 : G \rightarrow Gl(n_1 + n_2)$ określony jest formułą

$$(\varrho_1 \oplus \varrho_2)(g) = \begin{bmatrix} \varrho_1(g) & 0 \\ 0 & \varrho_2(g) \end{bmatrix} \text{ dla } g \in G.$$

Natomiast poprzez podreprezentację G -reprezentacji $\mathbb{V} = (\mathbb{R}^n, \varrho)$ będziemy rozumieć podprzestrzeń $\mathbb{V}_1 \subset \mathbb{V}$, która jest również zbiorem G -niezmienniczym. Wówczas \mathbb{V}_1 jest również G -reprezentacją z homomorfizmem ϱ .

W niniejszej rozprawie będziemy rozważać wyłącznie ortogonalne reprezentacje zwartych grup Liego, a ponadto wszystkie rozpatrywane reprezentacje będą rzeczywiste i skończenie wymiarowe, to znaczy $\mathbb{V} = (\mathbb{R}^n, \varrho)$.

Przykład 1.2.5. Przypomnijmy, że elementy grupy Liego $SO(2)$ oznaczamy przez $\Phi(\phi)$, patrz formuła (1.1.1). Niech $k, m \in \mathbb{N}$. Symbolem $\mathbb{R}[1, m]$ oznaczamy dwuwymiarową ortogonalną $SO(2)$ -reprezentację $(\mathbb{R}^2, \varrho_m)$, gdzie homomorfizm $\varrho_m : SO(2) \rightarrow O(2)$ jest zdefiniowany formułą $\varrho_m(\Phi(\phi)) = \Phi(\phi)^m = \Phi(m\phi)$ dla $\Phi(\phi) \in SO(2)$. Ponadto dla $m = 0$ przez $\mathbb{R}[1, 0]$ będziemy rozumieć jednowymiarową trywialną $SO(2)$ -reprezentację oraz $\mathbb{R}[k, m]$ będzie oznaczać sumę prostą k kopii $SO(2)$ -reprezentacji $\mathbb{R}[1, m]$, to znaczy $\mathbb{R}[k, m] = \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{R}[1, m]$.

Niech \mathbb{V} będzie ortogonalną G -reprezentacją oraz niech $\Omega \subset \mathbb{V}$ będzie otwarty i G -niezmienniczy. Ustalmy $H \in \overline{sub}(G)$ i wprowadźmy dalej następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} \Omega^H &= \{v \in \Omega : H \subset G_v\}, \\ \Omega_{(H)} &= \{v \in \Omega : (G_v) = (H)\}, \\ \Omega_{\leq(H)} &= \{v \in \Omega : (G_v) \leq (H)\}, \\ \Omega_{<(H)} &= \{v \in \Omega : (G_v) < (H)\}. \end{aligned}$$

W szczególności $\mathbb{V}^G = \{v \in \mathbb{V} : G_v = G\}$ jest zbiorem punktów stałych działania grupy G . Zauważmy, że o elementach zbioru $\Omega_{(H)}$ mówimy, że mają typ izotropii (H) . Ponadto $G_{gv} = gG_vg^{-1}$ dla każdego $g \in G$ oraz $v \in \mathbb{V}$, a zatem elementy z tej samej G -orbity mają ten sam typ izotropii i dlatego możemy mówić o typie izotropii G -orbity.

Dla $k, l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ symbolem $C_G^k(\mathbb{V}, \mathbb{R})$ będziemy oznaczać zbiór G -niezmienniczych potencjałów klasy C^k (inaczej zbiór G -niezmienniczych C^k -potencjałów), natomiast zbiór G -współzmienniczych C^l -odwzorowań będziemy oznaczać przez $C_G^l(\mathbb{V}, \mathbb{V})$. W szczególności zbiór G -niezmienniczych C^0 -potencjałów (odpowiednio G -współzmienniczych C^0 -odwzorowań) będziemy oznaczać symbolem $C_G(\mathbb{V}, \mathbb{R})$ (odpowiednio $C_G(\mathbb{V}, \mathbb{V})$). Podobnie dla odwzorowań zdefiniowanych na otwartych i G -niezmienniczych zbiorach $\Omega \subset \mathbb{V}$, to znaczy: $C_G^k(\Omega, \mathbb{R})$, $C_G^l(\Omega, \mathbb{V})$, $C_G(\Omega, \mathbb{R})$ oraz $C_G(\Omega, \mathbb{V})$. Analogiczne oznaczenia będziemy stosować dla odwzorowań zdefiniowanych na $\mathbb{V} \times \mathbb{R}$ oraz $\Omega \times \mathbb{R}$ zamiast, odpowiednio, na \mathbb{V} oraz Ω , gdzie \mathbb{R} traktujemy jako jednowymiarową trywialną G -reprezentację, to znaczy: $C_G^k(\mathbb{V} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $C_G^l(\mathbb{V} \times \mathbb{R}, \mathbb{V})$, $C_G(\mathbb{V} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $C_G(\mathbb{V} \times \mathbb{R}, \mathbb{V})$, $C_G^k(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $C_G^l(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{V})$, $C_G(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ oraz $C_G(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{V})$.

Uwaga 1.2.1. Niech \mathbb{V} będzie ortogonalną G -reprezentacją. Wówczas dla każdego G -niezmienniczego C^k -potencjału $\varphi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ gradient $\nabla\varphi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ jest G -współzmienniczym odwzorowaniem klasy C^{k-1} (inaczej G -współzmienniczym C^{k-1} -odwzorowaniem). Rzeczywiście, ze względu na G -niezmienniczość potencjału φ dla każdego $v \in \mathbb{V}$ otrzymujemy następującą równość: $D_v\varphi(v) = D_v\varphi(gv) = D_{gv}\varphi(gv) \circ g$, a stąd

$$\langle \nabla\varphi(v), w \rangle = D_v\varphi(v)w = D_{gv}\varphi(gv)(gw) = \langle \nabla\varphi(gv), gw \rangle = \langle g^T \nabla\varphi(gv), w \rangle$$

dla każdego $w \in \mathbb{V}$. Ostatecznie otrzymujemy, że $g^T \nabla\varphi(gv) = \nabla\varphi(v)$, a zatem $\nabla\varphi(gv) = g \nabla\varphi(v)$.

Uwaga 1.2.2. Niech $\varphi \in C_G^1(\mathbb{V}, \mathbb{R})$ oraz przypomnijmy, że symbolem \mathbb{V}^G oznaczamy zbiór punktów stałych działania grupy G , który jest również ortogonalną G -reprezentacją. Rozważmy $\varphi|_{\mathbb{V}^G} : \mathbb{V}^G \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $(\nabla\varphi)|_{\mathbb{V}^G} : \mathbb{V}^G \rightarrow \mathbb{V}^G$, które będziemy oznaczać symbolami, odpowiednio, φ^G oraz $(\nabla\varphi)^G$. Ze względu na inkluzję $G_v \subset G_{\nabla\varphi(v)}$ dla każdego $v \in \mathbb{V}$ powyżej zdefiniowane odwzorowania są poprawnie określone, a ponadto otrzymujemy następującą równość: $\nabla\varphi^G = (\nabla\varphi)^G$.

Lemat 1.2.3. Niech \mathbb{V} będzie ortogonalną G -reprezentacją oraz niech $\varphi \in C_G^1(\mathbb{V}, \mathbb{R})$, a ponadto ustalmy $U \subset \mathbb{V}$. Wówczas $(\nabla\varphi)^{-1}(\{0\}) \cap GU = \emptyset$, o ile $(\nabla\varphi)^{-1}(\{0\}) \cap U = \emptyset$.

Niech \mathbb{V}_1 będzie podreprezentacją ortogonalnej G -reprezentacji \mathbb{V} . Wówczas $\mathbb{V} \ominus \mathbb{V}_1 = \{v \in \mathbb{V} : \forall v_1 \in \mathbb{V}_1 \langle v, v_1 \rangle = 0\}$ jest ortogonalną G -reprezentacją, a ponadto $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \oplus (\mathbb{V} \ominus \mathbb{V}_1)$. W niniejszej rozprawie będziemy również stosować oznaczenie $\mathbb{V}_1^\perp = \mathbb{V} \ominus \mathbb{V}_1$, jeżeli nie będzie wątpliwości o dopełnieniu ortogonalnym w jakiej reprezentacji mówimy.

Przykład 1.2.6. Niech \mathbb{V} będzie ortogonalną G -reprezentacją oraz niech zbiór $\Omega \subset \mathbb{V}$ będzie otwarty i G -niezmienniczy. Ustalmy $v_0 \in \Omega$ oraz przez H oznaczymy grupę izotropii elementu v_0 . Wiadomo, że $\Omega_{(H)}$ oraz $G(v_0)$ są G -niezmienniczymi podzbiórami, odpowiednio, Ω oraz $\Omega_{(H)}$ (patrz [25]). Wówczas przestrzeń styczna $T_{v_0}G(v_0)$ do orbity $G(v_0)$ w punkcie v_0 jest ortogonalną H -reprezentacją oraz w szczególności przestrzeń $(T_{v_0}G(v_0))^\perp$, będziemy ją oznaczać przez \mathbb{W} , jest ortogonalną H -reprezentacją. Co więcej, otrzymujemy następujące rozkłady przestrzeni $T_{v_0}\mathbb{V}$ na sumy proste:

$$\begin{aligned} T_{v_0}\mathbb{V} &= T_{v_0}\Omega = (T_{v_0}\Omega_{(H)}) \oplus (T_{v_0}\Omega_{(H)})^\perp = \\ &= (T_{v_0}G(v_0)) \oplus (T_{v_0}\Omega_{(H)} \ominus T_{v_0}G(v_0)) \oplus (T_{v_0}\Omega_{(H)})^\perp, \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

$$T_{v_0}\mathbb{V} = T_{v_0}\Omega = T_{v_0}G(v_0) \oplus \mathbb{W} = (T_{v_0}G(v_0)) \oplus \mathbb{W}^H \oplus (\mathbb{W}^H)^\perp. \quad (1.2.3)$$

Zauważmy, że $(G \times_H B_\varepsilon(\mathbb{W}, v_0))_{(H)} = (G \times_H B_\varepsilon(\mathbb{W}, v_0)^H)_{(H)} = G/H \times B_\varepsilon(\mathbb{W}^H, v_0)$, a zatem otrzymujemy następującą inkluzję: $\mathbb{W}^H \subset T_{v_0}\Omega_{(H)}$.

Przykład 1.2.7. Niech \mathbb{V} będzie ortogonalną G -reprezentacją oraz niech $\varphi \in C_G^2(\mathbb{V}, \mathbb{R})$. Ustalmy $v_0 \in (\nabla\varphi)^{-1}(\{0\})$ i połóżmy $H = G_{v_0}$. Przypomnijmy, że przez $\mathbb{E}_{\nabla^2\varphi(v_0)}^+$ oraz $\mathbb{E}_{\nabla^2\varphi(v_0)}^-$ rozumiemy sumy proste podprzestrzeni własnych hesjanu $\nabla^2\varphi(v_0)$ odpowiadających, odpowiednio, dodatnim i ujemnym wartościom własnym. Dla skrócenia zapisu połóżmy $\mathbb{E}^+ = \mathbb{E}_{\nabla^2\varphi(v_0)}^+$ oraz $\mathbb{E}^- = \mathbb{E}_{\nabla^2\varphi(v_0)}^-$. Wówczas \mathbb{E}^+ oraz \mathbb{E}^- są sumami prostymi H -reprezentacji. Co więcej, przestrzeń $\ker \nabla^2\varphi(v_0)$ jest również H -reprezentacją oraz $\mathbb{V} = \ker \nabla^2\varphi(v_0) \oplus \mathbb{E}^+ \oplus \mathbb{E}^-$.

W poniższym lemacie opisujemy rozkład hesjanu $\nabla^2\varphi(v_0) : T_{v_0}\mathbb{V} \rightarrow T_{v_0}\mathbb{V}$ G -niezmienniczego potencjału φ w punkcie krytycznym v_0 , to znaczy $\nabla\varphi(v_0) = 0$, ze względu na rozkład przestrzeni $T_{v_0}\mathbb{V}$ zadany formułą (1.2.2) lub (1.2.3). Jego dowód można znaleźć w artykule [32].

Lemat 1.2.4. *Ustalmy otwarty i G -niezmienniczy podzbiór Ω ortogonalnej G -reprezentacji \mathbb{V} oraz niech $\varphi \in C_G^2(\Omega, \mathbb{R})$. Wówczas dla każdego $v_0 \in (\nabla\varphi)^{-1}(\{0\})$ hesjan*

$$\nabla^2\varphi(v_0) : T_{v_0}\mathbb{V} = \begin{array}{c} T_{v_0}G(v_0) \\ \oplus \\ \mathbb{W}^H \\ \oplus \\ (\mathbb{W}^H)^\perp \end{array} \rightarrow T_{v_0}\mathbb{V} = \begin{array}{c} T_{v_0}G(v_0) \\ \oplus \\ \mathbb{W}^H \\ \oplus \\ (\mathbb{W}^H)^\perp \end{array}$$

ma następujący rozkład:

$$\nabla^2\varphi(v_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B(v_0) & 0 \\ 0 & 0 & C(v_0) \end{bmatrix}. \quad (1.2.4)$$

Niech $\varphi \in C_G^2(\mathbb{V}, \mathbb{R})$ oraz $v_0 \in (\nabla\varphi)^{-1}(\{0\})$. Wówczas $G(v_0) \subset (\nabla\varphi)^{-1}(\{0\})$, gdyż odwzorowanie $\nabla\varphi$ jest G -współmiennicze. Dlatego $G(v_0)$ nazywamy G -orbitą krytyczną potencjału φ . Zgodnie z Lematem 1.2.4 otrzymujemy, że $\dim \ker \nabla^2\varphi(v_0) \geq \dim G(v_0)$. Zatem o G -orbicie krytycznej $G(v_0)$ będziemy mówić, że jest zdegenerowana, o ile zachodzi nierówność ostra. Jeżeli natomiast $\dim \ker \nabla^2\varphi(v_0) = \dim G(v_0)$, to $G(v_0)$ będziemy nazywać niezdegenerowaną G -orbitą krytyczną. Zauważmy także, że powyższa równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy macierze $B(v_0)$ oraz $C(v_0)$ są niezdegenerowane. Co więcej, niezdegenerowaną G -orbitę krytyczną $G(v_0)$ będziemy nazywać specjalną, o ile $m^-(C(v_0)) = 0$.

Sformułujemy teraz pewien techniczny lemat opisujący postać otwartych i G -niezmienniczych otoczeń G -orbit krytycznych (patrz [6, 25]).

Lemat 1.2.5. *Niech $\varphi \in C_G^2(\mathbb{V}, \mathbb{R})$ oraz niech $\nabla\varphi(v_0) = 0$. Połóżmy $H = G_{v_0}$ oraz $\mathbb{W} = (T_{v_0}G(v_0))^\perp$ i zdefiniujmy G -odwzorowanie $\Xi_1 : G \times_H \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{V}$ wzorem $\Xi_1([g, w]) = gw$ dla każdego $[g, w] \in G \times_H \mathbb{W}$. Wówczas Ξ_1 indukuje G -współmienniczy dyfeomorfizm zbioru $G \times_H B_\varepsilon(\mathbb{W}, v_0)$ na otwarte, G -niezmiennicze otoczenie $GB_\varepsilon(\mathbb{W}, v_0)$ G -orbity krytycznej $G(v_0)$ dla odpowiednio małego $\varepsilon > 0$.*

Niech $\varphi \in C_G^2(\mathbb{V}, \mathbb{R})$ oraz $G(v_0)$ będzie niezdegenerowaną G -orbitą krytyczną φ , gdzie przez H będziemy oznaczać G_{v_0} . Przypomnijmy, że zgodnie z formułą (1.2.3) mamy następujący rozkład: $T_{v_0}\mathbb{V} = (T_{v_0}G(v_0)) \oplus \mathbb{W}^H \oplus (\mathbb{W}^H)^\perp$. Ponadto $\mathbb{W}^H = \mathbb{E}_{\nabla^2\varphi|_{\mathbb{W}^H}(v_0)}^+ \oplus \mathbb{E}_{\nabla^2\varphi|_{\mathbb{W}^H}(v_0)}^-$ oraz $(\mathbb{W}^H)^\perp = \mathbb{E}_{\nabla^2\varphi|_{(\mathbb{W}^H)^\perp}(v_0)}^+ \oplus \mathbb{E}_{\nabla^2\varphi|_{(\mathbb{W}^H)^\perp}(v_0)}^-$. Dla skrócenia zapisu $\mathbb{E}_{\nabla^2\varphi|_{\mathbb{W}^H}(v_0)}^+$, $\mathbb{E}_{\nabla^2\varphi|_{\mathbb{W}^H}(v_0)}^-$ oraz $\mathbb{E}_{\nabla^2\varphi|_{(\mathbb{W}^H)^\perp}(v_0)}^+$, $\mathbb{E}_{\nabla^2\varphi|_{(\mathbb{W}^H)^\perp}(v_0)}^-$ będziemy oznaczać symbolami, odpowiednio, \mathbb{E}_1^+ , \mathbb{E}_1^- oraz \mathbb{E}_2^+ , \mathbb{E}_2^- . Sformułujemy dalej G -niezmienniczą wersję lematu Morse'a. Poniższy lemat został zaczerpnięty z [25, 90].

Lemat 1.2.6. *Przy powyższych założeniach otrzymujemy, że istnieją liczba $\varepsilon > 0$ oraz G -współmienniczy dyfeomorfizm $\Xi : G \times_H B_\varepsilon(\mathbb{W}, v_0) \rightarrow \Xi(G \times_H B_\varepsilon(\mathbb{W}, v_0))$ taki, że*

$$\varphi(\Xi([g, w])) = \varphi(v_0) + |w_1^+|^2 - |w_1^-|^2 + |w_2^+|^2 - |w_2^-|^2,$$

gdzie $w = ((w_1^+, w_1^-), (w_2^+, w_2^-)) \in (\mathbb{E}_1^+ \oplus \mathbb{E}_1^-) \oplus (\mathbb{E}_2^+ \oplus \mathbb{E}_2^-)$.

Uwaga 1.2.3. Zauważmy, że każda niezdegenerowana G -orbita krytyczna G -niezmienniczego C^2 -potencjału φ jest izolowana, to znaczy istnieje dla niej otwarte otoczenie $\Theta \subset \mathbb{V}$ będące zbiorem G -niezmienniczym, w którym jest ona jedyną G -orbitą krytyczną potencjału φ , co jest bezpośrednim wnioskiem z Lematu 1.2.6.

Niech $\Omega \subset \mathbb{V}$ będzie otwarty i G -niezmienniczy. Potencjał $\varphi \in C_G^1(\mathbb{V}, \mathbb{R})$ nazywamy Ω -dopuszczalnym, jeżeli $(\nabla\varphi)^{-1}(\{0\}) \cap \partial\Omega = \emptyset$, natomiast dla odwzorowania $\psi \in C_G(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ pojęcie Ω -dopuszczalności oznacza, że spełniony jest następujący warunek: $\psi^{-1}(\{0\}) \cap \partial\Omega = \emptyset$.

Dla zbioru $\Omega \subset \mathbb{V}$ jak powyżej zdefiniujemy teraz pojęcia niezmienniczych oraz specjalnych niezmienniczych Ω -funkcji Morse'a, które zostały wprowadzone w artykule [52]. O Ω -dopuszczalnym potencjale $\varphi \in C_G^2(\mathbb{V}, \mathbb{R})$ powiemy, że jest niezmienniczą Ω -funkcją Morse'a, o ile każda G -orbita krytyczna φ zawarta w Ω jest niezdegenerowana. Dodatkowo mówimy, że niezmiennicza Ω -funkcja Morse'a jest specjalna, jeżeli każda G -orbita krytyczna φ zawarta w Ω jest specjalna.

Uwaga 1.2.4. Zauważmy, że dla każdej niezmienniczej Ω -funkcji Morse'a φ przy dodatkowym założeniu ograniczoności zbioru Ω otrzymujemy, że $(\nabla\varphi)^{-1}(\{0\}) \cap \Omega$ składa się ze skończonej liczby G -orbit krytycznych, na podstawie Uwagi 1.2.3.

Biorąc pod uwagę Lemat 1.2.4 przedstawimy rozkład hesjanu $\nabla^2\varphi(v_0)$ pewnego G -niezmienniczego potencjału φ w punkcie krytycznym v_0 ze względu na rozkład przestrzeni $T_{v_0}\mathbb{V}$ zadany formułą (1.2.2) lub (1.2.3) w sytuacji $\Omega = \Omega_{(H)}$, gdzie $(H) = (\{e\})$. Zauważmy, że w zbiorze Ω występuje dokładnie jeden typ izotropii $(\{e\})$, a zatem rozkłady przestrzeni $T_{v_0}\mathbb{V}$ dane formułami (1.2.2) oraz (1.2.3) przyjmują następujące postacie:

$$T_{v_0}\mathbb{V} = T_{v_0}\Omega = (T_{v_0}G(v_0)) \oplus (T_{v_0}\Omega_{(H)} \ominus T_{v_0}G(v_0)), \quad (1.2.5)$$

$$T_{v_0}\mathbb{V} = T_{v_0}\Omega = (T_{v_0}G(v_0)) \oplus \mathbb{W}^H. \quad (1.2.6)$$

Lemat 1.2.7. Niech spełnione będą założenia Lematu 1.2.4 oraz niech $\Omega = \Omega_{(\{e\})}$. Wówczas dla każdego $v_0 \in (\nabla\varphi)^{-1}(\{0\})$ hesjan

$$\nabla^2\varphi(v_0) : \begin{array}{ccc} T_{v_0}G(v_0) & & T_{v_0}G(v_0) \\ & \oplus & \oplus \\ T_{v_0}\Omega_{(H)} \ominus T_{v_0}G(v_0) & \rightarrow & T_{v_0}\Omega_{(H)} \ominus T_{v_0}G(v_0) \end{array}$$

ma następujący rozkład:

$$\nabla^2\varphi(v_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B(v_0) \end{bmatrix}, \quad (1.2.7)$$

gdzie $B(v_0)$ ma postać jak w formule (1.2.4).

Przykład 1.2.8. Niech $G = SO(2)$ i $\mathbb{V} = \mathbb{R}[1, 1]$ oraz załóżmy, że $\Omega = \mathbb{V} \setminus \{0\}$. Wówczas dla każdego $v \in \Omega$ otrzymujemy, że $SO(2)_v = \{e\}$, a zatem $\Omega = \Omega_{(\{e\})}$. Dodatkowo ustalmy potencjał $\varphi \in C_{SO(2)}^2(\Omega, \mathbb{R})$ dany formułą $\varphi(v) = \psi(|v|^2)$, gdzie $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest potencjałem klasy C^∞ określonym wzorem $\psi(t) = t(t-1)$. Wtedy $\nabla\varphi(v) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$|v|^2 = \frac{1}{2}$, a zatem dla $v_0 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ hesjan

$$\nabla^2\varphi(v_0) : \begin{array}{ccc} T_{v_0}SO(2)(v_0) & & T_{v_0}SO(2)(v_0) \\ \oplus & \rightarrow & \oplus \\ T_{v_0}\Omega_{\{\epsilon\}} \ominus T_{v_0}SO(2)(v_0) & & T_{v_0}\Omega_{\{\epsilon\}} \ominus T_{v_0}SO(2)(v_0) \end{array}$$

ma następujący rozkład:

$$\nabla^2\varphi(v_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Przypomnijmy, że jeżeli gładkie działanie zwartej grupy Liego G na otwartym i G -niezmienniczym podzbiore $\Omega \subset \mathbb{V}$ jest wolne, to przestrzeń orbit Ω/G działania grupy G na $\Omega \subset \mathbb{V}$ jest gładką rozmaitością, gdzie \mathbb{V} jest G -reprezentacją (patrz [45]). W tym przypadku dla każdego G -niezmienniczego C^2 -potencjału możemy rozpatrywać potencjał ilorazowy zdefiniowany na gładkiej rozmaitości Ω/G . W poniższym lemacie przedstawimy rozkład hesjanu potencjału ilorazowego, z którego wynika, że indeks Morse'a hesjanu tego potencjału jest równy indeksowi Morse'a macierzy $B(v_0)$, patrz formuła (1.2.4).

Lemat 1.2.8. *Niech $\mathbb{V} = (\mathbb{R}^n, \rho)$ będzie gładką reprezentacją zwartej grupy Liego G , to jest $\rho : G \rightarrow Gl(n)$ jest gładkim homomorfizmem grup, oraz niech $\Omega \subset \mathbb{V}$ będzie otwarty i G -niezmienniczy. Ustalmy $\varphi \in C_G^2(\Omega, \mathbb{R})$ oraz załóżmy, że $\Omega = \Omega_{\{\epsilon\}}$. Wówczas potencjał $\psi : \Omega/G \rightarrow \mathbb{R}$ dany formułą $\psi(G(v_0)) = \varphi(v_0)$ jest odwzorowaniem klasy C^2 oraz hesjan $\nabla^2\psi(G(v_0)) : T_{v_0}\Omega/G \rightarrow T_{v_0}\Omega/G$ ma następującą postać $\nabla^2\psi(G(v_0)) = B(v_0)$, gdzie $B(v_0)$ jest jak w formule (1.2.4).*

1.3 Pierścień Eulera

W niniejszym podrozdziale przedstawimy definicje G -CW-kompleksu oraz pierścienia Eulera $U(G)$ zwartej grupy Liego G . Omówiony materiał został zaczerpnięty z [22, 23, 34].

Założmy, że G jest zwartą grupą Liego oraz niech rozpatrywane G -przestrzenie będą przestrzeniami topologicznymi Hausdorffa. Przez $\tau(G)$ (odpowiednio $\tau_*(G)$) będziemy oznaczać kategorię, w której obiektami są zwarte G -przestrzenie (odpowiednio zwarte punktowane G -przestrzenie), a morfizmami G -odwzorowania G -przestrzeni (odpowiednio G -odwzorowania zachowujące punkty bazowe). Analogiczne oznaczenia będziemy stosować dla kategorii zwartych H -przestrzeni (odpowiednio zwartych punktowanych H -przestrzeni) wraz z H -odwzorowaniami między nimi (odpowiednio H -odwzorowaniami zachowującymi punkty bazowe) dla dowolnej domkniętej podgrupy H grupy G , to znaczy $\tau(H)$ (odpowiednio $\tau_*(H)$).

Definicja 1.3.1. Niech $X, Y \in \tau_*(G)$. Mówimy, że ciągle odwzorowanie $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ jest homotopią w $\tau_*(G)$ (lub równoważnie G -homotopią), o ile $h(\cdot, t)$ jest morfizmem w $\tau_*(G)$ dla

każdego $t \in [0, 1]$. Dwa odwzorowania f oraz g będące morfizmami w $\tau_*(G)$ będziemy nazywać homotopijnymi w $\tau_*(G)$ (inaczej G -homotopijnymi), o ile istnieje G -homotopia h taka, że $h(\cdot, 0) = f$ oraz $h(\cdot, 1) = g$. Ponadto o G -przestrzeniach $X, Y \in \tau_*(G)$ powiemy, że mają ten sam typ G -homotopii, jeżeli istnieje G -homotopijna równoważność $f : X \rightarrow Y$ w $\tau_*(G)$, innymi słowy istnieje odwzorowanie $g : Y \rightarrow X$ w $\tau_*(G)$ takie, że $g \circ f$ oraz $f \circ g$ są homotopijne w $\tau_*(G)$, odpowiednio, z Id_X oraz Id_Y . Symbolem $[X]_G$ będziemy oznaczać typ G -homotopii elementu $X \in \tau_*(G)$ oraz niech $\tau_*[G]$ będzie zbiorem wszystkich typów G -homotopii zwartych G -przestrzeni z punktem bazowym.

Analogicznie jak powyżej definiujemy typ H -homotopii zwartych punktowanych H -przestrzeni dla dowolnej domkniętej podgrupy H zwartej grupy Liego G . Przez $[Y]_H$ oraz $\tau_*[H]$ będziemy rozumieć, odpowiednio, typ H -homotopii elementu $Y \in \tau_*(H)$ oraz zbiór wszystkich typów H -homotopii zwartych punktowanych H -przestrzeni. Ponadto powyższe pojęcia można również zdefiniować dla kategorii $\tau(G)$ i $\tau(H)$ oraz będziemy stosować analogiczne oznaczenia, to znaczy $[X]_G$, $[Y]_H$, $\tau[G]$ oraz $\tau[H]$.

Ustalmy, że przez parę G -przestrzeni (X, A) będziemy rozumieć G -przestrzenie X oraz A spełniające inkluzję postaci $A \subset X$. Dla pary zwartych G -przestrzeni (X, A) symbolem $(X/A, [A])$ oznaczamy przestrzeń z wyróżnionym punktem postaci $(X \setminus A \cup [A], [A])$ otrzymaną z X poprzez sklejenie zbioru A do punktu, który oznaczamy symbolem $[A]$. Powyżej zdefiniowana przestrzeń jest rozpatrywana z topologią ilorazową. Ponadto $(X/A, [A])$ jest zwartą G -przestrzenią z działaniem indukowanym z X spełniającym warunek $g[A] = [A]$ dla każdego $g \in G$. Dla skrócenia zapisu będziemy również pisać X/A zamiast $(X/A, [A])$.

Analogicznie jak w Definicji 1.3.1, możemy mówić o pojęciu typu G -homotopii pary zwartych G -przestrzeni.

Definicja 1.3.2. Niech (X, A) oraz (Y, B) będą parami zwartych G -przestrzeni. Ciągłe odwzorowanie $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ nazywamy G -odwzorowaniem pomiędzy parami (X, A) oraz (Y, B) , o ile $f : X \rightarrow Y$ jest G -odwzorowaniem oraz zachodzi inkluzja postaci $f(A) \subset B$. Mówimy, że ciągłe odwzorowanie $h : (X, A) \times [0, 1] \rightarrow (Y, B)$ jest G -homotopią pomiędzy parami (X, A) oraz (Y, B) , o ile dla każdego $t \in [0, 1]$ odwzorowanie $h(\cdot, t)$ jest G -odwzorowaniem pomiędzy parami (X, A) oraz (Y, B) . Dwa G -odwzorowania $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ będziemy nazywać G -homotopijnymi, o ile istnieje G -homotopia h pomiędzy parami (X, A) oraz (Y, B) taka, że $h(\cdot, 0) = f$ oraz $h(\cdot, 1) = g$. Ponadto mówimy, że pary zwartych G -przestrzeni (X, A) oraz (Y, B) mają ten sam typ G -homotopii, jeżeli istnieje G -homotopijna równoważność $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, to jest istnieje G -odwzorowanie $g : (Y, B) \rightarrow (X, A)$ pomiędzy parami (X, A) oraz (Y, B) takie, że $g \circ f$ oraz $f \circ g$ są G -homotopijne, odpowiednio, z Id_X oraz Id_Y . Symbolem $[(X, A)]_G$ będziemy oznaczać typ G -homotopii pary (X, A) .

W poniższym lemacie sformułujemy pewne własności typu G -homotopii. Dowód tego lematu wynika z definicji typu G -homotopii oraz Przykładu 1.2.3.

Lemat 1.3.9. *Niech $H \in \overline{\text{sub}}(G)$ oraz niech $Y_1, Y_2 \in \tau(H)$. Ustalmy ponadto pary zwartych G -przestrzeni (X_1, A_1) oraz (X_2, A_2) .*

(1) *Jeżeli $[Y_1]_H = [Y_2]_H$, to $[G \times_H Y_1]_G = [G \times_H Y_2]_G$.*

(2) *Jeżeli $[(X_1, A_1)]_G = [(X_2, A_2)]_G$, to $[(X_1/A_1, [A_1])]_G = [(X_2/A_2, [A_2])]_G$.*

Symbolem $X \sqcup Y$ oznaczamy sumę rozłączną dwóch rozłącznych G -przestrzeni X oraz Y , to znaczy zbiór $X \cup Y$ z następującą topologią: zbiór U jest otwarty w $X \cup Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $U = U_1 \cup U_2$, gdzie U_1 oraz U_2 są zbiorami otwartymi, odpowiednio, w X oraz w Y .

Niech $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ oraz przypomnijmy, że symbolami $D(\mathbb{R}^k)$, $B(\mathbb{R}^k)$ i $S(\mathbb{R}^k)$ oznaczamy, odpowiednio, kulę domkniętą, kulę otwartą oraz sferę w \mathbb{R}^k o środku w punkcie $0 \in \mathbb{R}^k$ i promieniu 1. Połóżmy $S(\mathbb{R}^0) = \emptyset$ oraz ustalmy, że przez $D(\mathbb{R}^0)$ i $B(\mathbb{R}^0)$ rozumiemy przestrzenie jednopunktowe. Powyższe przestrzenie będziemy traktować jako trywialne G -przestrzenie.

Definicja 1.3.3. Niech (X, A) będzie parą zwartych G -przestrzeni oraz $H_1, \dots, H_q \in \overline{\text{sub}}(G)$. Mówimy, że G -przestrzeń X otrzymujemy z G -przestrzeni A przez doklejenie rodziny niezmienniczych k -komórek typu $\{(k, (H_j)) : j = 1, \dots, q\}$, jeżeli istnieje G -odwzorowanie

$$\varphi : \left(\bigsqcup_{j=1}^q D(\mathbb{R}^k) \times G/H_j, \bigsqcup_{j=1}^q S(\mathbb{R}^k) \times G/H_j \right) \rightarrow (X, A)$$

odwzorowujące G -przestrzeń $\bigsqcup_{j=1}^q B(\mathbb{R}^k) \times G/H_j$ homeomorficznie na $X \setminus A$. Wówczas zbiór $\varphi(D(\mathbb{R}^k) \times G/H_j)$ nazywamy niezmienniczą k -komórką typu $(k, (H_j))$ dla każdego $j = 1, \dots, q$. W szczególności o zbiorze $\varphi(D(\mathbb{R}^k) \times G/H_j)$ mówimy, że jest domkniętą niezmienniczą k -komórką, natomiast o zbiorze $\varphi(B(\mathbb{R}^k) \times G/H_j)$ powiemy, że jest otwartą niezmienniczą k -komórką. Przez brzeg niezmienniczej k -komórki będziemy rozumieć zbiór $\varphi(S(\mathbb{R}^k) \times G/H_j)$. Natomiast o G -odwzorowaniu φ mówimy, że jest odwzorowaniem charakterystycznym dla G -przestrzeni X .

Definicja 1.3.4. Niech (X, X_{-1}) będzie parą zwartych G -przestrzeni. Jeżeli istnieje skończony ciąg G -przestrzeni $X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_p = X$ taki, że

(1) $X_{-1} \in \{*, \emptyset\}$,

(2) $X_0 \approx_G X_{-1} \sqcup \bigsqcup_{j=1}^{q(0)} G/H_{j,0}$, gdzie $H_{1,0}, \dots, H_{q(0),0} \in \overline{\text{sub}}(G)$,

(3) dla każdego $k = 1, \dots, p$ przestrzeń X_k otrzymujemy z X_{k-1} przez doklejenie rodziny niezmienniczych k -komórek typu $\{(k, (H_{j,k})) : j = 1, \dots, q(k)\}$,

to parę G -przestrzeni (X, X_{-1}) nazywamy skończonym G -CW-kompleksem. W szczególności parę $(X, *)$ będziemy nazywać skończonym G -CW-kompleksem z wyróżnionym punktem $* \in X^G$ (lub równoważnie skończonym punktowanym G -CW-kompleksem), natomiast parę (X, \emptyset) będziemy utożsamiać z X oraz nazywać skończonym G -CW-kompleksem bez wyróżnionego punktu. Zbiór podprzestrzeni $\{X_0, X_1, \dots, X_p\}$ nazywamy rozkładem komórkowym G -CW-kompleksu (X, X_{-1}) , a zbiór $\bigcup_{k=0}^p \{(k, (H_{j,k})) : j = 1, \dots, q(k)\}$ typem tego rozkładu komórkowego.

Przykład 1.3.1. Niech $G = SO(2)$ oraz $X = S(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{R}[1, m] \oplus \mathbb{R}[1, 0]$, a przez \mathbb{Z}_m rozumiemy grupę addytywną klas reszt modulo m . Wówczas (X, X_{-1}) jest skończonym punktowanym $SO(2)$ -CW-kompleksem z następującymi podprzestrzeniami występującymi w rozkładzie komórkowym: $X_0 = X_{-1} \sqcup e_1 = \{(0, 0, -1)\} \sqcup e_1$, $X = X_1 = X_0 \sqcup f_1$, gdzie $e_1 = \{(0, 0, 1)\}$ jest niezmienniczą 0-komórką typu $(0, SO(2))$ oraz $f_1 \approx_{SO(2)} B(\mathbb{R}) \times SO(2)/\mathbb{Z}_m$ jest otwartą niezmienniczą 1-komórką typu $(1, \mathbb{Z}_m)$.

Definicja 1.3.5. Niech (X, X_{-1}) będzie skończonym G -CW-kompleksem. Mówimy, że para (Y, Y_{-1}) jest G -CW-podkompleksem (X, X_{-1}) , o ile

- (1) $Y_{-1} \subset X_{-1}$,
- (2) $Y \subset X$ jest G -przestrzenią,
- (3) Y jest sumą Y_{-1} i pewnej rodziny otwartych niezmienniczych komórek z X tak, że brzeg każdej komórki również należy do Y .

Ponadto, jeżeli $Y_{-1} = \{*\}$, to (Y, Y_{-1}) nazywamy G -CW-podkompleksem z wyróżnionym punktem.

Niech (X, X_{-1}) będzie skończonym G -CW-kompleksem z rozkładem komórkowym postaci $\{X_0, X_1, \dots, X_p\}$. Wówczas para (X_k, X_{-1}) jest G -CW-podkompleksem (X, X_{-1}) dla każdego $k = 0, \dots, p$. Co więcej, jeżeli (Y, Y_{-1}) jest G -CW-podkompleksem (X, X_{-1}) , to (Y, Y_{-1}) jest G -CW-kompleksem z rozkładem komórkowym $\{Y_0, Y_1, \dots, Y_p\}$, gdzie $Y_k = Y \cap X_k$ dla $k = 0, \dots, p$. W szczególności para zwartych G -przestrzeni $(X/Y, [Y])$ jest skończonym punktowanym G -CW-kompleksem z podprzestrzeniami rozkładu komórkowego postaci X_k/Y_k dla $k = 0, \dots, p$. Powyższe fakty można znaleźć w książce [23].

Przykład 1.3.2. Niech $G = SO(2)$ oraz $X = S(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{R}[1, m] \oplus \mathbb{R}[1, 0]$. Rozważmy skończony punktowany $SO(2)$ -CW-kompleksem (X, X_{-1}) z następującymi podprzestrzeniami występującymi w rozkładzie komórkowym: $X_0 = X_{-1} \sqcup e_1 \sqcup e_2$, $X_1 = X_0 \sqcup f_1 \sqcup f_2$, gdzie $X_{-1} = \{(0, 0, -1)\}$ i $e_1 = \{(0, 0, 1)\}$, $e_2 \approx_{SO(2)} SO(2)/\mathbb{Z}_m$ są niezmienniczymi 0-komórkami

typu, odpowiednio, $(0, SO(2))$, $(0, \mathbb{Z}_m)$ oraz $f_1 \approx_{SO(2)} B(\mathbb{R}) \times SO(2)/\mathbb{Z}_m \approx_{SO(2)} f_2$ są otwartymi niezmienniczymi 1-komórkami typu $(1, \mathbb{Z}_m)$. Wówczas para (Y, Y_{-1}) jest $SO(2)$ -CW-podkompleksem (X, X_{-1}) , gdzie $Y_{-1} = \{(0, 0, -1)\}$ oraz $Y = Y_{-1} \sqcup e_2 \sqcup f_2$.

Symbolem $\mathcal{F}(G)$ oznaczamy podkategorię kategorii $\tau(G)$, gdzie obiektami są skończone G -CW-kompleksy, a morfizmami G -odwzorowania pomiędzy nimi. Analogicznie przez $\mathcal{F}_*(G)$ będziemy oznaczać podkategorię kategorii $\tau_*(G)$, gdzie obiektami są skończone punktowane G -CW-kompleksy oraz morfizmami G -odwzorowania pomiędzy tymi obiektami zachowujące punkty bazowe. Przypomnijmy ponadto, że dla $X \in \mathcal{F}(G)$ lub $X \in \mathcal{F}_*(G)$ przez $[X]_G$ rozumiemy typ G -homotopii elementu X . Wówczas $\mathcal{F}[G]$ (odpowiednio $\mathcal{F}_*[G]$) będzie oznaczać zbiór typów G -homotopii skończonych G -CW-kompleksów (odpowiednio zbiór typów G -homotopii skończonych G -CW-kompleksów z punktem bazowym).

Niech F będzie wolną grupą abelową generowaną przez $\mathcal{F}_*[G]$ oraz niech N będzie podgrupą F generowaną przez elementy postaci $[A] - [X] + [X/A]$, gdzie $A, X \in \mathcal{F}_*(G)$ i A jest G -CW-podkompleksem z wyróżnionym punktem punktowanego G -CW-kompleksu X . Połóżmy $U(G) = F/N$ oraz niech $\chi_G(X)$ będzie klasą elementu $[X]_G \in F$ w $U(G)$. Element $\chi_G(X)$ nazywamy G -niezmienniczą charakterystyką Eulera skończonego punktowanego G -CW-kompleksu X . W przypadku, gdy X jest skończonym G -CW-kompleksem bez wyróżnionego punktu przyjmujemy, że $\chi_G(X) = \chi_G(X^+)$ oraz $X^+ = X \sqcup \{*\}$, gdzie $*$ jest dodanym wyróżnionym punktem, będącym punktem stałym działania zwartej grupy Liego G .

Dla $(X, *_X), (Y, *_Y) \in \mathcal{F}_*(G)$ połóżmy $X \vee Y = (X \times \{*_Y\} \cup \{*_X\} \times Y) / \{(*_X, *_Y)\}$ oraz $X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y$. Wówczas $X \vee Y$ oraz $X \wedge Y$ są również elementami $\mathcal{F}_*(G)$. Ponadto zauważmy, że $[X]_G - [X \vee Y]_G + [X \vee Y/X]_G = [X]_G - [X \vee Y]_G + [Y]_G \in N$, a zatem $\chi_G(X) + \chi_G(Y) = \chi_G(X \vee Y)$. Zdefiniujmy dalej iloczyn $\star : U(G) \times U(G) \rightarrow U(G)$ formułą $\chi_G(X) \star \chi_G(Y) = \chi_G(X \wedge Y)$.

Twierdzenie 1.3.1. *Grupa $(U(G), +)$ jest wolną grupą abelową z elementami bazy $\chi_G(G/H^+)$ dla $(H) \in \overline{\text{sub}}[G]$. Co więcej, jeżeli $X \in \mathcal{F}_*(G)$ oraz $\bigcup_{k=0}^p \{(k, (H_{j,k})) : j = 1, \dots, q(k)\}$ jest typem rozkładu komórkowego G -CW-kompleksu X , to*

$$\chi_G(X) = \sum_{(H) \in \overline{\text{sub}}[G]} \left(\sum_{k=0}^p (-1)^k \nu(k, (H)) \right) \cdot \chi_G(G/H^+) \in U(G), \quad (1.3.8)$$

gdzie $\nu(k, (H))$ jest liczbą niezmienniczych k -komórek typu $(k, (H))$.

Twierdzenie 1.3.2. *Trójka $(U(G), +, \star)$ jest pierścieniem przemiennym z elementem neutralnym $\mathbf{1} = \chi_G(G/G^+)$.*

Powyższe twierdzenia zostały zaczerpnięte z książki [23].

Pierścień $U(G)$ nazywamy pierścieniem Eulera zwartej grupy Liego G . Element zerowy w $U(G)$ będziemy oznaczać symbolem $\mathbf{0}$.

Przykład 1.3.3. Niech $G = SO(2)$. Wówczas dla skończonego punktowanego $SO(2)$ -CW-kompleksu z Przykładu 1.3.1 otrzymujemy, że $\chi_{SO(2)}(S(\mathbb{R}^3)) = (-1)^0 \chi_{SO(2)}(SO(2)/SO(2)^+) + (-1)^1 \chi_{SO(2)}(SO(2)/\mathbb{Z}_m^+)$.

1.4 Niezmienniczy indeks Conley'a

W podrozdziale niniejszym omówimy podstawowe pojęcia dotyczące teorii indeksu Conley'a zdefiniowanego w obecności działania zwartej grupy Liego G . Przedstawiony materiał został zaczerpnięty głównie z [5, 12, 32, 78].

Niech zatem G będzie zwartą grupą Liego oraz \mathbb{V} jej ortogonalną G -reprezentacją. W dalszej części rozprawy przestrzeń \mathbb{R} będziemy traktować jako jednowymiarową trywialną G -reprezentację, a stąd działanie grupy G na $\mathbb{V} \times \mathbb{R}$ będzie dane formułą $g(v, t) = (gv, t)$ dla każdego $g \in G$ oraz $(v, t) \in \mathbb{V} \times \mathbb{R}$.

Zdefiniujemy teraz pojęcie lokalnego potoku w obecności działania zwartej grupy Liego G .

Definicja 1.4.1. Niech $U \subset \mathbb{V} \times \mathbb{R}$ będzie otwartym i G -niezmienniczym otoczeniem zbioru $\mathbb{V} \times \{0\}$. Mówimy, że G -współzmiennicze odwzorowanie $\eta : U \rightarrow \mathbb{V}$ jest lokalnym G -potokiem, o ile spełnia następujące warunki:

- (1) dla każdego $v \in \mathbb{V}$ istnieją $-\alpha(v), \omega(v) \in (0, +\infty]$ spełniające $(\alpha(v), \omega(v)) = \{t \in \mathbb{R} : (v, t) \in U\}$,
- (2) $\eta(v, 0) = v$ dla każdego $v \in \mathbb{V}$,
- (3) jeżeli $s \in (\alpha(v), \omega(v))$ i $t \in (\alpha(\eta(v, s)), \omega(\eta(v, s)))$, to $s + t \in (\alpha(v), \omega(v))$ oraz otrzymujemy, że $\eta(\eta(v, s), t) = \eta(v, s + t)$.

Poniższy przykład został zaczerpnięty z książki [28].

Przykład 1.4.1. Niech $\varphi \in C_G^2(\mathbb{V}, \mathbb{R})$ oraz rozważmy równanie różniczkowe następującej postaci: $\dot{u}(t) = \nabla\varphi(u(t))$. Wówczas równanie to indukuje lokalny potok $\eta : U \rightarrow \mathbb{V}$ dany wzorem $\eta(v, t) = u_v(t)$, gdzie $u_v : (\alpha(v), \omega(v)) \rightarrow \mathbb{V}$ jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego postaci

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = \nabla\varphi(u(t)) \\ u(0) = v \end{cases},$$

a przedział $(\alpha(v), \omega(v))$ jest maksymalnym odcinkiem, na którym istnieje rozwiązanie powyższego zagadnienia. Ponadto $\eta : U \rightarrow \mathbb{V}$ jest G -odwzorowaniem, gdyż $\nabla\varphi \in C_G^1(\mathbb{V}, \mathbb{V})$. Rzeczywiście, definiując odwzorowanie $u_1 : (\alpha(v), \omega(v)) \rightarrow \mathbb{V}$ wzorem $u_1 = gu_v$ otrzymujemy, że

$\dot{u}_1(t) = g\dot{u}_v(t) = g\nabla\varphi(u_v(t)) = \nabla\varphi(u_1(t))$ i $u_1(0) = gv$, a zatem $(\alpha(v), \omega(v)) \subset (\alpha(gv), \omega(gv))$. Analogicznie dla $u_2 = g^{-1}u_{gv}$ dowodzimy, że $(\alpha(gv), \omega(gv)) \subset (\alpha(v), \omega(v))$. W konsekwencji, $(\alpha(v), \omega(v)) = (\alpha(gv), \omega(gv))$, co implikuje G -niezmienniczość zbioru U . Dodatkowo z twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych (patrz [63]) mamy, że $u_{gv} = gu_v$, a zatem η jest lokalnym G -potokiem.

Ustalmy lokalny G -potok $\eta : U \rightarrow \mathbb{V}$ oraz niech $W \subset \mathbb{V}$. O zbiorze W mówimy, że jest η -niezmienniczy, o ile $\eta((W \times \mathbb{R}) \cap U) \subset W$. Dla G -niezmienniczego zbioru $W \subset \mathbb{V}$ definiujemy następnie zbiór $Inv(W, \eta) = \{v \in W : \forall t \in (\alpha(v), \omega(v)) \eta(v, t) \in W\} \subset W$, który będziemy nazywać maksymalnym η -niezmiennicznym podzbiorem W . Zauważmy, że zbiór $Inv(W, \eta)$ jest η -niezmienniczy oraz G -niezmienniczy.

Definicja 1.4.2. Niech $W \subset \mathbb{V}$ będzie zbiorem zwartym o niepustym wnętrzu oraz G -niezmiennicznym. Wówczas W nazywamy G -otoczeniem η -izolującym, o ile $Inv(W, \eta) \subset int(W)$. Ponadto o zwartym zbiorze $S \subset \mathbb{V}$ mówimy, że jest izolowanym zbiorem η -niezmiennicznym, jeżeli istnieje G -otoczenie η -izolujące dla zbioru S , to znaczy istnieje G -otoczenie η -izolujące $W \subset \mathbb{V}$ takie, że $Inv(W, \eta) = S$.

Z powyższej definicji wynika, że izolowane zbiory η -niezmiennicze są zbiorami G -niezmiennicznymi oraz η -niezmiennicznymi.

Definicja 1.4.3. Niech $S \subset \mathbb{V}$ będzie izolowanym zbiorem η -niezmiennicznym. Parę zwartych G -przestrzeni (N, L) nazywamy G -parą indeksową dla zbioru S , o ile spełnione są następujące warunki:

- (1) zbiór $cl(N \setminus L)$ jest otoczeniem η -izolującym dla zbioru S ,
- (2) L jest zbiorem dodatnio η -niezmiennicznym w zbiorze N , to znaczy, jeżeli $v \in L$ oraz $\eta(\{v\} \times [0, t]) \subset N$ dla pewnego $t \geq 0$, to $\eta(\{v\} \times [0, t]) \subset L$,
- (3) L jest zbiorem punktów wyjścia dla zbioru N , to znaczy, jeżeli $v \in N$ oraz $\eta(v, t_1) \notin N$ dla pewnego $t_1 > 0$, to istnieje $t \in [0, t_1)$ takie, że $\eta(\{v\} \times [0, t]) \subset N$ i $\eta(v, t) \in L$.

W poniższym twierdzeniu, którego dowód można znaleźć w artykule [32], przedstawiamy podstawowy rezultat dotyczący istnienia G -pary indeksowej dla izolowanych zbiorów η -niezmiennicznych.

Twierdzenie 1.4.3. Niech $S \subset \mathbb{V}$ będzie izolowanym zbiorem η -niezmiennicznym oraz niech $W \subset \mathbb{V}$ będzie jego G -otoczeniem η -izolującym. Wówczas istnieje G -para indeksowa (N, L) dla zbioru S taka, że $N \subset int(W)$.

Wprowadźmy teraz pojęcie G -niezmiennicznego indeksu Conley'a dla izolowanego zbioru η -niezmiennicznego.

Definicja 1.4.4. Niech $S \subset \mathbb{V}$ będzie izolowanym zbiorem η -niezmienniczym oraz niech para (N, L) będzie G -parą indeksową dla S . Typ G -homotopii $[(N/L, [L])]_G$ zwartej G -przestrzeni z wyróżnionym punktem postaci $(N/L, [L])$ nazywamy G -niezmienniczym indeksem Conley'a dla zbioru S (lub równoważnie G -indeksem Conley'a) oraz oznaczamy przez $CI_G(S, \eta)$.

Powyższa definicja G -indeksu Conley'a nie zależy od wyboru G -pary indeksowej dla izolowanego zbioru η -niezmienniczego S , to jest dla dowolnych dwóch G -par indeksowych (N_1, L_1) oraz (N_2, L_2) dla zbioru S otrzymujemy, że $[(N_1/L_1, [L_1])]_G = [(N_2/L_2, [L_2])]_G \in \tau_*[G]$ (patrz [32]).

Niech (N, L) będzie G -parą indeksową dla izolowanego zbioru η -niezmienniczego S . W przypadku, gdy L jest zbiorem pustym przyjmujemy, że $N/L = N^+ = N \sqcup \{*\}$ oraz $CI_G(S, \eta) = [N^+]_G \in \tau_*[G]$, gdzie $*$ jest dodanym wyróżnionym punktem, będącym punktem stałym działania grupy G .

Przykład 1.4.2. Niech $G = SO(2)$ oraz niech $\mathbb{V} = \mathbb{R}[1, m]$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$. Zdefiniujmy $\varphi_{\pm} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ następująco: $\varphi_{\pm}(v) = \pm\psi(|v|^2)$, gdzie $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest potencjałem klasy C^∞ danym wzorem $\psi(t) = t(t-1)$. Rozważmy równanie różniczkowe postaci $\dot{u}(t) = -\nabla\varphi_{\pm}(u(t))$ oraz niech $\eta_{\pm} : U \rightarrow \mathbb{V}$ będzie lokalnym $SO(2)$ -potokiem generowanym przez powyższe równanie. Zauważmy, że zwarty, $SO(2)$ -niezmienniczy zbiór $S = SO(2) \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ jest izolowanym zbiorem η_{\pm} -niezmienniczym oraz wybierzmy jego $SO(2)$ -otoczenie η_{\pm} -izolujące $N = D(\mathbb{V}) \setminus B_{\frac{1}{2}}(\mathbb{V})$. Połóżmy $(N_+, L_+) = (N, \emptyset)$ oraz $(N_-, L_-) = (N, \partial N)$. Wówczas (N_{\pm}, L_{\pm}) jest $SO(2)$ -parą indeksową dla zbioru S oraz $CI_{SO(2)}(S, \eta_+) = [N^+]_{SO(2)} = [S(\mathbb{V})^+]_{SO(2)}$, $CI_{SO(2)}(S, \eta_-) = [(N/\partial N, [\partial N])]_{SO(2)}$.

Lemat 1.4.10. Niech $\varphi \in C_G^2(\mathbb{V}, \mathbb{R})$ oraz niech $W \subset \mathbb{V}$ będzie zwartym zbiorem o niepustym wnętrzu. Ustalmy $v_0 \in W$ i załóżmy dodatkowo, że odwzorowanie $u_{v_0} : (\alpha(v_0), \omega(v_0)) \rightarrow W$ jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego postaci

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = \nabla\varphi(u(t)) \\ u(0) = v_0 \end{cases},$$

gdzie $(\alpha(v_0), \omega(v_0))$ jest maksymalnym odcinkiem, na którym istnieje rozwiązanie. Wówczas

$$(1) \quad (\alpha(v_0), \omega(v_0)) = (-\infty, +\infty),$$

$$(2) \quad (\nabla\varphi)^{-1}(\{0\}) \cap W \neq \emptyset,$$

$$(3) \quad (\nabla\varphi)^{-1}(\{0\}) \cap \left\{ v \in W : \exists \{t_k\} \subset (-\infty, +\infty) \lim_{t_k \rightarrow +\infty} u_{v_0}(t_k) = v \right\} \neq \emptyset,$$

$$(4) \quad (\nabla\varphi)^{-1}(\{0\}) \cap \left\{ v \in W : \exists \{t_k\} \subset (-\infty, +\infty) \lim_{t_k \rightarrow -\infty} u_{v_0}(t_k) = v \right\} \neq \emptyset.$$

Dowód. Punkt (1) tezy wynika bezpośrednio z globalnego twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych, które można znaleźć na przykład w książce [63].

Dla dowodu punktu (2) tezy przypuścimy, że $(\nabla\varphi)^{-1}(\{0\}) \cap W = \emptyset$. Wówczas biorąc pod uwagę zwartość W definiujemy $m = \inf_{v \in W} |\nabla\varphi(v)| > 0$ oraz $M = \sup_{v \in W} |\varphi(v)| < +\infty$, a stąd dla dowolnych $s, t \in (-\infty, +\infty)$ mamy, że

$$\begin{aligned} 2M &\geq |\varphi(u_{v_0}(t)) - \varphi(u_{v_0}(s))| = \left| \int_s^t D_\tau \varphi(u_{v_0}(\tau)) d\tau \right| = \left| \int_s^t D_{u_{v_0}} \varphi(u_{v_0}(\tau)) \dot{u}_{v_0}(\tau) d\tau \right| = \\ &= \left| \int_s^t \langle \nabla\varphi(u_{v_0}(\tau)), \dot{u}_{v_0}(\tau) \rangle d\tau \right| = \left| \int_s^t |\nabla\varphi(u_{v_0}(\tau))|^2 d\tau \right| \geq \left| \int_s^t m^2 d\tau \right| = m^2 |t - s|, \end{aligned}$$

sprzeczność.

Udowodnimy teraz punkt (3) tezy, natomiast punkt (4) dowodzimy analogicznie. Przypuścimy, że $(\nabla\varphi)^{-1}(\{0\}) \cap \left\{ v \in W : \exists \{t_k\} \subset (-\infty, +\infty) \lim_{t_k \rightarrow +\infty} u_{v_0}(t_k) = v \right\} = \emptyset$, a zatem zbiory $(\nabla\varphi)^{-1}(\{0\}) \cap W \subset W$ oraz $cl(u_{v_0}((0, +\infty))) \subset W$ są rozłączne i zwarte. Dlatego wybierając zwarty zbiór $W_1 \subset W$ taki, że $cl(u_{v_0}((0, +\infty))) \subset W_1$ oraz $(\nabla\varphi)^{-1}(\{0\}) \cap W_1 = \emptyset$ możemy dalej przeprowadzić dowód analogicznie jak powyżej zastępując zbiór W przez W_1 , co kończy dowód. \square

Uwaga 1.4.5. Niech $\varphi \in C_G^2(\mathbb{V}, \mathbb{R})$ oraz rozważmy lokalny G -potok $\eta : U \rightarrow \mathbb{V}$ indukowany przez równanie różniczkowe postaci $\dot{u}(t) = \nabla\varphi(u(t))$. Wówczas każda niezdegenerowana G -orbita krytyczna $G(v_0) \subset (\nabla\varphi)^{-1}(\{0\})$ jest izolowanym zbiorem η -niezmienniczym. Rzeczywiście, na podstawie Uwagi 1.2.3, istnieje otwarte otoczenie $\Theta \subset \mathbb{V}$ G -orbity krytycznej $G(v_0)$ będące zbiorem G -niezmienniczym takie, że $\Theta \cap (\nabla\varphi)^{-1}(\{0\}) = G(v_0)$. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że $cl(\Theta) \cap (\nabla\varphi)^{-1}(\{0\}) = G(v_0)$ oraz zbiór $\Theta \subset \mathbb{V}$ jest ograniczony. Wówczas $Inv(cl(\Theta), \eta) = G(v_0)$. Rzeczywiście, gdyby istniało niestacjonarne rozwiązanie $u_{v_1} : (\alpha(v_1), \omega(v_1)) \rightarrow cl(\Theta)$ równania różniczkowego $\dot{u}(t) = \nabla\varphi(u(t))$, to $(\alpha(v_1), \omega(v_1)) = (-\infty, +\infty)$, $(\nabla\varphi)^{-1}(\{0\}) \cap \left\{ v \in cl(\Theta) : \exists \{t_k\} \subset (-\infty, +\infty) \lim_{t_k \rightarrow +\infty} u_{v_1}(t_k) = v \right\} \neq \emptyset$ oraz $(\nabla\varphi)^{-1}(\{0\}) \cap \left\{ v \in cl(\Theta) : \exists \{t_k\} \subset (-\infty, +\infty) \lim_{t_k \rightarrow -\infty} u_{v_1}(t_k) = v \right\} \neq \emptyset$, z Lematu 1.4.10. Co więcej, $D_t \varphi(u_{v_1}(t)) = D_{u_{v_1}} \varphi(u_{v_1}(t)) \dot{u}_{v_1}(t) = \langle \nabla\varphi(u_{v_1}(t)), \dot{u}_{v_1}(t) \rangle = |\nabla\varphi(u_{v_1}(t))|^2 > 0$ dla każdego $t \in (-\infty, +\infty)$, to znaczy φ rośnie na rozwiązaniu u_{v_1} , a ponadto $\varphi(gv_0) = \varphi(v_0)$ dla każdego $g \in G$, sprzeczność.

Symbolem Λ będziemy oznaczać przedział domknięty $[\lambda_1, \lambda_2]$ dla $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ oraz $\lambda_1 < \lambda_2$, który będziemy traktować jako przestrzeń parametrów z trywialnym G -działaniem. Niech $U \subset \mathbb{V} \times \mathbb{R} \times \Lambda$ będzie otwartym otoczeniem zbioru $\mathbb{V} \times \{0\} \times \Lambda$ oraz zdefiniujmy $U_\lambda = \{(v, t) \in \mathbb{V} \times \mathbb{R} : (v, t, \lambda) \in U\}$.

Definicja 1.4.5. Mówimy, że G -współmiennicze odwzorowanie $\eta : U \rightarrow \mathbb{V}$ jest rodziną lokalnych G -potoków, jeżeli $\eta_\lambda = \eta(\cdot, \cdot, \lambda) : U_\lambda \rightarrow \mathbb{V}$ jest lokalnym G -potokiem dla każdego $\lambda \in \Lambda$.

Niech $\eta : U \rightarrow \mathbb{V}$ będzie rodziną lokalnych G -potoków oraz ustalmy G -niezmienniczy zbiór $W \subset \mathbb{V}$. Dodatkowo położmy $Inv(W \times \Lambda, \eta) = \{(v, \lambda) \in W \times \Lambda : v \in Inv(W, \eta_\lambda)\}$. Wówczas zbiór $Inv(W \times \Lambda, \eta)$ jest G -niezmienniczy, a ponadto jest zwarty, o ile $W \subset \mathbb{V}$ jest zwarty. Ze zwartości zbioru $Inv(W \times \Lambda, \eta)$ można wywnioskować, że zbiór tych $\lambda \in \Lambda$, dla których W jest G -otoczeniem η_λ -izolującym jest otwarty w Λ . Powyższy fakt został zaczerpnięty z książki [5], natomiast w artykule [78] można znaleźć jego dowód w przypadku bez działania grupy, który bezpośrednio przenosi się na sytuację niezmienniczą.

Poniższe twierdzenie zostało zaczerpnięte z [5, 32] oraz opisuje własność kontynuacji dla G -niezmienniczego indeksu Conley'a.

Twierdzenie 1.4.4. *Niech $\eta : U \rightarrow \mathbb{V}$ będzie rodziną lokalnych G -potoków oraz ustalmy zwarty i G -niezmienniczy zbiór $W \subset \mathbb{V}$. Jeżeli W jest G -otoczeniem η_λ -izolującym dla każdego $\lambda \in \Lambda$, to $CI_G(Inv(W, \eta_\lambda), \eta_\lambda) = CI_G(Inv(W, \eta_{\lambda'}), \eta_{\lambda'})$ dla każdych $\lambda, \lambda' \in \Lambda$.*

W poniższym twierdzeniu, którego dowód można znaleźć w artykule [32], opisujemy związek G -indeksu Conley'a dla izolowanego zbioru niezmienniczego dla potoku indukowanego przez specjalną niezmienniczą funkcję Morse'a ze skończonym punktowanym G -CW-kompleksem. Twierdzenie to jest szczególnym przypadkiem ogólniejszego twierdzenia udowodnionego w artykule [32].

Twierdzenie 1.4.5. *Niech $\Omega \subset \mathbb{V}$ będzie otwartym, ograniczonym i G -niezmiennicznym zbiorem oraz niech $\varphi \in C_G^2(\mathbb{V}, \mathbb{R})$ będzie specjalną niezmienniczą Ω -funkcją Morse'a. Wówczas $(\nabla\varphi)^{-1}(\{0\}) = G(v_1) \sqcup \dots \sqcup G(v_m)$. Rozważmy ponadto lokalny G -potok $\eta : U \rightarrow \mathbb{V}$ indukowany przez równanie różniczkowe postaci $\dot{u}(t) = -\nabla\varphi(u(t))$ oraz załóżmy, że $cl(\Omega)$ jest G -otoczeniem η -izolującym. Wówczas G -niezmienniczy indeks Conley'a $CI_G(Inv(cl(\Omega), \eta), \eta)$ ma typ G -homotopii skończonego punktowanego G -CW-kompleksu z typem rozkładu komórkowego postaci $\{(m^-(B(v_1)), (H_1)), \dots, (m^-(B(v_m)), (H_m))\}$, gdzie symbolem H_j oznaczamy grupę izotropii v_j oraz $B(v_j)$ ma postać jak w formule (1.2.4) dla $j = 1, \dots, m$.*

Biorąc pod uwagę powyższe twierdzenie możemy obliczyć G -niezmienniczą charakterystykę Eulera skończonego punktowanego G -CW-kompleksu $CI_G(Inv(cl(\Omega), \eta), \eta)$, to znaczy

$$\chi_G(CI_G(Inv(cl(\Omega), \eta), \eta)) = \sum_{j=1}^m (-1)^{m-(v_j)} \chi_G(G/H_j^+) \in U(G). \quad (1.4.9)$$

Przykład 1.4.3. Przyjmijmy założenia i oznaczenia jak w Przykładzie 1.4.2 oraz niech $v_0 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Dodatkowo połóżmy $\Omega = \text{int}(N)$. Wówczas na podstawie Lematu 1.2.4 otrzymujemy, że

$$\nabla^2 \varphi_{\pm}(v_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{\pm}(v_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \pm 4 \end{bmatrix} : \begin{array}{ccc} T_{v_0}SO(2)(v_0) & & T_{v_0}SO(2)(v_0) \\ & \oplus & \rightarrow & \oplus \\ & \mathbb{W}\mathbb{Z}_m & & \mathbb{W}\mathbb{Z}_m \end{array},$$

ponieważ $\Omega = \Omega_{(\mathbb{Z}_m)} = \Omega_{\mathbb{Z}_m}$, a zatem $\varphi_{\pm} \in C_{SO(2)}^2(\mathbb{V}, \mathbb{R})$ jest specjalną niezmienniczą Ω -funkcją Morse'a. Ponadto $cl(\Omega)$ jest $SO(2)$ -otoczeniem η_{\pm} -izolującym dla izolowanego zbioru η_{\pm} -niezmienniczego $S = SO(2)(v_0)$. Wówczas $CI_{SO(2)}(S, \eta_+)$ oraz $CI_{SO(2)}(S, \eta_-)$ mają typ $SO(2)$ -homotopii skończonego punktowanego $SO(2)$ -CW-kompleksu. Istotnie $CI_{SO(2)}(S, \eta_+)$ jest $SO(2)$ -homotopijnie równoważny ze skończonym punktowanym $SO(2)$ -CW-kompleksem $S(\mathbb{V})^+$ z następującymi podprzestrzeniami występującymi w rozkładzie komórkowym: $X_0 = X_{-1} \sqcup e_1 = \{*\} \sqcup e_1$, gdzie $e_1 \approx_{SO(2)} SO(2)/\mathbb{Z}_m$ jest niezmienniczą 0-komórką typu $(0, \mathbb{Z}_m)$. Podobnie dla $CI_{SO(2)}(S, \eta_-)$ uzyskujemy $SO(2)$ -homotopijną równoważność ze skończonym punktowanym $SO(2)$ -CW-kompleksem z następującymi podprzestrzeniami w rozkładzie: $X_0 = X_{-1} = \{*\}$, $X_1 = X_0 \sqcup f_1$, gdzie $f_1 \approx_{SO(2)} B(\mathbb{R}) \times SO(2)/\mathbb{Z}_m$ jest otwartą niezmienniczą 1-komórką typu $(1, \mathbb{Z}_m)$.

Poniższy przykład zaczerpnięto z artykułu [68].

Przykład 1.4.4. Niech $\varphi \in C_G^2(\mathbb{V}, \mathbb{R})$ oraz niech $G(v_0) \subset \mathbb{V}$ będzie niezdegenerowaną G -orbitą krytyczną potencjału φ . Połóżmy $H = G_{v_0}$ i niech $\eta : U \rightarrow \mathbb{V}$ będzie lokalnym G -potokiem indukowanym przez równanie różniczkowe postaci $\dot{u}(t) = -\nabla\varphi(u(t))$. Z Uwagi 1.4.5 otrzymujemy, że niezdegenerowana G -orbita krytyczna $G(v_0) \subset (\nabla\varphi)^{-1}(\{0\})$ jest również izolowanym zbiorem η -niezmienniczym. Co więcej, hesjan $\nabla^2\varphi(v_0)$ posiada specjalną diagonalną postać daną formułą (1.2.4) dla $T_{v_0}\mathbb{V} = T_{v_0}G(v_0) \oplus \mathbb{W}^H \oplus (\mathbb{W}^H)^{\perp}$ lub równoważnie dla $T_{v_0}\mathbb{V} = \ker \nabla^2\varphi(v_0) \oplus \mathbb{W}^H \oplus (\mathbb{W}^H)^{\perp}$, patrz Lemat 1.2.4. Ostatnia równość wynika z faktu, iż $G(v_0)$ jest niezdegenerowaną G -orbitą krytyczną potencjału φ . Dodatkowo $T_{v_0}\mathbb{V} = \ker \nabla^2\varphi(v_0) \oplus \mathbb{E}^- \oplus \mathbb{E}^+$, gdzie przez \mathbb{E}^+ oraz \mathbb{E}^- rozumiemy sumę prostą podprzestrzeni własnych operatora $\nabla^2\varphi(v_0)$ odpowiadających, odpowiednio, dodatnim oraz ujemnym wartościom własnym $\nabla^2\varphi(v_0)$. Zauważmy ponadto, że $\varphi|_{\mathbb{W}} \in C_H^2(\mathbb{W}, \mathbb{R})$ oraz v_0 jest niezdegenerowanym punktem krytycznym potencjału $\varphi|_{\mathbb{W}}$, a zatem jest również izolowanym zbiorem niezmienniczym dla lokalnego H -potoku generowanego przez równanie różniczkowe postaci $\dot{u}(t) = -\nabla\varphi|_{\mathbb{W}}(u(t))$. Na podstawie twierdzenia Hartmana-Grobmana (patrz [11]) będziemy rozpatrywać linearyzację powyższego równania w położeniu równowagi v_0 postaci $\dot{u}(t) = -\nabla^2\varphi|_{\mathbb{W}}(v_0)(u(t) - v_0)$ oraz H -potok $\eta' : \mathbb{W} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{W}$ przez nią generowany. Zauważmy także, że zbiory $D_{\varepsilon}(\mathbb{E}^{\pm}, v_0)$ oraz $S_{\varepsilon}(\mathbb{E}^-, v_0)$ są H -niezmiennicze, co wynika z następujących

równości: $|hv - v_0| = |hv - hv_0| = |v - v_0|$ dla $h \in H$. Ponadto dla dostatecznie małej liczby $\varepsilon > 0$ możemy założyć, że $(D_\varepsilon(\mathbb{E}^-, v_0) \times D_\varepsilon(\mathbb{E}^+, v_0)) \cap (\nabla\varphi|_{\mathbb{W}})^{-1}(\{0\}) = \{v_0\}$. Wówczas para $(N, L) = (D_\varepsilon(\mathbb{E}^-, v_0) \times D_\varepsilon(\mathbb{E}^+, v_0), S_\varepsilon(\mathbb{E}^-, v_0) \times D_\varepsilon(\mathbb{E}^+, v_0))$ stanowi H -parę indeksową dla zbioru $\{v_0\}$, a zatem H -niezmienniczy indeks Conley'a H -orbity krytycznej $\{v_0\}$ ma typ H -homotopii postaci $[((D_\varepsilon(\mathbb{E}^-, v_0) \times D_\varepsilon(\mathbb{E}^+, v_0))/(S_\varepsilon(\mathbb{E}^-, v_0) \times D_\varepsilon(\mathbb{E}^+, v_0)), [S_\varepsilon(\mathbb{E}^-, v_0) \times D_\varepsilon(\mathbb{E}^+, v_0)])]_H$. Zdefiniujmy parę $(N_1, L_1) = (D_\varepsilon(\mathbb{E}^-, v_0), S_\varepsilon(\mathbb{E}^-, v_0))$ oraz zauważmy, że pary (N, L) oraz (N_1, L_1) mają ten sam typ H -homotopii, a zatem $[(N/L, [L])]_H = [(N_1/L_1, [L_1])]_H$, na podstawie Lematu 1.3.9.(2). W konsekwencji H -niezmienniczy indeks Conley'a H -orbity krytycznej $\{v_0\}$ ma typ H -homotopii postaci $[(D_\varepsilon(\mathbb{E}^-, v_0)/S_\varepsilon(\mathbb{E}^-, v_0), [S_\varepsilon(\mathbb{E}^-, v_0)])]_H$, to znaczy

$$CI_H(\{v_0\}, \eta') = [(D_\varepsilon(\mathbb{E}^-, v_0)/S_\varepsilon(\mathbb{E}^-, v_0), [S_\varepsilon(\mathbb{E}^-, v_0)])]_H.$$

Co więcej, jeżeli (N, L) jest H -parą indeksową dla zbioru $\{v_0\}$, to $(G \times_H N, G \times_H L)$ jest G -parą indeksową dla zbioru $G(v_0)$, a zatem $CI_G(G(v_0), \eta) = [G \times_H N/G \times_H L, [G \times_H L]]_G$. Ponadto pary $(G \times_H N, G \times_H L)$ oraz $(G \times_H N_1, G \times_H L_1)$ mają ten sam typ G -homotopii, gdyż pary (N, L) oraz (N_1, L_1) mają ten sam typ H -homotopii, na podstawie Lematu 1.3.9.(1), a stąd

$$CI_G(G(v_0), \eta) = [(G \times_H D_\varepsilon(\mathbb{E}^-, v_0)/G \times_H S_\varepsilon(\mathbb{E}^-, v_0), [G \times_H S_\varepsilon(\mathbb{E}^-, v_0)]]_G$$

(patrz [32]). Co więcej, pomiędzy G -indeksem Conley'a $CI_G(G(v_0), \eta)$ a H -indeksem Conley'a $CI_H(\{v_0\}, \eta')$ zachodzi następujący związek:

$$CI_G(G(v_0), \eta) = G^+ \wedge_H CI_H(\{v_0\}, \eta'),$$

gdzie $G^+ \wedge_H X = (G \times_H X)/(G \times_H \{*\})$ dla pewnej H -przestrzeni X (patrz [68]).

Niezmiennik topologiczny, o którym mowa w niniejszym podrozdziale jest naturalnym uogólnieniem klasycznego indeksu Conley'a (patrz [12, 78]) zdefiniowanego jako typ homotopii pewnej zwartej przestrzeni z wyróżnionym punktem. Niezmiennicza wersja indeksu Conley'a posiada bogatszą strukturę i tym samym możemy spodziewać się silniejszych rezultatów stosując ten niezmiennik. Rzeczywiście, może zdarzyć się, że dwie przestrzenie mają ten sam typ homotopii oraz nie posiadają tego samego typu G -homotopii.

W poniższym przykładzie przedstawimy dwa izolowane zbiory niezmiennicze ze względu na pewien potok, których indeksy Conley'a mają ten sam typ homotopii oraz G -indeksy Conley'a mają różny typ G -homotopii.

Przykład 1.4.5. Niech $G = SO(2)$ oraz niech $\mathbb{V} = \mathbb{R}[1, m_1] \oplus \mathbb{R}[1, m_2]$, gdzie $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ i $m_1 \neq m_2$. Zdefiniujmy potencjał $\varphi : \mathbb{V} \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem $\varphi(v, \rho) = \frac{1}{2}\langle A(\rho)v, v \rangle + \psi(v, \rho)$, gdzie $A(\rho) = \rho \operatorname{diag}(Id_2, -Id_2)$ oraz $\psi \in C_{SO(2)}^\infty(\mathbb{V} \times [-1, 1], \mathbb{R})$ spełnia następujące wa-

runki: $\nabla_v \psi(0, \rho) = 0$ i $\nabla_v^2 \psi(0, \rho) = 0$. Ponadto rozważmy równanie różniczkowe postaci $\dot{u}(t) = \nabla_v \varphi(u(t), \rho)$ oraz zauważmy, że $\nabla_v \varphi(0, \rho) = 0$ i $\nabla_v^2 \varphi(0, \rho)$ jest izomorfizmem dla $\rho = \pm 1$. Zatem w konsekwencji twierdzenia Hartmana-Grobmana (patrz [11]) dla $\rho = \pm 1$ będziemy rozpatrywać linearyzację powyższego równania postaci $\dot{u}(t) = \nabla_v^2 \varphi(0, \rho)u(t)$. Dodatkowo przez $\eta_\rho : \mathbb{V} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{V}$ będziemy oznaczać $SO(2)$ -potok indukowany przez powyższą linearyzację. Wówczas $\{0\}$ jest izolowanym zbiorem $\eta_{\pm 1}$ -niezmienniczym oraz indeks Conley'a $CI(\{0\}, \eta_{\pm 1})$ ma typ homotopii postaci $[(D(\mathbb{R}^2)/S(\mathbb{R}^2), [S(\mathbb{R}^2)])]$. W sytuacji niezmienniczej natomiast otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} CI_{SO(2)}(\{0\}, \eta_{+1}) &= [(D(\mathbb{R}[1, m_1])/S(\mathbb{R}[1, m_1]), [S(\mathbb{R}[1, m_1])])]_{SO(2)}, \\ CI_{SO(2)}(\{0\}, \eta_{-1}) &= [(D(\mathbb{R}[1, m_2])/S(\mathbb{R}[1, m_2]), [S(\mathbb{R}[1, m_2])])]_{SO(2)}. \end{aligned}$$

Zatem $CI_{SO(2)}(\{0\}, \eta_{+1})$ ma typ $SO(2)$ -homotopii skończonego punktowanego $SO(2)$ -CW-kompleksu z następującymi podprzestrzeniami występującymi w rozkładzie komórkowym: $X_0 = X_{-1} \sqcup e_1 = \{*\} \sqcup e_1$, $X_1 = X_0 \sqcup f_1$, gdzie $e_1 = \{(0, 0)\}$ jest niezmienniczą 0-komórką typu $(0, SO(2))$ oraz $f_1 \approx_{SO(2)} B(\mathbb{R}) \times SO(2)/\mathbb{Z}_{m_1}$ jest otwartą niezmienniczą 1-komórką typu $(1, \mathbb{Z}_{m_1})$. W analogiczny sposób otrzymujemy rozkład komórkowy skończonego punktowanego $SO(2)$ -CW-kompleksu $CI_{SO(2)}(\{0\}, \eta_{-1})$. Ponadto

$$\begin{aligned} \chi_{SO(2)}(CI_{SO(2)}(\{0\}, \eta_{+1})) &= (-1)^0 \chi_{SO(2)}(SO(2)/SO(2)^+) + (-1)^1 \chi_{SO(2)}(SO(2)/\mathbb{Z}_{m_1}^+), \\ \chi_{SO(2)}(CI_{SO(2)}(\{0\}, \eta_{-1})) &= (-1)^0 \chi_{SO(2)}(SO(2)/SO(2)^+) + (-1)^1 \chi_{SO(2)}(SO(2)/\mathbb{Z}_{m_2}^+), \end{aligned}$$

a zatem rozpatrywane $SO(2)$ -indeksy Conley'a mają różne typy $SO(2)$ -homotopii, ponieważ $m_1 \neq m_2$.

1.5 Stopień G -współzmienniczych odwzorowań gradientowych

W podrozdziale niniejszym przedstawimy szkic konstrukcji niezmiennika topologicznego będącego elementem pierścienia Eulera $U(G)$ oraz zdefiniowanego dla G -współzmienniczych odwzorowań gradientowych $\nabla \varphi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ nie znikających na brzegu pewnego otwartego, ograniczonego i G -niezmienniczego podzbioru ortogonalnej reprezentacji \mathbb{V} zwartej grupy Liego G . Niezmiennik ten zwany stopniem G -współzmienniczych odwzorowań gradientowych został zdefiniowany przez Gębę w artykule [32]. Przedstawiony tutaj materiał pochodzi głównie z artykułów [32, 52, 75, 76].

Niech zatem \mathbb{V} będzie ortogonalną reprezentacją zwartej grupy Liego G , a ponadto zbiór $\Omega \subset \mathbb{V}$ będzie otwarty, ograniczony i G -niezmienniczy.

Zdefiniujemy teraz pojęcia G -współzmienniczych odwzorowań gradientowych (lub równo-

ważnie G -odwzorowań gradientowych) oraz G -współzmienniczych homotopii gradientowych (lub równoważnie G -homotopii gradientowych).

Definicja 1.5.1. Odwzorowanie $f \in C_G(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ nazywamy G -współzmienniczym odwzorowaniem gradientowym, o ile istnieje potencjał $\varphi \in C_G^1(\mathbb{V}, \mathbb{R})$ taki, że $f = \nabla\varphi$. Mówimy, że dwa G -współzmiennicze odwzorowania gradientowe f_1 oraz f_2 są gradientowo G -homotopijne, jeżeli istnieje potencjał $h \in C_G^1(\mathbb{V} \times [0, 1], \mathbb{R})$ taki, że $\nabla_v h(\cdot, 0) = f_1$ oraz $\nabla_v h(\cdot, 1) = f_2$. Wówczas h nazywamy G -homotopią gradientową.

W podrozdziale niniejszym będziemy rozpatrywać Ω -dopuszczalne G -odwzorowania gradientowe. Wówczas będziemy mówić, że dwa Ω -dopuszczalne G -odwzorowania gradientowe są gradientowo G -homotopijne, o ile istnieje G -homotopia gradientowa h , która jest Ω -dopuszczalna, to znaczy $(\nabla_v h)^{-1}(\{0\}) \cap (\partial\Omega \times [0, 1]) = \emptyset$.

Zdefiniujemy teraz stopień G -współzmienniczych odwzorowań gradientowych. W pierwszym kroku konstrukcji zdefiniujemy stopień dla specjalnej niezmienniczej Ω -funkcji Morse'a $\psi \in C_G^2(\mathbb{V}, \mathbb{R})$. Zauważmy, że $(\nabla\psi)^{-1}(\{0\}) \cap \Omega = (\nabla\psi)^{-1}(\{0\}) \cap cl(\Omega)$ składa się ze skończonej liczby G -orbit krytycznych, to jest $(\nabla\psi)^{-1}(\{0\}) \cap cl(\Omega) = G(v_1) \sqcup \dots \sqcup G(v_m)$, ze względu na Uwagę 1.2.4. Przypomnijmy również, że hesjan $\nabla^2\psi(v_j) : T_{v_j}\mathbb{V} \rightarrow T_{v_j}\mathbb{V}$, ze względu na odpowiedni rozkład przestrzeni $T_{v_j}\mathbb{V}$, ma postać zadaną formułą (1.2.4) dla każdego $j = 1, \dots, m$, patrz Lemat 1.2.4. Ponadto dla każdej specjalnej G -orbity krytycznej $G(v_j)$ prawdziwa jest następująca równość: $m^-(C(v_j)) = 0$, a zatem $m^-(\nabla^2\psi(v_j)) = m^-(B(v_j))$ i każdej G -orbicie krytycznej $G(v_j)$ możemy przyporządkować liczbę $(-1)^{m^-(B(v_j))}$. Wówczas stopień G -współzmienniczych odwzorowań gradientowych $\nabla_G\text{-deg}(\nabla\psi, \Omega) \in U(G)$ definiujemy formułą

$$\nabla_G\text{-deg}(\nabla\psi, \Omega) = \sum_{(H) \in \overline{\text{sub}}[G]} \nabla_G\text{-deg}_{(H)}(\nabla\psi, \Omega) \cdot \chi_G(G/H^+) \in U(G),$$

gdzie

$$\nabla_G\text{-deg}_{(H)}(\nabla\psi, \Omega) = \sum_{j \in \{1, \dots, m\}, (G_{v_j}) = (H)} (-1)^{m^-(B(v_j))} \in \mathbb{Z}.$$

W drugim kroku zdefiniujemy stopień dla Ω -dopuszczalnego potencjału $\varphi \in C_G^1(\mathbb{V}, \mathbb{R})$ wykorzystując aproksymację tego potencjału przez pewną specjalną niezmienniczą Ω -funkcję Morse'a. Dokładniej, dowodzi się istnienia specjalnej niezmienniczej Ω -funkcji Morse'a $\psi \in C_G^2(\mathbb{V}, \mathbb{R})$, dla której G -homotopia gradientowa $h \in C_G^1(\mathbb{V} \times [0, 1], \mathbb{R})$ zdefiniowana formułą $h(v, t) = t\psi(v) + (1-t)\varphi(v)$ dla każdego $(v, t) \in \mathbb{V} \times [0, 1]$ jest Ω -dopuszczalna (patrz [32]). Wówczas stopień G -współzmienniczych odwzorowań gradientowych $\nabla_G\text{-deg}(\nabla\varphi, \Omega) \in U(G)$ definiujemy następującą formułą: $\nabla_G\text{-deg}(\nabla\varphi, \Omega) = \nabla_G\text{-deg}(\nabla\psi, \Omega) \in U(G)$. W szczególności przyjmujemy $\nabla_G\text{-deg}(\nabla\varphi, \emptyset) = \mathbf{0} \in U(G)$.

Powyższa definicja nie zależy od wyboru specjalnej niezmienniczej Ω -funkcji Morse'a, o czym stanowi poniższe twierdzenie, które zostało zaczerpnięte z artykułu [32].

Twierdzenie 1.5.6. *Niech $\psi_1, \psi_2 \in C_G^2(\mathbb{V}, \mathbb{R})$ będą specjalnymi niezmienniczymi Ω -funkcjami Morse'a oraz dodatkowo założymy, że odwzorowania $\nabla\psi_1$ i $\nabla\psi_2$ są gradientowo G -homotopijne. Wówczas $\nabla_G\text{-deg}(\nabla\psi_1, \Omega) = \nabla_G\text{-deg}(\nabla\psi_2, \Omega)$.*

W poniższym twierdzeniu sformułujemy podstawowe własności stopnia G -współzmienniczych odwzorowań gradientowych (patrz [32, 75, 76]).

Twierdzenie 1.5.7. *Niech $\Omega \subset \mathbb{V}$ będzie zbiorem otwartym, ograniczonym i G -niezmiennicznym oraz niech potencjał $\varphi \in C_G^1(\mathbb{V}, \mathbb{R})$ będzie Ω -dopuszczalny.*

- (1) *[Istnienie] Jeżeli $\nabla_G\text{-deg}(\nabla\varphi, \Omega) \neq \mathbf{0} \in U(G)$, to $(\nabla\varphi)^{-1}(\{0\}) \cap \Omega \neq \emptyset$.*
- (2) *[Addytywność] Jeżeli $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{V}$ są otwartymi, G -niezmiennicznymi i rozłącznymi zbiorami takimi, że $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, to $\nabla_G\text{-deg}(\nabla\varphi, \Omega) = \nabla_G\text{-deg}(\nabla\varphi, \Omega_1) + \nabla_G\text{-deg}(\nabla\varphi, \Omega_2)$.*
- (3) *[Wycinanie] Jeżeli $\Omega_1 \subset \Omega$ jest otwarty i G -niezmienniczny oraz $(\nabla\varphi)^{-1}(\{0\}) \cap \Omega \subset \Omega_1$, to $\nabla_G\text{-deg}(\nabla\varphi, \Omega) = \nabla_G\text{-deg}(\nabla\varphi, \Omega_1)$.*
- (4) *[Linearyzacja] Jeżeli $\varphi \in C_G^2(\mathbb{V}, \mathbb{R})$ oraz $\nabla\varphi(0) = 0$ i $\nabla^2\varphi(0) : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ jest G -współzmiennicznym, samosprzężonym izomorfizmem liniowym, to istnieje liczba $\varepsilon_0 > 0$ taka, że dla każdego $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ otrzymujemy następującą równość: $\nabla_G\text{-deg}(\nabla\varphi, B_\varepsilon(\mathbb{V})) = \nabla_G\text{-deg}(\nabla^2\varphi(0), B(\mathbb{V}))$.*
- (5) *[Homotopijna niezmienniczość] Jeżeli $h \in C_G^1(\mathbb{V} \times [0, 1], \mathbb{R})$ jest Ω -dopuszczalne, to znaczy $(\nabla_v h)^{-1}(\{0\}) \cap (\partial\Omega \times [0, 1]) = \emptyset$, to $\nabla_G\text{-deg}(\nabla_v h(\cdot, 0), \Omega) = \nabla_G\text{-deg}(\nabla_v h(\cdot, 1), \Omega)$.*

Uwaga 1.5.6. Zauważmy, że własność homotopijnej niezmienniczości stopnia można uogólnić. Mianowicie, niech zbiór $U \subset \mathbb{V} \times [0, 1]$ będzie otwarty, ograniczony i G -niezmienniczny oraz niech potencjał $h \in C_G^1(\mathbb{V} \times [0, 1], \mathbb{R})$ będzie taki, że $(\nabla_v h)^{-1}(\{0\}) \cap \partial U_\rho = \emptyset$ dla każdego $\rho \in [0, 1]$, gdzie $U_\rho = \{v \in \mathbb{V} : (v, \rho) \in U\}$. Wówczas stopień $\nabla_G\text{-deg}(\nabla_v h(\cdot, \rho), U_\rho)$ jest stały jako funkcja zmiennej ρ .

Poniższe twierdzenie opisuje związek pomiędzy G -indeksem Conley'a a stopniem G -współzmienniczych odwzorowań gradientowych. Dowód tego twierdzenia jest bezpośrednim wnioskiem z Twierdzenia 1.4.5 oraz definicji stopnia dla specjalnej niezmienniczej funkcji Morse'a.

Twierdzenie 1.5.8. *Niech $\Omega \subset \mathbb{V}$ będzie otwarty, ograniczony i G -niezmienniczny oraz niech $\varphi \in C_G^2(\mathbb{V}, \mathbb{R})$ będzie specjalną niezmienniczą Ω -funkcją Morse'a. Rozważmy lokalny G -potok $\eta : U \rightarrow \mathbb{V}$ indukowany przez równanie różniczkowe postaci $\dot{u}(t) = -\nabla\varphi(u(t))$ oraz założymy, że $cl(\Omega)$ jest G -otoczeniem η -izolującym. Wówczas $\chi_G(CI_G(Inv(cl(\Omega), \eta), \eta)) = \nabla_G\text{-deg}(\nabla\varphi, \Omega)$.*

Uwaga 1.5.7. Dla odwzorowań ciągłych w przypadku bez działania grupy Liego mamy zdefiniowany stopień Brouwera, inaczej stopień topologiczny, będący elementem pierścienia liczb całkowitych \mathbb{Z} (patrz [37, 61]). Niezmiennik ten został wprowadzony przez Brouwera w artykule [8]. Przypomnijmy teraz szkic analitycznej konstrukcji tego stopnia. Niech zatem $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie otwartym i ograniczonym zbiorem oraz ustalmy $p \in \mathbb{R}^n$. W pierwszym kroku zdefiniujemy stopień dla odwzorowania Ω -generycznego $f \in C^1(cl(\Omega), \mathbb{R}^n)$, to znaczy $f^{-1}(\{p\}) \cap \partial\Omega = \emptyset$ oraz $p \in \mathbb{R}^n$ jest wartością regularną odwzorowania f , to jest dla każdego $x \in f^{-1}(\{p\})$ zachodzi następujący warunek: $\det Df(x) \neq 0$. Wówczas stopień Brouwera dla odwzorowania Ω -generycznego $f : cl(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^n$ na zbiorze Ω w punkcie p definiujemy następującym wzorem:

$$\deg_B(f, \Omega, p) = \sum_{x \in f^{-1}(\{p\})} \operatorname{sgn}(\det Df(x)) \in \mathbb{Z}.$$

Zauważmy, że dla odwzorowań Ω -generycznych zbiór $f^{-1}(\{p\})$ składa się ze skończonej liczby punktów, a zatem stopień jest poprawnie zdefiniowany. Jeżeli $f^{-1}(\{p\}) = \emptyset$, to przyjmujemy, że $\deg_B(f, \Omega, p) = 0$. W kolejnym kroku zdefiniujemy stopień Brouwera dla odwzorowania $f \in C^2(cl(\Omega), \mathbb{R}^n)$ takiego, że $f^{-1}(\{p\}) \cap \partial\Omega = \emptyset$, formułą $\deg_B(f, \Omega, p) = \deg_B(f, \Omega, p_1)$, gdzie p_1 jest wartością regularną odwzorowania f taką, że $|p - p_1| < d(p, f(\partial\Omega))$, której istnienie wnioskujemy z lematu Sarda (patrz [37, 61]). Można pokazać, że powyższa definicja nie zależy od wyboru wartości regularnej. W ostatnim kroku zdefiniujemy stopień dla odwzorowania $f \in C^2(cl(\Omega), \mathbb{R}^n)$ takiego, że $f^{-1}(\{p\}) \cap \partial\Omega = \emptyset$, wzorem $\deg_B(f, \Omega, p) = \deg_B(g, \Omega, p)$, gdzie $g \in C^2(cl(\Omega), \mathbb{R}^n)$ oraz $|f - g| < d(p, f(\partial\Omega))$. Poprawność powyższej definicji wynika z faktu, iż zbiór $C^2(cl(\Omega), \mathbb{R}^n)$ jest gęsty w zbiorze $C^1(cl(\Omega), \mathbb{R}^n)$ oraz odwzorowanie g możemy wybrać tak, aby p było jego wartością regularną, a ponadto pokazuje się, że powyższa definicja nie zależy od wyboru odwzorowania klasy C^2 .

W powyższej uwadze przedstawiliśmy zarys konstrukcji niezmiennika topologicznego jakim jest stopień Brouwera. Pozostając w sytuacji bez działania grupy Liego G rozważmy $B(\mathbb{R}^n)$ -dopuszczalne odwzorowania $f \in C(D(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n)$, to jest $f^{-1}(\{0\}) \cap S(\mathbb{R}^n) = \emptyset$. Wiemy, iż stopień Brouwera klasyfikuje klasy homotopii odwzorowań $B(\mathbb{R}^n)$ -dopuszczalnych $f : D(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ (patrz [36]). Rozważmy teraz dwa homotopijne $B(\mathbb{R}^n)$ -dopuszczalne odwzorowania gradientowe $f_0, f_1 \in C(D(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n)$, to jest $f_0 = \nabla\varphi_0, f_1 = \nabla\varphi_1 : D(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ oraz istnieje $B(\mathbb{R}^n)$ -dopuszczalne odwzorowanie $h \in C(D(\mathbb{R}^n) \times [0, 1], \mathbb{R}^n)$ takie, że $h(\cdot, 0) = f_0$ oraz $h(\cdot, 1) = f_1$. Okazuje się wówczas, że są one również gradientowo homotopijne (patrz [66]). Ponadto każdą liczbę całkowitą można uzyskać jako stopień Brouwera pewnego $B(\mathbb{R}^n)$ -dopuszczalnego odwzorowania gradientowego $f = \nabla\varphi : D(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ (patrz [66]). W konsekwencji stopień Brouwera klasyfikuje również klasy homotopii $B(\mathbb{R}^n)$ -dopuszczalnych odwzorowań gradientowych. A za-

tem nie można skonstruować subtelniejszego niezmiennika niż stopień Brouwera ograniczając klasę dopuszczalnych odwzorowań do klasy dopuszczalnych odwzorowań gradientowych. Powyższe rozważania zostały szczegółowo omówione w artykule [76].

W klasie G -odwzorowań gradientowych stopień G -współmienniczych odwzorowań gradientowych jest silniejszy niż stopień Brouwera (patrz [20, 75, 76]). W poniższym przykładzie definiujemy dwa $SO(2)$ -współmiennicze odwzorowania gradientowe, których stopnie Brouwera są sobie równe, a stopnie $SO(2)$ -współmienniczych odwzorowań gradientowych są różne. A zatem odwzorowania te są homotopijne, w szczególności gradientowo homotopijne (patrz [66]), oraz nie są gradientowo $SO(2)$ -homotopijne. Poniższy przykład został zaczerpnięty z artykułu [76].

Przykład 1.5.1. Niech $G = SO(2)$ oraz $\mathbb{V} = \mathbb{R}[1, 1]$. Zauważmy, że

$$SO(2)_v = \begin{cases} \{e\}, & \text{gdy } v \neq 0 \\ SO(2), & \text{gdy } v = 0 \end{cases}$$

oraz rozważmy potencjały $\varphi_{\pm} \in C_{SO(2)}^2(\mathbb{V}, \mathbb{R})$ dane formułami $\varphi_{\pm}(v) = \pm \frac{1}{2}|v|^2$. Wówczas dla $0 \in (\nabla\varphi_{\pm})^{-1}(\{0\})$ otrzymujemy, że

$$\nabla^2\varphi_{\pm}(0) = [C_{\pm}(0)] = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix} : (\mathbb{W}^{SO(2)})^{\perp} \rightarrow (\mathbb{W}^{SO(2)})^{\perp},$$

na podstawie Lematu 1.2.4, a zatem stopnie Brouwera dla odwzorowań $\nabla\varphi_+$ oraz $\nabla\varphi_-$ na zbiorze $B(\mathbb{V})$ są równe, to jest $\deg_B(\nabla\varphi_+, B(\mathbb{V}), 0) = \deg_B(\nabla\varphi_-, B(\mathbb{V}), 0) = +1 \in \mathbb{Z}$. Ponadto zauważmy, że potencjał φ_+ jest specjalną niezmienniczą $B(\mathbb{V})$ -funkcją Morse'a oraz posiada dokładnie jedną $SO(2)$ -orbitę krytyczną $SO(2)(0)$, a stąd

$$\begin{aligned} \nabla_{SO(2)}\text{-deg}(\nabla\varphi_+, B(\mathbb{V})) &= (-1)^{m^-(B_+(0))} \chi_{SO(2)}(SO(2)/SO(2)^+) = \\ &= (-1)^0 \chi_{SO(2)}(SO(2)/SO(2)^+) = \mathbf{1} \in U(SO(2)). \end{aligned}$$

Zdefiniujmy teraz potencjał $h \in C_{SO(2)}^2(\mathbb{V} \times [0, 1], \mathbb{R})$ formułą $h(v, t) = (1 - 2t\gamma(|v|))\varphi_-(v) + t\gamma(|v|)\varphi_+(v)$, gdzie $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ jest określona wzorem

$$\gamma(s) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } s \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \\ -2s + 2, & \text{gdy } s \in \left[\frac{1}{2} + \varepsilon, 1 - \varepsilon\right] \\ 0, & \text{gdy } s \in [1, +\infty) \end{cases}$$

dla dostatecznie małej liczby $\varepsilon > 0$. Wówczas $h(\cdot, 1) = (1 - 2\gamma(|\cdot|))\varphi_-(\cdot) + \gamma(|\cdot|)\varphi_+(\cdot)$ oraz $h(\cdot, 0) = \varphi_-$. Potencjał $h(\cdot, t)$ jest $B(\mathbb{V})$ -dopuszczalny dla każdego $t \in [0, 1]$. W konsekwencji

własności homotopijnej niezmienniczości stopnia, patrz Twierdzenie 1.5.7.(5), otrzymujemy, że $\nabla_{SO(2)}\text{-deg}(\nabla\varphi_-, B(\mathbb{V})) = \nabla_{SO(2)}\text{-deg}(\nabla_v h(\cdot, 1), B(\mathbb{V}))$. Ponadto $h(\cdot, 1)$ posiada dokładnie dwie $SO(2)$ -orbitę krytyczne $SO(2)(0)$ oraz $SO(2)(v_0)$, gdzie $v_0 = \left(0, \frac{5}{9}\right)$. Biorąc pod uwagę Lemat 1.2.4, dla $0 \in (\nabla_v h(\cdot, 1))^{-1}(\{0\})$ oraz $v_0 \in (\nabla_v h(\cdot, 1))^{-1}(\{0\})$ otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \nabla_v^2 h(0, 1) &= \begin{bmatrix} C(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} : (\mathbb{W}^{SO(2)})^\perp \rightarrow (\mathbb{W}^{SO(2)})^\perp, \\ \nabla_v^2 h(v_0, 1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B(v_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} : \begin{array}{ccc} T_{v_0}SO(2)(v_0) & & T_{v_0}SO(2)(v_0) \\ & \oplus & \\ & \mathbb{W}\{e\} & \rightarrow & \mathbb{W}\{e\} \end{array}, \end{aligned}$$

a stąd funkcja $h(\cdot, 1)$ jest specjalną niezmienniczą $B(\mathbb{V})$ -funkcją Morse'a. Wówczas

$$\begin{aligned} \nabla_{SO(2)}\text{-deg}(\nabla_v h(\cdot, 1), B(\mathbb{V})) &= \\ &= (-1)^{m^-(B(v_0))} \chi_{SO(2)}(SO(2)/\{e\}^+) + (-1)^{m^-(B(0))} \chi_{SO(2)}(SO(2)/SO(2)^+) = \\ &= -\chi_{SO(2)}(SO(2)/\{e\}^+) + \chi_{SO(2)}(SO(2)/SO(2)^+) \in U(SO(2)). \end{aligned}$$

Poniższe twierdzenie opisuje związek pomiędzy stopniem Brouwera G -współmienniczego odwzorowania a stopniem tego odwzorowania obciętego do punktów stałych działania grupy G , gdzie G jest torusem. Okazuje się, że stopień tego G -odwzorowania nie zależy od orbit zer leżących poza punktami stałymi działania grupy G . Dowód poniższego twierdzenia można znaleźć w artykule [72].

Twierdzenie 1.5.9. *Niech G będzie torusem oraz niech $\Omega \subset \mathbb{V}$ będzie otwartym, ograniczonym i G -niezmiennicznym podzbiorem ortogonalnej G -reprezentacji \mathbb{V} . Wówczas dla każdego Ω -dopuszczalnego odwzorowania $f \in C_G(\text{cl}(\Omega), \mathbb{V})$ mamy, że $\text{deg}_B(f, \Omega, 0) = \text{deg}_B(f|_{\Omega^G}, \Omega^G, 0) \in \mathbb{Z}$.*

Zauważmy również, że możemy rozważać G -współmiennicze odwzorowania gradientowe, dla których stopień Brouwera jest trywialny oraz ich stopień G -współmiennicznych odwzorowań gradientowych pozostaje nietrywialny. W konsekwencji stopień G -współmiennicznych odwzorowań gradientowych daje nam więcej informacji niż stopień Brouwera. Dla przykładu istnieje możliwość uzyskania pewnych rezultatów bifurkacyjnych przy użyciu stopnia G -współmiennicznych odwzorowań gradientowych, których nie można otrzymać wykorzystując stopień topologiczny.

Poniższe przykłady ilustrują sytuację, w której stopień Brouwera pewnych $SO(2)$ -współmiennicznych odwzorowań gradientowych jest trywialny.

Przykład 1.5.2. Niech $G = SO(2)$ oraz niech $\Omega \subset \mathbb{V}$ będzie otwartym, ograniczonym i $SO(2)$ -niezmiennicznym podzbiorem ortogonalnej reprezentacji \mathbb{V} grupy $SO(2)$. Załóżmy ponadto, że

$\Omega^{SO(2)} = \emptyset$. Wówczas dla każdego Ω -dopuszczalnego potencjału $\varphi \in C^1_{SO(2)}(\mathbb{V}, \mathbb{R})$ otrzymujemy, że $\deg_B(\nabla\varphi, \Omega, 0) = 0 \in \mathbb{Z}$, co jest bezpośrednią konsekwencją Twierdzenia 1.5.9.

Przykład 1.5.3. Przyjmijmy założenia i oznaczenia jak w Przykładzie 1.5.1. Wówczas dla potencjału $h(\cdot, 1)$ rozpatrywanego na zbiorze $\Omega = B(\mathbb{V}) \setminus D_{\varepsilon_0}(\mathbb{V})$ dla pewnego $0 < \varepsilon_0 < 1/2$ otrzymujemy, że $\deg_B(\nabla_v h(\cdot, 1), \Omega, 0) = 0 \in \mathbb{Z}$ w konsekwencji Twierdzenia 1.5.9. Przypomnijmy teraz, że $\nabla_{SO(2)}\text{-deg}(\nabla_v h(\cdot, 1), B(\mathbb{V})) = \chi_{SO(2)}(SO(2)/SO(2)^+) - \chi_{SO(2)}(SO(2)/\{e\}^+)$. Ponadto z własności wycinania i addytywności (Twierdzenia 1.5.7.(3) oraz 1.5.7.(2)) otrzymujemy, że $\nabla_{SO(2)}\text{-deg}(\nabla_v h(\cdot, 1), B(\mathbb{V})) = \nabla_{SO(2)}\text{-deg}(\nabla_v h(\cdot, 1), B_{\varepsilon_0}(\mathbb{V})) + \nabla_{SO(2)}\text{-deg}(\nabla_v h(\cdot, 1), \Omega)$. Dodatkowo $\nabla_{SO(2)}\text{-deg}(\nabla_v h(\cdot, 1), B_{\varepsilon_0}(\mathbb{V})) = \nabla_{SO(2)}\text{-deg}(2Id, B_{\varepsilon_0}(\mathbb{V})) = \chi_{SO(2)}(SO(2)/SO(2)^+)$, a zatem $\nabla_{SO(2)}\text{-deg}(\nabla_v h(\cdot, 1), \Omega) \neq \mathbf{0} \in U(SO(2))$.

Poniższy lemat stanowi, że dla G -niezmienniczych C^2 -potencjałów posiadających niezdegenerowaną G -orbitę krytyczną $G(v_0)$, która nie jest specjalna, można skonstruować nowy G -niezmienniczy C^2 -potencjał, dla którego $G(v_0)$ jest specjalną G -orbitą krytyczną, a pozostałe G -orbity krytyczne nowego potencjału mają typ izotropii mniejszy niż (G_{v_0}) . Dowód tego lematu można wywnioskować z artykułu [52].

Lemat 1.5.11. *Niech $\varphi \in C^2_G(\mathbb{V}, \mathbb{R})$ oraz niech $G(v_0)$ będzie niezdegenerowaną G -orbitą krytyczną potencjału φ taką, że $m^-(C(v_0)) \neq 0$, gdzie $B(v_0)$ oraz $C(v_0)$ mają postać jak w formule (1.2.4). Połóżmy $H = G_{v_0}$. Wówczas dla każdego otwartego, ograniczonego i G -niezmienniczego otoczenia $\Theta \subset \mathbb{V}$ G -orbity krytycznej $G(v_0)$ takiego, że $(\nabla\varphi)^{-1}(\{0\}) \cap \Theta = G(v_0)$ istnieją otwarte, G -niezmiennicze otoczenie $U \subset cl(U) \subset \Theta$ G -orbity krytycznej $G(v_0)$, liczba $\varepsilon > 0$ (dostatecznie mała) oraz potencjał $\phi \in C^2_G(\mathbb{V}, \mathbb{R})$ spełniające następujące warunki:*

(1) $\varphi(v) = \phi(v)$ dla każdego $v \in \mathbb{V} \setminus U(\varepsilon)$,

(2) $G(v_0)$ jest specjalną G -orbitą krytyczną potencjału ϕ , dokładniej,

$$\nabla^2\phi(v_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B(v_0) & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{C}(v_0) \end{bmatrix} \text{ oraz } m^-(\tilde{C}(v_0)) = 0,$$

(3) $((\nabla\phi)^{-1}(\{0\}) \cap (U(\varepsilon) \setminus G(v_0)))_{<(H)} = (\nabla\phi)^{-1}(\{0\}) \cap (U(\varepsilon) \setminus G(v_0))$,

(4) $(\nabla\phi)^{-1}(\{0\}) \cap \Theta \subset U(\frac{\varepsilon}{2})$ oraz $(\nabla\phi)^{-1}(\{0\}) \cap cl(U(\frac{\varepsilon}{4})) = G(v_0)$,

(5) ϕ jest niezmienniczą $U(\varepsilon)$ -funkcją Morse'a.

Poniższy lemat opisuje typy orbitowe, które mogą pojawić się w otoczeniu G -orbity krytycznej.

Lemat 1.5.12. *Niech $\varphi \in C_G^2(\mathbb{V}, \mathbb{R})$ oraz niech $\nabla\varphi(v_0) = 0$. Wówczas istnieje liczba $\varepsilon > 0$ taka, że dla każdego $v \in GB_\varepsilon(\mathbb{W}, v_0)$ otrzymujemy, że $(G_v) \leq (G_{v_0})$, gdzie $\mathbb{W} = (T_{v_0}G(v_0))^\perp$.*

Dowód. Połóżmy $H = G_{v_0}$ oraz niech rzut $\pi : B_\varepsilon(\mathbb{W}, v_0) \rightarrow \{v_0\} \subset G(v_0)$ będzie zdefiniowany wzorem $\pi(w) = v_0$ dla każdego $w \in B_\varepsilon(\mathbb{W}, v_0)$. Odwzorowanie π jest H -współzmiennicze. Wówczas istnieje dokładnie jedno G -współzmiennicze odwzorowanie

$$G \times_H \pi : G \times_H B_\varepsilon(\mathbb{W}, v_0) \rightarrow G(v_0), (G \times_H \pi)([g, w]) = g\pi(w) = gv_0$$

takie, że poniższy diagram jest przemienny

$$\begin{array}{ccc} B_\varepsilon(\mathbb{W}, v_0) & \xrightarrow{i} & G \times_H B_\varepsilon(\mathbb{W}, v_0), \\ & \searrow \pi & \downarrow G \times_H \pi \\ & & G(v_0) \end{array}$$

gdzie odwzorowanie $i : B_\varepsilon(\mathbb{W}, v_0) \rightarrow G \times_H B_\varepsilon(\mathbb{W}, v_0)$ jest dane formułą $i(w) = [e, w]$ (patrz [40]). Ponadto $G_{[g, w]} \subset G_{(G \times_H \pi)([g, w])} = G_{gv_0} = gG_{v_0}g^{-1} = gHg^{-1}$, stąd $(G_{[g, w]}) \leq (H)$ dla $[g, w] \in G \times_H B_\varepsilon(\mathbb{W}, v_0)$. Teza twierdzenia wynika zatem z Lematu 1.2.5. \square

Obliczymy teraz stopień $\nabla_G\text{-deg}(\nabla\varphi, \Theta)$ w przypadku, gdy potencjał φ posiada niezdegenerowaną G -orbitę krytyczną $G(v_0)$, która nie jest specjalna, gdzie Θ jest pewnym otwartym, ograniczonym oraz G -niezmienniczym otoczeniem $G(v_0)$.

Lemat 1.5.13. *Niech $\varphi \in C_G^2(\mathbb{V}, \mathbb{R})$ oraz niech $G(v_0)$ będzie niezdegenerowaną G -orbitą krytyczną potencjału φ , która nie jest specjalna, to znaczy $m^-(C(v_0)) \neq 0$, gdzie $B(v_0)$ oraz $C(v_0)$ mają postać jak w formule (1.2.4). Połóżmy $H = G_{v_0}$. Wówczas istnieje otwarte, ograniczone i G -niezmiennicze otoczenie $\Theta \subset \mathbb{V}$ G -orbity krytycznej $G(v_0)$ takie, że $(\nabla\varphi)^{-1}(\{0\}) \cap \text{cl}(\Theta) = G(v_0)$. Co więcej,*

$$\nabla_G\text{-deg}(\nabla\varphi, \Theta) = (-1)^{m^-(B(v_0))} \chi_G(G/H^+) + \nabla_G\text{-deg}(\nabla\phi, U(\frac{\varepsilon}{2}) \setminus \text{cl}(U(\frac{\varepsilon}{4}))),$$

gdzie ϕ i $U(\frac{\varepsilon}{2}) \setminus \text{cl}(U(\frac{\varepsilon}{4}))$ mają postać jak w Lemacie 1.5.11.

Dowód. Zauważmy najpierw, że w konsekwencji Uwagi 1.2.3 istnieje otwarte, G -niezmiennicze otoczenie $\Theta \subset \mathbb{V}$ G -orbity krytycznej $G(v_0)$ takie, że $(\nabla\varphi)^{-1}(\{0\}) \cap \Theta = G(v_0)$. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że Θ jest zbiorem ograniczonym oraz $(\nabla\varphi)^{-1}(\{0\}) \cap \partial\Theta = \emptyset$. Na podstawie Lematu 1.5.11, definiujemy Θ -dopuszczalną G -homotopię gradientową postaci

$h(v, t) = t\varphi(v) + (1-t)\phi(v)$. Biorąc pod uwagę własność homotopijnej niezmienniczości stopnia (patrz Twierdzenie 1.5.7.(5)) otrzymujemy, że

$$\nabla_G\text{-deg}(\nabla\varphi, \Theta) = \nabla_G\text{-deg}(\nabla_v h(\cdot, 1), \Theta) = \nabla_G\text{-deg}(\nabla_v h(\cdot, 0), \Theta) = \nabla_G\text{-deg}(\nabla\phi, \Theta).$$

Dodatkowo $(\nabla\phi)^{-1}(\{0\}) \cap \Theta \subset U(\frac{\varepsilon}{2})$ oraz $(\nabla\phi)^{-1}(\{0\}) \cap cl(U(\frac{\varepsilon}{4})) = G(v_0)$. Z własności wycinania oraz addytywności (patrz Twierdzenia 1.5.7.(3) oraz 1.5.7.(2)) wnioskujemy, że $\nabla_G\text{-deg}(\nabla\phi, \Theta) = \nabla_G\text{-deg}(\nabla\phi, U(\frac{\varepsilon}{2})) = \nabla_G\text{-deg}(\nabla\phi, U(\frac{\varepsilon}{4})) + \nabla_G\text{-deg}(\nabla\phi, U(\frac{\varepsilon}{2}) \setminus cl(U(\frac{\varepsilon}{4})))$. Wówczas z definicji stopnia dla specjalnej niezmienniczej $U(\frac{\varepsilon}{4})$ -funkcji Morse'a ϕ mamy, że $\nabla_G\text{-deg}(\nabla\phi, U(\frac{\varepsilon}{4})) = (-1)^{m^-(B(v_0))} \chi_G(G/H^+)$. Ponadto $(\nabla\phi)^{-1}(\{0\}) \cap (U(\frac{\varepsilon}{2}) \setminus cl(U(\frac{\varepsilon}{4}))) = G(v_1) \sqcup \dots \sqcup G(v_{m_1})$, gdyż ϕ jest niezmienniczą $U(\frac{\varepsilon}{2}) \setminus cl(U(\frac{\varepsilon}{4}))$ -funkcją Morse'a. Wtedy $\nabla_G\text{-deg}(\nabla\phi, U(\frac{\varepsilon}{2}) \setminus cl(U(\frac{\varepsilon}{4}))) = \sum_{j=1}^{m_1} \nabla_G\text{-deg}(\nabla\phi, \Theta_j)$, gdzie dla każdego $j = 1, \dots, m_1$ zbiór $\Theta_j \subset U(\frac{\varepsilon}{2}) \setminus cl(U(\frac{\varepsilon}{4}))$ jest otwartym, G -niezmienniczym otoczeniem G -orbity krytycznej $G(v_j)$ spełniającym następujące warunki: $cl(\Theta_j) \cap cl(\Theta_i) = \emptyset$ dla każdego $i \neq j$, $(\nabla\phi)^{-1}(\{0\}) \cap \Theta_j = G(v_j)$. Ponadto, dla każdego $j = 1, \dots, m_1$, możemy założyć, że $\Theta_{j \leq (G_{v_j})} = \Theta_j$, patrz Lemat 1.5.12. Ostatecznie z definicji stopnia, dla każdego $j = 1, \dots, m_1$, możemy wybrać specjalną niezmienniczą Θ_j -funkcję Morse'a $\psi_j \in C_G^2(\mathbb{V}, \mathbb{R})$ taką, że

$$\nabla_G\text{-deg}(\nabla\phi, \Theta_j) = \nabla_G\text{-deg}(\nabla\psi_j, \Theta_j) = \sum_{(H') \in \overline{sub}[G], (H') < (H)} \nabla_{G'}\text{-deg}_{(H')}(\nabla\psi_j, \Theta_j) \cdot \chi_G(G/H'^+).$$

Ostatnia równość wynika z faktu, iż $(G_{v_j}) < (H)$, patrz Lemat 1.5.11.(3), co kończy dowód. \square

Rozdział 2

Twierdzenia bifurkacyjne dla G -współzmienniczych odwzorowań gradientowych

W niniejszym rozdziale sformułujemy i udowodnimy warunki konieczne i dostateczne istnienia lokalnej oraz globalnej bifurkacji rozwiązań nietrywialnych równań gradientowych z symetriami z danej rodziny orbit punktów krytycznych. Ponadto przedstawimy, prosty w weryfikacji, algebraiczny warunek stanowiący warunek dostateczny istnienia globalnej bifurkacji. W ostatniej części rozdziału udowodnimy także pewne globalne twierdzenie bifurkacyjne typu Rabinowitza dla równań gradientowych z symetriami. Wyniki przedstawione w tym rozdziale zostały opublikowane w artykule [42].

2.1 Definicje i oznaczenia

W podrozdziale tym podamy podstawowe definicje dotyczące teorii bifurkacji oraz wprowadzimy oznaczenia wykorzystywane w dalszej części Rozdziału 2.

Niech G będzie zwartą grupą Liego oraz niech $\Omega \subset \mathbb{V}$ będzie otwartym i G -niezmienniczym podzbiorem ortogonalnej G -reprezentacji \mathbb{V} . Wówczas działanie grupy Liego G na $\Omega \times \mathbb{R}$ jest określone następująco: $G \times (\Omega \times \mathbb{R}) \ni (g, (v, \rho)) \mapsto g(v, \rho) = (gv, \rho) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

Założmy ponadto, że $\varphi \in C_G^2(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Przypomnijmy, że jeżeli $(v_0, \rho_0) \in (\nabla_v \varphi)^{-1}(\{0\})$, to $G(v_0) \times \{\rho_0\} \subset (\nabla_v \varphi)^{-1}(\{0\})$, gdyż odwzorowanie $\nabla_v \varphi$ jest G -współzmiennicze, patrz Uwaga 1.2.1. Zarówno $G(v_0) \times \{\rho_0\}$ jak i $G(v_0)$ będziemy nazywać G -orbitą krytyczną potencjału φ .

Rozważmy równanie postaci

$$\nabla_v \varphi(v, \rho) = 0 \tag{2.1.1}$$

i niech ciągle odwzorowanie $w : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ będzie takie, że $\bigcup_{\rho \in \mathbb{R}} G(w(\rho)) \times \{\rho\} \subset (\nabla_v \varphi)^{-1}(\{0\})$.

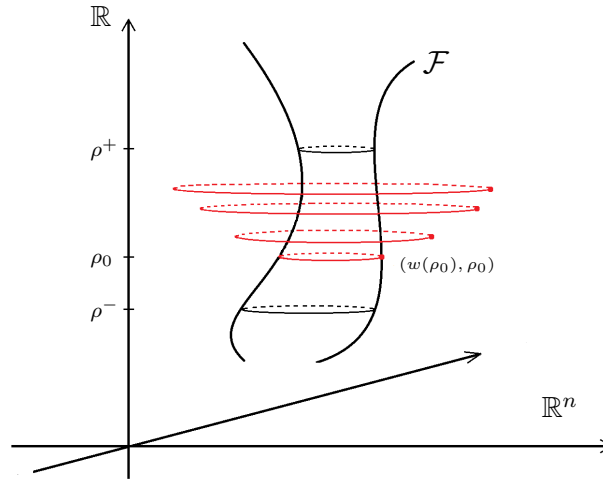
Zbiór postaci

$$\bigcup_{\rho \in \mathbb{R}} G(w(\rho)) \times \{\rho\} \subset \Omega \times \mathbb{R} \quad (2.1.2)$$

będziemy oznaczać symbolem \mathcal{F} , a dla dowolnego zbioru $X \subset \mathbb{R}$ przez \mathcal{F}_X będziemy rozumieć zbiór G -orbit krytycznych potencjału φ postaci $\bigcup_{\rho \in X} G(w(\rho)) \times \{\rho\} \subset \mathcal{F}$. W szczególności $\mathcal{F}_{\{\rho\}} = G(w(\rho)) \times \{\rho\}$ oraz dla skrócenia zapisu położymy $\mathcal{F}_\rho = \mathcal{F}_{\{\rho\}}$. Zbiór \mathcal{F} będziemy nazywać rodziną G -orbit rozwiązań trywialnych równania (2.1.1) (lub inaczej dla skrócenia zapisu rodziną trywialną G -orbit), a jej dopełnienie w zbiorze wszystkich rozwiązań równania (2.1.1) nazywamy zbiorem G -orbit rozwiązań nietrywialnych.

Zdefiniujmy teraz pojęcie lokalnej bifurkacji G -orbit rozwiązań nietrywialnych równania (2.1.1).

Definicja 2.1.1. Ustalmy parametry $\rho^\pm \in \mathbb{R}$ takie, że $\rho^- < \rho^+$. Mówimy, że ze zbioru G -orbit $\mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]} \subset \mathcal{F}$ zachodzi lokalna bifurkacja G -orbit rozwiązań nietrywialnych równania (2.1.1), jeżeli istnieje G -orbita $\mathcal{F}_{\rho_0} \subset \mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]}$ taka, że punkt $(w(\rho_0), \rho_0) \in \mathcal{F}_{\rho_0}$ jest punktem skupienia zbioru $\{(v, \rho) \in (\Omega \times \mathbb{R}) \setminus \mathcal{F} : \nabla_v \varphi(v, \rho) = 0\}$ (patrz Rysunek 2.1.1). Wówczas parametr ρ_0 nazywamy parametrem lokalnej bifurkacji, a G -orbitę \mathcal{F}_{ρ_0} nazywamy G -orbitą lokalnej bifurkacji. Zbiór parametrów lokalnej bifurkacji będziemy oznaczać przez \mathcal{BLF} .



Rysunek 2.1.1: Lokalna bifurkacja ze zbioru G -orbit $\mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]} \subset \mathcal{F}$.

Wprowadźmy następujące oznaczenia: symbolem $\mathcal{C}(\rho_0)$ oznaczamy spójną składową zbioru $cl(\{(v, \rho) \in (\Omega \times \mathbb{R}) \setminus \mathcal{F} : \nabla_v \varphi(v, \rho) = 0\})$ zawierającą G -orbitę \mathcal{F}_{ρ_0} oraz symbolem $\mathcal{C}([\rho^-, \rho^+])$

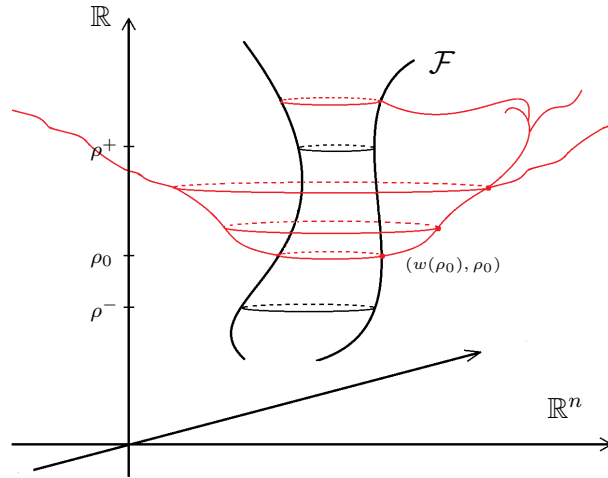
oznaczamy spójną składową zbioru $cl(\{(v, \rho) \in (\Omega \times \mathbb{R}) \setminus \mathcal{F} : \nabla_v \varphi(v, \rho) = 0\}) \cup \mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]}$ zawierającą zbiór G -orbit $\mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]}$.

Przejdźmy teraz do zdefiniowania pojęcia globalnej bifurkacji G -orbit rozwiązań nietrywialnych równania (2.1.1).

Definicja 2.1.2. Ustalmy parametry $\rho^\pm \in \mathbb{R}$ takie, że $\rho^- < \rho^+$. Mówimy, że ze zbioru G -orbit $\mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]}$ zachodzi globalna bifurkacja G -orbit rozwiązań nietrywialnych równania (2.1.1), jeżeli spójna składowa $\mathcal{C}([\rho^-, \rho^+]) \subset \Omega \times \mathbb{R}$ spełnia następujący warunek:

$$\mathcal{C}([\rho^-, \rho^+]) \text{ nie jest zwarta lub } (\mathcal{C}([\rho^-, \rho^+]) \setminus \mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]}) \cap \mathcal{F} \neq \emptyset \quad (2.1.3)$$

(patrz Rysunek 2.1.2). Ponadto, jeżeli spójna składowa $\mathcal{C}(\rho_0) \subset \Omega \times \mathbb{R}$ nie jest zwarta lub $(\mathcal{C}(\rho_0) \setminus \mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]}) \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$, to parametr $\rho_0 \in [\rho^-, \rho^+]$ nazywamy parametrem globalnej bifurkacji, a G -orbitę $\mathcal{F}_{\rho_0} \subset \mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]}$ nazywamy G -orbitą globalnej bifurkacji. Symbolem \mathcal{GLOB} będziemy oznaczać zbiór parametrów globalnej bifurkacji.



Rysunek 2.1.2: Globalna bifurkacja ze zbioru G -orbit $\mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]}$ $\subset \mathcal{F}$.

Zauważmy, że zachodzi następująca inkluzja: $\mathcal{GLOB} \subset \mathcal{BIF}$. Ponadto w artykule [88] można znaleźć przykład bifurkacji lokalnej, która nie jest globalna.

Zdefiniujemy teraz indeks bifurkacji dla odcinka $[\rho^-, \rho^+]$, będący elementem pierścienia Eulera $U(G)$, w terminach stopnia G -współmienniczych odwzorowań gradientowych. W dalszej części rozprawy pokażemy, że jego nietrywialność implikuje istnienie globalnej bifurkacji G -orbit rozwiązań nietrywialnych równania (2.1.1) ze zbioru G -orbit $\mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]}$ $\subset \mathcal{F}$.

Definicja 2.1.3. Ustalmy parametry $\rho^\pm \in \mathbb{R}$ takie, że $\rho^- < \rho^+$ i $\rho^\pm \notin \mathcal{BIF}$ oraz niech $\Theta^\pm \subset \Omega$ będą otwartymi, ograniczonymi i G -niezmienniczymi otoczeniami G -orbit $G(w(\rho^\pm))$ takimi, że $(\nabla_v \varphi)^{-1}(\{0\}) \cap (cl(\Theta^\pm) \times \{\rho^\pm\}) = \mathcal{F}_{\rho^\pm}$. Element $BIF_{[\rho^-, \rho^+]} \in U(G)$ zdefiniowany wzorem

$$BIF_{[\rho^-, \rho^+]} = \nabla_G \text{-deg}(\nabla_v \varphi(\cdot, \rho^+), \Theta^+) - \nabla_G \text{-deg}(\nabla_v \varphi(\cdot, \rho^-), \Theta^-)$$

nazywamy indeksem bifurkacji dla odcinka $[\rho^-, \rho^+]$.

Definicja indeksu bifurkacji $BIF_{[\rho^-, \rho^+]}$ nie zależy od wyboru G -niezmiennicznych otoczeń Θ^\pm G -orbit $G(w(\rho^\pm))$.

2.2 Warunek konieczny istnienia lokalnej bifurkacji

W podrozdziale niniejszym sformułujemy i udowodnimy warunek konieczny na to, aby parametr ρ był parametrem lokalnej bifurkacji G -orbit rozwiązań nietrywialnych równania (2.1.1).

W sytuacji bez symetrii wiadomo, że warunek konieczny istnienia lokalnej bifurkacji gwarantowany jest twierdzeniem o funkcji uwikłanej. Dokładniej, lokalna bifurkacja może zachodzić jedynie w zdegenerowanym punkcie krytycznym (patrz [85]). Podobnie dla równań z symetriami, wykorzystując G -niezmienniczną wersję twierdzenia o funkcji uwikłanej, udowodnimy analogiczny warunek będący warunkiem koniecznym istnienia lokalnej bifurkacji, mianowicie G -orbita krytyczna, z której następuje lokalna bifurkacja jest zdegenerowaną G -orbitą krytyczną. W tym celu sformułujemy najpierw twierdzenie o funkcji uwikłanej w jego niezmienniczej wersji. Dowód tego twierdzenia można znaleźć w artykule [19] zważywszy na Uwagę 4 zawartą w tejże pracy.

Twierdzenie 2.2.1. *Niech \mathbb{V} będzie ortogonalną reprezentacją zwartej grupy Liego G oraz niech $\Omega \subset \mathbb{V}$ będzie otwarty i G -niezmienniczny. Załóżmy, że $\varphi \in C_G^2(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ oraz ustalmy punkt $(v_0, \rho_0) \in (\nabla_v \varphi)^{-1}(\{0\})$ taki, że $\dim \ker \nabla_v^2 \varphi(v_0, \rho_0) = \dim G(v_0)$. Wówczas istnieją otwarte i G -niezmienniczne otoczenie $\Theta \subset \Omega$ G -orbitę krytycznej $G(v_0)$, liczba $\varepsilon > 0$ oraz G -współzmiennicze odwzorowanie $\psi : G(v_0) \times (\rho_0 - \varepsilon, \rho_0 + \varepsilon) \rightarrow \Omega$ takie, że jeżeli $\mathcal{N} = \{(\psi(v, \rho), \rho) : v \in G(v_0), \rho \in (\rho_0 - \varepsilon, \rho_0 + \varepsilon)\}$, to dla każdego $(v, \rho) \in \Theta \times (\rho_0 - \varepsilon, \rho_0 + \varepsilon)$ otrzymujemy, że $\nabla_v \varphi(v, \rho) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(v, \rho) \in \mathcal{N}$, a ponadto $\psi(v, \rho_0) = v$ dla każdego $v \in G(v_0)$.*

Przypomnijmy, że w niniejszym rozdziale $\Omega \subset \mathbb{V}$ jest otwartym i G -niezmiennicznym podzbiorem ortogonalnej reprezentacji \mathbb{V} zwartej grupy Liego G , a ponadto $\varphi \in C_G^2(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Co więcej, $\mathcal{F} = \bigcup_{\rho \in \mathbb{R}} G(w(\rho)) \times \{\rho\} \subset \Omega \times \mathbb{R}$ stanowi rodzinę G -orbit rozwiązań trywialnych równania (2.1.1).

Zauważmy najpierw, że nierówność postaci $\dim \ker \nabla_v^2 \varphi(w(\rho), \rho) \geq \dim G(w(\rho))$ jest prawdziwa dla każdego parametru $\rho \in \mathbb{R}$, zgodnie z Lematem 1.2.4.

Sformułujmy teraz warunek konieczny na to, aby parametr ρ był parametrem lokalnej bifurkacji G -orbit rozwiązań nietrywialnych równania (2.1.1).

Twierdzenie 2.2.2. *Przyjmijmy powyższe założenia i oznaczenia. Jeżeli $\rho_0 \in \mathcal{BLF}$, to $\dim \ker \nabla_v^2 \varphi(w(\rho_0), \rho_0) > \dim G(w(\rho_0))$.*

Dowód. Dla dowodu wykorzystamy twierdzenie o funkcji uwikłanej, jego klasyczną oraz G -niezmienniczą wersję, oraz będziemy rozpatrywali następujące przypadki:

- (1) $w(\rho_0) \in \mathbb{V}^G$,
- (2) $w(\rho_0) \notin \mathbb{V}^G$.

Przypuśćmy nie wprost, że $\rho_0 \in \mathcal{BLF}$ oraz $\dim \ker \nabla_v^2 \varphi(w(\rho_0), \rho_0) = \dim G(w(\rho_0))$. Rozważmy najpierw przypadek (1) oraz zauważmy, że wówczas

$$G(w(\rho_0)) = \{w(\rho_0)\} \text{ i } 0 = \dim G(w(\rho_0)) = \dim \ker \nabla_v^2 \varphi(w(\rho_0), \rho_0),$$

stąd $\det \nabla_v^2 \varphi(w(\rho_0), \rho_0) \neq 0$. Ponadto istnieje liczba $\varepsilon > 0$ taka, że $\det \nabla_v^2 \varphi(w(\rho), \rho) \neq 0$ dla każdego $\rho \in (\rho_0 - \varepsilon, \rho_0 + \varepsilon)$, gdyż φ jest G -niezmienniczym C^2 -potencjałem, a w jest odwzorowaniem ciągłym. Stosując twierdzenie o funkcji uwikłanej (patrz na przykład [24]) w punkcie $(w(\rho_0), \rho_0) \in \Omega \times \mathbb{R}$ otrzymujemy, że istnieją otwarte otoczenia $U_{w(\rho_0)} \subset \Omega$ oraz $U_{\rho_0} \subset \mathbb{R}$, odpowiednio, punktów $w(\rho_0) \in \Omega$ i $\rho_0 \in \mathbb{R}$ oraz dokładnie jedno odwzorowanie ciągle $\psi : U_{\rho_0} \rightarrow U_{w(\rho_0)}$ takie, że

$$\nabla_v \varphi(v, \rho) = 0 \text{ oraz } (v, \rho) \in U_{w(\rho_0)} \times U_{\rho_0} \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } v = \psi(\rho).$$

Ponadto rozważmy rozkład $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{V}^G \oplus (\mathbb{V}^G)^\perp$ oraz następujące odwzorowanie: $(\nabla_v \varphi)^G : \Omega^G \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{V}^G$. Wówczas ponownie stosując twierdzenie o funkcji uwikłanej w punkcie $(w(\rho_0), \rho_0) \in \Omega^G \times \mathbb{R}$ otrzymujemy, że istnieją otwarte otoczenia $\tilde{U}_{w(\rho_0)} \subset \Omega^G$ oraz $\tilde{U}_{\rho_0} \subset \mathbb{R}$, odpowiednio, punktów $w(\rho_0) \in \Omega^G$ i $\rho_0 \in \mathbb{R}$ oraz dokładnie jedno odwzorowanie ciągle $\tilde{\psi} : \tilde{U}_{\rho_0} \rightarrow \tilde{U}_{w(\rho_0)}$ takie, że

$$(\nabla_v \varphi)^G(v_1, \rho) = 0 \text{ oraz } (v_1, \rho) \in \tilde{U}_{w(\rho_0)} \times \tilde{U}_{\rho_0} \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } v_1 = \tilde{\psi}(\rho).$$

Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że zachodzi inkluzja $\tilde{U}_{w(\rho_0)} \times \{0\} \subset U_{w(\rho_0)}$. Co więcej, $\nabla_v \varphi((\tilde{\psi}(\rho), 0), \rho) = ((\nabla_v \varphi)^G(\tilde{\psi}(\rho), \rho), 0) = (0, 0)$ dla każdego $\rho \in U_{\rho_0} \cap \tilde{U}_{\rho_0}$, zgodnie z Uwagą 1.2.2. Zatem $\psi(\rho) = (\tilde{\psi}(\rho), 0) = w(\rho)$ dla każdego $\rho \in U_{\rho_0} \cap \tilde{U}_{\rho_0}$, a w konsekwencji

$w(U_{\rho_0} \cap \tilde{U}_{\rho_0}) \subset \Omega^G$, stąd $(\nabla_v \varphi)^{-1}(\{0\}) \cap ((U_{w(\rho_0)} \times (U_{\rho_0} \cap \tilde{U}_{\rho_0})) \setminus \mathcal{F}) = \emptyset$, sprzeczność z założeniem, że $\rho_0 \in \mathcal{BLF}$.

Rozważmy teraz przypadek (2). W konsekwencji Twierdzenia 2.2.1 istnieją otwarte, G -niezmiennicze otoczenie $\Theta \subset \Omega$ G -orbity $G(w(\rho_0))$, liczba $\varepsilon > 0$ i G -współzmiennicze odwzorowanie $\psi : G(w(\rho_0)) \times (\rho_0 - \varepsilon, \rho_0 + \varepsilon) \rightarrow \Omega$ takie, że jeżeli $\mathcal{N} = \{(\psi(v, \rho), \rho) : v \in G(w(\rho_0)), \rho \in (\rho_0 - \varepsilon, \rho_0 + \varepsilon)\}$, to dla każdego $(v, \rho) \in \Theta \times (\rho_0 - \varepsilon, \rho_0 + \varepsilon)$ otrzymujemy, że

$$\nabla_v \varphi(v, \rho) = 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } (v, \rho) \in \mathcal{N}.$$

Zatem dla każdego $\rho \in (\rho_0 - \varepsilon, \rho_0 + \varepsilon)$ oraz $v_1, v_2 \in \Theta$, jeżeli $\nabla_v \varphi(v_1, \rho) = 0$ i $\nabla_v \varphi(v_2, \rho) = 0$, to $v_1 = \psi(v'_1, \rho)$ i $v_2 = \psi(v'_2, \rho)$ dla pewnych $v'_1, v'_2 \in G(w(\rho_0))$. Stąd istnieje element $g \in G$ taki, że $v'_1 = gv'_2$. Wówczas $v_1 = \psi(v'_1, \rho) = \psi(gv'_2, \rho) = g\psi(v'_2, \rho) = gv_2$. Z drugiej strony dla odwzorowania $w : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ zachodzi następująca równość: $\nabla_v \varphi(w(\rho), \rho) = 0$ dla każdego $\rho \in \mathbb{R}$. Zatem dla każdego $\rho \in (\rho_0 - \varepsilon, \rho_0 + \varepsilon)$, jeżeli $w(\rho) \in \Theta$, to $(w(\rho), \rho) \in \mathcal{N}$, to znaczy $w(\rho) = \psi(gw(\rho_0), \rho)$ dla pewnego elementu $g \in G$. Ponieważ w jest ciągle oraz $w(\rho_0) \in \Theta$, dlatego istnieje liczba $0 < \tilde{\varepsilon} \leq \varepsilon$ taka, że $w(\rho) \in \Theta$ dla każdego $\rho \in (\rho_0 - \tilde{\varepsilon}, \rho_0 + \tilde{\varepsilon})$. Stąd $(\nabla_v \varphi)^{-1}(\{0\}) \cap ((\Theta \times (\rho_0 - \tilde{\varepsilon}, \rho_0 + \tilde{\varepsilon})) \setminus \mathcal{F}) = \emptyset$, sprzeczność z założeniem, że $\rho_0 \in \mathcal{BLF}$. \square

W ogólności każda zdegenerowana G -orbita krytyczna nie musi być G -orbitą lokalnej bifurkacji. Rzeczywiście, w poniższym przykładzie nie zachodzi lokalna bifurkacja oraz jednocześnie spełniony jest warunek konieczny dla jej istnienia.

Przykład 2.2.1. Niech \mathbb{V} będzie ortogonalną reprezentacją zwartej grupy Liego G oraz niech potencjał $\varphi : \mathbb{V} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie zdefiniowany formułą $\varphi(v, \rho) = \rho - |v|^4$. Wówczas $\varphi \in C_G^\infty(\mathbb{V} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, a ponadto $\nabla_v \varphi(v, \rho) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v = 0$. Połóżmy $\mathcal{F} = \bigcup_{\rho \in \mathbb{R}} G(0) \times \{\rho\} = \{0\} \times \mathbb{R}$ oraz zauważmy, że $\dim \ker \nabla_v^2 \varphi(0, \rho) > 0 = \dim G(0)$ dla każdego $\rho \in \mathbb{R}$. W konsekwencji dla każdego parametru $\rho \in \mathbb{R}$ warunek konieczny istnienia lokalnej bifurkacji jest spełniony, a jednocześnie nie zachodzi bifurkacja G -orbit rozwiązań nietrywialnych równania $\nabla_v \varphi(v, \rho) = 0$.

2.3 Warunki dostateczne istnienia lokalnej bifurkacji

W podrozdziale niniejszym sformułujemy i udowodnimy warunki dostateczne istnienia lokalnej bifurkacji G -orbit rozwiązań nietrywialnych równania (2.1.1) z rodziny trywialnej G -orbit \mathcal{F} wykorzystując G -niezmienniczy indeks Conley'a.

Zanotujmy, że nie nakładamy żadnego dodatkowego założenia na rodzinę \mathcal{F} . W szczególności nie zakładamy, aby rodzina trywialna zawierała się w punktach stałych działania grupy Liego G . Rezultat zawarty w niniejszym podrozdziale jest analogiczny do twierdzenia udowod-

nionego w artykule [86]. Autorzy w tejże pracy badali istnienie lokalnych bifurkacji G -orbit krytycznych niezmienniczych potencjałów z rodziny punktów krytycznych będących punktami stałymi działania grupy G . Dokładniej, zostało udowodnione, iż warunkiem wystarczającym na to, aby punkt krytyczny był punktem bifurkacji jest zmiana G -niezmienniczego indeksu Conley'a.

Badając w dalszej części rozprawy między innymi planarne centralne konfiguracje zagadnienia N ciał rozważamy je jako $SO(2)$ -orbity krytyczne niezmienniczych potencjałów, jednak orbity te nie są zawarte w punktach stałych działania grupy $SO(2)$. Pojawiła się zatem naturalna potrzeba dowiedzenia twierdzeń bifurkacyjnych w tej bardziej ogólnej sytuacji.

Przypomnijmy, że badamy G -orbity krytyczne pewnego G -niezmienniczego C^2 -potencjału $\varphi : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $\Omega \subset \mathbb{V}$ jest otwartym i G -niezmienniczym podzbiorem ortogonalnej reprezentacji \mathbb{V} zwartej grupy Liego G . Ustalmy punkt $(v_0, \rho_0) \in (\nabla_v \varphi)^{-1}(\{0\})$ taki, że G -orbita krytyczna $G(v_0) \subset \Omega$ jest niezdegenerowana, to znaczy $\dim \ker \nabla_v^2 \varphi(v_0, \rho_0) = \dim G(v_0)$. Połóżmy $\mathbb{E}^+ = \mathbb{E}_{\nabla_v^2 \varphi(v_0, \rho_0)}^+$ oraz $\mathbb{E}^- = \mathbb{E}_{\nabla_v^2 \varphi(v_0, \rho_0)}^-$. Zauważmy ponadto, że na podstawie Uwagi 1.4.5 niezdegenerowana G -orbita krytyczna $G(v_0)$ potencjału $\varphi(\cdot, \rho_0)$ jest również izolowanym zbiorem η_{ρ_0} -niezmienniczym, gdzie $\eta_{\rho_0} : U \subset \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{V}$ jest lokalnym G -potokiem indukowanym przez równanie $\dot{u}(t) = -\nabla_u \varphi(u(t), \rho_0)$. Przypomnijmy teraz, że zgodnie z Lematem 1.2.4 hesjan $\nabla_v^2 \varphi(v_0, \rho_0)$ posiada specjalną diagonalną postać daną formułą (1.2.4) dla $T_{v_0} \mathbb{V} = T_{v_0} G(v_0) \oplus \mathbb{W}^H \oplus (\mathbb{W}^H)^\perp$, to znaczy

$$\nabla_v^2 \varphi(v_0, \rho_0) : T_{v_0} \mathbb{V} = \begin{array}{ccc} & T_{v_0} G(v_0) & \\ & \oplus & \\ & \mathbb{W}^H & \\ & \oplus & \\ & (\mathbb{W}^H)^\perp & \end{array} \rightarrow T_{v_0} \mathbb{V} = \begin{array}{ccc} & T_{v_0} G(v_0) & \\ & \oplus & \\ & \mathbb{W}^H & \\ & \oplus & \\ & (\mathbb{W}^H)^\perp & \end{array}$$

ma następujący rozkład:

$$\nabla_v^2 \varphi(v_0, \rho_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B(v_0) & 0 \\ 0 & 0 & C(v_0) \end{bmatrix},$$

gdzie $H = G_{v_0}$. Co więcej, macierze $B(v_0)$ oraz $C(v_0)$ są niezdegenerowane. Załóżmy dodatkowo, że niezdegenerowana G -orbita krytyczna $G(v_0)$ jest specjalna, to znaczy $m^-(C(v_0)) = 0$,

a zatem $(\mathbb{W}^H)^\perp \subset \mathbb{E}^+$ oraz hesjan

$$\nabla_v^2 \varphi(v_0, \rho_0) : T_{v_0} \mathbb{V} = \begin{array}{ccc} & T_{v_0} G(v_0) & T_{v_0} G(v_0) \\ & \oplus & \oplus \\ & \mathbb{E}^- & \mathbb{E}^- \\ & \oplus & \oplus \\ & \mathbb{E}^+ & \mathbb{E}^+ \end{array} \rightarrow T_{v_0} \mathbb{V} = \begin{array}{ccc} & T_{v_0} G(v_0) & T_{v_0} G(v_0) \\ & \oplus & \oplus \\ & \mathbb{E}^- & \mathbb{E}^- \\ & \oplus & \oplus \\ & \mathbb{E}^+ & \mathbb{E}^+ \end{array}$$

ma następujący rozkład:

$$\nabla_v^2 \varphi(v_0, \rho_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B^-(v_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B^+(v_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C^+(v_0) \end{bmatrix},$$

gdzie $C^+(v_0) = C(v_0)$. Wówczas G -niezmienniczy indeks Conley'a G -orbity krytycznej $G(v_0)$ ma typ G -homotopii postaci $[(G \times_H D_\varepsilon(\mathbb{E}^-, v_0)/G \times_H S_\varepsilon(\mathbb{E}^-, v_0), [G \times_H S_\varepsilon(\mathbb{E}^-, v_0)]]_G$, to znaczy

$$CI_G(G(v_0), \eta_{\rho_0}) = [(G \times_H D_\varepsilon(\mathbb{E}^-, v_0)/G \times_H S_\varepsilon(\mathbb{E}^-, v_0), [G \times_H S_\varepsilon(\mathbb{E}^-, v_0)]]_G,$$

patrz Przykład 1.4.4. Co więcej, ze względu na założenie $m^-(C(v_0)) = 0$, zachodzą następujące inkluzje: $S_\varepsilon(\mathbb{E}^-, v_0) \subset D_\varepsilon(\mathbb{E}^-, v_0) \subset \mathbb{E}^- \subset \mathbb{W}^H$, a ponadto $m^-(\nabla_v^2 \varphi(v_0, \rho_0)) = m^-(B(v_0)) = m^-(B^-(v_0)) = \dim \mathbb{E}^-$, a zatem

$$CI_G(G(v_0), \eta_{\rho_0}) = [((G/H \times D_\varepsilon(\mathbb{E}^-, v_0))/(G/H \times S_\varepsilon(\mathbb{E}^-, v_0)), [G/H \times S_\varepsilon(\mathbb{E}^-, v_0)]]_G, \quad (2.3.4)$$

ze względu na równości $(G \times_H \mathbb{W})_{(H)} = (G \times_H \mathbb{W}^H)_{(H)} = G/H \times \mathbb{W}^H$. Ostatnie równości wynikają z definicji grupy izotropii oraz Wniosku 1.70 z książki [40].

Uwaga 2.3.1. Zauważmy, że G -niezmienniczy indeks Conley'a $CI_G(G(v_0), \eta_{\rho_0})$ specjalnej G -orbity krytycznej $G(v_0)$ ma typ G -homotopii skończonego punktowanego G -CW-kompleksu z typem rozkładu komórkowego postaci $\{(m^-(B(v_0)), (H))\}$, na podstawie Twierdzenia 1.4.5. Dokładniej, G -CW-kompleks ten składa się z punktu wyróżnionego $*$ oraz jednej niezmienniczej $m^-(B(v_0))$ -komórki typu $(m^-(B(v_0)), (H))$.

Uwaga 2.3.2. W artykule [86] udowodniono, że zmiana G -niezmienniczego indeksu Conley'a implikuje istnienie lokalnej bifurkacji G -orbit krytycznych niezmienniczego potencjału z rodziny punktów krytycznych będących punktami stałymi działania grupy Liego G . Podobnie można pokazać, że zmiana G -niezmienniczego indeksu Conley'a implikuje również istnienie

lokalnej bifurkacji z rodzin rozwiązań o nietrywialnych grupach izotropii.

Reasumując, badamy bifurkacje G -orbit rozwiązań nietrywialnych równania (2.1.1) z rodziny trywialnej G -orbit \mathcal{F} . Korzystając z Uwagi 2.3.1 i Uwagi 2.3.2 otrzymujemy pewne algebraiczne warunki weryfikujące istnienie lokalnych bifurkacji dane poniższymi twierdzeniami.

Twierdzenie 2.3.3. *Ustalmy parametry $\rho^\pm \in \mathbb{R}$ spełniające następujące warunki:*

- (1) $\rho^- < \rho^+$,
- (2) $\dim \ker \nabla_v^2 \varphi(w(\rho^\pm), \rho^\pm) = \dim G(w(\rho^\pm))$, to znaczy G -orbity $G(w(\rho^\pm))$ są niezdegenerowane,
- (3) $(G_{w(\rho^-)}) = (G_{w(\rho^+)})$,
- (4) $m^-(C(w(\rho^\pm))) = 0$, to znaczy G -orbity $G(w(\rho^\pm))$ są specjalne.

Jeżeli $m^-(B(w(\rho^-))) \neq m^-(B(w(\rho^+)))$, to $(\rho^-, \rho^+) \cap \mathcal{BLF} \neq \emptyset$.

Dowód. Z Uwagi 2.3.1 otrzymujemy, że G -niezmiennicze indeksy Conley'a specjalnych G -orbit krytycznych $G(w(\rho^+))$ oraz $G(w(\rho^-))$ mają typ G -homotopii skończonego punktowego G -CW-kompleksu składającego się z punktu wyróżnionego $*$ oraz jednej niezmienniczej $m^-(B(w(\rho^\pm)))$ -komórki typu $(m^-(B(w(\rho^\pm))), (G_{w(\rho^\pm)}))$. Ponieważ $(G_{w(\rho^-)}) = (G_{w(\rho^+)})$ oraz $m^-(B(w(\rho^-))) \neq m^-(B(w(\rho^+)))$, to G -indeksy Conley'a G -orbit $G(w(\rho^\pm))$ są różne. Zatem stosując Uwagę 2.3.2 otrzymujemy, że $(\rho^-, \rho^+) \cap \mathcal{BLF} \neq \emptyset$, co kończy dowód. \square

Twierdzenie 2.3.4. *Ustalmy parametry $\rho^\pm \in \mathbb{R}$ spełniające następujące warunki:*

- (1) $\rho^- < \rho^+$,
- (2) $\dim \ker \nabla_v^2 \varphi(w(\rho^\pm), \rho^\pm) = \dim G(w(\rho^\pm))$, to znaczy G -orbity $G(w(\rho^\pm))$ są niezdegenerowane,
- (3) $(G_{w(\rho^-)}) \neq (G_{w(\rho^+)})$,
- (4) $m^-(C(w(\rho^\pm))) = 0$, to znaczy G -orbity $G(w(\rho^\pm))$ są specjalne.

Wówczas $(\rho^-, \rho^+) \cap \mathcal{BLF} \neq \emptyset$.

Dowód. Analogicznie jak w dowodzie Twierdzenia 2.3.3, G -indeksy Conley'a specjalnych G -orbit krytycznych $G(w(\rho^+))$ oraz $G(w(\rho^-))$ mają typ G -homotopii skończonego punktowego G -CW-kompleksu, który składa się z punktu wyróżnionego $*$ oraz jednej niezmienniczej $m^-(B(w(\rho^\pm)))$ -komórki typu $(m^-(B(w(\rho^\pm))), (G_{w(\rho^\pm)}))$, patrz Uwaga 2.3.1. Z założenia $(G_{w(\rho^-)}) \neq (G_{w(\rho^+)})$ wynika różność G -indeksów Conley'a G -orbit $G(w(\rho^\pm))$. Stosując Uwagę 2.3.2 otrzymujemy, że $(\rho^-, \rho^+) \cap \mathcal{BLF} \neq \emptyset$, co kończy dowód. \square

2.4 Warunki dostateczne istnienia globalnej bifurkacji

W podrozdziale niniejszym sformułujemy i udowodnimy warunki dostateczne istnienia globalnej bifurkacji G -orbit rozwiązań nietrywialnych równania (2.1.1) z rodziny trywialnej G -orbit \mathcal{F} wykorzystując stopień G -współmienniczych odwzorowań gradientowych.

W twierdzeniach z tego podrozdziału będziemy odwoływać się do poniższego lematu o separacji, którego dowód można znaleźć w książce [9].

Lemat 2.4.1. *Niech K będzie przestrzenią zwartą oraz niech zbiory $A, B \subset K$ będą domknięte, rozłączne i spełniają następujący warunek: nie istnieje spójny zbiór $S \subset K$ taki, że $S \cap A \neq \emptyset$ i $S \cap B \neq \emptyset$. Wówczas istnieją zwarte zbiory $K_A, K_B \subset K$ takie, że $A \subset K_A, B \subset K_B, K_A \cap K_B = \emptyset$ oraz $K_A \cup K_B = K$.*

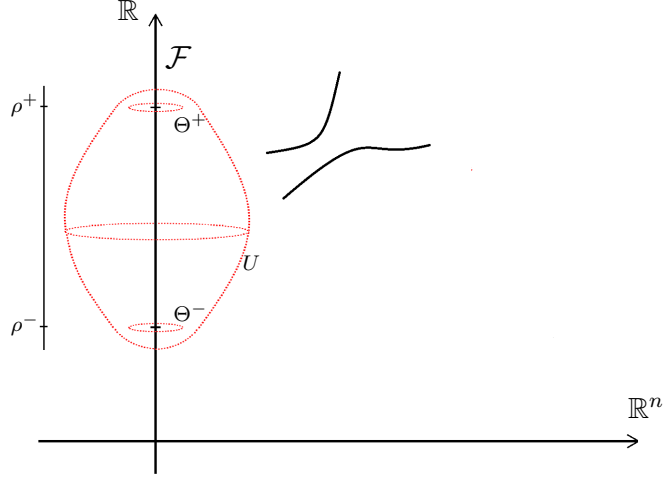
Sformułujemy teraz globalne twierdzenie bifurkacyjne typu twierdzenia Rabinowitza dla G -współmienniczych odwzorowań gradientowych. Zauważmy ponadto, że badana rodzina trywialna G -orbit \mathcal{F} nie musi być zawarta w punktach stałych działania grupy G . Sformułowanie i dowód klasycznej alternatywy Rabinowitza można znaleźć w artykule [73]. Przypomnijmy, że przypadek badania lokalnych bifurkacji z rodziny punktów stałych działania grupy G był rozpatrywany przez Smollera i Wassermana w artykule [86].

Twierdzenie 2.4.5. *Ustalmy parametry $\rho^\pm \in \mathbb{R}$ takie, że $\rho^- < \rho^+$ i $\rho^\pm \notin \mathcal{BIF}$ oraz załóżmy dodatkowo, że $BIF_{[\rho^-, \rho^+]} \neq \mathbf{0} \in U(G)$. Wówczas ze zbioru G -orbit $\mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]} \subset \mathcal{F}$ zachodzi globalna bifurkacja G -orbit rozwiązań nietrywialnych równania (2.1.1).*

Dowód. Zauważmy, że istnieją otwarte, ograniczone oraz G -niezmiennicze otoczenia $\Theta^\pm \subset \Omega$ G -orbit $G(w(\rho^\pm))$ takie, że $(\nabla_v \varphi)^{-1}(\{0\}) \cap (cl(\Theta^\pm) \times \{\rho^\pm\}) = \mathcal{F}_{\rho^\pm}$, gdyż $\rho^\pm \notin \mathcal{BIF}$, a zatem stopnie $\nabla_G\text{-deg}(\nabla_v \varphi(\cdot, \rho^\pm), \Theta^\pm)$ są poprawnie określone.

Po pierwsze udowodnimy, że istnieje parametr $\rho_0 \in (\rho^-, \rho^+)$ będący parametrem lokalnej bifurkacji. Przypuśćmy przeciwnie, że $BIF_{[\rho^-, \rho^+]} \neq \mathbf{0}$ oraz $\mathcal{BIF} \cap [\rho^-, \rho^+] = \emptyset$. Stąd istnieje otwarte, ograniczone i G -niezmiennicze otoczenie $U \subset \Omega \times \mathbb{R}$ zbioru $\mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]}$ takie, że $(\nabla_v \varphi)^{-1}(\{0\}) \cap (cl(U) \setminus \mathcal{F}) = \emptyset$. Rzeczywiście, gdyby takie otoczenie nie istniało, to w przedziale (ρ^-, ρ^+) istniałby parametr lokalnej bifurkacji. W szczególności bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że $\Theta^\pm \times \{\rho^\pm\} \subset U \cap (\Omega \times \{\rho^\pm\})$ (patrz Rysunek 2.4.3). Wówczas wykorzystując własność uogólnionej homotopijnej niezmienniczości stopnia, patrz Uwaga 1.5.6, otrzymujemy, że

$$\nabla_G\text{-deg}(\nabla \varphi(\cdot, \rho^-), U \cap (\Omega \times \{\rho^-\})) = \nabla_G\text{-deg}(\nabla \varphi(\cdot, \rho^+), U \cap (\Omega \times \{\rho^+\})),$$



Rysunek 2.4.3: Otoczenia $U \subset \Omega \times \mathbb{R}$ oraz $\Theta^\pm \subset \Omega$ zbiorów, odpowiednio, $\mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]}$ i $G(w(\rho^\pm))$. Dla prostoty rysunku rodzinę trywialną G -orbit \mathcal{F} szkicujemy symbolicznie (jako rodzinę zer), podobnie zbiór G -orbit rozwiązań nietrywialnych równania $\nabla_v \varphi(v, \rho) = 0$.

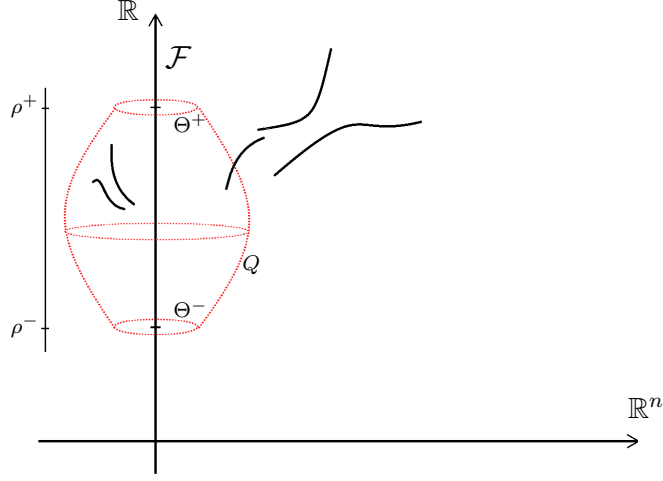
a z własności wycinania, patrz Twierdzenie 1.5.7.(3), uzyskujemy następujące równości:

$$\begin{aligned} \nabla_G\text{-deg}(\nabla\varphi(\cdot, \rho^-), U \cap (\Omega \times \{\rho^-\})) &= \nabla_G\text{-deg}(\nabla\varphi(\cdot, \rho^-), \Theta^-), \\ \nabla_G\text{-deg}(\nabla\varphi(\cdot, \rho^+), U \cap (\Omega \times \{\rho^+\})) &= \nabla_G\text{-deg}(\nabla\varphi(\cdot, \rho^+), \Theta^+), \end{aligned}$$

sprzeczność. A zatem udowodniliśmy, że w przedziale (ρ^-, ρ^+) istnieje parametr ρ_0 będący parametrem lokalnej bifurkacji lub równoważnie G -orbita $\mathcal{F}_{\rho_0} \subset \mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]}$ jest G -orbitą lokalnej bifurkacji.

Po drugie udowodnimy, że ze zbioru G -orbit $\mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]}$ zachodzi globalna bifurkacja G -orbit rozwiązań nietrywialnych równania (2.1.1). Dowód tego faktu zostanie przeprowadzony w dwóch krokach.

Krok 1. W pierwszym kroku udowodnimy, że $\mathcal{C}([\rho^-, \rho^+]) \neq \mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]}$. Przypuśćmy przeciwnie, że $\mathcal{C}([\rho^-, \rho^+]) = \mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]}$ oraz $BIF_{[\rho^-, \rho^+]} \neq \mathbf{0}$. Ponadto wybierzmy otwarte i ograniczone otoczenie $Q \subset \Omega \times \mathbb{R}$ zbioru $\mathcal{F}_{(\rho^-, \rho^+)}$ takie, że $(\Omega \times ((-\infty, \rho^-) \cup (\rho^+, +\infty))) \cap Q = \emptyset$. Dodatkowo niech $(\Omega \times \{\rho^\pm\}) \cap \partial Q = cl(\Theta^\pm) \times \{\rho^\pm\}$, gdzie zbiory $\Theta^\pm \subset \Omega$ są wybrane analogicznie jak powyżej, to znaczy $\Theta^\pm \subset \Omega$ są otwartymi, ograniczonymi i G -niezmienniczymi otoczeniami G -orbit $G(w(\rho^\pm))$ takimi, że $(\nabla_v \varphi)^{-1}(\{0\}) \cap (cl(\Theta^\pm) \times \{\rho^\pm\}) = \mathcal{F}_{\rho^\pm}$ (patrz Rysunek 2.4.4).



Rysunek 2.4.4: Otoczenia $Q \subset \Omega \times \mathbb{R}$ oraz $\Theta^\pm \subset \Omega$ zbiorów, odpowiednio, $\mathcal{F}_{(\rho^-, \rho^+)}$ i $G(w(\rho^\pm))$. Dla prostoty rysunku rodzinę trywialną G -orbit \mathcal{F} szkicujemy symbolicznie (jako rodzinę zer), podobnie zbiór G -orbit rozwiązań nietrywialnych równania $\nabla_v \varphi(v, \rho) = 0$.

Zauważmy, że zbiór $cl(Q) \cap (\nabla_v \varphi)^{-1}(\{0\})$ jest zwarty oraz połączmy

$$\begin{aligned} K &= cl(Q) \cap (\nabla_v \varphi)^{-1}(\{0\}), \\ A &= \mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]}, \\ B &= \partial Q \cap cl(\{(v, \rho) \in (\Omega \times \mathbb{R}) \setminus \mathcal{F} : \nabla_v \varphi(v, \rho) = 0\}). \end{aligned}$$

Powyżej zdefiniowane zbiory K , A oraz B spełniają założenia Lematu 2.4.1, gdyż $\mathcal{C}([\rho^-, \rho^+]) = \mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]}$. Stąd uzyskujemy zbiory K_A i K_B jak w tezie tego lematu. Co więcej, ze zwartości i rozłączności zbiorów K_A oraz K_B istnieje liczba $\varepsilon > 0$ taka, że $K_A(\varepsilon) \cap K_B(\varepsilon) = \emptyset$. Niech teraz

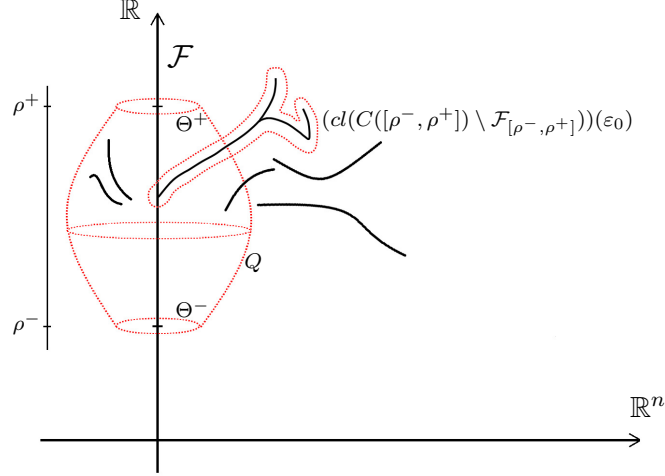
$$U = G(Q \setminus cl(K_B(\frac{\varepsilon}{2}))).$$

Wówczas $\partial U \cap (\nabla_v \varphi)^{-1}(\{0\}) = \mathcal{F}_{\rho^\pm}$ na podstawie Lematu 1.2.3 oraz zbiór U jest otwarty i G -niezmienniczy ze względu na Lemat 1.2.2. Ponownie, korzystając z własności uogólnionej homotopijnej niezmienniczości stopnia oraz własności wycinania, patrz Uwaga 1.5.6 oraz Twierdzenie 1.5.7.(3), uzyskujemy następujące równości:

$$\begin{aligned} \nabla_G\text{-deg}(\nabla \varphi(\cdot, \rho^-), \Theta^-) &= \nabla_G\text{-deg}(\nabla \varphi(\cdot, \rho^-), U \cap (\Omega \times \{\rho^-\})) = \\ &= \nabla_G\text{-deg}(\nabla \varphi(\cdot, \rho^+), U \cap (\Omega \times \{\rho^+\})) = \nabla_G\text{-deg}(\nabla \varphi(\cdot, \rho^+), \Theta^+), \end{aligned}$$

sprzeczność. A zatem udowodniliśmy, że $\mathcal{C}([\rho^-, \rho^+]) \neq \mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]}$.

Krok 2. W drugim kroku udowodnimy, że składowa $\mathcal{C}([\rho^-, \rho^+])$ nie jest zwarta lub zbiory $\mathcal{C}([\rho^-, \rho^+]) \setminus \mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]}$ i \mathcal{F} mają niepusty przekrój. Przypuścimy przeciwnie, że $\mathcal{C}([\rho^-, \rho^+])$ jest



Rysunek 2.4.5: Otoczenia $Q \subset \Omega \times \mathbb{R}$, $\Theta^\pm \subset \Omega$ oraz $(cl(\mathcal{C}([\rho^-, \rho^+]) \setminus \mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]}) (\varepsilon_0)) \subset \Omega \times \mathbb{R}$ zbiorów, odpowiednio, $\mathcal{F}_{(\rho^-, \rho^+)}$, $G(w(\rho^\pm))$ i $cl(\mathcal{C}([\rho^-, \rho^+]) \setminus \mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]})$. Dla prostoty rysunku trywialną G -orbit \mathcal{F} szkicujemy symbolicznie (jako rodzinę zer), podobnie zbiór G -orbit rozwiązań nietrywialnych równania $\nabla_v \varphi(v, \rho) = 0$.

zwarta, $(\mathcal{C}([\rho^-, \rho^+]) \setminus \mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]}) \cap \mathcal{F} = \emptyset$ oraz $BIF_{[\rho^-, \rho^+]} \neq \mathbf{0}$, a zatem możemy wybrać ε_0 -otoczenie $(cl(\mathcal{C}([\rho^-, \rho^+]) \setminus \mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]}) (\varepsilon_0)) \subset \Omega \times \mathbb{R}$ zbioru $cl(\mathcal{C}([\rho^-, \rho^+]) \setminus \mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]})$ takie, że

$$cl((cl(\mathcal{C}([\rho^-, \rho^+]) \setminus \mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]}) (\varepsilon_0)) \cap \mathcal{F}_{(-\infty, \rho^-] \cup [\rho^+, +\infty)}) = \emptyset$$

dla pewnej dostatecznie małej liczby $\varepsilon_0 > 0$. Niech zbiory $Q \subset \Omega \times \mathbb{R}$ i $\Theta^\pm \subset \Omega$ będą wybrane jak w Kroku 1 oraz spełniają dodatkowy warunek następującej postaci:

$$(\Theta^\pm \times \{\rho^\pm\}) \cap (cl(\mathcal{C}([\rho^-, \rho^+]) \setminus \mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]}) (\varepsilon_0)) = \emptyset.$$

Zdefiniujmy teraz $Q_1 = Q \cup (cl(\mathcal{C}([\rho^-, \rho^+]) \setminus \mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]}) (\varepsilon_0))$ (patrz Rysunek 2.4.5) oraz zauważmy, że zbiór $cl(Q_1) \cap (\nabla_v \varphi)^{-1}(\{0\})$ jest zwarty. Dalsza część dowodu będzie przebiegać analogicznie jak w Kroku 1. Połóżmy

$$\begin{aligned} K &= cl(Q_1) \cap (\nabla_v \varphi)^{-1}(\{0\}), \\ A &= \mathcal{C}([\rho^-, \rho^+]), \\ B &= \partial Q_1 \cap cl(\{(v, \rho) \in (\Omega \times \mathbb{R}) \setminus \mathcal{F} : \nabla_v \varphi(v, \rho) = 0\}). \end{aligned}$$

Powyżej zdefiniowane zbiory spełniają założenia Lematu 2.4.1, dlatego otrzymujemy zwarte

i rozłączne zbiory K_A oraz K_B . Co więcej, niech liczba $\varepsilon > 0$ będzie taka, że $K_A(\varepsilon) \cap K_B(\varepsilon) = \emptyset$. Niech teraz

$$U = G(Q_1 \setminus cl(K_B(\frac{\varepsilon}{2})))$$

oraz zauważmy, że zbiór U jest otwarty, G -niezmienniczy i $\partial U \cap (\nabla_v \varphi)^{-1}(\{0\}) = \mathcal{F}_{\rho^\pm}$ analogicznie jak w Kroku 1. Następnie własność uogólnionej homotopijnej niezmienniczości stopnia oraz własność wycinania (patrz Uwaga 1.5.6 i Twierdzenie 1.5.7.(3)) implikują równość $\nabla_G\text{-deg}(\nabla\varphi(\cdot, \rho^-), \Theta^-) = \nabla_G\text{-deg}(\nabla\varphi(\cdot, \rho^+), \Theta^+)$, sprzeczność, co kończy dowód Kroku 2 oraz dowodzi prawdziwości tezy twierdzenia. \square

Z Twierdzenia 2.2.2 wynika, że lokalna bifurkacja G -orbit rozwiązań nietrywialnych równania (2.1.1) zachodzi tylko ze zdegenerowanych G -orbit krytycznych potencjału φ , natomiast z Twierdzenia 2.4.5 otrzymujemy, że nietrywialność indeksu bifurkacji dla pewnego odcinka implikuje zachodzenie globalnej bifurkacji G -orbit rozwiązań nietrywialnych równania (2.1.1) z tego odcinka. W związku z powyższym otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 2.4.1. *Ustalmy parametry $\rho^\pm, \rho_0 \in \mathbb{R}$ takie, że $\rho^- < \rho_0 < \rho^+$ oraz niech G -orbita \mathcal{F}_{ρ_0} będzie jedyną zdegenerowaną G -orbitą krytyczną w zbiorze G -orbit $\mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]}$, a ponadto niech $BIF_{[\rho^-, \rho^+]} \neq \mathbf{0} \in U(G)$. Wówczas w zbiorze G -orbit $\mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]}$ istnieje dokładnie jedna G -orbita globalnej bifurkacji, mianowicie \mathcal{F}_{ρ_0} .*

Zauważmy, że Twierdzenie 2.4.5 ma charakter abstrakcyjny. Nie jest oczywiste jak weryfikować założenia tego twierdzenia. Z drugiej strony zamierzamy stosować to twierdzenie do zagadnień mechaniki nieba. Okazuje się, że przy pewnym dodatkowym założeniu, które jest wielokrotnie spełniane przez równania pochodzące z mechaniki nieba, wystarczy sprawdzić prawdziwość pewnego prostego algebraicznego warunku.

Twierdzenie 2.4.6. *Ustalmy parametry $\rho^\pm \in \mathbb{R}$ takie, że $\rho^- < \rho^+$ oraz niech G -orbita $G(w(\rho^\pm))$ będą niezdegenerowane, a ponadto niech $(G_{w(\rho^-)}) = (G_{w(\rho^+)}) = (H)$ dla pewnego $H \in \overline{\text{sub}}(G)$. Wówczas następująca implikacja jest prawdziwa:*

$$\text{jeżeli } \det B(w(\rho^-)) \cdot \det B(w(\rho^+)) < 0, \text{ to } BIF_{[\rho^-, \rho^+]} \neq \mathbf{0} \in U(G),$$

gdzie $B(w(\rho^\pm))$ są jak w formule (1.2.4).

Dowód. Zauważmy najpierw, że z Uwagi 1.2.3 możemy wybrać otwarte, ograniczone i G -niezmiennicze otoczenia $\Theta^\pm \subset \Omega$ G -orbit krytycznych $G(w(\rho^+))$ oraz $G(w(\rho^-))$ takie, że $(\nabla_v \varphi)^{-1}(\{0\}) \cap (cl(\Theta^\pm) \times \{\rho^\pm\}) = \mathcal{F}_{\rho^\pm}$, gdyż $G(w(\rho^\pm))$ są niezdegenerowane. Stąd otrzymujemy poprawną określoną stopni $\nabla_G\text{-deg}(\nabla_v \varphi(\cdot, \rho^\pm), \Theta^\pm)$. Ponadto ze względu na Lemat 1.2.4 mamy specjalną postać $\nabla_v^2 \varphi(w(\rho^\pm), \rho^\pm)$ daną formułą (1.2.4). Będziemy rozpatrywali następujące przypadki:

- (1) $m^-(C(w(\rho^\pm))) = 0$,
- (2) $m^-(C(w(\rho^\pm))) \neq 0$,
- (3) $m^-(C(w(\rho^-))) = 0$ i $m^-(C(w(\rho^+))) \neq 0$,
- (4) $m^-(C(w(\rho^-))) \neq 0$ i $m^-(C(w(\rho^+))) = 0$.

Rozważmy najpierw przypadek (1), to znaczy $m^-(C(w(\rho^\pm))) = 0$. Biorąc pod uwagę formułę na stopień specjalnej G -orbity krytycznej otrzymujemy, że

$$\nabla_G\text{-deg}(\nabla_v\varphi(\cdot, \rho^\pm), \Theta^\pm) = (-1)^{m^-(B(w(\rho^\pm)))} \chi_G(G/H^+) \in U(G). \quad (2.4.5)$$

Rozważmy teraz przypadek (2), to znaczy $m^-(C(w(\rho^\pm))) \neq 0$. Korzystając z formuły na stopień niezdegenerowanej G -orbity krytycznej, patrz dowód Lematu 1.5.13, uzyskujemy, że

$$\begin{aligned} \nabla_G\text{-deg}(\nabla_v\varphi(\cdot, \rho^\pm), \Theta^\pm) &= (-1)^{m^-(B(w(\rho^\pm)))} \chi_G(G/H^+) + \\ &+ \sum_{j=1}^{m_1^\pm} \sum_{(H') \in \overline{\text{sub}}[G], (H') < (H)} \nabla_G\text{-deg}_{(H')}(\nabla\psi_j^\pm, \Theta_j^\pm) \cdot \chi_G(G/H'^+) \in U(G). \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Dla przypadku (3) odpowiednie formuły na stopnie wynikają bezpośrednio z przypadków (1) oraz (2), natomiast przypadek (4) jest analogiczny do przypadku (3). Zatem, jeżeli $\det B(w(\rho^-)) \cdot \det B(w(\rho^+)) < 0$, to $(-1)^{m^-(B(w(\rho^-)))} \neq (-1)^{m^-(B(w(\rho^+)))}$, a stąd z formuł (2.4.5) i (2.4.6) wnioskujemy, że $\nabla_G\text{-deg}(\nabla_v\varphi(\cdot, \rho^-), \Theta^-) \neq \nabla_G\text{-deg}(\nabla_v\varphi(\cdot, \rho^+), \Theta^+)$, co kończy dowód. \square

Uwaga 2.4.3. Ustalmy parametry $\rho^\pm \in \mathbb{R}$ takie, że $\rho^- < \rho^+$ oraz niech G -orbity $G(w(\rho^\pm))$ będą niezdegenerowane. W przypadku, gdy klasy sprzężoności grup izotropii $G_{w(\rho^-)}$ oraz $G_{w(\rho^+)}$ są różne, to znaczy $(G_{w(\rho^-)}) \neq (G_{w(\rho^+)})$, teza Twierdzenia 2.4.6 pozostaje prawdziwa, co jest konsekwencją formuł (2.4.5) i (2.4.6).

Poniżej udowodnimy globalne twierdzenie bifurkacyjne, w sytuacji gradientowej z symetriami, typu twierdzeń Rabinowitza zawartych w artykule [73].

Twierdzenie 2.4.7. *Ustalmy parametry $\rho^\pm \in \mathbb{R}$ spełniające następujące warunki: $\rho^- < \rho^+$, $\rho^\pm \notin \text{BLF}$ i $\text{BIF}_{[\rho^-, \rho^+]} \neq \mathbf{0} \in U(G)$. Wówczas ze zbioru G -orbit $\mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]} \subset \mathcal{F}$ zachodzi globalna bifurkacja G -orbit rozwiązań nietrywialnych równania (2.1.1), to znaczy składowa $\mathcal{C}([\rho^-, \rho^+]) \subset \Omega \times \mathbb{R}$ nie jest zwarta lub $(\mathcal{C}([\rho^-, \rho^+]) \setminus \mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]}) \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Co więcej, jeżeli składowa $\mathcal{C}([\rho^-, \rho^+])$ jest zwarta oraz istnieje skończenie wiele parametrów*

$$\rho_0^- < \rho_0^+ < \dots < \rho_l^- = \rho^- < \rho^+ = \rho_l^+ < \dots < \rho_m^- < \rho_m^+$$

takich, że

$$(1) \mathcal{C}([\rho^-, \rho^+]) \cap \mathcal{F} \subset \bigcup_{k=0}^m \mathcal{F}_{[\rho_k^-, \rho_k^+]},$$

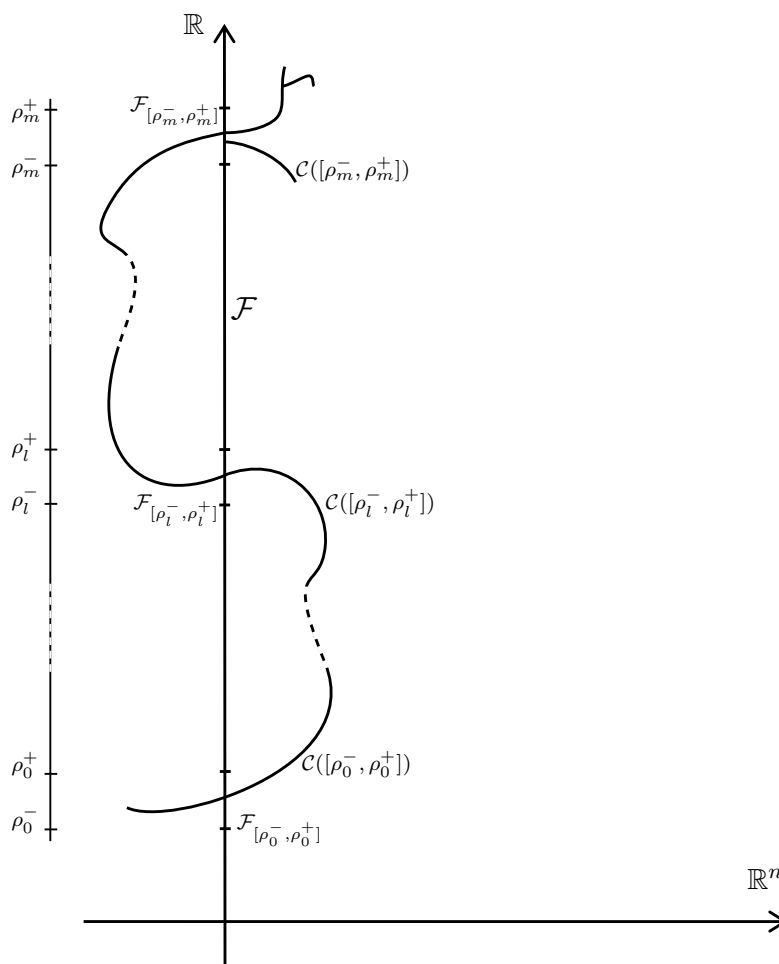
$$(2) \mathcal{C}([\rho^-, \rho^+]) \cap \mathcal{F}_{[\rho_k^-, \rho_k^+]} \neq \emptyset \text{ dla każdego } k = 0, \dots, m,$$

$$(3) \mathcal{GLOB} \cap \bigcup_{k=0}^m \mathcal{F}_{[\rho_k^-, \rho_k^+]} = \text{cl}(\mathcal{C}([\rho^-, \rho^+]) \setminus \mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]}) \cap \bigcup_{k=0}^m \mathcal{F}_{[\rho_k^-, \rho_k^+]},$$

$$(4) \rho_k^\pm \notin \text{BIF} \text{ dla każdego } k = 0, \dots, m,$$

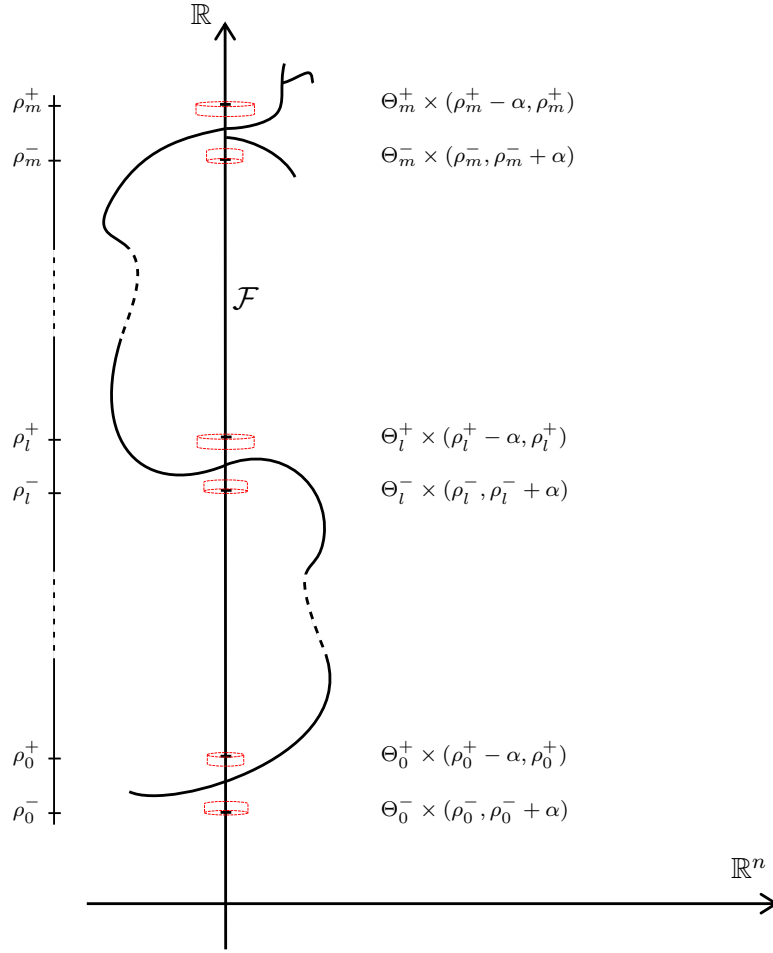
to

$$\sum_{k=0}^m \text{BIF}_{[\rho_k^-, \rho_k^+]} = \mathbf{0} \in U(G). \quad (2.4.7)$$



Rysunek 2.4.6: Składowa spójności $\mathcal{C}([\rho_k^-, \rho_k^+])$ oraz zbiór G -orbit $\mathcal{F}_{[\rho_k^-, \rho_k^+]}$ dla $k = 0, \dots, m$. Dla prostoty rysunku rodzinę trywialną G -orbit \mathcal{F} szkicujemy symbolicznie (jako rodzinę zer), podobnie zbiór G -orbit rozwiązań nietrywialnych równania $\nabla_v \varphi(v, \rho) = 0$.

Dowód. Rysunek 2.4.6 ilustruje sytuację rozważaną w twierdzeniu. Zauważmy najpierw, że ze względu na Twierdzenie 2.4.5 wystarczy udowodnić formułę (2.4.7). W tym celu dla



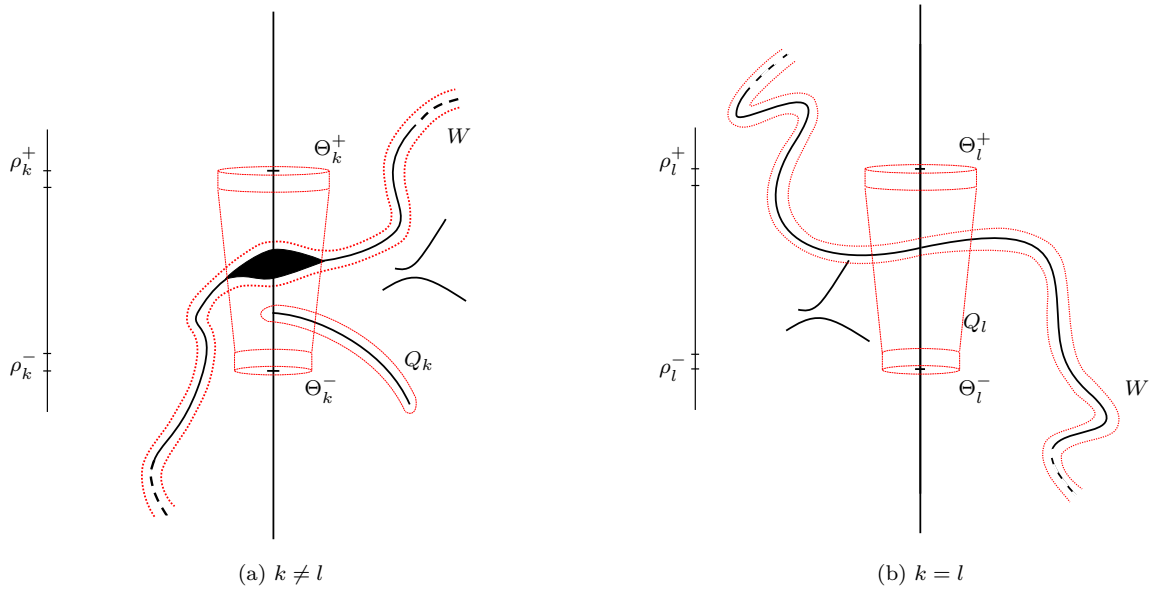
Rysunek 2.4.7: Dla $k = 0, \dots, m$ otoczenia $\Theta_k^+ \times (\rho_k^+ - \alpha, \rho_k^+)$ oraz $\Theta_k^- \times (\rho_k^-, \rho_k^- + \alpha)$. Dla prostoty rysunku rodzinę trywialną G -orbit \mathcal{F} szkicujemy symbolicznie (jako rodzinę zer), podobnie zbiór G -orbit rozwiązań nietrywialnych równania $\nabla_v \varphi(v, \rho) = 0$.

$k = 0, \dots, m$ wybierzmy otwarte, ograniczone i G -niezmiennicze otoczenia $\Theta_k^\pm \subset \Omega$ G -orbit $G(w(\rho^\pm))$ takie, że $(\nabla_v \varphi)^{-1}(\{0\}) \cap (cl(\Theta_k^\pm) \times \{\rho_k^\pm\}) = \mathcal{F}_{\rho_k^\pm}$. Ponadto ustalmy liczbę $\alpha > 0$ taką, że

$$\begin{aligned} (\nabla_v \varphi)^{-1}(\{0\}) \cap (cl(\Theta_k^+) \times [\rho_k^+ - \alpha, \rho_k^+]) &= \mathcal{F}_{[\rho_k^+ - \alpha, \rho_k^+]}, \\ (\nabla_v \varphi)^{-1}(\{0\}) \cap (cl(\Theta_k^-) \times [\rho_k^-, \rho_k^- + \alpha]) &= \mathcal{F}_{[\rho_k^-, \rho_k^- + \alpha]}, \end{aligned}$$

na podstawie założenia (4). Wybierzmy teraz ε -otoczenie $(cl(\mathcal{C}([\rho^-, \rho^+]) \setminus \mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]}) (\varepsilon)) \subset \Omega \times \mathbb{R}$ zbioru $cl(\mathcal{C}([\rho^-, \rho^+]) \setminus \mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]})$ dla pewnego dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ takie, że

$$cl((cl(\mathcal{C}([\rho^-, \rho^+]) \setminus \mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]}) (\varepsilon)) \cap \mathcal{F}_{\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k=0}^m (\rho_k^-, \rho_k^+)}) = \emptyset.$$



Rysunek 2.4.8: Otoczenia $Q_k \subset \Omega \times \mathbb{R}$, $\Theta_k^\pm \subset \Omega$ oraz $W \subset \Omega \times \mathbb{R}$. Dla prostoty rysunku rodzinę trywialną G -orbit \mathcal{F} szkicujemy symbolicznie (jako rodzinę zer), podobnie zbiór G -orbit rozwiązań nietrywialnych równania $\nabla_v \varphi(v, \rho) = 0$.

Dla skrócenia zapisu połączmy $W = (cl(\mathcal{C}([\rho^-, \rho^+]) \setminus \mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]}) (\varepsilon))$. Co więcej, niech

$$\begin{aligned} cl(W) \cap \left(\bigcup_{k=0}^m (cl(\Theta_k^+) \times [\rho_k^+ - \alpha, \rho_k^+]) \right) &= \emptyset, \\ cl(W) \cap \left(\bigcup_{k=0}^m (cl(\Theta_k^-) \times [\rho_k^-, \rho_k^- + \alpha]) \right) &= \emptyset. \end{aligned}$$

Dla $k \neq l$ istnieje ε_1 -otoczenie $(cl(\mathcal{C}([\rho_k^-, \rho_k^+]) \setminus (\mathcal{C}([\rho_l^-, \rho_l^+]) \cup \mathcal{F}_{[\rho_k^-, \rho_k^+]}) (\varepsilon_1))) \subset \Omega \times \mathbb{R}$ zbioru $cl(\mathcal{C}([\rho_k^-, \rho_k^+]) \setminus (\mathcal{C}([\rho_l^-, \rho_l^+]) \cup \mathcal{F}_{[\rho_k^-, \rho_k^+]})$, patrz założenie (3), dla prostoty zapisu połączmy

$$U_k = (cl(\mathcal{C}([\rho_k^-, \rho_k^+]) \setminus (\mathcal{C}([\rho_l^-, \rho_l^+]) \cup \mathcal{F}_{[\rho_k^-, \rho_k^+]}) (\varepsilon_1))),$$

spełniające następujące warunki:

$$\begin{aligned} cl(U_k) \cap \mathcal{F}_{(-\infty, \rho_k^-] \cup [\rho_k^+, +\infty)} &= \emptyset, \\ cl(U_k) \cap \left(\bigcup_{k=0}^m (cl(\Theta_k^+) \times [\rho_k^+ - \alpha, \rho_k^+]) \right) &= \emptyset, \\ cl(U_k) \cap \left(\bigcup_{k=0}^m (cl(\Theta_k^-) \times [\rho_k^-, \rho_k^- + \alpha]) \right) &= \emptyset. \end{aligned}$$

Położmy $U_l = \emptyset$ oraz

$$Q_k = U_k \cup \Theta_k^- \times (\rho_k^-, \rho_k^- + \alpha) \cup \Theta_k^+ \times (\rho_k^+ - \alpha, \rho_k^+) \cup \{t(v_1, \rho_k^- + \alpha) + (1-t)(v_2, \rho_k^+ - \alpha) : t \in [0, 1], v_1 \in \Theta_k^-, v_2 \in \Theta_k^+\} \quad (2.4.8)$$

dla $k = 0, \dots, m$ (patrz Rysunki 2.4.7 oraz 2.4.8). Wówczas zdefiniujemy $Q = \bigcup_{k=0}^m Q_k \cup W$ oraz zauważmy, że $cl(Q) \cap (\nabla_v \varphi)^{-1}(\{0\})$ jest zbiorem zwartym. Położmy

$$\begin{aligned} K &= cl(Q) \cap (\nabla_v \varphi)^{-1}(\{0\}), \\ A &= \bigcup_{k=0}^m \mathcal{F}_{[\rho_k^-, \rho_k^+]} \cup \mathcal{C}([\rho^-, \rho^+]), \\ B &= \partial Q \cap cl(\{(v, \rho) \in (\Omega \times \mathbb{R}) \setminus \mathcal{F} : \nabla_v \varphi(v, \rho) = 0\}). \end{aligned}$$

Powyżej zdefiniowane zbiory K , A oraz B spełniają założenia Lematu 2.4.1, a zatem uzyskujemy zwarte i rozłączne zbiory K_A oraz K_B jak w tezie tego lematu. Niech teraz liczba $\eta > 0$ będzie taka, że $K_A(\eta) \cap K_B(\eta) = \emptyset$ oraz położmy

$$U = G(Q \setminus cl(K_B(\frac{\eta}{2}))).$$

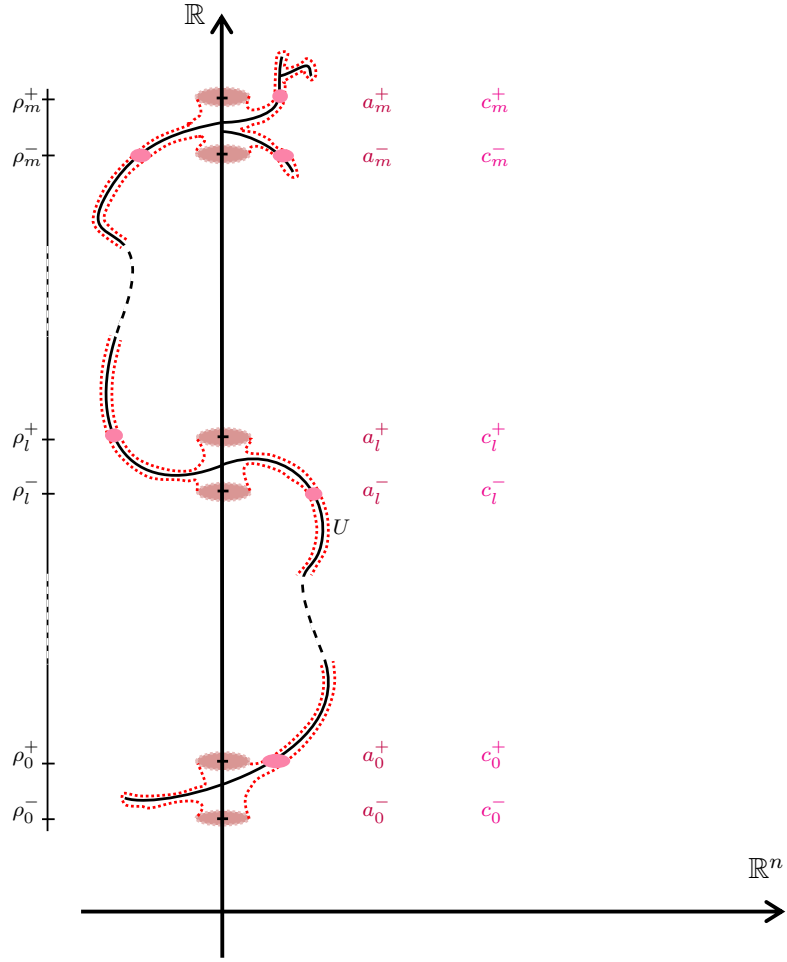
Stąd otrzymujemy, że $(\nabla_v \varphi)^{-1}(\{0\}) \cap \partial U = \bigcup_{k=0}^m (\mathcal{F}_{\rho_k^-} \cup \mathcal{F}_{\rho_k^+})$, co wynika z Lematu 1.2.3. Na podstawie Lematu 1.2.2, zbiór U jest otwarty i G -niezmienniczy. Zatem stopień

$$\nabla_G\text{-deg}(\nabla_v \varphi(\cdot, \rho), U \cap (\Omega \times \{\rho\})) \in U(G)$$

jest dobrze zdefiniowany, a ponadto, wykorzystując własność uogólnionej homotopijnej niezmienniczości stopnia (patrz Uwaga 1.5.6), uzyskujemy, że jest on stały jako funkcja parametru $\rho \in [\rho_{\min} + \varepsilon_0, \rho_{\max} - \varepsilon_0]$, gdzie

$$\begin{aligned} \rho_{\min} &= \inf\{\rho \in \mathbb{R} : U \cap (\Omega \times \{\rho\}) \neq \emptyset\}, \\ \rho_{\max} &= \sup\{\rho \in \mathbb{R} : U \cap (\Omega \times \{\rho\}) \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

i ε_0 jest liczbą dodatnią taką, że $(\nabla_v \varphi)^{-1}(\{0\}) \cap (U \cap (\Omega \times \{\rho_{\min} \pm \varepsilon_0\})) = \emptyset$, gdy $\rho_{\min} < \rho_0^-$ oraz $\rho_{\max} > \rho_m^+$. W przeciwnym przypadku $\rho \in [\rho_0^-, \rho_{\max} - \varepsilon_0]$ lub $\rho \in [\rho_{\min} + \varepsilon_0, \rho_m^+]$ lub $\rho \in [\rho_0^-, \rho_m^+]$. Co więcej, na podstawie własności addytywności stopnia (patrz Twierdzenie



Rysunek 2.4.9: Stopnie $\nabla_G\text{-deg}(\nabla_v\varphi(\cdot, \rho_k^\pm), \Theta_k^\pm)$ i $\nabla_G\text{-deg}(\nabla_v\varphi(\cdot, \rho_k^\pm), (U \cap (\Omega \times \{\rho_k^\pm\})) \setminus cl(\Theta_k^\pm))$ dla $k = 0, \dots, m$ oraz zbiór $U \subset \Omega \times \mathbb{R}$. Ponadto w sytuacji przedstawionej na rysunku mamy, że $\rho_{\min} = \rho_0^-$ oraz $\rho_{\max} > \rho_m^+$.

1.5.7.(2)), dla każdego $k = 0, \dots, m$ otrzymujemy równość

$$\begin{aligned} \nabla_G\text{-deg}(\nabla_v\varphi(\cdot, \rho_k^\pm), U \cap (\Omega \times \{\rho_k^\pm\})) &= \\ &= \underbrace{\nabla_G\text{-deg}(\nabla_v\varphi(\cdot, \rho_k^\pm), \Theta_k^\pm)}_{a_k^\pm} + \underbrace{\nabla_G\text{-deg}(\nabla_v\varphi(\cdot, \rho_k^\pm), (U \cap (\Omega \times \{\rho_k^\pm\})) \setminus cl(\Theta_k^\pm))}_{c_k^\pm} \end{aligned}$$

(patrz Rysunek 2.4.9). Biorąc pod uwagę równości $c_k^+ = c_{k+1}^-$ i $a_k^+ + c_k^+ = a_{k+1}^- + c_{k+1}^-$ mamy $a_k^+ = a_{k+1}^-$, a zatem wnioskujemy, że

$$\sum_{k=0}^m (a_k^+ - a_k^-) = \sum_{k=0}^m a_k^+ - \sum_{k=0}^m a_k^- = \sum_{k=0}^m a_k^+ - \sum_{k=-1}^{m-1} a_{k+1}^- = \sum_{k=0}^{m-1} (a_k^+ - a_{k+1}^-) + a_m^+ - a_0^- = a_m^+ - a_0^-.$$

Zauważmy także, że $c_m^+ = c_0^- = 0$. Wówczas

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m BIF_{[\rho_k^-, \rho_k^+]} &= \sum_{k=0}^m \left(\nabla_G \text{-deg}(\nabla_v \varphi(\cdot, \rho_k^+), \Theta_k^+) - \nabla_G \text{-deg}(\nabla_v \varphi(\cdot, \rho_k^-), \Theta_k^-) \right) = \\ &= \sum_{k=0}^m a_k^+ - a_k^- = a_m^+ - a_0^- = (a_m^+ + c_m^+) - (a_0^- + c_0^-) = \mathbf{0} \in U(G), \end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Uwaga 2.4.4. Zauważmy, że jeżeli dla każdego $k = 0, \dots, m$ zbiór $\mathcal{F}_{[\rho_k^-, \rho_k^+]}$ zawiera dokładnie jedną zdegenerowaną G -orbitę krytyczną, to założenie (3) Twierdzenia 2.4.7 jest spełnione.

Rozdział 3

Centralne konfiguracje zagadnienia N ciał

W rozdziale tym zastosujemy abstrakcyjne wyniki uzyskane w rozprawie do badania problemu N ciał. Dokładniej, sformułujemy warunki konieczne i dostateczne na istnienie lokalnej oraz globalnej bifurkacji planarnych oraz przestrzennych centralnych konfiguracji zagadnienia N ciał. Problem badania centralnych konfiguracji sprowadzamy do analizy orbit krytycznych rodziny $SO(d)$ -niezmienniczych potencjałów. Analizując zagadnienie planarne będziemy rozważać grupę symetrii $SO(2)$, natomiast w przypadku zagadnienia przestrzennego grupę symetrii $SO(3)$. W rozważaniach wykorzystujemy pewną znaną rodzinę centralnych konfiguracji i poszukujemy orbit lokalnych i globalnych bifurkacji należących do tej rodziny. W rozprawie będziemy analizować następujące rodziny centralnych konfiguracji:

- planarna rodzina sześciokąta foremnego z dodatkowym ciałem w środku masy (patrz [57]),
- planarna rodzina dwóch zagnieżdżonych kwadratów (patrz [27]),
- planarna rodzina rozety dla trzynastu ciał (patrz [46, 79]),
- przestrzenne rodziny dwóch zagnieżdżonych czworościanów foremnych (patrz [15]),
- przestrzenna rodzina dwóch zagnieżdżonych ośmiościanów foremnych (patrz [14]),
- przestrzenna rodzina dwóch zagnieżdżonych ośmiościanów foremnych z dodatkowym ciałem w środku masy (patrz [87]),
- przestrzenna rodzina dwóch zagnieżdżonych sześciąt (patrz [14]),
- przestrzenna rodzina dwóch zagnieżdżonych sześciąt z dodatkowym ciałem w środku masy (patrz [87]),

- przestrzenna rodzina dwóch dualnych wielościanów foremnych dla problemu czternastu ciał (patrz [18]),
- przestrzenna rodzina dla problemu $n + 3$ ciał dla $n = 3, 4, 6$ (patrz [53]).

Powyższe rodziny traktujemy jako rodziny trywialne centralnych konfiguracji oraz dowodzimy istnienia bifurkacji nowych centralnych konfiguracji z tych rodzin. Ponieważ w przypadku płanarnym każda centralna konfiguracja odpowiada rozwiązaniu okresowemu zagadnienia N ciał, dostarczając nowych centralnych konfiguracji dowodzimy istnienie nowych rozwiązań okresowych. Odpowiednie formuły na pozycje i masy ciał występujących w badanych rodzinach zostały zaczerpnięte z powyżej wymienionych artykułów. Ze względu na żmudne rachunki przeprowadzane w niniejszym rozdziale obliczenia symboliczne są wspomagane przez środowisko obliczeniowe MAPLETM.

Zauważmy, że rozważane rodziny centralnych konfiguracji mają wiele symetrii. W rozprawie badamy również kształt nowych centralnych konfiguracji bifurkujących z rodzin trywialnych oraz dowodzimy, iż w pewnych przypadkach jest on mniej regularny. Dokładniej, wykluczamy, że rodziny te mają ten sam typ symetrii jak rodziny trywialne. W rezultacie dostarczamy przykładów centralnych konfiguracji o mniej regularnych kształtach. Należy podkreślić, że informacja dotycząca kształtu nowych rodzin centralnych konfiguracji jest jedynie lokalna.

Większość rezultatów przedstawionych w tym rozdziale została opublikowana w artykułach [42, 43].

3.1 Centralne konfiguracje zagadnienia N ciał - definicja

W niniejszym podrozdziale sformułujemy problem N ciał oraz zdefiniujemy pojęcie centralnej konfiguracji tego zagadnienia. Materiał tu przedstawiony został zaczerpnięty głównie z [49, 71, 91].

Rozważmy N punktów materialnych poruszających się w \mathbb{R}^d dla $d = 2$ lub $d = 3$. Symbolami $q_j \in \mathbb{R}^d$ i $m_j > 0$ oznaczamy, odpowiednio, położenie oraz masę j -tego ciała. Przypomnijmy, że przez $|q_j|$ rozumiemy normę euklidesową q_j . Załóżmy ponadto, że rozważane ciała poruszają się tylko pod wpływem wzajemnych sił grawitacji oraz zgodnie z prawami ruchu Newtona. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona, w inercjalnym układzie odniesienia, jeżeli siły działające na ciało nie równoważą się, to iloczyn masy j -tego ciała m_j oraz jego przyspieszenia \ddot{q}_j jest równy sumie sił działających na to ciało. Dodatkowo z prawa powszechnego ciążenia otrzymujemy, że siła działająca na ciało q_j indukowana przez ciało q_i jest równa $\gamma \frac{m_j m_i}{|q_j - q_i|^2}$ oraz kierunek tej siły jest zadany przez wektor jednostkowy $-\frac{1}{|q_j - q_i|}(q_j - q_i)$, gdzie γ jest stałą grawitacji. Wówczas ruch N punktów materialnych można opisać następującym

układem równań różniczkowych zwyczajnych:

$$m_j \ddot{q}_j = - \sum_{i=1, i \neq j}^N \gamma m_j m_i \frac{1}{|q_j - q_i|^3} (q_j - q_i), \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.1.1)$$

Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że $\gamma = 1$.

W dalszych rozważaniach przestrzeń \mathbb{R}^{dN} traktujemy jako ortogonalną $SO(d)$ -reprezentację \mathbb{V} , to znaczy ortogonalną reprezentację zwartej grupy Liego $SO(d)$ będącą sumą prostą N kopii naturalnych $SO(d)$ -reprezentacji $\tilde{\mathbb{V}}$, gdzie $\tilde{\mathbb{V}} = (\mathbb{R}^d, \varrho)$ oraz homomorfizm $\varrho : SO(d) \rightarrow O(d)$ jest zadany formułą $\varrho(g) = g$ dla $g \in SO(d)$. Wówczas działanie grupy Liego $SO(d)$ na \mathbb{V} jest określone następująco: $SO(d) \times \mathbb{V} \ni (g, q) = (g, (q_1, \dots, q_N)) \mapsto gq = (gq_1, \dots, gq_N) \in \mathbb{V}$.

Definiujemy teraz przestrzeń konfiguracji N ciał $\Omega \subset \mathbb{V}$ wykluczając kolizje tych ciał, to znaczy

$$\Omega = \{q = (q_1, \dots, q_N) \in \mathbb{V} : q_i \neq q_j \text{ dla } i \neq j\},$$

oraz potencjał newtonowski $U : \Omega \times (0, +\infty)^N \rightarrow \mathbb{R}$ następującą formułą:

$$U(q, m) = U(q_1, \dots, q_N, m_1, \dots, m_N) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{|q_i - q_j|}.$$

Wówczas newtonowskie równania ruchu (3.1.1) stowarzyszone z potencjałem U zapisują się w następującej postaci:

$$M \ddot{q} = \nabla_q U(q, m), \quad (3.1.2)$$

gdzie M jest macierzą mas, to znaczy $M = \text{diag}(m_1 Id_d, \dots, m_N Id_d)$. Zauważmy, że zbiór $\Omega \subset \mathbb{V}$ jest otwarty i $SO(d)$ -niezmienniczy, a U jest $SO(d)$ -niezmiennicznym C^∞ -potencjałem.

Uwaga 3.1.1. Układ równań (3.1.2) nie posiada położeń równowagi. Rzeczywiście, gdyby $\nabla_q U(q, m) = 0$, to $0 = \langle \nabla_q U(q, m), q \rangle = -U(q, m) < 0$, sprzeczność. Ostatnia równość wynika z własności $U(sq, m) = s^{-1}U(q, m)$ dla dowolnego $s > 0$ oraz twierdzenia Eulera o funkcjach jednorodnych (patrz [41]).

Zdefiniujemy teraz pojęcie centralnej konfiguracji układu (3.1.2).

Definicja 3.1.1. Konfigurację N ciał $q = (q_1, \dots, q_N) \in \Omega$ nazywamy centralną konfiguracją układu (3.1.2), o ile istnieje dodatnia stała λ taka, że $\ddot{q} = -\lambda q$. Ponadto mówimy, że centralna konfiguracja q jest współliniowa, o ile punkty q_1, \dots, q_N leżą na jednej prostej.

O centralnej konfiguracji $q = (q_1, \dots, q_N) \in \Omega$ mówimy, że jest planarna, o ile punkty q_1, \dots, q_N leżą na jednej płaszczyźnie, w przeciwnym przypadku konfigurację q nazywamy przestrzenną, to znaczy nie istnieje jedna płaszczyzna zawierająca punkty q_1, \dots, q_N .

Uwaga 3.1.2. Niech $q(t) = (q_1(t), \dots, q_N(t)) \in \Omega$ będzie rozwiązaniem układu (3.1.2). Wówczas dla każdego $j = 1, \dots, N$ przyspieszenie j -tego ciała względem pozostałych $N - 1$ ciał wynosi $\ddot{q}_j(t) = \frac{1}{m_j} \frac{\partial U}{\partial q_j}(q(t), m)$. Dla pewnego ustalonego czasu t_0 , z Definicji 3.1.1, konfiguracja $q(t_0) = (q_1(t_0), \dots, q_N(t_0)) \in \Omega$ jest centralną konfiguracją układu (3.1.2), o ile $\ddot{q}(t_0) = -\lambda q(t_0)$ dla pewnej stałej $\lambda > 0$. Stąd $-\lambda M q(t_0) = \nabla_q U(q(t_0), m)$, a zatem konfiguracja N ciał $q = q(t_0) = (q_1(t_0), \dots, q_N(t_0)) \in \Omega$ jest centralną konfiguracją układu (3.1.2) wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia układ równań algebraicznych następującej postaci:

$$-\lambda \nabla_q I(q, m) = \nabla_q U(q, m), \quad (3.1.3)$$

gdzie potencjał $I : \Omega \times (0, +\infty)^N \rightarrow \mathbb{R}$ dany formułą $I(q, m) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |q_i|^2$ nazywamy momentem bezwładności.

Uwaga 3.1.3. Zauważmy, że środek masy N punktów materialnych q_C zdefiniowany formułą $\frac{1}{m_1 + \dots + m_N} \sum_{i=1}^N m_i q_i \in \mathbb{R}^d$ znajduje się w początku układu współrzędnych dla każdego rozwiązania równania (3.1.3). W rozprawie będziemy zajmować się problemem poszukiwania nowych centralnych konfiguracji zagadnienia N ciał ze środkiem ciężkości w zerze.

Uwaga 3.1.4. Niech $q = (q_1, \dots, q_N) \in \Omega$ będzie centralną konfiguracją układu (3.1.2), to znaczy $-\lambda \nabla_q I(q, m) = U(q, m)$. Ponieważ U i I są potencjałami jednorodnymi stopni, odpowiednio, -1 oraz 2 , to $\langle \nabla_q U(q, m), q \rangle = -U(q, m)$ oraz $\langle \nabla_q I(q, m), q \rangle = 2I(q, m)$ na podstawie twierdzenia Eulera o funkcjach jednorodnych (patrz [41]). Stąd otrzymujemy, że $-\lambda 2I(q, m) = \langle -\lambda \nabla_q I(q, m), q \rangle = \langle \nabla_q U(q, m), q \rangle = -U(q, m)$, a zatem $\lambda = \frac{U(q, m)}{2I(q, m)}$.

Uwaga 3.1.5. Niech $q = (q_1, \dots, q_N) \in \Omega$ będzie centralną konfiguracją układu (3.1.2). Wiemy, że potencjały U i I są jednorodne oraz dodatkowo $SO(d)$ -niezmiennicze, a stąd dla każdego $\alpha > 0$ i $g \in SO(d)$ konfiguracje αq oraz gq są również centralnymi konfiguracjami ze współczynnikami równymi, odpowiednio, $\frac{\lambda}{\alpha^3}$ oraz λ . Zatem na zbiorze centralnych konfiguracji możemy wprowadzić relację równoważności następująco: mówimy, że centralne konfiguracje q oraz \tilde{q} są równoważne, jeżeli istnieją $\alpha > 0$ oraz $g \in SO(d)$ takie, że $\tilde{q} = \alpha gq$. Innymi słowy można utożsamiać ze sobą dwie centralne konfiguracje, gdy z jednej możemy otrzymać drugą poprzez złożenie operacji skalowania oraz obrotu.

W dalszych rozważaniach, zamiast przechodzić do przestrzeni orbit $\Omega/SO(d)$ i traktować klasy centralnych konfiguracji jako pojedyncze punkty będziemy rozpatrywać całe $SO(d)$ -orbitę centralnych konfiguracji. Warto zauważyć, iż Palmore w artykule [65], przechodząc do przestrzeni orbit, badał jednoparametrową rodzinę $N - 1$ -kąta foremnego z dodatkowym ciałem w środku masy oraz wykazał, że istnieje dokładnie jedna wartość parametru, dla którego rodzina ta jest zdegenerowana. Meyer i Schmidt w artykule [56] udowodnili, że w miarę jak

wzrasta liczba ciał N pojawia się więcej niż dokładnie jedna wartość parametru, dla którego rozważana rodzina jest zdegenerowana (patrz [57]). Autorzy dokonali analizy problemu dla $N \leq 13$ oraz uzyskane wyniki okazały się niezgodne z rezultatami zawartymi w artykule [65].

W rozprawie problem badania centralnych konfiguracji sprowadzamy do analizy $SO(d)$ -orbit krytycznych $SO(d)$ -niezmienniczego C^∞ -potencjału $\hat{\varphi} : \Omega \times (0, +\infty)^N \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanego wzorem $\hat{\varphi}(q, m) = U(q, m) + \lambda I(q, m)$. Rozważamy pewną znaną rodzinę centralnych konfiguracji i poszukujemy $SO(d)$ -orbit lokalnych i globalnych bifurkacji należących do tej rodziny. Załóżmy zatem, że istnieją ciągle odwzorowania $w : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ oraz $m : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)^N$ takie, że $\nabla_q \hat{\varphi}(w(\rho), m(\rho)) = 0$, to znaczy odwzorowanie $w : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ definiuje rodzinę centralnych konfiguracji przy pewnych masach ciał zadanych odwzorowaniem $m : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)^N$. Zdefiniujmy dalej potencjał $\varphi : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ następującym wzorem: $\varphi(q, \rho) = \hat{\varphi}(q, m(\rho))$. Wówczas

$$\mathcal{F} = \bigcup_{\rho \in \mathbb{R}} SO(d)(w(\rho)) \times \{\rho\} \subset (\nabla_q \varphi)^{-1}(\{0\}) \quad (3.1.4)$$

oraz będziemy rozważać równanie następującej postaci:

$$\nabla_q \varphi(q, \rho) = 0, \quad (3.1.5)$$

gdzie $\lambda = \lambda(\rho) = \frac{U(w(\rho), m(\rho))}{2I(w(\rho), m(\rho))}$. Przypomnijmy, że rodzinę \mathcal{F} nazywamy rodziną $SO(d)$ -orbit rozwiązań trywialnych równania (3.1.5) (lub krótko rodziną trywialną centralnych konfiguracji).

Zdefiniujmy teraz pewne szczególne rozwiązanie problemu N ciał takie, że kształt utworzony przez ciała występujące w konfiguracji jest zachowany w każdej chwili czasu.

Definicja 3.1.2. Rozwiązanie $q(t) \in \Omega$ układu (3.1.2) nazywamy rozwiązaniem homograficznym, o ile istnieją funkcja skalarna $R(t) > 0$ oraz specjalna macierz ortogonalna $g(t) \in SO(3)$ takie, że $q(t) = R(t)g(t)q(0)$ dla każdego t .

Wyróżniamy dwa szczególne typy rozwiązań homograficznych: jeżeli $g(t) = Id_3$, to rozwiązanie $q(t) = R(t)q(0)$ nazywamy homotetycznym, a jeżeli $R(t) = 1$, to $q(t) = g(t)q(0)$ nazywamy względny położeniem równowagi. Można pokazać, że dla każdego rozwiązania homograficznego $q(t)$ konfiguracja $q(0)$ jest centralną konfiguracją układu (3.1.2) (patrz [91]). Zatem centralne konfiguracje odgrywają istotną rolę w konstruowaniu istotnej klasy rozwiązań zagadnienia N ciał.

Opiszemy teraz związek centralnych konfiguracji z względnymi położeniami równowagi dla układu (3.1.2) w przypadku planarnym, to znaczy dla $d = 2$. W tym celu wprowadźmy układ współrzędnych rotujący ze stałą prędkością kątową ω wokół osi przechodzącej przez środek masy układu oraz prostopadłej do płaszczyzny ruchu N ciał następującą formułą:

$q = e^{\omega Jt}u = (e^{\omega Jt}u_1, \dots, e^{\omega Jt}u_N)$, gdzie J jest standardową macierzą symplektyczną, to znaczy

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lemat 3.1.1. *Przyjmijmy powyższe założenia i oznaczenia. Wówczas równania ruchu (3.1.2) mają w rotującym układzie współrzędnych następującą postać:*

$$m_j(\ddot{u}_j + 2\omega J\dot{u}_j - \omega^2 u_j) = \frac{\partial U}{\partial u_j}(u, m), \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.1.6)$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że dla $j = 1, \dots, N$ otrzymujemy $\dot{q}_j = \omega J e^{\omega Jt} u_j + e^{\omega Jt} \dot{u}_j$ oraz $\ddot{q}_j = (\omega J)^2 e^{\omega Jt} u_j + 2\omega J e^{\omega Jt} \dot{u}_j + e^{\omega Jt} \ddot{u}_j$. Uwzględniając powyższe równości w newtonowskich równaniach ruchu (3.1.2) mamy $m_j(-\omega^2 e^{\omega Jt} u_j + 2\omega J e^{\omega Jt} \dot{u}_j + e^{\omega Jt} \ddot{u}_j) = \frac{\partial U}{\partial q_j}(e^{\omega Jt} u, m)$, a zatem $m_j(-\omega^2 u_j + 2\omega J \dot{u}_j + \ddot{u}_j) = \frac{\partial U}{\partial u_j}(u, m)$, co kończy dowód. \square

Z powyższego lematu otrzymujemy, że położenia równowagi w jednostajnie rotującym układzie współrzędnych spełniają następujący układ równań: $-\lambda m_j u_j = \frac{\partial U}{\partial u_j}(u, m)$, $j = 1, \dots, N$, gdzie $\lambda = \omega^2$, a zatem są centralnymi konfiguracjami problemu N ciał. Ponadto każda planarna centralna konfiguracja u wyznacza względne położenie równowagi postaci $q(t) = e^{\omega Jt} u$ oraz można pokazać, iż każde rozwiązanie układu (3.1.2) będące względnym położeniem równowagi jest tej postaci. Zatem dowodząc istnienia nowych planarnych centralnych konfiguracji znajdujemy nowe rozwiązania okresowe zagadnienia N ciał.

Omówimy teraz ogólną postać rozwiązań homograficznych dla układu (3.1.2) w przypadku planarnym, to znaczy dla $d = 2$. Przypomnijmy najpierw, że elementy grupy Liego $SO(2)$ oznaczamy przez $\Phi(\phi)$, patrz formuła (1.1.1). Niech $u = (u_1, \dots, u_N) \in \Omega$ będzie centralną konfiguracją układu (3.1.2) oraz niech $q(t) = R(t)\Phi(\phi(t))u$ dla pewnych funkcji $R(t) > 0$ i $\phi(t)$ będących klasy C^2 . Poniższy lemat został zaczerpnięty z książki [49].

Lemat 3.1.2. *Przyjmijmy powyższe założenia i oznaczenia. Funkcja $q(t)$ jest rozwiązaniem homograficznym zagadnienia N ciał wtedy i tylko wtedy, gdy $(R(t), \phi(t))$ są rozwiązaniami następującego układu równań:*

$$\begin{cases} \ddot{R}(t) - R(t)\dot{\phi}(t)^2 = -\frac{\lambda}{R(t)^2} \\ 2\dot{R}(t)\dot{\phi}(t) + R(t)\ddot{\phi}(t) = 0 \end{cases}. \quad (3.1.7)$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że dla $j = 1, \dots, N$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \dot{q}_j(t) &= \dot{R}(t)\Phi(\phi(t))u_j + R(t)\dot{\phi}(t)\Phi(\phi(t))Ju_j, \\ \ddot{q}_j(t) &= (\ddot{R}(t) - R(t)\dot{\phi}(t)^2)\Phi(\phi(t))u_j + (2\dot{R}(t)\dot{\phi}(t) + R(t)\ddot{\phi}(t))\Phi(\phi(t))Ju_j. \end{aligned}$$

Uwzględniając powyższe równości w newtonowskich równaniach ruchu (3.1.2) mamy $m_j((\ddot{R}(t) - R(t)\dot{\phi}(t)^2)\Phi(\phi(t))u_j + (2\dot{R}(t)\dot{\phi}(t) + R(t)\ddot{\phi}(t))\Phi(\phi(t))Ju_j) = R(t)^{-2}\Phi(\phi(t))\frac{\partial U}{\partial u_j}(u, m)$, a zatem $m_j(\ddot{R}(t) - R(t)\dot{\phi}(t)^2)u_j + m_j(2\dot{R}(t)\dot{\phi}(t) + R(t)\ddot{\phi}(t))Ju_j = R(t)^{-2}\frac{\partial U}{\partial u_j}(u, m)$. Ponadto centralna konfiguracja $u \in \Omega$ spełnia układ równań $\frac{\partial U}{\partial u_j}(u, m) = -\lambda m_j u_j$, $j = 1, \dots, N$ dla pewnego $\lambda > 0$. Stąd

$$\left\{ \begin{bmatrix} \ddot{R}(t) - R(t)\dot{\phi}(t)^2 & -(2\dot{R}(t)\dot{\phi}(t) + R(t)\ddot{\phi}(t)) \\ (2\dot{R}(t)\dot{\phi}(t) + R(t)\ddot{\phi}(t)) & \ddot{R}(t) - R(t)\dot{\phi}(t)^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R(t)^{-2}\lambda & 0 \\ 0 & R(t)^{-2}\lambda \end{bmatrix} \right\} u_j = 0$$

dla każdego $j = 1, \dots, N$. Zatem funkcja $q(t)$ jest rozwiązaniem homograficznym zagadnienia N ciał wtedy i tylko wtedy, gdy $(\ddot{R}(t) - R(t)\dot{\phi}(t)^2 + R(t)^{-2}\lambda)^2 + (2\dot{R}(t)\dot{\phi}(t) + R(t)\ddot{\phi}(t))^2 = 0$, co kończy dowód. \square

Zauważmy, że układ (3.1.7) opisuje dwuwymiarowe zagadnienie Keplera we współrzędnych biegunowych. Przypomnijmy, że $C = R(t)^2\dot{\phi}(t)$ oraz $E = \frac{1}{2}(\dot{R}(t)^2 + R(t)^2\dot{\phi}(t)^2) - \frac{\lambda}{R(t)}$ są całkami pierwszymi układu (3.1.7) (całka momentu pędu i całka energii). Wiemy, iż dopuszczalne są trzy typy rozwiązań problemu Keplera: paraboliczne, hiperboliczne oraz eliptyczne. Stąd rozwiązanie homograficzne dla układu (3.1.2) w przypadku planarnym jest okresowe wtedy i tylko wtedy, gdy $C = R(0)^2\dot{\phi}(0) \neq 0$ oraz $E = \frac{1}{2}(\dot{R}(0)^2 + R(0)^2\dot{\phi}(0)^2) - \frac{\lambda}{R(0)} < 0$ (patrz [71]).

W szczególności na podstawie Lematu 3.1.2 można wywnioskować, iż jedynymi planarnymi względnie położeniami równowagi są położenia równowagi w układzie współrzędnych rotującym ze stałą prędkością kątową ω wokół osi przechodzącej przez środek masy układu oraz prostopadłej do płaszczyzny ruchu N ciał.

Wniosek 3.1.1. *Przyjmijmy założenia i oznaczenia jak w Lemacie 3.1.2. Niech ponadto $R(t) = 1$. Rozwiązanie $q(t) \in \Omega$ układu (3.1.2) jest względnie położeniem równowagi wtedy i tylko wtedy, gdy $\dot{\phi}(t)^2 = \lambda$, to znaczy $q(t) = e^{\omega J t} u$ dla $\omega^2 = \lambda$.*

3.2 Bifurkacje centralnych konfiguracji zagadnienia N ciał

W niniejszym podrozdziale zastosujemy abstrakcyjne rezultaty uzyskane w Rozdziale 2 oraz sformułujemy warunki konieczne i dostateczne na istnienie lokalnej i globalnej bifurkacji centralnych konfiguracji zagadnienia N ciał.

Uwaga 3.2.6. W przypadku planarnych centralnych konfiguracji, to znaczy dla $d = 2$, działanie grupy symetrii $SO(2)$ na przestrzeni konfiguracji Ω jest wolne, stąd $\Omega_{\{e\}} = \Omega$. W sytuacji przestrzennej, to jest dla $d = 3$, działanie grupy symetrii $SO(3)$ nie jest wolne, a ponadto $\Omega_{\{e\}} \cup \Omega_{(SO(2))} = \Omega$. Okazuje się, że grupa izotropii współliniowej centralnej konfiguracji

jest sprzężona z $SO(2)$, natomiast dla przestrzennych centralnych konfiguracji q , które nie są współliniowe mamy, że $SO(3)_q = \{e\}$.

Problem badania centralnych konfiguracji sprowadziliśmy do analizy $SO(d)$ -orbit krytycznych $SO(d)$ -niezmienniczego C^∞ -potencjału $\varphi(q, \rho) = U(q, m(\rho)) + \lambda(\rho)I(q, m(\rho))$. Zastosujemy zatem Twierdzenia 2.2.2 oraz 2.4.5 i sformułujemy warunki konieczne i dostateczne na istnienie bifurkacji centralnych konfiguracji z rodziny trywialnej \mathcal{F} . Zauważmy najpierw, że centralne konfiguracje rozpatrywane w niniejszej rozprawie nie są współliniowe, a zatem na podstawie Uwagi 3.2.6 zachodzi $SO(d)_{w(\rho)} = \{e\}$. Z Lematu 1.2.7 otrzymujemy, że macierz $C(w(\rho))$ jest zerowymiarowa, a zatem $m^-(C(w(\rho))) = 0$ oraz $m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(\rho), \rho)) = m^-(B(w(\rho)))$. Przypomnijmy, że $\dim \ker \nabla_q^2 \varphi(w(\rho), \rho) \geq \dim SO(d)(w(\rho))$, na podstawie Lematu 1.2.4. Ponadto $\dim SO(d)(w(\rho)) = \dim SO(d)/SO(d)_{w(\rho)} = \dim SO(d)/\{e\} = \dim SO(d)$, patrz Lemat 1.2.1, oraz $\dim SO(d) = \frac{d(d-1)}{2}$.

W poniższym twierdzeniu na podstawie Twierdzenia 2.2.2 oraz powyższego rozumowania formułujemy warunek konieczny na istnienie lokalnej bifurkacji centralnych konfiguracji zagadnienia N ciał.

Twierdzenie 3.2.1. *Przyjmijmy powyższe założenia i oznaczenia. Jeżeli $\rho_0 \in \mathcal{BLF}$, to*

$$\dim \ker \nabla_q^2 \varphi(w(\rho_0), \rho_0) > \begin{cases} 1, & \text{gdy } d = 2 \\ 3, & \text{gdy } d = 3 \end{cases}.$$

Zatem poszukiwanie parametrów spełniających warunek konieczny istnienia lokalnej bifurkacji sprowadza się do obliczania wymiarów jąder macierzy Hessego $\nabla_q^2 \varphi(w(\rho), \rho)$. Do tego celu wykorzystujemy współczynniki wielomianu charakterystycznego tej macierzy zapisane w terminach wartości własnych (patrz [7]), o czym stanowi poniższa uwaga.

Uwaga 3.2.7. Symbolem W_ρ będziemy oznaczać wielomian charakterystyczny hesjanu $\nabla_q^2 \varphi$ liczonego wzdłuż rodziny trywialnej \mathcal{F} , to znaczy w punktach postaci $(w(\rho), \rho)$. Ponadto niech $\{\lambda_1(\rho), \dots, \lambda_{dN}(\rho)\}$ będzie zbiorem wartości własnych (licząc z krotnościami) macierzy $\nabla_q^2 \varphi(w(\rho), \rho)$. Wówczas

$$W_\rho(x) = x^{dN} - a_1(\rho)x^{dN-1} + \dots + (-1)^k a_k(\rho)x^{dN-k} + \dots + (-1)^{dN} a_{dN}(\rho),$$

gdzie $a_k(\rho) = \sum_{\{j_1, \dots, j_k\} \subset \{1, \dots, dN\}} \lambda_{j_1}(\rho) \cdots \lambda_{j_k}(\rho)$. Stąd $a_1(\rho) = \text{trace}(\nabla_q^2 \varphi(w(\rho), \rho))$ i $a_{dN}(\rho) = \det(\nabla_q^2 \varphi(w(\rho), \rho))$, a ponadto zachodzi, że $\dim \ker \nabla_q^2 \varphi(w(\rho), \rho) = k$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{dN}(\rho) = \dots = a_{dN-k+1}(\rho) = 0$ i $a_{dN-k}(\rho) \neq 0$. Jeżeli $\dim \ker \nabla_q^2 \varphi(w(\rho), \rho) = k$, to współczynnik $a_{dN-k}(\rho)$ jest iloczynem niezerowych wartości własnych hesjanu $\nabla_q^2 \varphi(w(\rho), \rho)$.

Na podstawie powyższej uwagi wnioskujemy, że jedynymi parametrami spełniającymi warunki konieczny istnienia lokalnej bifurkacji, dany Twierdzeniem 3.2.1, są parametry będące rozwiązaniami równania $a_{2N-1}(\rho) = 0$ w przypadku planarnym oraz równania $a_{3N-3}(\rho) = 0$ w sytuacji przestrzennej.

Biorąc pod uwagę Twierdzenia 2.3.3, 2.4.5 oraz 2.4.6 sformułujemy teraz pewne warunki dostateczne na istnienie lokalnych i globalnych bifurkacji centralnych konfiguracji zagadnienia N ciał.

Twierdzenie 3.2.2. *Ustalmy parametry $\rho^\pm \in \mathbb{R}$ takie, że $\rho^- < \rho^+$ oraz niech spełniony będzie warunek $\dim \ker \nabla_q^2 \varphi(w(\rho^\pm), \rho^\pm) = \dim SO(d)(w(\rho^\pm))$. Wtedy*

- (1) *jeżeli $m^-(B(w(\rho^-))) \neq m^-(B(w(\rho^+)))$, to istnieje parametr lokalnej bifurkacji $\rho_0 \in (\rho^-, \rho^+)$,*
- (2) *jeżeli ponadto $m^-(B(w(\rho^+))) - m^-(B(w(\rho^-)))$ jest liczbą nieparzystą, to ρ_0 jest parametrem globalnej bifurkacji.*

Uwaga 3.2.8. W istocie problem badania istnienia bifurkacji centralnych konfiguracji został sprowadzony do obliczania odpowiednich indeksów Morse'a macierzy Hessego $\nabla_q^2 \varphi(w(\rho), \rho)$. W tym celu będziemy obliczać wartości własne tej macierzy lub korzystać z reguły znaków Kartezjusza (patrz [21]) dla wielomianu charakterystycznego W_ρ . Reguła ta stwierdza, iż liczba dodatnich rzeczywistych pierwiastków (z krotnościami) wielomianu jednej zmiennej o współczynnikach rzeczywistych uporządkowanego według malejących potęg zmiennej jest albo równa liczbie zmian znaków między kolejnymi niezerowymi współczynnikami wielomianu albo mniejsza od niej o krotność liczby 2. W szczególności liczbę ujemnych pierwiastków tego wielomianu można oszacować rozpatrując wielomian o tych samych współczynnikach i zmiennej $-x$. Symbolami $n_+(\rho)$ oraz $n_-(\rho)$ będziemy oznaczać liczbę zmian znaków między kolejnymi niezerowymi współczynnikami wielomianu, odpowiednio, $W_\rho(x)$ oraz $W_\rho(-x)$. Wówczas $m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(\rho), \rho)) = n_-(\rho)$, o ile $n_+(\rho) + n_-(\rho) = dN - \dim \ker \nabla_q^2 \varphi(w(\rho), \rho)$.

Uwaga 3.2.9. Niech $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \Omega$ oraz $m : \mathbb{R}^2 \rightarrow (0, +\infty)^N$ będą odwzorowaniami ciągłymi takimi, że $\nabla_q \hat{\varphi}(w(\rho_1, \rho_2), m(\rho_1, \rho_2)) = 0$. Zdefiniujmy potencjał $\varphi : \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem $\varphi(q, (\rho_1, \rho_2)) = \hat{\varphi}(q, m(\rho_1, \rho_2))$. Wówczas

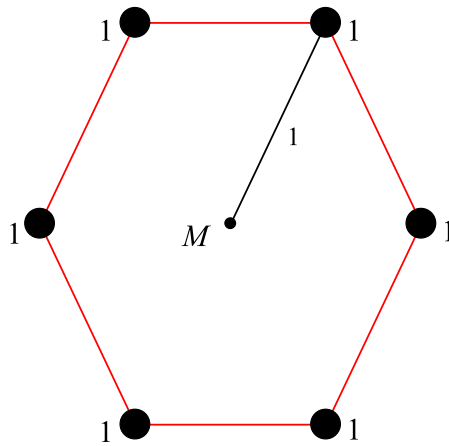
$$\mathcal{F} = \bigcup_{(\rho_1, \rho_2) \in \mathbb{R}^2} SO(d)(w(\rho_1, \rho_2)) \times \{(\rho_1, \rho_2)\} \subset (\nabla_q \varphi)^{-1}(\{0\}).$$

W przypadku dwuparametrowej rodziny trywialnej \mathcal{F} uzyskujemy analogiczne rezultaty jak w Twierdzeniach 3.2.1 i 3.2.2. Rzeczywiście, dla każdych dwóch punktów (ρ_1^-, ρ_2^-) oraz (ρ_1^+, ρ_2^+) z przestrzeni parametrów możemy wybrać jednoparametrową drogę je łączącą, to znaczy odcinek między nimi, oraz zastosować powyższe twierdzenia.

3.3 Planarne niesymetryczne rodziny centralnych konfiguracji

Celem niniejszego podrozdziału jest zilustrowanie zastosowań Twierdzeń 3.2.1 i 3.2.2, dostarczających warunki konieczne i dostateczne na istnienie lokalnej i globalnej bifurkacji, w konkretnych zagadnieniach mechaniki nieba. Rozważamy pewne znane rodziny planarnych centralnych konfiguracji i dowodzimy istnienie pewnych nowych rodzin z nich bifurkujących. Zauważmy, że rodziny trywialne badane w niniejszej rozprawie są wysoce symetryczne. Nie mamy informacji dotyczących kształtu nowych rodzin, natomiast dowodzimy, iż nie są one tego samego typu co rodziny trywialne. Innymi słowy rodziny, które bifurkują z rodzin trywialnych są lokalnie mniej regularne.

3.3.1 Planarna rodzina sześciokąta foremnego z dodatkowym ciałem w środku masy



Rysunek 3.3.1: Sześć ciał usytuowanych w wierzchołkach sześciokąta foremnego z dodatkowym ciałem w środku masy. Konfiguracja z masami: $1, 1, 1, 1, 1, 1, 0.4$.

W 1976 roku Palmore w artykule [65] oraz w 1988 roku Meyer i Schmidt w artykule [57] badali rodzinę planarnych centralnych konfiguracji problemu siedmiu ciał. Konfiguracje te składają się z sześciu ciał o masach jednostkowych umieszczonych w wierzchołkach sześciokąta foremnego oraz dodatkowego ciała o dowolnej masie usytuowanego w centroidzie (patrz Rysunek 3.3.1).

Niech zatem $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m_6 = 1$ oraz $m_7 = M > 0$. Zdefiniujemy odwzorowanie $w : (0, +\infty) \rightarrow \Omega$ formułą

$$\begin{aligned} w(M) &= \left(\Phi\left(\frac{2\pi}{6}0\right)(1,0), \Phi\left(\frac{2\pi}{6}1\right)(1,0), \dots, \Phi\left(\frac{2\pi}{6}5\right)(1,0), 0,0 \right) \\ &= \left(1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}, -1, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}, 0, 0 \right) \end{aligned}$$

oraz odwzorowanie $m : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)^7$ jak następuje $m(M) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, M)$. Wówczas

$$\mathcal{F} = \bigcup_{M \in (0, +\infty)} SO(2)(w(M)) \times \{M\} \subset \Omega \times \mathbb{R} \quad (3.3.8)$$

jest rodziną trywialną planarnych centralnych konfiguracji.

Przypomnijmy, że w Twierdzeniu 3.2.2, dającym warunki dostateczne na istnienie parametrów bifurkacji, istotne są zmiany indeksów Morse'a odpowiedniej macierzy Hessego. Indeksy te obliczamy w poniższym lemacie.

Lemat 3.3.3. *Polóżmy $M_1^* = \frac{7}{12} - \frac{1}{3}\sqrt{3}$ oraz $M_2^* = \frac{1535}{138} + \frac{1559}{276}\sqrt{3}$. Przy powyższych założeniach otrzymujemy, że*

$$\dim \ker \nabla_q^2 \varphi(w(M), M) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } M \in (0, M_1^*) \\ 2, & \text{gdy } M = M_1^* \\ 1, & \text{gdy } (M_1^*, M_2^*) \\ 3, & \text{gdy } M = M_2^* \\ 1, & \text{gdy } M \in (M_2^*, +\infty) \end{cases}$$

oraz

$$m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(M), M)) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } M \in (0, M_1^*) \\ 0, & \text{gdy } [M_1^*, M_2^*] \\ 2, & \text{gdy } M \in (M_2^*, +\infty) \end{cases}.$$

Dowód. Dla dowodu obliczymy najpierw wielomian charakterystyczny W_M macierzy Hessego $\nabla_q^2 \varphi(w(M), M)$. Wówczas dla każdego parametru $M > 0$ mamy, że $a_{14}(M) = 0$,

$$a_{13}(M) = -\frac{29(19295\sqrt{3}-36602)}{16^6 3^4 445630658} (7788M - 309 + 1168\sqrt{3})^2 M^2 (12M + 15 + 4\sqrt{3})^3 (12M - 7 + 4\sqrt{3}) (276M - 3070 - 1559\sqrt{3})^2,$$

$$a_{12}(M) = -\frac{1}{2826862455945166848} (-20471 + 3690\sqrt{3}) (63573320448M^5 - 30639667392M^4 + 132050672064\sqrt{3}M^4 + 1090623417552M^3 + 86846615280\sqrt{3}M^3 - 78448832556M^2 + 475100908908\sqrt{3}M^2 + 59896064394M - 2345357309M\sqrt{3} + 9215029386 - 5434252116\sqrt{3}) (-276M + 3070 + 1559\sqrt{3}) (7788M - 309 + 1168\sqrt{3}) M (12M + 15 + 4\sqrt{3})^2$$

oraz

$$\begin{aligned}
a_{11}(M) = & \frac{1}{719160199524384768} (26577 + 48500\sqrt{3}) (75848927293587456M^9 + 443424569043382272M^8 \\
& + 162327301196414976\sqrt{3}M^8 + 2922706023696165888M^7 + 1805850998657390592\sqrt{3}M^7 + 12749910387505484544M^6 \\
& + 6265679555667432960\sqrt{3}M^6 + 32463329211123665472M^5 + 23506155589796464896\sqrt{3}M^5 + 41990793763506018192M^4 \\
& + 19954404434200176192\sqrt{3}M^4 + 13505929571820403860M^3 + 8056553989920883416\sqrt{3}M^3 + 1409539041366574965M^2 \\
& + 1063249910934785782\sqrt{3}M^2 + 63873462538520748M + 16328879204450208M\sqrt{3} + 978341528841444 \\
& - 647761397518818\sqrt{3}) (12M + 15 + 4\sqrt{3}),
\end{aligned}$$

a zatem z Uwagi 3.2.7 otrzymujemy pierwszą część tezy. Dla dowodu drugiej wystarczy obliczyć wartości własne macierzy Hessego $\nabla_q^2\varphi(w(M), M)$, co kończy dowód. \square

W poniższym twierdzeniu znajdujemy nowe planarne centralne konfiguracje w pobliżu rodziny sześciokąta foremego z dodatkowym ciałem. Ponadto pokazujemy także istnienie spójnych zbiorów centralnych konfiguracji bifurkujących z rodziny trywialnej (3.3.8).

Twierdzenie 3.3.3. *Dla rozważanej rodziny (3.3.8) zachodzi zjawisko bifurkacji. Dokładniej, z $SO(2)$ -orbity \mathcal{F}_M następuje lokalna bifurkacja wtedy i tylko wtedy, gdy $M = M_1^*$ lub $M = M_2^*$. Ponadto parametr M_1^* jest parametrem globalnej bifurkacji.*

Dowód. Zauważmy najpierw, że warunek konieczny istnienia lokalnej bifurkacji, dany Twierdzeniem 3.2.1, jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $M = M_1^*$ lub $M = M_2^*$, patrz Lemat 3.3.3. Ponadto dla dostatecznie małej liczby $\varepsilon > 0$ mamy, że

$$\begin{aligned}
m^-(\nabla_q^2\varphi(w(M_1^* + \varepsilon), M_1^* + \varepsilon), M_1^* + \varepsilon) - m^-(\nabla_q^2\varphi(w(M_1^* - \varepsilon), M_1^* - \varepsilon), M_1^* - \varepsilon) &= -1, \\
m^-(\nabla_q^2\varphi(w(M_2^* + \varepsilon), M_2^* + \varepsilon), M_2^* + \varepsilon) - m^-(\nabla_q^2\varphi(w(M_2^* - \varepsilon), M_2^* - \varepsilon), M_2^* - \varepsilon) &= 2,
\end{aligned}$$

a zatem z Twierdzenia 3.2.2 wnioskujemy, że istnieją dokładnie dwa parametry lokalnej bifurkacji M_1^* i M_2^* . Co więcej, $M_1^* \in \mathcal{GLOB}$, co kończy dowód. \square

Biorąc pod uwagę powyższe twierdzenie udowodniliśmy, że istnieją dokładnie dwa parametry lokalnej bifurkacji dla rodziny (3.3.8). Uzyskane rezultaty zgadzają się z tymi otrzymanymi w artykule [57]. Co więcej, udowodniliśmy, że $M_1^* \in \mathcal{GLOB}$, a zatem otrzymujemy silniejszy wynik dowodząc istnienia spójnych zbiorów centralnych konfiguracji bifurkujących z $\mathcal{F}_{M_1^*}$.

W poniższym twierdzeniu opisujemy własności spójnej składowej $\mathcal{C}(M_1^*)$ bifurkującej z rodziny (3.3.8).

Twierdzenie 3.3.4. *Składowa $\mathcal{C}(M_1^*)$ nie jest zwarta.*

Dowód. Zauważmy najpierw, że istnieją dokładnie dwie wartości parametru M , dla których $SO(2)$ -orbita krytyczna $SO(2)(w(M))$ są zdegenerowane, to znaczy M_1^* i M_2^* , oraz przynajmniej jedna wartość $M \in \mathcal{GLOB}$, to znaczy M_1^* . Ustalmy liczbę $\varepsilon > 0$ taką, że $M_1^* - \varepsilon > 0$. Wówczas indeks bifurkacji dla odcinka $[M_j^* - \varepsilon, M_j^* + \varepsilon]$ ma następującą postać:

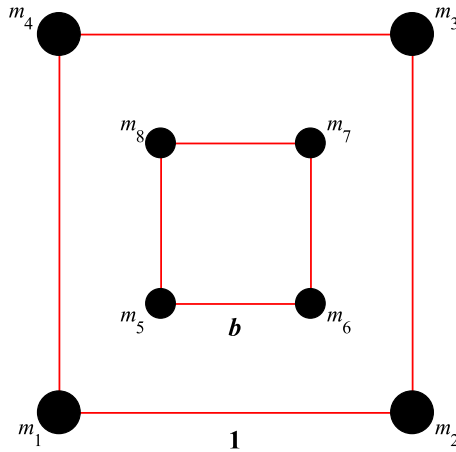
$$\begin{aligned} BIF_{[M_j^* - \varepsilon, M_j^* + \varepsilon]} &= \nabla_G\text{-deg}(\nabla_q\varphi(\cdot, M_j^* + \varepsilon), \Theta^+) - \nabla_G\text{-deg}(\nabla_q\varphi(\cdot, M_j^* - \varepsilon), \Theta^-) = \\ &= (-1)^{m^-(B(w(M_j^* + \varepsilon)))} \chi_{SO(2)}(SO(2)/\{e\}^+) - (-1)^{m^-(B(w(M_j^* - \varepsilon)))} \chi_{SO(2)}(SO(2)/\{e\}^+) = \\ &= ((-1)^{m^-(B(w(M_j^* + \varepsilon)))} - (-1)^{m^-(B(w(M_j^* - \varepsilon)))}) \chi_{SO(2)}(SO(2)/\{e\}^+) \in U(SO(2)), \end{aligned}$$

a zatem

$$\begin{aligned} BIF_{[M_1^* - \varepsilon, M_1^* + \varepsilon]} &= ((-1)^0 - (-1)^1) \chi_{SO(2)}(SO(2)/\{e\}^+) = \\ &= 2\chi_{SO(2)}(SO(2)/\{e\}^+) \neq \mathbf{0} \in U(SO(2)). \end{aligned}$$

W analogiczny sposób otrzymujemy, że $BIF_{[M_2^* - \varepsilon, M_2^* + \varepsilon]} = \mathbf{0}$. Biorąc pod uwagę Twierdzenie 2.4.7 wnioskujemy, że składowa $\mathcal{C}([M_1^* - \varepsilon, M_1^* + \varepsilon])$ nie jest zwarta, a zatem $\mathcal{C}(M_1^*)$ nie jest zwarta, co kończy dowód. \square

3.3.2 Planarna rodzina dwóch zagnieżdżonych kwadratów



Rysunek 3.3.2: Osiem ciał usytuowanych w wierzchołkach dwóch zagnieżdżonych kwadratów. Konfiguracja z masami: 1.4, 1.4, 1.4, 1.4, 1, 1, 1, 1.

W 2013 roku Fernandes, Mello i Silva w [27] badali planarne centralne konfiguracje problemu ośmiu ciał składające się z czterech ciał o równych masach usytuowanych w wierzchołkach kwadratu o boku równym 1 oraz pozostałych czterech ciałach, również o równych masach, usytuowanych w wierzchołkach mniejszego kwadratu, którego środek symetrii pokrywa się ze środkiem pierwszego kwadratu, a bok jest parametryzowany przez $0 < b < 0.53177\dots$ (patrz Rysunek 3.3.2). Symbolem r będziemy oznaczać promień okręgu opisanego na wewnętrznym kwadracie. Wówczas $0 < r < r_0 = 0.37602\dots$ będzie traktowany jako parametr. Niech $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = M_r = -\frac{B(r)}{A(r)}$ oraz $m_5 = m_6 = m_7 = m_8 = 1$, gdzie

$$\begin{aligned} A(r) &= (R_{1,2} - R_{1,5})\Delta_{1,5,2} + (R_{1,3} - R_{1,6})\Delta_{1,6,3} + (R_{1,7} - R_{1,2})\Delta_{1,7,2}, \\ B(r) &= (R_{6,7} - R_{1,5})\Delta_{1,5,6} + (R_{1,7} - R_{6,7})\Delta_{5,6,3} + (R_{1,6} - R_{5,7})\Delta_{1,6,8}, \end{aligned}$$

$q_i = (q_{i1}, q_{i2})$, $R_{i,j} = 1/|q_i - q_j|^3$ i $\Delta_{i,j,k} = \det \begin{bmatrix} q_{i1} - q_{j1} & q_{i1} - q_{k1} \\ q_{i2} - q_{j2} & q_{i2} - q_{k2} \end{bmatrix}$ dla $1 \leq i, j, k \leq 8$. Można pokazać, że dla każdego $0 < r < r_0$ zachodzi $A(r) > 0$ oraz $B(r) < 0$, a ponadto funkcje A i B są rosnące. Zdefiniujmy teraz odwzorowanie $w : (0, r_0) \rightarrow \Omega$ formułą

$$w(r) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}r, -\frac{\sqrt{2}}{2}r, \frac{\sqrt{2}}{2}r, -\frac{\sqrt{2}}{2}r, \frac{\sqrt{2}}{2}r, \frac{\sqrt{2}}{2}r, -\frac{\sqrt{2}}{2}r, \frac{\sqrt{2}}{2}r \right)$$

oraz odwzorowanie $m : (0, r_0) \rightarrow (0, +\infty)^8$ jak następuje $m(r) = (M_r, M_r, M_r, M_r, 1, 1, 1, 1)$, a zatem

$$\mathcal{F} = \bigcup_{r \in (0, r_0)} SO(2)(w(r)) \times \{r\} \subset \Omega \times \mathbb{R} \quad (3.3.9)$$

jest rodziną trywialną planarnych centralnych konfiguracji.

W poniższym lemacie obliczamy indeksy Morse'a macierzy $\nabla_q^2 \varphi(w(r), r)$ dla pewnych wartości parametru r .

Lemat 3.3.4. *Połóżmy $r_1 = \frac{\sqrt{2}}{7}$, $r_2 = \frac{\sqrt{2}}{6}$ oraz $r_3 = \frac{\sqrt{2}}{5}$. Wówczas dla $i = 1, 2, 3$ otrzymujemy, że $\dim \ker \nabla_q^2 \varphi(w(r_i), r_i) = \dim SO(2)(w(r_i)) = 1$ oraz indeks Morse'a $\nabla_q^2 \varphi(w(\cdot), \cdot)$ w r_i wynosi*

$$m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(r_i), r_i)) = \begin{cases} 4, & \text{gdy } i = 3 \\ 3, & \text{gdy } i = 2 \\ 1, & \text{gdy } i = 1 \end{cases} .$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że współczynniki wielomianu charakterystycznego W_{r_1} macierzy $\nabla_q^2 \varphi(w(r_1), r_1)$ spełniają następujące warunki: $a_{16}(r_1) = 0$ oraz $a_{15}(r_1) \neq 0$, a zatem $\dim \ker \nabla_q^2 \varphi(w(r_1), r_1) = 1$, patrz Uwaga 3.2.7. Ponadto $n_+(r_1) = 14$ oraz $n_-(r_1) = 1$, co

dowodzi, że $m^-(\nabla_q^2\varphi(w(r_1), r_1)) = n_-(r_1)$, na podstawie Uwagi 3.2.8. W analogiczny sposób pokazujemy tezę dla r_2 oraz r_3 . \square

W poniższym twierdzeniu dowodzimy istnienia nowych planarnych centralnych konfiguracji, które bifurkują z rodziny (3.3.9).

Twierdzenie 3.3.5. *Dla rodziny (3.3.9) zachodzi zjawisko bifurkacji. Dokładniej,*

- (1) $(r_1, r_2) \cap \mathcal{BLF} \neq \emptyset$, to znaczy z segmentu $\mathcal{F}_{(r_1, r_2)}$ następuje lokalna bifurkacja centralnych konfiguracji,
- (2) $(r_2, r_3) \cap \mathcal{GLOB} \neq \emptyset$, to znaczy z segmentu $\mathcal{F}_{(r_2, r_3)}$ bifurkuje spójny zbiór centralnych konfiguracji.

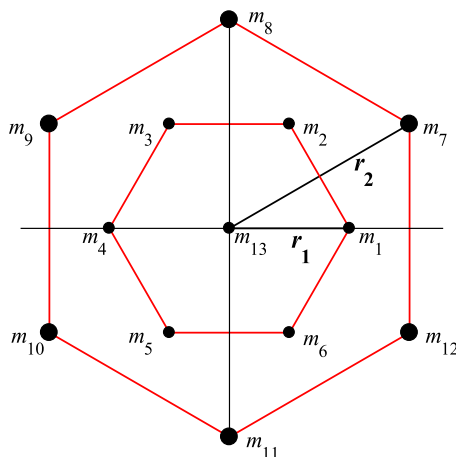
Ponadto centralne konfiguracje bifurkujące z segmentów $\mathcal{F}_{(r_1, r_2)}$ oraz $\mathcal{F}_{(r_2, r_3)}$ mają inne symetrie niż rodzina (3.3.9).

Dowód. Stosując Twierdzenie 3.2.2 oraz Lemat 3.3.4 wnioskujemy, że $(r_1, r_2) \cap \mathcal{BLF} \neq \emptyset$ oraz $(r_2, r_3) \cap \mathcal{BLF} \neq \emptyset$, ponieważ $m^-(\nabla_q^2\varphi(w(r_1), r_1)) \neq m^-(\nabla_q^2\varphi(w(r_2), r_2))$ i $m^-(\nabla_q^2\varphi(w(r_2), r_2)) \neq m^-(\nabla_q^2\varphi(w(r_3), r_3))$. Co więcej, otrzymujemy, że w przedziale (r_2, r_3) istnieje parametr globalnej bifurkacji, ze względu na różną parzystość liczb $m^-(\nabla_q^2\varphi(w(r_2), r_2))$ oraz $m^-(\nabla_q^2\varphi(w(r_3), r_3))$. Udowodnimy teraz, że rodziny bifurkujące z rodziny (3.3.9) posiadają inne symetrie. W tym celu zauważmy, że możemy badać podzbiór przestrzeni konfiguracji Ω , który jest niezmienniczy ze względu na potok gradientowy, to znaczy zbiór centralnych konfiguracji typu dwóch zagnieżdżonych kwadratów

$$(q_1, \dots, q_8, m_1, \dots, m_8) = (w(r), M, M, M, M, m, m, m, m).$$

Dla skrócenia zapisu zamiast $(w(r), M, M, M, M, m, m, m, m)$ będziemy pisać (r, M, m) . Badanie centralnych konfiguracji w tym podzbiórze sprowadza się do studiowania zer funkcji $F : (0, r_0) \times (0, +\infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej formułą $F(r, M, m) = MA(r) + mB(r)$. Dla każdego $(r, m) \in (0, r_0) \times (0, +\infty)$ oraz rodziny postaci $(r, M(r, m), m)$ mamy, że $F(r, M(r, m), m) = 0$ oraz $F'_r(r, M(r, m), m) = M(r, m)A'(r) + mB'(r) > 0$, gdzie $M(r, m) = -m\frac{B(r)}{A(r)}$. Stąd na podstawie twierdzenia o funkcji uwikłanej nie ma bifurkacji centralnych konfiguracji typu dwóch zagnieżdżonych kwadratów z rodziny $(r, -m\frac{B(r)}{A(r)}, m)$. Biorąc pod uwagę powyższe wnioskujemy, że rodziny bifurkujące z rodziny (3.3.9) nie są typu dwóch zagnieżdżonych kwadratów, co kończy dowód. \square

3.3.3 Planarna rodzina rozety dla trzynastu ciał



Rysunek 3.3.3: Trzynaście ciał w konfiguracji rozety. Konfiguracja z masami: 0.4, 0.4, 0.4, 0.4, 0.4, 0.4, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.4.

Rozważmy konfiguracje rozety składające się z n ciał o masach m_1 umieszczonych w wierzchołkach n -kąta foremnego, n ciał o masach m_2 usytuowanych w wierzchołkach kolejnego n -kąta foremnego, gdzie drugi wielokąt jest obrócony względem pierwszego o kąt $\frac{\pi}{n}$, oraz dodatkowego ciała o masie m_0 leżącego w ich wspólnym środku symetrii (patrz [46, 79]). Autorami badającymi tego typu konfiguracje byli między innymi Sekiguchi w 2004 roku oraz Lei i Santoprete w 2006 roku.

Będziemy dowodzić istnienia bifurkacji dla 13 ciał, rozmieszczonych w konfiguracji rozety (patrz Rysunek 3.3.3), o następujących położeniach:

$$\hat{q}_{k+1} = \Phi\left(\frac{2\pi k}{6}\right)(r_1, 0), \quad \hat{q}_{7+k} = \Phi\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{6}\right)(r_2, 0) \text{ dla } k = 0, \dots, 5 \text{ i } \hat{q}_{13} = (0, 0).$$

Położenia ciał opisujemy za pomocą współrzędnych r_1 i r_2 , które zamieniamy na współrzędne biegunowe, to znaczy $r_1 = r \cos \theta$, $r_2 = r \sin \theta$, gdzie $(r, \theta) \in (0, +\infty) \times (0, \frac{\pi}{2})$ (patrz [46]). Niech $\theta = \frac{\pi}{3}$, $r = 1$ oraz zdefiniujmy $w : (0, +\infty)^2 \rightarrow \Omega$ formułą $w(m_0, m_1) = (\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_{13})$, gdzie masy m_0 i m_1 traktujemy jako parametry. Dla każdego parametru $(m_0, m_1) \in (0, +\infty)^2$ konfiguracja $\hat{q} = (\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_{13})$ jest centralna, o ile

$$m_2 = m_2(m_0, m_1) = \frac{1}{-1862\sqrt{3} - 7203 + 810\sqrt{7} + 90\sqrt{7}\sqrt{3}} (-7644m_0 + 6(81\sqrt{7} - 441\sqrt{3} + 9\sqrt{3}\sqrt{7} - 147)m_1).$$

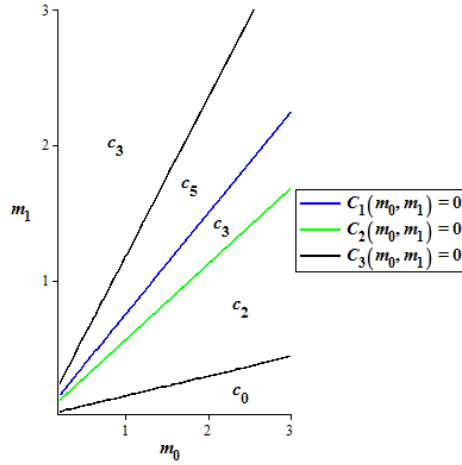
W związku z powyższym zdefiniujemy $m : (0, +\infty)^2 \rightarrow (0, +\infty)^{13}$ wzorem

$$m(m_0, m_1) = (m_1, m_1, m_1, m_1, m_1, m_1, m_2(m_0, m_1), m_2(m_0, m_1), m_2(m_0, m_1), m_2(m_0, m_1), m_2(m_0, m_1), m_2(m_0, m_1), m_0)$$

oraz niech

$$\mathcal{F} = \bigcup_{(m_0, m_1) \in (0, +\infty)^2} SO(2)(w(m_0, m_1)) \times \{(m_0, m_1)\} \subset \Omega \times \mathbb{R}^2. \quad (3.3.10)$$

Wówczas \mathcal{F} jest rodziną centralnych konfiguracji oraz dalej formułujemy pomocniczy lemat, w którym obliczamy odpowiednie indeksy Morse'a odpowiadające rodzinie (3.3.10).



Rysunek 3.3.4: Zbiór zer współczynnika a_{25} oraz obszary c_3 , c_5 , c_2 i c_0 , dla których $a_{25} \neq 0$.

Lemat 3.3.5. Przy powyższych założeniach indeks Morse'a $\nabla_q^2 \varphi$ wzdłuż \mathcal{F} wynosi

$$m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(m_0, m_1), (m_0, m_1))) = \begin{cases} 5, & \text{gdy } (m_0, m_1) \in c_5 \\ 3, & \text{gdy } (m_0, m_1) \in c_3 \\ 2, & \text{gdy } (m_0, m_1) \in c_2 \\ 0, & \text{gdy } (m_0, m_1) \in c_0 \end{cases}.$$

Ponadto dla każdego $(m_0, m_1) \in c_0 \cup c_2 \cup c_3 \cup c_5$ mamy, że $\dim \ker \nabla_q^2 \varphi(w(m_0, m_1), (m_0, m_1)) = \dim SO(2)(w(m_0, m_1)) = 1$.

Dowód. Przypomnijmy najpierw, że przez $W_{(m_0, m_1)}$ rozumiemy wielomian charakterystyczny macierzy Hessego $\nabla_q^2 \varphi(w(m_0, m_1), (m_0, m_1))$. Wówczas otrzymujemy, że $a_{26}(m_0, m_1) = 0$ oraz $a_{25}(m_0, m_1) = C_0(m_0, m_1)C_1^2(m_0, m_1)C_2(m_0, m_1)C_3^2(m_0, m_1)$, gdzie wielomiany C_1 , C_2 i C_3 mają następującą postać:

$$\begin{aligned}
C_1(m_0, m_1) = & m_0^4 + \left(-\frac{3310702281992124653675944857495904870459}{202744123915751308179921213526092099588} \sqrt{3}\sqrt{7} - \frac{42944038791496715789326664554784617183153}{473069622470086385753149498227548232372} \sqrt{3} \right. \\
& + \frac{313235908939878007566989809990530742543705}{2128813301115388735889172742023967045674} + \frac{18541846472033948121101498207105293874267}{608232371747253924539763640578276298764} \sqrt{7} \left. \right) m_0^3 m_1 \\
& + \left(\frac{1028056140134882183787519683378668423532190611}{20340811092157539371421045550039005121415070} \sqrt{3}\sqrt{7} + \frac{1015573811217444020499808797472017749601274781}{6641897499480012855974218955114777182502880} \sqrt{3} \right. \\
& - \frac{302683925568879571233683188748053679338816357}{948842499925716122282031279302111026071840} - \frac{214130432931861968755138133549421556428206401}{2905830156022505624488720792862715017345010} \sqrt{7} \left. \right) m_0^2 m_1^2 \\
& + \left(-\frac{922883967013517734449321835663996662391575011}{24107627961075602217980498429675857921677120} \sqrt{3}\sqrt{7} - \frac{84639224235432418595822468637907030318677497759}{1012520374365175293155180934046386032710439040} \sqrt{3} \right. \\
& + \frac{27676439258367266375424308124038029773710718761}{3037561123095525879465542802139158098131317120} + \frac{18221926096661182331532464781919543394696975929}{216968651649680419961824485867082721295094080} \sqrt{7} \left. \right) m_0 m_1^3 \\
& + \left(\frac{5546214528989373316445070838140840399452014877}{311544730573900090201594133552734163910904320} + \frac{478108577076266779863471376651380756122162203}{44506390081985727171656304793247737701557760} \sqrt{3} \right. \\
& + \frac{958112429870049527114870872495206519423016364813}{99226996687787178729207731536545831205623025920} \sqrt{7}\sqrt{3} - \frac{2249815934202036056626029341681374447236429260243}{99226996687787178729207731536545831205623025920} \sqrt{7} \left. \right) m_1^4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2(m_0, m_1) = & m_0^2 + \left(\frac{17583917197556530166}{1978460763950630505} + \frac{301416282741248421}{94212417330982405} \sqrt{7} - \frac{175048756576383191}{94212417330982405} \sqrt{3}\sqrt{7} \right. \\
& - \frac{45400055387364903493}{7913843055802522020} \sqrt{3} \left. \right) m_1 m_0 + \frac{21893183821513585513}{10551790741070029360} \sqrt{3} - \frac{14822323290211220209}{2637947685267507340} - \frac{109010615479935350057}{64629718289053929830} \sqrt{7},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_3(m_0, m_1) = & m_0^4 + \left(-\frac{3836252600497227150458871067953788107665989}{1137430877467231908801221691122448322560} + \frac{19685305511148074478742776253283714935638557}{10236877897205087179210995220102034903040} \sqrt{3} \right. \\
& + \frac{371716559685069649500622672295585161910918459}{501607016963049271781338765784999710248960} \sqrt{7}\sqrt{3} - \frac{212934315118487372959687989769392898744874863}{167202338987683090593779588594999903416320} \sqrt{7} \left. \right) m_1^4 \\
& + \left(-\frac{1232065851340531598443691242333859234434019}{1096808346129116483486892345010932311040} \sqrt{3}\sqrt{7} - \frac{4495431666524552658103331880599707819911667}{1535531684580763076881649283015305235456} \sqrt{3} \right. \\
& + \frac{1435784746259246724280012765028004210303289}{284357719366807977200305422780612080640} + \frac{142443047250749121627357866138164904621279}{73120556408607765565792823000728820736} \sqrt{7} \left. \right) m_0 m_1^3 \\
& + \left(-\frac{2148761684329308667355609461136314995829}{274202086532279120871723086252733077760} \sqrt{3}\sqrt{7} - \frac{119229567379557609142520126365125909949}{559596094963834940545369107198634240} \sqrt{3} \right. \\
& + \frac{103339903152717135287039888151592044637}{1865320316546116468515123035732878080} + \frac{1080292380390952775587633069993089670171}{91400695510759706957241028750911025920} \sqrt{7} \left. \right) m_0^2 m_1^2 \\
& + \left(\frac{41371074275208645618120795614385517}{5124506364137682605810777570694720} \sqrt{3}\sqrt{7} + \frac{655225807860690970465550932193994307}{35871544548963778240675442994863040} \sqrt{3} \right. \\
& - \frac{1008418635485209067180141902146251089}{35871544548963778240675442994863040} - \frac{72174175217779412654154999570427273}{5124506364137682605810777570694720} \sqrt{7} \left. \right) m_0^3 m_1.
\end{aligned}$$

Ponadto wielomiany C_1 , C_2 i C_3 są równe 0 na pewnych prostych (patrz Rysunek 3.3.4) oraz dla każdego $(m_0, m_1) \in (0, +\infty)^2$ zachodzi, że $C_0(m_0, m_1) \neq 0$. Wówczas dla każdego $(m_0, m_1) \in c_0 \cup c_2 \cup c_3 \cup c_5$ otrzymujemy, że $\dim \ker \nabla_q^2 \varphi(w(m_0, m_1), (m_0, m_1)) = 1$, a zatem indeksy Morse'a macierzy Hessego są stałe na obszarach c_i dla $i = 0, 2, 3, 5$. Dlatego wystarczy obliczyć $m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(1, m_1), (1, m_1)))$ dla odpowiednich parametrów $m_1 \in (0, +\infty)$ korzystając z Uwagi 3.2.8, co kończy dowód. \square

W poniższym twierdzeniu dowodzimy istnienia nowych centralnych konfiguracji bifurkujących z rodziny (3.3.10).

Twierdzenie 3.3.6. *Przy powyższych założeniach z rodziny (3.3.10) zachodzą następujące zjawiska bifurkacji:*

(1) $(m_0, m_1) \in \mathcal{BLF}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C_1(m_0, m_1) = 0$ lub $C_2(m_0, m_1) = 0$ lub $C_3(m_0, m_1) = 0$,

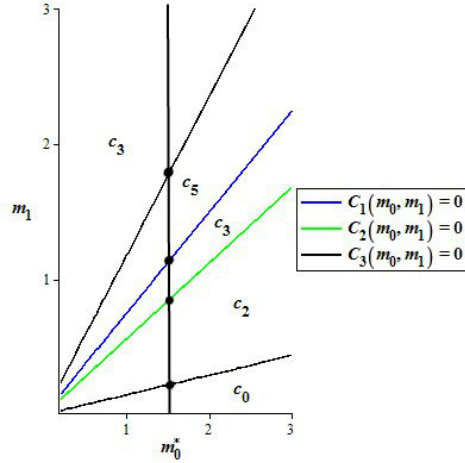
(2) jeżeli $C_2(m_0, m_1) = 0$, to $(m_0, m_1) \in \mathcal{GLOB}$.

Ponadto z rodziny (3.3.10) następują bifurkacje centralnych konfiguracji posiadających inne symetrie.

Dowód. Zauważmy najpierw, że $\dim \ker \nabla_q^2 \varphi(w(m_0, m_1), (m_0, m_1)) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C_i(m_0, m_1) \neq 0$ dla każdego $i \in \{1, 2, 3\}$, na podstawie Lematu 3.3.5. Z Twierdzenia 3.2.2 oraz Uwagi 3.2.9, ponieważ liczby $m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(m_0, m_1), (m_0, m_1)))$ są różne w każdym z obszarów c_0 , c_2 , c_3 oraz c_5 otrzymujemy, że $(m_0, m_1) \in \mathcal{BLF}$, o ile $C_i(m_0, m_1) = 0$ dla pewnego $i \in \{1, 2, 3\}$. Zauważając ponadto, że warunek konieczny istnienia bifurkacji jest spełniony dokładnie w tych punktach, dowodzimy punktu (1) tezy. Co więcej, w obszarach c_3 oraz c_2 liczby $m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(m_0, m_1), (m_0, m_1)))$ mają różną parzystość, dlatego $(m_0, m_1) \in \mathcal{GLOB}$ dla $(m_0, m_1) \in (0, +\infty)^2$ takiego, że $C_2(m_0, m_1) = 0$. Udowodnimy teraz, że rodziny bifurkujące z rodziny (3.3.10) posiadają inne symetrie. W tym celu zauważmy, że możemy badać podzbiór przestrzeni konfiguracji Ω , który jest niezmienniczy ze względu na potok gradientowy, to znaczy zbiór centralnych konfiguracji typu rozety

$$(q_1, \dots, q_{13}, m_1, \dots, m_{13}) = (\tilde{w}(r_1, r_2), m_1, m_1, m_1, m_1, m_1, m_1, m_2, m_2, m_2, m_2, m_2, m_2, m_2, m_0),$$

gdzie $\tilde{w}(r_1, r_2) = (\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_{13})$, dla skrócenia zapisu będziemy pisać $(r_1, r_2, m_1, m_2, m_0)$. Badanie centralnych konfiguracji w tym podzbiórze sprowadza się do studiowania zer funkcji $F : (0, +\infty)^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x, \varepsilon, \mu)$ danej formułą (6) w [46], gdzie $x = \frac{r_2}{r_1}$, $\varepsilon = \frac{m_2}{m_1}$ oraz $\mu = \frac{m_0}{m_1}$. Dla rodziny trywialnej (3.3.10) dla każdego $m_0, m_1 \in (0, +\infty)$ otrzymujemy, że $F\left(\sqrt{3}, \frac{m_2(m_0, m_1)}{m_1}, \frac{m_0}{m_1}\right) = 0$ oraz $F'_x\left(\sqrt{3}, \frac{m_2(m_0, m_1)}{m_1}, \frac{m_0}{m_1}\right) > 0$, a zatem na podstawie twierdzenia o funkcji uwikłanej nie ma bifurkacji centralnych konfiguracji typu rozety z tej rodziny. Biorąc pod uwagę powyższe uzyskujemy, że rodziny bifurkujące z rodziny (3.3.10) nie są typu rozety, co kończy dowód. \square



Rysunek 3.3.5: Zbiór czterech parametrów lokalnej bifurkacji dla rodziny konfiguracji rozety parametryzowanej masą m_1 .

W poniższym twierdzeniu opisujemy własności spójnego zbioru centralnych konfiguracji bifurkującego z rodziny (3.3.10).

Twierdzenie 3.3.7. *Ustalmy $m_0^* \in (0, +\infty)$ oraz niech masa $m_{1,2}^* \in (0, +\infty)$ będzie taka, że $C_2(m_0^*, m_{1,2}^*) = 0$. Wówczas składowa $\mathcal{C}(m_{1,2}^*)$ nie jest zwarta.*

Dowód. Ustalmy $m_0^* \in (0, +\infty)$. Wówczas $w(m_0^*, \cdot)$ oraz $m(m_0^*, \cdot)$ będziemy traktować jako jednoparametrowe odwzorowania z parametrem m_1 . Zauważmy, że istnieją dokładnie cztery wartości parametru m_1 , oznaczmy je symbolami $m_{1,1}^* < m_{1,2}^* < m_{1,3}^* < m_{1,4}^*$, dla których $SO(2)$ -orbity krytyczne $SO(2)(w(m_0^*, m_1))$ są zdegenerowane. Ponadto $(m_0^*, m_{1,2}^*) \in \mathcal{GLOB}$ (patrz Rysunek 3.3.5). Niech liczba $\varepsilon > 0$ będzie taka, że $\varepsilon < m_{1,1}^*$, $(m_0^*, m_{1,j}^* \pm \varepsilon) \notin \mathcal{BIF}$ oraz istnieje dokładnie jedna zdegenerowana $SO(2)$ -orbita krytyczna w przedziale $[m_{1,j}^* - \varepsilon, m_{1,j}^* + \varepsilon]$, to jest $SO(2)(w(m_0^*, m_{1,j}^*))$, dla każdego $j = 1, 2, 3, 4$. Wówczas indeks bifurkacji dla odcinka $[m_{1,j}^* - \varepsilon, m_{1,j}^* + \varepsilon]$ ma następującą postać:

$$\begin{aligned} BIF_{[m_{1,j}^* - \varepsilon, m_{1,j}^* + \varepsilon]} &= \\ &= \nabla_G \text{-deg}(\nabla_q \varphi(\cdot, (m_0^*, m_{1,j}^* + \varepsilon)), \Theta^+) - \nabla_G \text{-deg}(\nabla_q \varphi(\cdot, (m_0^*, m_{1,j}^* - \varepsilon)), \Theta^-) = \\ &= (-1)^{m^-(B(w(m_0^*, m_{1,j}^* + \varepsilon)))} \chi_{SO(2)}(SO(2)/\{e\}^+) - (-1)^{m^-(B(w(m_0^*, m_{1,j}^* - \varepsilon)))} \chi_{SO(2)}(SO(2)/\{e\}^+) = \\ &= ((-1)^{m^-(B(w(m_0^*, m_{1,j}^* + \varepsilon)))} - (-1)^{m^-(B(w(m_0^*, m_{1,j}^* - \varepsilon)))}) \chi_{SO(2)}(SO(2)/\{e\}^+) \in U(SO(2)). \end{aligned}$$

Zatem indeks bifurkacji dla odcinka $[m_{1,2}^* - \varepsilon, m_{1,2}^* + \varepsilon]$ wynosi

$$\begin{aligned} BIF_{[m_{1,2}^* - \varepsilon, m_{1,2}^* + \varepsilon]} &= ((-1)^3 - (-1)^2) \chi_{SO(2)}(SO(2)/\{Id\}^+) = \\ &= -2 \chi_{SO(2)}(SO(2)/\{Id\}^+) \neq \mathbf{0} \in U(SO(2)). \end{aligned}$$

Co więcej, dla $j = 1, 3, 4$ mamy, że $BIF_{[m_{1,j}^* - \varepsilon, m_{1,j}^* + \varepsilon]} = \mathbf{0}$, gdyż liczby $m^-(B(w(m_0^*, m_{1,j}^* \pm \varepsilon)))$ są tej samej parzystości. Z Twierdzenia 2.4.7 wnioskujemy, że składowa $\mathcal{C}([m_{1,2}^* - \varepsilon, m_{1,2}^* + \varepsilon])$ nie jest zwarta, a w szczególności $\mathcal{C}(m_{1,2}^*)$ nie jest zwarta, co kończy dowód. \square

3.4 Przestrzenne niesymetryczne rodziny centralnych konfiguracji

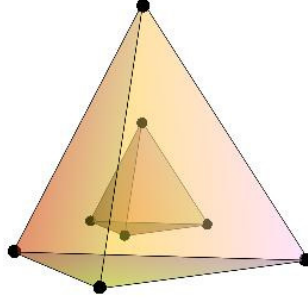
Celem niniejszego podrozdziału jest przedstawienie dalszych zastosowań Twierdzeń 3.2.1 i 3.2.2 w konkretnych zagadnieniach mechaniki nieba. Będziemy rozważać pewne znane rodziny przestrzennych centralnych konfiguracji, aby dalej udowodnić istnienie pewnych nowych, które będą z nich bifurkować. Należy zwrócić uwagę na fakt, iż rozpatrywane konfiguracje ciał są bardzo symetryczne, natomiast rodziny, które bifurkują z rodzin trywialnych mają inne symetrie.

3.4.1 Przestrzenne rodziny dwóch zagnieżdżonych czworościanów foremnych

W 2009 roku Corbera oraz Llibre w artykule [15] badali przestrzenne centralne konfiguracje składające się z ośmiu ciał położonych w wierzchołkach dwóch zagnieżdżonych czworościanów foremnych o położeniach, odpowiednio, \hat{q}_i oraz \hat{q}_{4+i} dla $i = 1, \dots, 4$, gdzie masy na każdym czworościanie są równe, na różnych czworościanach natomiast mogą być różne. Z definicji mówimy, że dwa czworościany są zagnieżdżone, o ile mają wspólny środek masy oraz ich wierzchołki spełniają następującą relację: $\hat{q}_{4+i} = \rho \mathcal{R} \hat{q}_i$ dla $i = 1, \dots, 4$. Macierz rotacji

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

jest parametryzowana kątami Eulera (α, β, γ) dla $\alpha \in [0, 2\pi), \beta \in [0, \pi], \gamma \in [0, 2\pi)$ oraz ρ jest pewnym współczynnikiem skalowania. Autorzy w [15] udowodnili, że istnieją dokładnie dwie różne klasy centralnych konfiguracji dwóch zagnieżdżonych czworościanów foremnych. Albo jeden z czworościanów jest obrazem drugiego w jednokładności o środku w środku masy i o skali ρ (Typ I), albo dodatkowo jeden z czworościanów jest obrócony względem drugiego o macierz rotacji z kątami Eulera $(0, \pi, 0)$ (Typ II).



Rysunek 3.4.6: Centralna konfiguracja dwóch zagnieżdżonych czworościanów foremnych Typu I.

Po pierwsze, udowodnimy istnienie bifurkacji z rodziny Typu I (patrz Rysunek 3.4.6) badanej przez powyższych autorów również w 2008 roku (patrz [14]). Będziemy rozpatrywać osiem ciał o następujących położeniach:

$$\hat{q}_1 = \left(0, 0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right), \quad \hat{q}_2 = \left(0, \frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \quad \hat{q}_3 = \left(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \quad \hat{q}_4 = \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right),$$

$$\hat{q}_5 = \rho \hat{q}_1, \quad \hat{q}_6 = \rho \hat{q}_2, \quad \hat{q}_7 = \rho \hat{q}_3, \quad \hat{q}_8 = \rho \hat{q}_4,$$

gdzie ρ jest współczynnikiem skalowania. Niech $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1$ oraz $m_5 = m_6 = m_7 = m_8 = m_I(\rho) = \frac{n(\rho)}{d(\rho)}$ (formuły na $n(\rho)$ i $d(\rho)$ można znaleźć w Twierdzeniu 2.(b) w [15]). Zdefiniujmy $w : (\alpha, +\infty) \rightarrow \Omega$ formułą $w(\rho) = (\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_8)$, gdzie $\rho > \alpha = 1.8899915758\dots$ będziemy traktować jako parametr oraz odwzorowanie $m : (\alpha, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)^8$ jak następuje $m(\rho) = (1, 1, 1, 1, m_I(\rho), m_I(\rho), m_I(\rho), m_I(\rho))$. Wtedy

$$\mathcal{F} = \bigcup_{\rho \in (\alpha, +\infty)} SO(3)(w(\rho)) \times \{\rho\} \subset \Omega \times \mathbb{R} \quad (3.4.11)$$

jest rodziną przestrzennych centralnych konfiguracji.

W poniższym lemacie obliczamy odpowiednie indeksy Morse'a wykorzystywane w dalszym rozumowaniu.

Lemat 3.4.6. *Położmy $\rho_1 = 6$, $\rho_2 = 7$, $\rho_3 = 12$ i $\rho_4 = 13$. Wówczas $\dim \ker \nabla_q^2 \varphi(w(\rho_i), \rho_i) = \dim SO(3)(w(\rho_i)) = 3$ dla każdego $i = 1, \dots, 4$ oraz indeks Morse'a $\nabla_q^2 \varphi(w(\cdot), \cdot)$ w ρ_i wynosi*

$$m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(\rho_i), \rho_i)) = \begin{cases} 8, & \text{gdy } i = 1 \\ 5, & \text{gdy } i = 2, 3 \\ 3, & \text{gdy } i = 4 \end{cases} .$$

Dowód. Dowód przebiega analogicznie jak w Lemacie 3.3.4. Rzeczywiście, zauważmy najpierw, że wielomian charakterystyczny $W_\rho(x) = x^{24} - a_1(\rho)x^{23} + \dots - a_{23}(\rho)x + a_{24}(\rho)$ macierzy Hessego $\nabla_q^2\varphi(w(\rho), \rho)$ spełnia następujące warunki: $a_{24}(\rho) = a_{23}(\rho) = a_{22}(\rho) = 0$ dla każdego $\rho \in (\alpha, +\infty)$ oraz $a_{21}(\rho_i) \neq 0$ dla każdego $i = 1, \dots, 4$, co dowodzi pierwszej części tezy na podstawie Uwagi 3.2.7. Indeksy Morse'a $m^-(\nabla_q^2\varphi(w(\rho_i), \rho_i))$ dla $i = 1, \dots, 4$ obliczamy zgodnie z Uwagą 3.2.8. Dowód przeprowadzimy dla $i = 1$, a zatem rozpatrując wielomiany $W_{\rho_1}(x)$ oraz $W_{\rho_1}(-x)$ mamy, że $n_+(\rho_1) = 13$ oraz $n_-(\rho_1) = 8$. Ponieważ $n_+(\rho_1) + n_-(\rho_1) = 24 - \dim \ker \nabla_q^2\varphi(w(\rho_1), \rho_1)$, to $m^-(\nabla_q^2\varphi(w(\rho_1), \rho_1)) = n_-(\rho_1) = 8$, co kończy dowód. \square

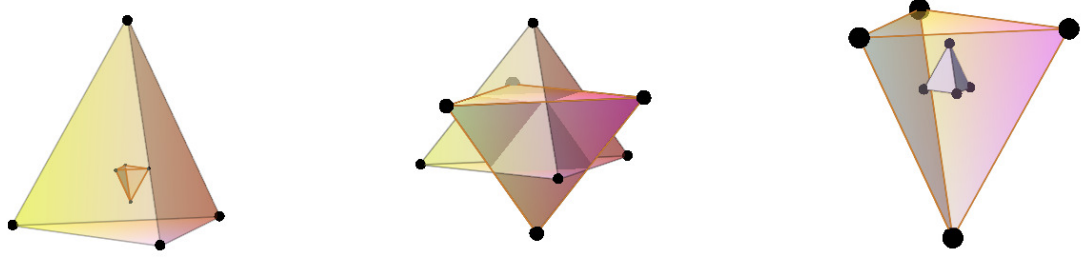
W poniższym twierdzeniu dowodzimy istnienia lokalnych oraz globalnych bifurkacji z rodziny (3.4.11).

Twierdzenie 3.4.8. *Przy powyższych założeniach dla rodziny (3.4.11) zachodzi zjawisko bifurkacji. Dokładniej, $(\rho_1, \rho_2) \cap \mathcal{GLOB} \neq \emptyset$ oraz $(\rho_3, \rho_4) \cap \mathcal{BLF} \neq \emptyset$. Ponadto z segmentów $\mathcal{F}_{(\rho_1, \rho_2)}$ oraz $\mathcal{F}_{(\rho_3, \rho_4)}$ następuje bifurkacja centralnych konfiguracji posiadających inne symetrie.*

Dowód. Udowodnimy najpierw, że $(\rho_1, \rho_2) \cap \mathcal{BLF} \neq \emptyset$ oraz $(\rho_3, \rho_4) \cap \mathcal{BLF} \neq \emptyset$. Zauważmy, że $\dim \ker \nabla_q^2\varphi(w(\rho_i), \rho_i) = \dim SO(3)(w(\rho_i)) = 3$ dla każdego $i = 1, \dots, 4$ z Lematu 3.4.6. Ponadto $m^-(\nabla_q^2\varphi(w(\rho_1), \rho_1)) \neq m^-(\nabla_q^2\varphi(w(\rho_2), \rho_2))$, stąd w przedziale (ρ_1, ρ_2) istnieje parametr lokalnej bifurkacji, zgodnie z Lematem 3.4.6 i Twierdzeniem 3.2.2. Istnienie parametru lokalnej bifurkacji w przedziale (ρ_3, ρ_4) dowodzimy analogicznie. Dodatkowo z segmentu $\mathcal{F}_{(\rho_1, \rho_2)}$ następuje globalna bifurkacja, ze względu na różną parzystość liczb $m^-(\nabla_q^2\varphi(w(\rho_1), \rho_1))$ oraz $m^-(\nabla_q^2\varphi(w(\rho_2), \rho_2))$. Pozostało pokazać, że rodziny bifurkujące z rodziny (3.4.11) posiadają odmienne symetrie. W tym celu będziemy rozważać podzbiór przestrzeni konfiguracji Ω , który jest niezmienniczy ze względu na potok gradientowy, to znaczy zbiór centralnych konfiguracji Typu I

$$(q_1, \dots, q_8, m_1, \dots, m_8) = (w(\rho), M, M, M, M, m, m, m, m),$$

(w skrócie (ρ, M, m)). Badanie centralnych konfiguracji w tym zbiorze sprowadza się do studiowania zer funkcji $F : (\alpha, +\infty) \times (0, +\infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej formułą $F(\rho, M, m) = Mn(\rho) - md(\rho)$ (patrz [14]). Dla rodziny trywialnej (3.4.11) dla każdego $\rho \in (\alpha, +\infty)$ otrzymujemy, że $F\left(\rho, 1, \frac{n(\rho)}{d(\rho)}\right) = 0$. Ponadto dla każdego $\rho > 1$ mamy, że $n'(\rho) < 0$ i $d'(\rho) > 0$, stąd $F'_\rho\left(\rho, 1, \frac{n(\rho)}{d(\rho)}\right) = n'(\rho) - \frac{n(\rho)}{d(\rho)}d'(\rho) < 0$ dla $\rho \in (\alpha, +\infty)$. Z twierdzenia o funkcji uwikłanej otrzymujemy, że nie zachodzi zjawisko bifurkacji centralnych konfiguracji Typu I z rodziny (3.4.11). Zatem wnioskujemy, że rodziny bifurkujące z rodziny (3.4.11) nie są Typu I, co kończy dowód. \square

(a) $a \in (0, 1)$ (b) $a \in [1, 9]$ (c) $a \in (9, +\infty)$ **Rysunek 3.4.7:** Centralne konfiguracje dwóch zagnieżdżonych czworościanów foremnych Typu II.

Będziemy teraz dowodzić istnienia bifurkacji w otoczeniu rodziny Typu II (patrz Rysunek 3.4.7).

Rozważmy osiem ciał o następujących położeniach:

$$\hat{q}_1 = \left(0, 0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right), \quad \hat{q}_2 = \left(0, \frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \quad \hat{q}_3 = \left(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \quad \hat{q}_4 = \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right),$$

$$\hat{q}_5 = a\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{6}}\right), \quad \hat{q}_6 = a\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{6}}\right), \quad \hat{q}_7 = a\left(0, -\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{6}}\right), \quad \hat{q}_8 = a\left(0, 0, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right),$$

gdzie a stanowi współczynnik skalowania. Niech

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1, \quad m_5 = m_6 = m_7 = m_8 = m_{II}(a) = -\frac{g(a)}{f(a)}$$

(formuły na $g(a)$ oraz $f(a)$ można znaleźć w Twierdzeniu 11 w [18]). Zdefiniujemy odwzorowanie $w : (0, \beta_1) \cup (\alpha_1, \beta_2) \cup (\alpha_2, +\infty) \rightarrow \Omega$ wzorem $w(a) = (\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_8)$, gdzie $\alpha_1 = 2.145669\dots$, $\alpha_2 = 19.60823\dots$, $\beta_1 = 0.4589907\dots$ oraz $\beta_2 = 4.194495\dots$, a ponadto niech odwzorowanie $m : (0, \beta_1) \cup (\alpha_1, \beta_2) \cup (\alpha_2, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)^8$ będzie określone formułą

$$m(a) = (1, 1, 1, 1, m_{II}(a), m_{II}(a), m_{II}(a), m_{II}(a)).$$

Wówczas

$$\mathcal{F} = \bigcup_{a \in (0, \beta_1) \cup (\alpha_1, \beta_2) \cup (\alpha_2, +\infty)} SO(3)(w(a)) \times \{a\} \subset \Omega \times \mathbb{R} \quad (3.4.12)$$

jest rodziną przestrzennych centralnych konfiguracji Typu II.

W poniższym lemacie obliczamy pewne indeksy Morse'a, aby następnie wykazać zachodzenie zjawiska bifurkacji z rodziny (3.4.12). Jego dowód przebiega analogicznie jak w Lemacie 3.4.6.

Lemat 3.4.7. *Połóżmy $a_1 = \frac{25}{100}$, $a_2 = \frac{26}{100}$, $a_3 = \frac{34}{100}$, $a_4 = \frac{35}{100}$, $a_5 = \frac{236}{100}$, $a_6 = \frac{237}{100}$, $a_7 = \frac{380}{100}$, $a_8 = \frac{381}{100}$, $a_9 = 26$, $a_{10} = 27$, $a_{11} = 35$ i $a_{12} = 36$. Wówczas dla $i = 1, \dots, 12$ otrzymujemy, że $\dim \ker \nabla_q^2 \varphi(w(a_i), a_i) = \dim SO(3)(w(a_i)) = 3$ oraz indeks Morse'a $\nabla_q^2 \varphi(w(\cdot), \cdot)$ w a_i wynosi*

$$m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(a_i), a_i)) = \begin{cases} 4, & \text{gdy } i = 4, 9 \\ 3, & \text{gdy } i = 2, 3, 10, 11 \\ 2, & \text{gdy } i = 6, 7 \\ 0, & \text{gdy } i = 1, 5, 8, 12 \end{cases}.$$

Twierdzenie 3.4.9. *Przy powyższych założeniach w otoczeniu rodziny (3.4.12) zachodzą następujące zjawiska bifurkacji:*

- (1) *w przedziałach (a_1, a_2) , (a_3, a_4) , (a_5, a_6) , (a_7, a_8) , (a_9, a_{10}) i (a_{11}, a_{12}) istnieją parametry lokalnej bifurkacji,*
- (2) *w przedziałach (a_1, a_2) , (a_3, a_4) , (a_9, a_{10}) i (a_{11}, a_{12}) istnieją parametry globalnej bifurkacji.*

Ponadto z rodziny (3.4.12) z segmentów $\mathcal{F}_{(a_i, a_{i+1})}$ dla $i = 1, 5, 7, 11$ następuje bifurkacja centralnych konfiguracji posiadających inne symetrie.

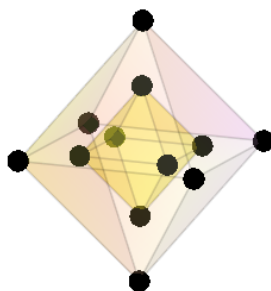
Dowód. Udowodnimy najpierw, że dla każdego $i = 1, 3, 5, 7, 9, 11$ zachodzi $(a_i, a_{i+1}) \cap \mathcal{BLF} \neq \emptyset$. Z Lematu 3.4.7 wiemy, że $m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(a_1), a_1)) \neq m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(a_2), a_2))$, a zatem otrzymujemy zachodzenie lokalnej bifurkacji z segmentu $\mathcal{F}_{(a_1, a_2)}$, na podstawie Twierdzenia 3.2.2. Podobnie wykazujemy, że w przedziałach (a_3, a_4) , (a_5, a_6) , (a_7, a_8) , (a_9, a_{10}) i (a_{11}, a_{12}) istnieją parametry lokalnej bifurkacji. Co więcej, ponieważ niektóre różnice indeksów Morse'a są liczbami nieparzystymi, z segmentów $\mathcal{F}_{(a_1, a_2)}$, $\mathcal{F}_{(a_3, a_4)}$, $\mathcal{F}_{(a_9, a_{10})}$ oraz $\mathcal{F}_{(a_{11}, a_{12})}$ zachodzi globalna bifurkacja. Pokażemy dalej, że z rodziny (3.4.12) następuje bifurkacja rodzin o innych symetriach. Zauważmy, że możemy rozważać podzbiór przestrzeni konfiguracji Ω , który jest niezmienniczy ze względu na potok gradientowy, to znaczy zbiór centralnych konfiguracji dwóch zagnieżdżonych czworokątów foremnych Typu II

$$(q_1, \dots, q_8, m_1, \dots, m_8) = (w(a), M, M, M, M, m, m, m, m).$$

Dla prostoty notacji będziemy pisać (a, M, m) . Badanie centralnych konfiguracji w tym zbiorze sprowadza się do studiowania zer funkcji $F : ((0, \beta_1) \cup (\alpha_1, \beta_2) \cup (\alpha_2, +\infty)) \times (0, +\infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$

danej formułą $F(a, M, m) = Mg(a) + mf(a)$ (patrz [18]). Zanotujmy, że w przypadku rodziny trywialnej (3.4.12) dla każdego $a \in (0, \beta_1) \cup (\alpha_1, \beta_2) \cup (\alpha_2, +\infty)$ zachodzi następująca równość: $F\left(a, 1, -\frac{g(a)}{f(a)}\right) = 0$. Dodatkowo, dla każdego $a \in (a_1, a_2) \cup (a_5, a_6) \cup (a_7, a_8) \cup (a_{11}, a_{12})$, numerycznie uzyskujemy, że $F'_a\left(a, 1, -\frac{g(a)}{f(a)}\right) = g'(a) - \frac{g(a)}{f(a)}f'(a) < 0$, dlatego z rozpatrywanych przedziałów nie zachodzi bifurkacja centralnych konfiguracji Typu II, na podstawie twierdzenia o funkcji uwikłanej. Biorąc pod uwagę powyższe wnioskujemy, że rodziny bifurkujące z rodziny (3.4.12) z segmentów $\mathcal{F}_{(a_1, a_2)}$, $\mathcal{F}_{(a_5, a_6)}$, $\mathcal{F}_{(a_7, a_8)}$ i $\mathcal{F}_{(a_{11}, a_{12})}$ nie są zagnieżdżonymi czworościanami foremnyymi Typu II, co kończy dowód. \square

3.4.2 Przestrzenna rodzina dwóch zagnieżdżonych ośmiościanów foremnych



Rysunek 3.4.8: Centralna konfiguracja dwóch zagnieżdżonych ośmiościanów foremnych. Konfiguracja z masami: 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1.02, 1.02, 1.02, 1.02, 1.02, 1.02.

Rozważmy rodzinę przestrzennych centralnych konfiguracji problemu dwunastu ciał, dla której rozpatrujemy ciała leżące w wierzchołkach dwóch zagnieżdżonych ośmiościanów foremnych (patrz Rysunek 3.4.8). Masy ciał na każdym z ośmiościanów są równe oraz masy tych ciał mogą być różne na różnych wielościanach. O dwóch ośmiościanach o wierzchołkach, odpowiednio, \hat{q}_i oraz \hat{q}_{6+i} dla $i = 1, \dots, 6$ powiemy, że są zagnieżdżone, o ile mają wspólny środek masy oraz ich wierzchołki spełniają relację $\hat{q}_{6+i} = \rho \hat{q}_i$ dla $i = 1, \dots, 6$ oraz pewnego $\rho > 1$. W 2008 roku Corbera i Llibre w artykule [14] badali opisaną powyżej rodzinę z ciałami o następujących położeniach:

$$\hat{q}_1 = (1, 0, 0), \quad \hat{q}_2 = (-1, 0, 0), \quad \hat{q}_3 = (0, 1, 0), \quad \hat{q}_4 = (0, -1, 0), \quad \hat{q}_5 = (0, 0, 1), \quad \hat{q}_6 = (0, 0, -1),$$

$$\hat{q}_7 = \rho \hat{q}_1, \quad \hat{q}_8 = \rho \hat{q}_2, \quad \hat{q}_9 = \rho \hat{q}_3, \quad \hat{q}_{10} = \rho \hat{q}_4, \quad \hat{q}_{11} = \rho \hat{q}_5, \quad \hat{q}_{12} = \rho \hat{q}_6,$$

gdzie ρ jest współczynnikiem skalowania. Niech $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m_6 = 1$ oraz $m_7 = m_8 = m_9 = m_{10} = m_{11} = m_{12} = f_{12}(\rho) = \frac{b(\rho)}{f(\rho)}$ (formuły na $b(\rho)$ i $f(\rho)$ można znaleźć

w Twierdzeniu 3 w [14]). Zdefiniujmy $w : (\alpha, +\infty) \rightarrow \Omega$ formułą $w(\rho) = (\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_{12})$, gdzie $\rho > \alpha = 1.7298565115043054\dots$, a następnie odwzorowanie $m : (\alpha, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)^{12}$ jak następuje $m(\rho) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, f_{12}(\rho), f_{12}(\rho), f_{12}(\rho), f_{12}(\rho), f_{12}(\rho), f_{12}(\rho))$. Wówczas

$$\mathcal{F} = \bigcup_{\rho \in (\alpha, +\infty)} SO(3)(w(\rho)) \times \{\rho\} \subset \Omega \times \mathbb{R} \quad (3.4.13)$$

jest rodziną przestrzennych centralnych konfiguracji, w pobliżu której będziemy poszukiwać nowych centralnych konfiguracji. W tym celu formułujemy najpierw pewien pomocniczy lemat, którego dowód przebiega analogicznie do dowodu Lematu 3.4.6.

Lemat 3.4.8. *Polóżmy $\rho_1 = 3$, $\rho_2 = \frac{31}{10}$, $\rho_3 = \frac{36}{10}$, $\rho_4 = \frac{37}{10}$, $\rho_5 = 7$ i $\rho_6 = \frac{71}{10}$. Wówczas dla $i = 1, \dots, 6$ otrzymujemy, że $\dim \ker \nabla_q^2 \varphi(w(\rho_i), \rho_i) = \dim SO(3)(w(\rho_i)) = 3$ oraz indeks Morse'a $\nabla_q^2 \varphi(w(\cdot), \cdot)$ w ρ_i wynosi*

$$m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(\rho_i), \rho_i)) = \begin{cases} 12, & \text{gdy } i = 1 \\ 9, & \text{gdy } i = 2, 3 \\ 6, & \text{gdy } i = 4, 5 \\ 3, & \text{gdy } i = 6 \end{cases}.$$

W poniższym twierdzeniu udowodnimy istnienie spójnych zbiorów centralnych konfiguracji bifurkujących z rodziny (3.4.13) z segmentów $\mathcal{F}_{(\rho_1, \rho_2)}$, $\mathcal{F}_{(\rho_3, \rho_4)}$ oraz $\mathcal{F}_{(\rho_5, \rho_6)}$.

Twierdzenie 3.4.10. *Dla rozważanej rodziny (3.4.13) następuje zjawisko globalnej bifurkacji, to znaczy w przedziałach (ρ_1, ρ_2) , (ρ_3, ρ_4) oraz (ρ_5, ρ_6) istnieją parametry globalnej bifurkacji. Ponadto z rodziny (3.4.13) z segmentów $\mathcal{F}_{(\rho_i, \rho_{i+1})}$ dla $i = 1, 3, 5$ następuje bifurkacja centralnych konfiguracji posiadających inne symetrie.*

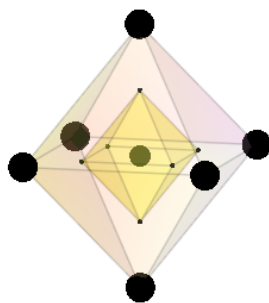
Dowód. Z Lematu 3.4.8, indeksy Morse'a $m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(\rho_1), \rho_1))$ i $m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(\rho_2), \rho_2))$ różnią się o liczbę nieparzystą, a zatem dowodzimy istnienia parametru globalnej bifurkacji w przedziale (ρ_1, ρ_2) ze względu na Twierdzenie 3.2.2. Podobnie otrzymujemy istnienie parametrów globalnej bifurkacji w przedziałach (ρ_3, ρ_4) oraz (ρ_5, ρ_6) . Co więcej, możemy rozważać podzbiór przestrzeni konfiguracji Ω , który jest niezmienniczy ze względu na potok gradientowy, to znaczy zbiór centralnych konfiguracji typu dwóch zagnieżdżonych ośmiościanów foremnych

$$(q_1, \dots, q_{12}, m_1, \dots, m_{12}) = (w(\rho), M, M, M, M, M, M, m, m, m, m, m, m).$$

Dla uproszczenia notacji będziemy pisać (ρ, M, m) . Badanie centralnych konfiguracji w tym zbiorze sprowadza się do studiowania zer funkcji $F : (\alpha, +\infty) \times (0, +\infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $F(\rho, M, m) = mf(\rho) - Mb(\rho)$ (patrz [14]). Dla rodziny (3.4.13) mamy, że $F\left(\rho, 1, \frac{b(\rho)}{f(\rho)}\right) = 0$

dla każdego $\rho \in (\alpha, +\infty)$ oraz dodatkowo $F'_\rho\left(\rho, 1, \frac{b(\rho)}{f(\rho)}\right) = \frac{b(\rho)}{f(\rho)}f'(\rho) - b'(\rho) > 0$, ponieważ $b'(\rho) < 0$ i $f'(\rho) > 0$ dla $\rho > 1$. Biorąc pod uwagę powyższe oraz twierdzenie o funkcji uwikłanej wnioskujemy, że z rodziny (3.4.13) nie zachodzi bifurkacja centralnych konfiguracji typu dwóch zagnieżdżonych ośmiościanów, a zatem rodziny bifurkujące z rodziny (3.4.13) są innego typu, co kończy dowód. \square

3.4.3 Przestrzenna rodzina dwóch zagnieżdżonych ośmiościanów foremnych z dodatkowym ciałem



Rysunek 3.4.9: Centralna konfiguracja dwóch zagnieżdżonych ośmiościanów foremnych z dodatkowym ciałem w środku masy. Konfiguracja z masami: 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 1.44, 1.44, 1.44, 1.44, 1.44, 1.44, 1.

Rozważmy rodzinę przestrzennych centralnych konfiguracji problemu trzynastu ciał, dla której rozpatrujemy ciała leżące w wierzchołkach dwóch zagnieżdżonych ośmiościanów foremnych z dodatkowym ciałem położonym w ich wspólnym środku masy (patrz Rysunek 3.4.9). Masy na każdym z ośmiościanów są równe oraz mogą one być różne na różnych wielościanach, a ponadto masa ciała usytuowanego w środku masy wynosi 1. Podobnie jak w Podrozdziale 3.4.2, o dwóch ośmiościanach o wierzchołkach, odpowiednio, \hat{q}_i oraz \hat{q}_{6+i} dla $i = 1, \dots, 6$ powiemy, że są zagnieżdżone, o ile mają wspólny środek masy oraz ich wierzchołki spełniają relację $\hat{q}_{6+i} = \rho \hat{q}_i$ dla $i = 1, \dots, 6$ oraz pewnego $\rho > 1$.

W 2014 roku Su i Deng w artykule [87] badali opisaną powyżej rodzinę rozpatrując ciała o następujących położeniach:

$$\begin{aligned} \hat{q}_1 &= (1, 0, 0), & \hat{q}_2 &= (0, 1, 0), & \hat{q}_3 &= (-1, 0, 0), & \hat{q}_4 &= (0, -1, 0), & \hat{q}_5 &= (0, 0, 1), & \hat{q}_6 &= (0, 0, -1), \\ \hat{q}_7 &= \rho \hat{q}_1, & \hat{q}_8 &= \rho \hat{q}_2, & \hat{q}_9 &= \rho \hat{q}_3, & \hat{q}_{10} &= \rho \hat{q}_4, & \hat{q}_{11} &= \rho \hat{q}_5, & \hat{q}_{12} &= \rho \hat{q}_6, \\ \hat{q}_{13} &= (0, 0, 0), \end{aligned}$$

gdzie ρ jest współczynnikiem skalowania. Ustalmy $\rho = 2$ i niech $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m_6 = M_1$, $m_7 = m_8 = m_9 = m_{10} = m_{11} = m_{12} = M_2(M_1) = B(\rho)^{-1}(\rho - \rho^{-2} - A(\rho)M_1)$,

$m_{13} = 1$, gdzie

$$A(\rho) = \frac{4\rho}{(\sqrt{1+\rho^2})^3} + \frac{\rho-1}{(\rho-1)^3} + \frac{1}{(\rho+1)^2} - \frac{\rho}{4} - \sqrt{2}\rho, \quad (3.4.14)$$

$$B(\rho) = \frac{\sqrt{2}}{\rho^2} + \frac{1}{4\rho^2} - \frac{4\rho}{(\sqrt{1+\rho^2})^3} - \frac{\rho}{(\rho+1)^2} + \frac{\rho(\rho-1)}{(\rho-1)^3}, \quad (3.4.15)$$

patrz Twierdzenie 2.2.1 w artykule [87]. Można pokazać, że $M_2(M_1) > 0$ dla każdego $M_1 > 0$. Zdefiniujmy $w : (0, +\infty) \rightarrow \Omega$ formułą $w(M_1) = (\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_{12}, \hat{q}_{13})$, a następnie odwzorowanie $m : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)^{13}$ jak następuje $m(M_1) = (M_1, M_1, M_1, M_1, M_1, M_1, M_2(M_1), M_2(M_1), M_2(M_1), M_2(M_1), M_2(M_1), M_2(M_1), 1)$. Wówczas

$$\mathcal{F} = \bigcup_{M_1 \in (0, +\infty)} SO(3)(w(M_1)) \times \{M_1\} \subset \Omega \times \mathbb{R} \quad (3.4.16)$$

stanowi rodzinę centralnych konfiguracji.

W poniższym lemacie obliczamy pewne indeksy Morse'a, które posłużą udowodnieniu istnienia spójnego zbioru centralnych konfiguracji bifurkującego z rodziny (3.4.16), na podstawie Twierdzenia 3.2.2. Dowód tego lematu jest analogiczny do dowodu Lematu 3.4.6.

Lemat 3.4.9. *Przyjmijmy powyższe założenia i oznaczenia. Wówczas $\dim \ker \nabla_q^2 \varphi(w(2), 2) = \dim \ker \nabla_q^2 \varphi(w(3), 3) = 3$ oraz $m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(2), 2)) = 15$, $m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(3), 3)) = 12$.*

Twierdzenie 3.4.11. *W przedziale $(2, 3)$ istnieje parametr globalnej bifurkacji, to znaczy $(2, 3) \cap \mathcal{GLCB} \neq \emptyset$.*

Dowód. Ponieważ $m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(2), 2)) - m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(3), 3)) = 3$, patrz Lemat 3.4.9, to w przedziale $(2, 3)$ istnieje parametr globalnej bifurkacji, z Twierdzenia 3.2.2, co kończy dowód. \square

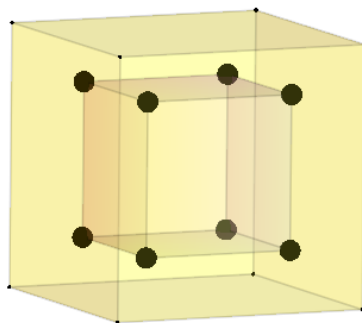
Zauważmy, że możemy rozważać podzbiór przestrzeni konfiguracji Ω , który jest niezmienny ze względu na potok gradientowy, to znaczy zbiór centralnych konfiguracji typu dwóch zagnieżdżonych ośmiościanów foremnych z dodatkowym ciałem w środku masy

$$(q_1, \dots, q_{13}, m_1, \dots, m_{13}) = (\tilde{w}(\rho), M_1, M_1, M_1, M_1, M_1, M_1, M_2, M_2, M_2, M_2, M_2, M_2, 1),$$

gdzie $\tilde{w}(\rho) = (\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_{12}, \hat{q}_{13})$. Dla uproszczenia notacji będziemy pisać (ρ, M_1, M_2) . Wówczas studiowanie centralnych konfiguracji w tym zbiorze sprowadza się do studiowania zer funkcji $F : (1, +\infty) \times (0, +\infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ danej formułą $F(\rho, M_1, M_2) = A(\rho)M_1 + B(\rho)M_2 + \rho^{-2} - \rho$ (patrz [87]). Dla rodziny trywialnej (3.4.16) otrzymujemy, że $F(2, M_1, M_2(M_1)) = 0$ dla każdego $M_1 \in (0, +\infty)$. Ponadto dla $\rho = 2$ rodzina (3.4.16) jest jedyną rodziną rozwiązań równania $F(2, M_1, M_2) = 0$. Biorąc pod uwagę powyższe oraz Twierdzenie 3.4.11 wnioskujemy,

że rodziny bifurkujące z rodziny (3.4.16) nie są typu dwóch zagnieżdżonych ośmiościanów z dodatkowym ciałem w środku masy oraz $\rho = 2$.

3.4.4 Przestrzenna rodzina dwóch zagnieżdżonych sześciątów



Rysunek 3.4.10: Szesnaście ciał w konfiguracji dwóch zagnieżdżonych sześciątów. Konfiguracja z masami: 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2.

W niniejszym podrozdziale będziemy badać rodzinę przestrzennych centralnych konfiguracji problemu szesnastu ciał. Rozważmy ciała leżące w wierzchołkach dwóch zagnieżdżonych sześciątów (patrz Rysunek 3.4.10). Przez zagnieżdżone wielościany, w tym przypadku sześciiany, o wierzchołkach, odpowiednio, \hat{q}_i oraz \hat{q}_{8+i} dla $i = 1, \dots, 8$ rozumiemy wielościany o wspólnym środku masy, których wierzchołki spełniają następującą relację: $\hat{q}_{8+i} = \rho \hat{q}_i$ dla $i = 1, \dots, 8$ oraz pewnego $\rho > 1$. Masy ciał na każdym z sześciątów są równe, masy na różnych sześciątach natomiast mogą być różne.

W 2008 roku Corbera i Llibre w artykule [14] badali konfiguracje typu dwóch zagnieżdżonych sześciątów z następującymi położeniami ciał:

$$\begin{aligned} \hat{q}_1 &= (1, 1, 1), & \hat{q}_2 &= (1, 1, -1), & \hat{q}_3 &= (1, -1, 1), & \hat{q}_4 &= (-1, 1, 1), \\ \hat{q}_5 &= (1, -1, -1), & \hat{q}_6 &= (-1, 1, -1), & \hat{q}_7 &= (-1, -1, 1), & \hat{q}_8 &= (-1, -1, -1), \\ \hat{q}_9 &= \rho \hat{q}_1, & \hat{q}_{10} &= \rho \hat{q}_2, & \hat{q}_{11} &= \rho \hat{q}_3, & \hat{q}_{12} &= \rho \hat{q}_4, \\ \hat{q}_{13} &= \rho \hat{q}_5, & \hat{q}_{14} &= \rho \hat{q}_6, & \hat{q}_{15} &= \rho \hat{q}_7, & \hat{q}_{16} &= \rho \hat{q}_8, \end{aligned}$$

gdzie ρ jest współczynnikiem skalowania. Niech $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m_6 = m_7 = m_8 = 1$ oraz $m_9 = m_{10} = m_{11} = m_{12} = m_{13} = m_{14} = m_{15} = m_{16} = \tilde{m}(\rho) = \frac{b(\rho)}{f(\rho)}$ (formuły na $b(\rho)$ i $f(\rho)$ można znaleźć w Twierdzeniu 4.(a) w [14]). Zdefiniujmy odwzorowanie $w : (\alpha, +\infty) \rightarrow \Omega$ formułą $w(\rho) = (\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_{16})$ dla $\rho > \alpha = 1.643646762940176\dots$ oraz

$m : (\alpha, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)^{16}$ następująco

$$m(\rho) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \tilde{m}(\rho), \tilde{m}(\rho), \tilde{m}(\rho), \tilde{m}(\rho), \tilde{m}(\rho), \tilde{m}(\rho), \tilde{m}(\rho), \tilde{m}(\rho)).$$

Wówczas

$$\mathcal{F} = \bigcup_{\rho \in (\alpha, +\infty)} SO(3)(w(\rho)) \times \{\rho\} \subset \Omega \times \mathbb{R} \quad (3.4.17)$$

jest rodziną centralnych konfiguracji oraz dalej formułujemy pomocniczy lemat, którego dowód przebiega podobnie jak dowód Lematu 3.4.6.

Lemat 3.4.10. *Polóżmy $\rho_1 = 2$, $\rho_2 = 3$ i $\rho_3 = 4$. Wówczas dla $i = 1, 2, 3$ otrzymujemy, że $\dim \ker \nabla_q^2 \varphi(w(\rho_i), \rho_i) = \dim SO(3)(w(\rho_i)) = 3$, a ponadto indeks Morse'a $\nabla_q^2 \varphi(w(\cdot), \cdot)$ w ρ_i wynosi*

$$m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(\rho_i), \rho_i)) = \begin{cases} 18, & \text{gdy } i = 1 \\ 10, & \text{gdy } i = 2 \\ 7, & \text{gdy } i = 3 \end{cases}.$$

W poniższym twierdzeniu dowodzimy istnienia zjawiska lokalnej bifurkacji w otoczeniu rodziny (3.4.17).

Twierdzenie 3.4.12. *W przedziałach (ρ_1, ρ_2) i (ρ_2, ρ_3) istnieją parametry lokalnej bifurkacji. Ponadto z rodziny (3.4.17) z segmentów $\mathcal{F}_{(\rho_1, \rho_2)}$ i $\mathcal{F}_{(\rho_2, \rho_3)}$ następuje bifurkacja centralnych konfiguracji posiadających inne symetrie.*

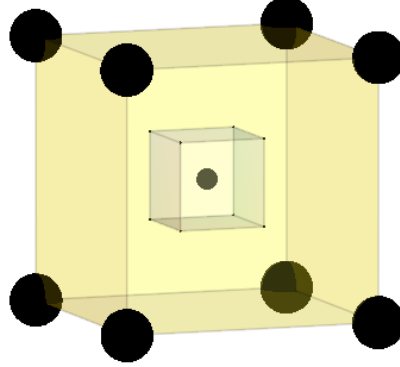
Dowód. Stosując Lemat 3.4.10 oraz Twierdzenie 3.2.2 wnioskujemy, że w przedziałach (ρ_1, ρ_2) oraz (ρ_2, ρ_3) istnieją parametry lokalnej bifurkacji. Pozostaje pokazać, że rodziny bifurkujące z rodziny (3.4.17) nie posiadają symetrii dwóch zagnieżdżonych sześciątów. W tym celu zauważmy, że możemy rozważać podzbiór przestrzeni konfiguracji Ω , który jest niezmienniczy ze względu na potok gradientowy, to znaczy zbiór centralnych konfiguracji typu dwóch zagnieżdżonych sześciątów

$$(q_1, \dots, q_{16}, m_1, \dots, m_{16}) = (w(\rho), M, M, M, M, M, M, M, M, m, m, m, m, m, m, m, m).$$

Dla prostoty będziemy pisać (ρ, M, m) . Badanie centralnych konfiguracji w tym zbiorze sprowadza się do studiowania zer funkcji $F : (\alpha, +\infty) \times (0, +\infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej formułą $F(\rho, M, m) = mf(\rho) - Mb(\rho)$ (patrz [14]). Dla rodziny (3.4.17) dla każdego $\rho \in (\alpha, +\infty)$ otrzymujemy, że $F\left(\rho, 1, \frac{b(\rho)}{f(\rho)}\right) = 0$ oraz $F'_\rho\left(\rho, 1, \frac{b(\rho)}{f(\rho)}\right) = \frac{b(\rho)}{f(\rho)}f'(\rho) - b'(\rho) > 0$, ponieważ $b'(\rho) < 0$ i $f'(\rho) > 0$ dla $\rho > 1$. Zatem z twierdzenia o funkcji uwikłanej otrzymujemy, że z rodziny trywialnej nie zachodzi bifurkacja centralnych konfiguracji typu dwóch zagnieżdżonych

sześcianów. Stąd wnioskujemy, że rodziny bifurkujące z rodziny (3.4.17) nie są typu dwóch zagnieżdżonych sześcianów, co kończy dowód. \square

3.4.5 Przestrzenna rodzina dwóch zagnieżdżonych sześcianów z dodatkowym ciałem



Rysunek 3.4.11: Siedemnaście ciał w konfiguracji dwóch zagnieżdżonych sześcianów z dodatkowym ciałem w środku masy. Konfiguracja z masami: 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 8.77, 8.77, 8.77, 8.77, 8.77, 8.77, 8.77, 8.77, 1.

Rozważmy rodzinę dwóch zagnieżdżonych sześcianów z dodatkowym ciałem usytuowanym w ich środku symetrii (patrz Rysunek 3.4.11). W dalszym ciągu przez zagnieżdżone sześciany o wierzchołkach, odpowiednio, \hat{q}_i oraz \hat{q}_{8+i} dla $i = 1, \dots, 8$ będziemy rozumieć wielościany o wspólnym środku masy, których wierzchołki spełniają następującą relację: $\hat{q}_{8+i} = \rho \hat{q}_i$ dla $i = 1, \dots, 8$ oraz pewnego $\rho > 1$. Masy ciał na każdym z sześcianów są równe, masy na różnych sześcianach natomiast mogą być różne, a masa dodatkowego ciała jest równa jeden. W 2014 roku Su i Deng w artykule [87] rozpatrywali opisane powyżej konfiguracje z następującymi położeniami ciał:

$$\begin{aligned} \hat{q}_1 &= (2, 0, -\sqrt{2}), & \hat{q}_2 &= (0, 2, -\sqrt{2}), & \hat{q}_3 &= (-2, 0, -\sqrt{2}), & \hat{q}_4 &= (0, -2, -\sqrt{2}), \\ \hat{q}_5 &= (2, 0, \sqrt{2}), & \hat{q}_6 &= (0, 2, \sqrt{2}), & \hat{q}_7 &= (-2, 0, \sqrt{2}), & \hat{q}_8 &= (0, -2, \sqrt{2}), \\ \hat{q}_9 &= \rho \hat{q}_1, & \hat{q}_{10} &= \rho \hat{q}_2, & \hat{q}_{11} &= \rho \hat{q}_3, & \hat{q}_{12} &= \rho \hat{q}_4, \\ \hat{q}_{13} &= \rho \hat{q}_5, & \hat{q}_{14} &= \rho \hat{q}_6, & \hat{q}_{15} &= \rho \hat{q}_7, & \hat{q}_{16} &= \rho \hat{q}_8, \\ \hat{q}_{17} &= (0, 0, 0), \end{aligned}$$

gdzie ρ jest współczynnikiem skalowania. Ustalmy $\rho = 3$ oraz niech $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m_6 = m_7 = m_8 = M_1$, $m_9 = m_{10} = m_{11} = m_{12} = m_{13} = m_{14} = m_{15} = m_{16} =$

$= M_2(M_1) = B(\rho)^{-1} \left(\frac{1}{3\sqrt{6}\rho^2} - \frac{\rho}{3\sqrt{6}} - A(\rho)M_1 \right)$ i $m_{17} = 1$, gdzie

$$A(\rho) = \frac{\rho}{8} + \frac{\rho}{4\sqrt{2}} + \frac{\rho}{12\sqrt{6}} - \frac{1}{3\sqrt{6}(\rho+1)^2} - \frac{\rho-1}{3\sqrt{6}(\rho-1)^3} - \frac{2(3\rho-1)}{(\sqrt{6}\rho^2-4\rho+6)^3} - \frac{2(3\rho+1)}{(\sqrt{6}\rho^2+4\rho+6)^3},$$

$$B(\rho) = \frac{\rho}{3\sqrt{6}(\rho+1)^2} - \frac{\rho(\rho-1)}{3\sqrt{6}(\rho-1)^3} + \frac{2\rho(3-\rho)}{(\sqrt{6}\rho^2-4\rho+6)^3} + \frac{2\rho(3+\rho)}{(\sqrt{6}\rho^2+4\rho+6)^3} - \frac{1}{8\rho^2} - \frac{1}{4\sqrt{2}\rho^2} - \frac{1}{12\sqrt{6}\rho^2},$$

patrz Twierdzenie 3.2.1 w artykule [87]. Można pokazać, że $M_2(M_1) > 0$ dla każdego $M_1 > 0$. Zdefiniujmy $w : (0, +\infty) \rightarrow \Omega$ wzorem $w(M_1) = (\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_{17})$ oraz $m : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)^{17}$ formułą $m(M_1) = (M_1, M_1, M_1, M_1, M_1, M_1, M_1, M_1, M_2(M_1), M_2(M_1), M_2(M_1), M_2(M_1), M_2(M_1), M_2(M_1), M_2(M_1), M_2(M_1), 1)$. Wówczas

$$\mathcal{F} = \bigcup_{M_1 \in (0, +\infty)} SO(3)(w(M_1)) \times \{M_1\} \subset \Omega \times \mathbb{R} \quad (3.4.18)$$

jest rodziną centralnych konfiguracji.

Sformułujemy teraz pomocniczy lemat, którego dowód przebiega analogicznie do dowodu Lematu 3.4.6.

Lemat 3.4.11. *Przyjmijmy powyższe założenia i oznaczenia. Wtedy $\dim \ker \nabla_q^2 \varphi(w(1), 1) = \dim \ker \nabla_q^2 \varphi(w(2), 2) = \dim \ker \nabla_q^2 \varphi(w(10), 10) = \dim \ker \nabla_q^2 \varphi(w(11), 11) = 3$, a ponadto odpowiednie indeksy Morse'a są następujące: $m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(1), 1)) = 16$, $m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(2), 2)) = m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(10), 10)) = 13$ oraz $m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(11), 11)) = 10$.*

W poniższym twierdzeniu dowodzimy istnienia spójnych zbiorów centralnych konfiguracji bifurkujących z rodziny trywialnej. Dowód twierdzenia jest analogiczny do dowodu Twierdzenia 3.4.11.

Twierdzenie 3.4.13. *Dla rozpatrywanej rodziny (3.4.18) zachodzi zjawisko bifurkacji. Dokładniej, w przedziałach (1, 2) i (10, 11) istnieją parametry globalnej bifurkacji.*

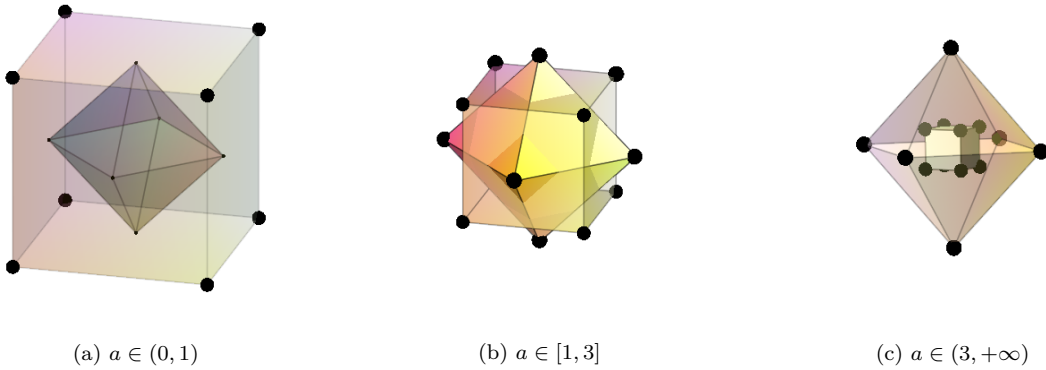
Zauważmy, że możemy rozważać podzbiór przestrzeni konfiguracji Ω , który jest niezmienny ze względu na potok gradientowy, to znaczy zbiór centralnych konfiguracji typu dwóch

zagnieżdżonych sześciątów z dodatkowym ciałem w środku masy

$$(q_1, \dots, q_{17}, m_1, \dots, m_{17}) = (\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_8, \rho \hat{q}_1, \dots, \rho \hat{q}_8, M_1, M_1, M_1, M_1, M_1, M_1, M_1, M_1, M_1, M_1, M_1, M_2, M_2, M_2, M_2, M_2, M_2, M_2, M_2, M_2, 1).$$

Dla prostoty notacji będziemy pisać (ρ, M_1, M_2) . Badanie centralnych konfiguracji w tym zbiorze sprowadza się do badania zer funkcji $F : ((0, 1) \cup (1, +\infty)) \times (0, +\infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ danej formułą $F(\rho, M_1, M_2) = M_1 A(\rho) + M_2 B(\rho) + \frac{\rho}{3\sqrt{6}} - \frac{1}{3\sqrt{6}\rho^2}$ (patrz [87]). Dla rodziny trywialnej (3.4.18) otrzymujemy, że $F(3, M_1, M_2(M_1)) = 0$ dla każdego $M_1 \in (0, +\infty)$. Ponadto dla $\rho = 3$ rodzina (3.4.18) jest jedyną rodziną rozwiązań równania $F(3, M_1, M_2) = 0$. Biorąc pod uwagę powyższe oraz Twierdzenie 3.4.13 wnioskujemy, że rodziny bifurkujące z rodziny (3.4.18) nie są typu dwóch zagnieżdżonych sześciątów z dodatkowym ciałem w środku masy oraz $\rho = 3$.

3.4.6 Przestrzenna rodzina dwóch dualnych wielościanów foremnych problemu czternastu ciał



Rysunek 3.4.12: Czternaście ciał w konfiguracji złożonej z sześcianu i ośmiościanu foremnego.

W 2014 roku Corbera, Llibre oraz Pérez-Chavela (patrz [18]) badali rodzinę przestrzennych centralnych konfiguracji złożoną z dwóch dualnych wielościanów foremnych. Będziemy dowodzić istnienia bifurkacji centralnych konfiguracji z tej rodziny w sytuacji czternastu ciał.

Z definicji mówimy, że dwa wielościany foremne są dualne, o ile jeden z nich można otrzymać z drugiego poprzez połączenie barycentrów ścian drugiego, które stają się wierzchołkami pierwszego. Zauważmy, że wielościanem dualnym do czworościanu foremnego jest również czworościan foremny oraz rodzinę centralnych konfiguracji problemu ośmiu ciał złożoną z dwóch dualnych do siebie czworościanów foremnych rozważaliśmy w Podrozdziale 3.4.1 jako rodzinę Typu II (patrz Rysunek 3.4.7).

Dla czternastu ciał natomiast konfiguracja typu dwóch dualnych wielościanów foremnych

składa się z ośmiu ciał o równych masach leżących w wierzchołkach sześcianu oraz sześciu dodatkowych ciał, również o równych masach, usytuowanych w wierzchołkach ośmiościanu foremnego (patrz Rysunek 3.4.12), to znaczy

$$\begin{aligned}\hat{q}_1 &= (1, 1, 1), & \hat{q}_2 &= (-1, 1, 1), & \hat{q}_3 &= (1, -1, 1), & \hat{q}_4 &= (1, 1, -1), \\ \hat{q}_5 &= (-1, -1, 1), & \hat{q}_6 &= (-1, 1, -1), & \hat{q}_7 &= (1, -1, -1), & \hat{q}_8 &= (-1, -1, -1), \\ \hat{q}_9 &= a(1, 0, 0), & \hat{q}_{10} &= a(-1, 0, 0), & \hat{q}_{11} &= a(0, 1, 0), & \hat{q}_{12} &= a(0, -1, 0), \\ \hat{q}_{13} &= a(0, 0, 1), & \hat{q}_{14} &= a(0, 0, -1),\end{aligned}$$

gdzie a jest współczynnikiem skalowania. Niech $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m_6 = m_7 = m_8 = 1$ oraz $m_9 = m_{10} = m_{11} = m_{12} = m_{13} = m_{14} = \tilde{m}(a) = -\frac{g(a)}{f(a)}$ (formuły na $g(a)$ i $f(a)$ można znaleźć w Rozdziale 2 w [18]). Zdefiniujmy $w : (0, \beta_1) \cup (\alpha_1, \beta_2) \cup (\alpha_2, +\infty) \rightarrow \Omega$ formułą $w(a) = (\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_{14})$, gdzie $\alpha_1 = 1.278175\dots$, $\alpha_2 = 3.628586\dots$, $\beta_1 = 0.8932884\dots$ i $\beta_2 = 2.2083166\dots$ oraz odwzorowanie $m : (0, \beta_1) \cup (\alpha_1, \beta_2) \cup (\alpha_2, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)^{14}$ jak następuje $m(a) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \tilde{m}(a), \tilde{m}(a), \tilde{m}(a), \tilde{m}(a), \tilde{m}(a), \tilde{m}(a))$. Wówczas

$$\mathcal{F} = \bigcup_{a \in (0, \beta_1) \cup (\alpha_1, \beta_2) \cup (\alpha_2, +\infty)} SO(3)(w(a)) \times \{a\} \subset \Omega \times \mathbb{R} \quad (3.4.19)$$

jest rodziną centralnych konfiguracji.

W poniższym lemacie obliczamy pewne indeksy Morse'a macierzy Hessego, aby udowodnić istnienie zjawiska bifurkacji z pewnych segmentów rodziny (3.4.19). Dowód lematu przebiega analogicznie do dowodu Lematu 3.4.6.

Lemat 3.4.12. *Położmy $a_1 = \frac{49}{100}$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{53}{100}$, $a_4 = \frac{54}{100}$, $a_5 = \frac{7}{10}$, $a_6 = \frac{71}{100}$, $a_7 = \frac{131}{100}$, $a_8 = \frac{132}{100}$, $a_9 = \frac{181}{100}$, $a_{10} = \frac{182}{100}$, $a_{11} = \frac{216}{100}$, $a_{12} = \frac{217}{100}$, $a_{13} = 4$, $a_{14} = 5$, $a_{15} = 6$, $a_{16} = 7$, $a_{17} = 8$, $a_{18} = 17$ oraz $a_{19} = 18$. Wówczas otrzymujemy, że $\dim \ker \nabla_q^2 \varphi(w(a_i), a_i) = \dim SO(3)(w(a_i)) = 3$ dla $i = 1, \dots, 19$ oraz indeks Morse'a $\nabla_q^2 \varphi(w(\cdot), \cdot)$ w a_i wynosi*

$$m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(a_i), a_i)) = \begin{cases} 8, & \text{gdy } i = 6, 13 \\ 7, & \text{gdy } i = 4, 5, 14 \\ 4, & \text{gdy } i = 2, 3, 15 \\ 3, & \text{gdy } i = 8, 9 \\ 2, & \text{gdy } i = 1, 12, 19 \\ 1, & \text{gdy } i = 16 \\ 0, & \text{gdy } i = 7, 10, 11, 17, 18 \end{cases} .$$

W poniższym twierdzeniu dowodzimy istnienia zjawiska bifurkacji w pobliżu rodziny trywialnej (3.4.19).

Twierdzenie 3.4.14. *Przy powyższych założeniach dla rodziny (3.4.19) zachodzi zjawisko bifurkacji, to znaczy w przedziałach $(0, \beta_1)$, (α_1, β_2) oraz $(\alpha_2, +\infty)$ istnieją parametry lokalnej i globalnej bifurkacji. Ponadto z rodziny (3.4.19) z segmentów $\mathcal{F}_{(a_i, a_{i+1})}$ dla każdego $i = 1, 3, 7, 9, 11, 15, 16, 18$ następuje bifurkacja centralnych konfiguracji posiadających inne symetrie.*

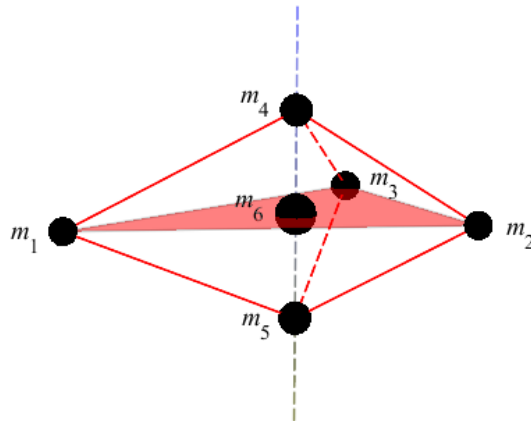
Dowód. Pierwsza część tezy jest konsekwencją Lematu 3.4.12 oraz Twierdzenia 3.2.2. Dla dowodu drugiej części tezy zauważmy, że możemy rozpatrywać podzbiór przestrzeni konfiguracji Ω , który jest niezmienniczy ze względu na potok gradientowy, to znaczy zbiór centralnych konfiguracji złożonych z sześciianu oraz ośmiościanu foremego

$$(q_1, \dots, q_{14}, m_1, \dots, m_{14}) = (w(a), M, M, M, M, M, M, M, M, m, m, m, m, m, m).$$

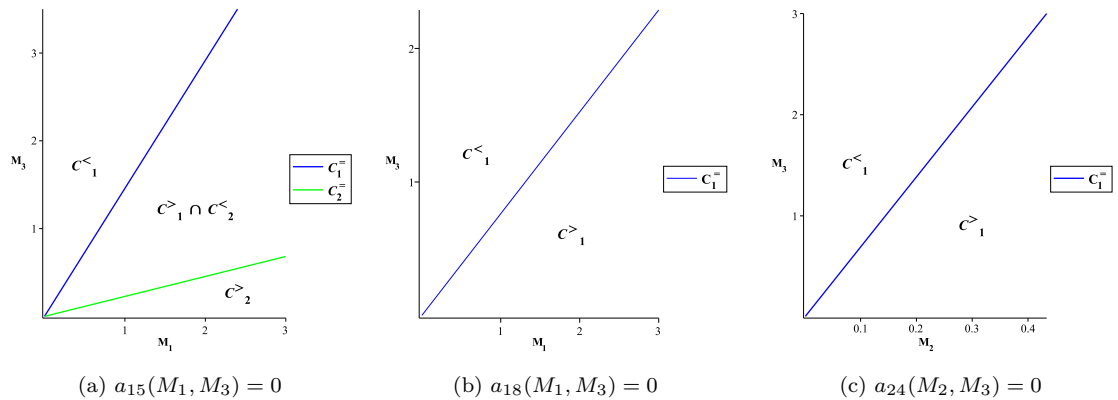
Dla prostoty notacji będziemy pisać (a, M, m) . Badanie centralnych konfiguracji w tym zbiorze sprowadza się do studiowania zer funkcji $F : ((0, \beta_1) \cup (\alpha_1, \beta_2) \cup (\alpha_2, +\infty)) \times (0, +\infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ danej formułą $F(a, M, m) = Mg(a) + mf(a)$ (patrz [18]). Dla rodziny trywialnej (3.4.19) otrzymujemy, że $F\left(a, 1, -\frac{g(a)}{f(a)}\right) = 0$ dla każdego $a \in (0, \beta_1) \cup (\alpha_1, \beta_2) \cup (\alpha_2, +\infty)$. Dodatkowo dla każdego $a \in (a_1, a_2) \cup (a_3, a_4) \cup (a_7, a_8) \cup (a_9, a_{10}) \cup (a_{11}, a_{12}) \cup (a_{15}, a_{16}) \cup (a_{16}, a_{17}) \cup (a_{18}, a_{19})$ numerycznie uzyskujemy, że $F'_a\left(a, 1, -\frac{g(a)}{f(a)}\right) = g'(a) - \frac{g(a)}{f(a)}f'(a) < 0$, a zatem, z twierdzenia o funkcji uwikłanej, z rozpatrywanych segmentów nie następuje bifurkacja centralnych konfiguracji złożonych z sześciianu i ośmiościanu foremego. Biorąc pod uwagę powyższe wnioskuje się, że rodziny bifurkujące z rodziny (3.4.19) z tych segmentów nie są złożone z sześciianu i ośmiościanu foremego, co kończy dowód. \square

3.4.7 Przestrzenna rodzina problemu $n + 3$ ciał dla $n = 3, 4, 6$

W 2011 roku Mello i Fernandes w artykule [53] rozważali rodzinę przestrzennych centralnych konfiguracji problemu $n + 3$ ciał. Konfiguracje te składają się z n ciał o równych masach usytuowanych w wierzchołkach n -kąta foremego (wpisanego w okrąg o promieniu ρ), dwóch ciał mających równe masy rozłożonych symetrycznie na prostej prostopadłej do płaszczyzny zawierającej wspomniany n -kąt foremny i przechodzącej przez jego środek symetrii oraz dodatkowego ciała usytuowanego w środku n -kąta foremego (dla $n = 3$ patrz Rysunek 3.4.13). Niech $m_1 = \dots = m_n = M_1$, $m_{n+1} = m_{n+2} = M_2$, $m_{n+3} = M_3$ oraz przez \hat{q}_i dla $i = 1, \dots, n+3$ oznaczamy położenia ciał. Załóżmy dodatkowo, że $\rho = b$, gdzie $b = |\hat{q}_{n+1} - \hat{q}_{n+3}| = |\hat{q}_{n+2} - \hat{q}_{n+3}|$. Konfiguracje tego typu będziemy oznaczać przez Rodzina $_{n+3}$ oraz badać istnienie bifurkacji w ich pobliżu w sytuacji sześciu, siedmiu i dziewięciu ciał.



Rysunek 3.4.13: Konfiguracja problemu $n + 3$ ciał dla $n = 3$.



Rysunek 3.4.14: Zbiór zer pewnych współczynników wielomianów charakterystycznych.

Dla problemu sześciu oraz siedmiu ciał podobne rodziny przestrzennych centralnych konfiguracji były rozważane w artykule [67]. Dokładniej, Pérez-Chavela i Rybicki w 2013 roku badali bifurkacje z rodzin o następujących parametrach: $(\rho, b) = (1, \frac{4}{5})$ oraz $(\rho, b) = (1, 1)$ (odpowiednio rodzina (F6) oraz (F7), patrz [67]). Dla $n = 3$ autorzy udowodnili istnienie zjawiska lokalnej bifurkacji w pobliżu rodziny trywialnej (F6), dla $n = 4$ natomiast zostało pokazane zachodzenie globalnej bifurkacji z rodziny (F7). Warto zanotować, że dla $n = 3$ rozważane rodziny (F6) oraz (3.4.20) są różne, także uzyskane rezultaty. Dla $n = 4$ natomiast w niniejszej rozprawie rozważamy te same rodziny jak w artykule [67] oraz uzyskujemy dokładnie te same rezultaty. Co więcej, uzyskujemy dodatkowe informacje dotyczące kształtu bifurkujących rodzin dla problemu sześciu, siedmiu oraz dziewięciu ciał wykluczając pewien typ symetrii.

W przypadku rodziny (F6) również możemy uzyskać dodatkowe informacje dotyczące typu symetrii bifurkujących rodzin. Rzeczywiście, ustalmy $\rho = 1$ oraz rozważmy podzbiór przestrzeni konfiguracji Ω , który jest niezmienniczy ze względu na potok gradientowy, to

znaczy rodzinę $(\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_6, m_1, m_1, m_1, m_4, m_4, m_6)$ (stosujemy oznaczenia jak w [67]). Dla skrót u piszemy (b, m_1, m_4, m_6) . Wówczas studiowanie centralnych konfiguracji w tym zbiorze sprowadza się do badania zer funkcji $F : (0, +\infty)^4 \rightarrow \mathbb{R}$ danej formułą $F(b, m_1, m_4, m_6) = -4b^3 \left(\sqrt{3}(1+b^2)^{\frac{3}{2}} - 9 \right) m_1 + \left(-24b^3 + 3(1+b^2)^{\frac{3}{2}} \right) m_4 - 12(1+b^2)^{\frac{3}{2}}(b-1)(b^2+b+1)m_6$. Dla rodziny trywialnej (F6) otrzymujemy, że $F\left(\frac{4}{5}, m_1, m_4, m_6(m_1, m_4)\right) = 0$ dla każdego $(m_1, m_4) \in \mathcal{O}$ (formuły na \mathcal{O} oraz $m_6(m_1, m_4)$ można znaleźć w Rozdziale 2 w [67]). Dodatkowo $F'_b\left(\frac{4}{5}, m_1, m_4, m_6(m_1, m_4)\right) < 0$ dla każdego $(m_1, m_4) \in \mathcal{O}$, a zatem z twierdzenia o funkcji uwikłanej nie następuje bifurkacja centralnych konfiguracji tego typu z rodziny trywialnej. Biorąc pod uwagę powyższe oraz Twierdzenie 2.2 w artykule [67] wnioskujemy, że rodziny bifurkujące z rodziny (F6) nie są tego typu.

Niech $n = 3$ oraz niech $M_2 = M_2(M_1, M_3) = \frac{9\sqrt{2}-4\sqrt{3}}{3(2\sqrt{2}-1)}M_1$. Zdefiniujemy $w : (0, +\infty)^2 \rightarrow \Omega$ formułą $w(M_1, M_3) = \left(b, 0, 0, -\frac{1}{2}b, \frac{\sqrt{3}}{2}b, 0, -\frac{1}{2}b, -\frac{\sqrt{3}}{2}b, 0, 0, 0, b, 0, 0, -b, 0, 0, 0 \right)$, gdzie masy M_1 i M_3 traktujemy jako parametry oraz odwzorowanie $m : (0, +\infty)^2 \rightarrow (0, +\infty)^6$ jak następuje $m(M_1, M_3) = (M_1, M_1, M_1, M_2(M_1, M_3), M_2(M_1, M_3), M_3)$. Niech ponadto

$$\mathcal{F} = \bigcup_{(M_1, M_3) \in (0, +\infty)^2} SO(3)(w(M_1, M_3)) \times \{(M_1, M_3)\} \subset \Omega \times \mathbb{R}^2. \quad (3.4.20)$$

Wówczas dla każdego $b > 0$ rodzina (3.4.20) jest rodziną centralnych konfiguracji. Niech

$$\begin{aligned} c_{11} &= c_{21} = 1, \\ c_{12} &= -\frac{595569615840}{1011091041119} - \frac{707791382322}{1011091041119}\sqrt{6} + \frac{796943118648}{1011091041119}\sqrt{3} + \frac{180859473864}{1011091041119}\sqrt{2}, \\ c_{22} &= -\frac{38992921173}{6223592159} - \frac{11635193584}{6223592159}\sqrt{6} + \frac{5794115502}{6223592159}\sqrt{3} + \frac{21291571566}{6223592159}\sqrt{2} \end{aligned}$$

oraz symbolem C_i^* będziemy oznaczać zbiór $\{(M_1, M_3) \in (0, +\infty)^2 : c_{i1}M_1 + c_{i2}M_3 * 0\}$, gdzie $* \in \{=, <, >, \leq, \geq\}$ oraz $i = 1, 2$.

W poniższym lemacie obliczamy indeksy Morse'a macierzy $\nabla_q^2 \varphi(w(M_1, M_3), (M_1, M_3))$, aby udowodnić istnienie nowych rodzin centralnych konfiguracji bifurkujących z rodziny trywialnej (3.4.20).

Lemat 3.4.13. *Przy powyższych założeniach otrzymujemy, że*

$$\dim \ker \nabla_q^2 \varphi(w(M_1, M_3), (M_1, M_3)) = \begin{cases} 5, & \text{gdy } (M_1, M_3) \in C_2^- \\ 4, & \text{gdy } (M_1, M_3) \in C_1^- \\ 3, & \text{gdy } (M_1, M_3) \notin C_1^- \cup C_2^- \end{cases}$$

oraz indeks Morse'a $\nabla_q^2\varphi(w(\cdot), \cdot)$ zależy od (M_1, M_3) w następujący sposób:

$$m^-(\nabla_q^2\varphi(w(M_1, M_3), (M_1, M_3))) = \begin{cases} 3, & \text{gdy } (M_1, M_3) \in C_1^< \\ 2, & \text{gdy } (M_1, M_3) \in C_1^> \cap C_2^< \\ 0, & \text{gdy } (M_1, M_3) \in C_2^> \end{cases} .$$

Dowód. Dla dowodu przypomnijmy najpierw, że $\dim \ker \nabla_q^2\varphi(w(M_1, M_3), (M_1, M_3)) \geq 3$, a zatem $a_{18}(M_1, M_3) = a_{17}(M_1, M_3) = a_{16}(M_1, M_3) = 0$, na podstawie Uwagi 3.2.7, gdzie $W_{(M_1, M_2)}(x) = x^{18} - a_1(M_1, M_3)x^{17} + \dots + a_{16}(M_1, M_3)x^2 - a_{17}(M_1, M_3)x + a_{18}(M_1, M_3)$ jest wielomianem charakterystycznym macierzy Hessego $\nabla_q^2\varphi(w(M_1, M_3), (M_1, M_3))$. Ponadto $a_{15}(M_1, M_3) = C_0(M_1, M_3)(c_{11}M_1 + c_{12}M_3)(c_{21}M_1 + c_{22}M_3)^2$, gdzie $C_0(M_1, M_3) \neq 0$ dla każdego $(M_1, M_3) \in (0, +\infty)^2$. Stąd $\dim \ker \nabla_q^2\varphi(w(M_1, M_3), (M_1, M_3)) = 3$ dla każdego $(M_1, M_3) \notin C_1^- \cup C_2^-$. Rozwiązania równania $a_{15}(M_1, M_3) = 0$ zostały przedstawione na Rysunku 3.4.14.(a). Analizując współczynniki $a_{14}(M_1, M_3)$ oraz $a_{13}(M_1, M_3)$ dowodzimy pierwszej części tezy. Dla dowodu drugiej części tezy zauważmy, że indeksy Morse'a macierzy Hessego są stałe na obszarach $C_1^<, C_1^=, C_1^> \cap C_2^<, C_2^=$ oraz $C_2^>$. Dlatego wystarczy obliczyć $m^-(\nabla_q^2\varphi(w(1, M_3), (1, M_3)))$ dla odpowiednich parametrów $M_3 \in (0, +\infty)$ korzystając z Uwagi 3.2.8, co kończy dowód. \square

Twierdzenie 3.4.15. *Przy powyższych założeniach dla rodziny (3.4.20) zachodzi zjawisko bifurkacji. Dokładniej,*

- (1) *z $SO(3)$ -orbity $\mathcal{F}_{(M_1, M_3)}$ zachodzi lokalna bifurkacja centralnych konfiguracji wtedy i tylko wtedy, gdy $(M_1, M_3) \in C_1^- \cup C_2^-$.*
- (2) *jeżeli $(M_1, M_3) \in C_1^-$, to $SO(3)$ -orbita $\mathcal{F}_{(M_1, M_3)}$ jest $SO(3)$ -orbitą globalnej bifurkacji, to znaczy $C_1^- \cap \mathcal{GLOB} = C_1^-$.*

Dowód. Z Lematu 3.4.13 warunek konieczny lokalnej bifurkacji, dany Twierdzeniem 3.2.1, jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $(M_1, M_3) \in C_1^- \cup C_2^-$. Wystarczy zatem pokazać, że parametry $(M_1, M_3) \in C_1^- \cup C_2^-$ spełniają również warunek dostateczny istnienia lokalnej bifurkacji. Rzeczywiście, z Lematu 3.4.13, Twierdzenia 3.2.2 oraz Uwagi 3.2.9 wnioskujemy, że różnica indeksów Morse'a $m^-(\nabla_q^2\varphi(w(M_1, M_3), (M_1, M_3)))$ pomiędzy obszarami $C_2^>$ oraz $C_1^> \cap C_2^<$ implikuje, że $(M_1, M_3) \in \mathcal{BLF}$, o ile $(M_1, M_3) \in C_2^-$. Podobnie zmiana indeksu Morse'a $m^-(\nabla_q^2\varphi(w(M_1, M_3), (M_1, M_3)))$ dla $C_1^> \cap C_2^<$ oraz $C_1^<$ o nieparzystą liczbę implikuje, że $(M_1, M_3) \in \mathcal{GLOB}$ dla $(M_1, M_3) \in C_1^-$, co kończy dowód. \square

Zauważmy, że możemy rozważać podzbiór przestrzeni konfiguracji Ω , który jest niezmienniczym

niczy ze względu na potok gradientowy, to znaczy rodzinę $Rodzina_{3+3}$

$$(q_1, \dots, q_6, m_1, \dots, m_6) = (\tilde{w}(b), M_1, M_1, M_1, M_2, M_2, M_3),$$

gdzie $\tilde{w}(b) = (b, 0, 0, -\frac{1}{2}b, \frac{\sqrt{3}}{2}b, 0, -\frac{1}{2}b, -\frac{\sqrt{3}}{2}b, 0, 0, 0, 0, b, 0, 0, -b, 0, 0, 0)$. W skrócie będziemy pisać (b, M_1, M_2, M_3) . Badanie centralnych konfiguracji w tym zbiorze sprowadza się do badania zer funkcji $F : (0, +\infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ danej formułą $F(M_1, M_2) = (4\sqrt{3} - 9\sqrt{2})M_1 + (6\sqrt{2} - 3)M_2$ (patrz [53]). Zauważmy, że rodzina trywialna (3.4.20) jest jedyną rodziną rozwiązań równania postaci $F(M_1, M_2) = 0$. Biorąc pod uwagę powyższe oraz Twierdzenie 3.4.15 uzyskujemy, że rodziny bifurkujące z rodziny (3.4.20) nie są typu $Rodzina_{3+3}$.

Niech $n = 4$ oraz załóżmy dodatkowo, że $M_2 = M_1$. Zdefiniujemy $w : (0, +\infty)^2 \rightarrow \Omega$ formułą $w(M_1, M_3) = (b, 0, 0, 0, b, 0, -b, 0, 0, 0, -b, 0, 0, 0, b, 0, 0, -b, 0, 0, 0)$, gdzie masy M_1 oraz M_3 są traktowane jako parametry oraz odwzorowanie $m : (0, +\infty)^2 \rightarrow (0, +\infty)^7$ jak następuje $m(M_1, M_3) = (M_1, M_1, M_1, M_1, M_1, M_1, M_3)$. Wówczas dla każdego $b > 0$ rodzina

$$\mathcal{F} = \bigcup_{(M_1, M_3) \in (0, +\infty)^2} SO(3)(w(M_1, M_3)) \times \{(M_1, M_3)\} \subset \Omega \times \mathbb{R}^2 \quad (3.4.21)$$

jest rodziną centralnych konfiguracji. Rodzina trywialna \mathcal{F} jest w szczególności rodziną przestrzennych centralnych konfiguracji ośmiościanu foremego z dodatkowym ciałem w środku masy. W ogólności możemy mówić o rodzinach centralnych konfiguracji brył platońskich oraz brył platońskich z dodatkowym ciałem w środku masy (dla przykładu patrz [10]).

Położmy $c_{11} = 1$, $c_{12} = -\frac{11580}{3007} + \frac{5400}{3007}\sqrt{2}$ oraz w dalszym ciągu przez C_1^* będziemy oznaczać zbiór postaci $\{(M_1, M_3) \in (0, +\infty)^2 : c_{11}M_1 + c_{12}M_3 * 0\}$, gdzie $*$ $\in \{=, <, >, \leq, \geq\}$. Poniżej formułujemy pomocniczy lemat, w którym obliczamy indeksy Morse'a macierzy Hessego $\nabla_q^2 \varphi(w(M_1, M_3), (M_1, M_3))$. Dowód poniższego lematu przebiega analogicznie do dowodu Lematu 3.4.13.

Lemat 3.4.14. *Przy powyższych założeniach otrzymujemy, że*

$$\dim \ker \nabla_q^2 \varphi(w(M_1, M_3), (M_1, M_3)) = \begin{cases} 6, & \text{gdy } (M_1, M_3) \in C_1^- \\ 3, & \text{gdy } (M_1, M_3) \notin C_1^- \end{cases}$$

oraz indeks Morse'a $\nabla_q^2 \varphi(w(\cdot), \cdot)$ zależy od (M_1, M_3) w następujący sposób:

$$m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(M_1, M_3), (M_1, M_3))) = \begin{cases} 3, & \text{gdy } (M_1, M_3) \in C_1^< \\ 0, & \text{gdy } (M_1, M_3) \in C_1^> \end{cases}.$$

Dowód. Z Uwagi 3.2.7 i warunku postaci $\dim \ker \nabla_q^2 \varphi(w(M_1, M_3), (M_1, M_3)) \geq 3$ mamy, że $a_{21}(M_1, M_3) = a_{20}(M_1, M_3) = a_{19}(M_1, M_3) = 0$ dla każdego $(M_1, M_3) \in (0, +\infty)^2$. Ponadto

$a_{18}(M_1, M_3) = C_0(M_1, M_3)(c_{11}M_1 + c_{12}M_3)^3$, gdzie $C_0(M_1, M_3) \neq 0$ dla $(M_1, M_3) \in (0, +\infty)^2$ (zbiór zer współczynnika $a_{18}(M_1, M_3)$ został przedstawiony na Rysunku 3.4.14.(b)). Dlatego $\dim \ker \nabla_q^2 \varphi(w(M_1, M_3), (M_1, M_3)) = 3$ dla każdego $(M_1, M_3) \notin C_1^-$. Analizując współczynniki $a_{17}(M_1, M_3)$, $a_{16}(M_1, M_3)$ i $a_{15}(M_1, M_3)$ mamy $\dim \ker \nabla_q^2 \varphi(w(M_1, M_3), (M_1, M_3)) = 6$ dla każdego $(M_1, M_3) \in C_1^-$. Dla dowodu drugiej części tezy wystarczy obliczyć indeksy Morse'a $m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(1, M_3), (1, M_3)))$ dla odpowiednich parametrów $M_3 \in (0, +\infty)$, korzystając z Uwagi 3.2.8, co kończy dowód. \square

Dowód poniższego twierdzenia jest analogiczny do dowodu Twierdzenia 3.4.15.

Twierdzenie 3.4.16. *Z $SO(3)$ -orbity $\mathcal{F}_{(M_1, M_3)}$ zachodzi globalna bifurkacja centralnych konfiguracji wtedy i tylko wtedy, gdy $(M_1, M_3) \in C_1^-$.*

Zauważmy, że możemy rozważać podzbiór przestrzeni konfiguracji Ω , który jest niezmienny ze względu na potok gradientowy, to znaczy Rodzina₄₊₃

$$(q_1, \dots, q_7, m_1, \dots, m_7) = (\tilde{w}(b), M_1, M_1, M_1, M_2, M_2, M_3),$$

gdzie $\tilde{w}(b) = (b, 0, 0, 0, b, 0, -b, 0, 0, 0, -b, 0, 0, 0, b, 0, 0, -b, 0, 0, 0)$ (lub krótko (b, M_1, M_2, M_3)). Wówczas badanie centralnych konfiguracji w tym zbiorze sprowadza się do studiowania zer funkcji $F : (0, +\infty)^3 \rightarrow \mathbb{R}$ danej formułą $F(b, M_1, M_2) = (2\sqrt{2} - 1)(M_1 - M_2)$ (patrz [53]). Zauważmy, że rodzina trywialna (3.4.21) jest jedyną rodziną rozwiązań równania postaci $F(b, M_1, M_2) = 0$. Biorąc pod uwagę powyższe oraz Twierdzenie 3.4.16 uzyskujemy, że rodziny bifurkujące z rodziny (3.4.21) nie są typu Rodzina₄₊₃.

W przypadku dziewięciu ciał założymy, że $M_1 = M_1(M_2, M_3) = \frac{3(2\sqrt{2}-1)}{18\sqrt{2}-4\sqrt{3}-15}M_2$ oraz niech $w : (0, +\infty)^2 \rightarrow \Omega$ będzie zdefiniowane następującą formułą: $w(M_2, M_3) = (b, 0, 0, \frac{1}{2}b, \frac{\sqrt{3}}{2}b, 0, -\frac{1}{2}b, \frac{\sqrt{3}}{2}b, 0, -b, 0, 0, -\frac{1}{2}b, -\frac{\sqrt{3}}{2}b, 0, \frac{1}{2}b, -\frac{\sqrt{3}}{2}b, 0, 0, 0, b, 0, 0, -b, 0, 0, 0)$, gdzie masy $M_2 > 0$ oraz $M_3 > 0$ traktujemy jako parametry. Odwzorowanie $m : (0, +\infty)^2 \rightarrow (0, +\infty)^9$ definiujemy jak następuje $m(M_2, M_3) = (M_1(M_2, M_3), M_1(M_2, M_3), M_1(M_2, M_3), M_1(M_2, M_3), M_1(M_2, M_3), M_1(M_2, M_3), M_1(M_2, M_3), M_2, M_2, M_3)$. Wówczas dla każdego $b > 0$ rodzina

$$\mathcal{F} = \bigcup_{(M_2, M_3) \in (0, +\infty)^2} SO(3)(w(M_2, M_3)) \times \{(M_2, M_3)\} \subset \Omega \times \mathbb{R}^2 \quad (3.4.22)$$

stanowi rodzinę centralnych konfiguracji. Położmy

$$\begin{aligned} c_{11} &= 1, \\ c_{12} &= \frac{4454305969647408}{2819357271674303} - \frac{6823822919094592}{2819357271674303} \sqrt{6} - \frac{11180452259095628}{2819357271674303} \sqrt{3} + \frac{22074771765513096}{2819357271674303} \sqrt{2} \end{aligned}$$

oraz przez C_1^* będziemy oznaczać zbiór postaci $\{(M_2, M_3) \in (0, +\infty)^2 : c_{11}M_2 + c_{12}M_3 * 0\}$,

gdzie $*$ $\in \{=, <, >, \leq, \geq\}$. Poniżej formułujemy pomocniczy lemat, a następnie dowodzimy istnienia zjawiska bifurkacji w otoczeniu rodziny (3.4.22). Dowody przebiegają analogicznie jak powyżej.

Lemat 3.4.15. *Przy powyższych założeniach otrzymujemy, że*

$$\dim \ker \nabla_q^2 \varphi(w(M_2, M_3), (M_2, M_3)) = \begin{cases} 5, & \text{gdy } (M_2, M_3) \in C_1^- \\ 3, & \text{gdy } (M_2, M_3) \notin C_1^- \end{cases}$$

oraz indeks Morse'a $\nabla_q^2 \varphi(w(\cdot), \cdot)$ zależy od (M_2, M_3) w następujący sposób:

$$m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(M_2, M_3), (M_2, M_3))) = \begin{cases} 6, & \text{gdy } (M_2, M_3) \in C_1^< \\ 4, & \text{gdy } (M_2, M_3) \in C_1^> \end{cases}.$$

Dowód. Dla dowodu zauważmy tylko, że $a_{24}(M_2, M_3) = C_0(M_2, M_3)(c_{11}M_2 + c_{12}M_3)^2$, gdzie $C_0(M_2, M_3) \neq 0$ dla $(M_2, M_3) \in (0, +\infty)^2$ (zbiór zer współczynnika $a_{24}(M_2, M_3)$ został przedstawiony na Rysunku 3.4.14.(c)). \square

Twierdzenie 3.4.17. *Z $SO(3)$ -orbity $\mathcal{F}_{(M_2, M_3)}$ następuje lokalna bifurkacja wtedy i tylko wtedy, gdy $(M_2, M_3) \in C_1^-$.*

Zauważmy, że możemy rozważać podzbiór przestrzeni konfiguracji Ω , który jest niezmienny ze względu na potok gradientowy, to znaczy Rodzina $_{6+3}$

$$(q_1, \dots, q_9, m_1, \dots, m_9) = (\tilde{w}(b), M_1, M_1, M_1, M_1, M_1, M_1, M_2, M_2, M_3)$$

(lub krótko (b, M_1, M_2, M_3)). Badanie centralnych konfiguracji w tym zbiorze sprowadza się do badania zer funkcji $F : (0, +\infty)^3 \rightarrow \mathbb{R}$ danej formułą $F(b, M_1, M_2) = (18\sqrt{2} - 4\sqrt{3} - 15)M_1 + (3 - 6\sqrt{2})M_2$ (patrz [53]). Zauważmy, że rodzina (3.4.22) jest jedyną rodziną rozwiązań równania $F(b, M_1, M_2) = 0$. Powyższe oraz Twierdzenie 3.4.17 implikuje zatem, że rodziny bifurkujące z rodziny (3.4.22) nie są typu Rodzina $_{6+3}$.

Bibliografia

- [1] A. Albouy, *The symmetric central configurations of four equal masses*, Hamiltonian dynamics and celestial mechanics (Seattle, WA, 1995), 131–135, Contemp. Math. 198, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [2] A. Albouy, V. Kaloshin, *Finiteness of central configurations of five bodies in the plane*, Ann. of Math. (2) 176(1) (2012), 535–588.
- [3] Z. Balanov, W. Krawcewicz, S. Rybicki, H. Steinlein, *A short treatise on the equivariant degree theory and its applications*, J. Fixed Point Theory Appl. 8(1) (2010), 1–74.
- [4] Z. Balanov, W. Krawcewicz, H. Steinlein, *Applied equivariant degree*, With a preface by P. P. Zabreiko, Preface translated from the Russian by S. Solomonovich, AIMS Series on Differential Equations & Dynamical Systems 1, American Institute of Mathematical Sciences (AIMS), Springfield, MO, 2006.
- [5] T. Bartsch, *Topological methods for variational problems with symmetries*, Lecture Notes in Mathematics 1560, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [6] G. E. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Pure and Applied Mathematics 46, Academic Press, New York-London, 1972.
- [7] B. P. Brooks, *The coefficients of the characteristic polynomial in terms of the eigenvalues and the elements of an $n \times n$ matrix*, Appl. Math. Lett. 19(6) (2006), 511–515.
- [8] L. E. J. Brouwer, *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. 71(1) (1911), 97–115.
- [9] R. F. Brown, *A topological introduction to nonlinear analysis*, Second edition, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2004.
- [10] F. Cedó, J. Llibre, *Symmetric central configurations of the spatial n -body problem*, J. Geom. Phys. 6(3) (1989), 367–394.
- [11] C. Chicone, *Ordinary differential equations with applications*, Texts in Applied Mathematics 34, Springer-Verlag, New York, 1999.

- [12] C. Conley, *Isolated invariant sets and the Morse index*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics 38, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1978.
- [13] M. Corbera, J. Delgado, J. Llibre, *On the existence of central configurations of p nested n -gons*, Qual. Theory Dyn. Syst. 8(2) (2009), 255–265.
- [14] M. Corbera, J. Llibre, *Central configurations of nested regular polyhedra for the spatial $2n$ -body problem*, J. Geom. Phys. 58(9) (2008), 1241–1252.
- [15] M. Corbera, J. Llibre, *Central configurations of nested rotated regular tetrahedra*, J. Geom. Phys. 59(10) (2009), 1379–1394.
- [16] M. Corbera, J. Llibre, E. Pérez-Chavela, *Equilibrium points and central configurations for the Lennard-Jones 2- and 3-body problems*, Celestial Mech. Dynam. Astronom. 89(3) (2004), 235–266.
- [17] M. Corbera, J. Llibre, E. Pérez-Chavela, *Symmetric planar non-collinear relative equilibria for the Lennard-Jones potential 3-body problem with two equal masses*, Proceedings of the 6th Conference on Celestial Mechanics (Spanish), 93–114, Monogr. Real Acad. Ci. Exact. Fís.-Quím. Nat. Zaragoza 25, Real Acad. Ci. Exact., Fís. Quím. Nat. Zar, Zaragoza, 2004.
- [18] M. Corbera, J. Llibre, E. Pérez-Chavela, *Spatial bi-stacked central configurations formed by two dual regular polyhedra*, J. Math. Anal. Appl. 413(2) (2014), 648–659.
- [19] E. N. Dancer, *An implicit function theorem with symmetries and its application to non-linear eigenvalue equations*, Bull. Austral. Math. Soc. 21(1) (1980), 81–91.
- [20] E. N. Dancer, K. Gėba, S. M. Rybicki, *Classification of homotopy classes of equivariant gradient maps*, Fund. Math. 185(1) (2005), 1–18.
- [21] R. Descartes, *The Geometry of René Descartes. With a facsimile of the first edition, 1637*, Translated by D. E. Smith and M. L. Latham, Dover Publications, Inc., New York, N. Y., 1954.
- [22] T. tom Dieck, *Transformation groups and representation theory*, Lecture Notes in Mathematics 766, Springer, Berlin, 1979.
- [23] T. tom Dieck, *Transformation groups*, De Gruyter Studies in Mathematics 8, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1987.
- [24] J. Dieudonné, *Foundations of modern analysis*, Enlarged and corrected printing, Pure and Applied Mathematics 10-I, Academic Press, New York-London, 1969.

- [25] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, *Lie groups*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [26] L. Euler, *De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium*, Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop. 11 (1767), 144-151.
- [27] A. C. Fernandes, L. F. Mello, M. M. da Silva, *Exemplos de configurações centrais planares encaixantes*, Revista Brasileira de Ensino de Física 35(2) (2013), 2305.
- [28] M. J. Field, *Dynamics and symmetry*, ICP Advanced Texts in Mathematics 3, Imperial College Press, London, 2007.
- [29] A. Floer, *A refinement of the Conley index and an application to the stability of hyperbolic invariant sets*, Ergodic Theory Dynam. Systems 7(1) (1987), 93–103.
- [30] A. Floer, E. Zehnder, *The equivariant Conley index and bifurcations of periodic solutions of Hamiltonian systems*, Ergodic Theory Dynam. Systems 8* (1988), Charles Conley Memorial Issue, 87–97.
- [31] C. García-Azpeitia, J. Ize, *Global bifurcation of planar and spatial periodic solutions from the polygonal relative equilibria for the n -body problem*, J. Differential Equations 254(5) (2013), 2033–2075.
- [32] K. Gęba, *Degree for gradient equivariant maps and equivariant Conley index*, Topological nonlinear analysis II (Frascati, 1995), 247–272, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. 27, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1997.
- [33] K. Gęba, I. Massabò, A. Vignoli, *On the Euler characteristic of equivariant gradient vector fields*, Boll. Un. Mat. Ital. A (7) 4(2) (1990), 243-251.
- [34] K. Gęba, S. Rybicki, *Some remarks on the Euler ring $U(G)$* , J. Fixed Point Theory Appl. 3(1) (2008), 143–158.
- [35] M. Gidea, J. Llibre, *Symmetric planar central configurations of five bodies: Euler plus two*, Celestial Mech. Dynam. Astronom. 106(1) (2010), 89–107.
- [36] A. Granas, J. Dugundji, *Fixed point theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [37] J. Gulgowski, W. Marzantowicz, *Wstęp do analizy nieliniowej część 1: Teoria stopnia*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 2003.
- [38] M. Hampton, R. Moeckel, *Finiteness of relative equilibria of the four-body problem*, Invent. Math. 163(2) (2006), 289-312.

- [39] J. Ize, *Topological bifurcation*, Topological nonlinear analysis, 341-463, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. 15, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1995.
- [40] K. Kawakubo, *The theory of transformation groups*, Translated from the 1987 Japanese edition, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1991.
- [41] J. Kestin, *A Course in Thermodynamics*, Revised printing, Volume I, Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1979.
- [42] M. Kowalczyk, *Bifurcations of critical orbits of invariant potentials with applications to bifurcations of central configurations of the N -body problem*, Nonlinear Anal. Real World Appl. 24 (2015), 108-125.
- [43] M. Kowalczyk, *Topological bifurcations of spatial central configurations in the N -body problem*, Celestial Mech. Dynam. Astronom. 124(2) (2016), 201-214.
- [44] J. L. Lagrange, *Essai sur le problème des trois corps*, Œuvres complètes 6 (1772), 229-331.
- [45] J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics 218, Springer, New York, 2013.
- [46] J. Lei, M. Santoprete, *Rosette central configurations, degenerate central configurations and bifurcations*, Celestial Mech. Dynam. Astronom. 94(3) (2006), 271-287.
- [47] P. W. Lindstrom, *The number of planar central configurations is finite when $n - 1$ mass positions are fixed*, Trans. Amer. Math. Soc. 353(1) (2001), 291-311.
- [48] J. Llibre, L. F. Mello, *New central configurations for the planar 5-body problem*, Celestial Mech. Dynam. Astronom. 100(2) (2008), 141-149.
- [49] J. Llibre, R. Moeckel, C. Simó, *Central configurations, periodic orbits, and Hamiltonian systems*, Lecture notes given at the Centre de Recerca Matemàtica (CRM), Barcelona, January 27-31, 2014, Edited by M. Corbera, J. M. Cors and E. Ponce, Advanced Courses in Mathematics, CRM Barcelona, Birkhäuser/Springer, Basel, 2015.
- [50] Y. Long, S. Sun, *Four-body central configurations with some equal masses*, Arch. Ration. Mech. Anal. 162(1) (2002), 25-44.
- [51] A. J. Maciejewski, S. M. Rybicki, *Global bifurcations of periodic solutions of the restricted three body problem*, Celestial Mech. Dynam. Astronom. 88(3) (2004), 293-324.
- [52] K. H. Mayer, *G -invariante Morse-Funktionen*, Manuscripta Math. 63(1) (1989), 99-114.

- [53] L. F. Mello, A. C. Fernandes, *New classes of spatial central configurations for the $n + 3$ -body problem*, Nonlinear Anal. Real World Appl. 12(1) (2011), 723-730.
- [54] J. C. Merkel, *Morse theory and central configurations in the spatial N -body problem*, J. Dynam. Differential Equations 20(3) (2008), 653-668.
- [55] K. R. Meyer, *Bifurcation of a central configuration*, Celestial Mech. 40(3-4) (1987), 273-282.
- [56] K. R. Meyer, D. S. Schmidt, *Bifurcations of relative equilibria in the 4- and 5-body problem*, Ergodic Theory Dynam. Systems 8* (1988), Charles Conley Memorial Issue, 215-225.
- [57] K. R. Meyer, D. S. Schmidt, *Bifurcations of relative equilibria in the N -body and Kirchhoff problems*, SIAM J. Math. Anal. 19(6) (1988), 1295-1313.
- [58] R. Moeckel, *On central configurations*, Math. Z. 205(4) (1990), 499-517.
- [59] F. R. Moulton, *The straight line solutions of the problem of n bodies*, Ann. of Math. (2) 12(1) (1910), 1-17.
- [60] L. Nirenberg, *Topics in nonlinear functional analysis*, With a chapter by E. Zehnder, Notes by R. A. Artino, Lecture Notes, 1973-1974, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, New York, 1974.
- [61] D. O'Regan, Y. J. Cho, Y.-Q. Chen, *Topological degree theory and applications*, Series in Mathematical Analysis and Applications 10, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006.
- [62] F. Pacella, *Central configurations of the N -body problem via equivariant Morse theory*, Arch. Rational Mech. Anal. 97(1) (1987), 59-74.
- [63] A. Palczewski, *Równania różniczkowe zwyczajne. Teoria i metody numeryczne z wykorzystaniem komputerowego systemu obliczeń symbolicznych*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1999.
- [64] J. I. Palmore, *Classifying relative equilibria. I*, Bull. Amer. Math. Soc. 79(5) (1973), 904-908.
- [65] J. I. Palmore, *Measure of degenerate relative equilibria. I*, Ann. of Math. (2) 104(3) (1976), 421-429.
- [66] A. Parusiński, *Gradient homotopies of gradient vector fields*, Studia Math. 96(1) (1990), 73-80.

- [67] E. Pérez-Chavela, S. Rybicki, *Topological bifurcations of central configurations in the N -body problem*, *Nonlinear Anal. Real World Appl.* 14(1) (2013), 690-698.
- [68] E. Pérez-Chavela, S. Rybicki, D. Strzelecki, *Symmetric Liapunov center theorem*, *Calc. Var. Partial Differential Equations* 56(2) (2017), Art. 26, 23.
- [69] E. Pérez-Chavela, M. Santoprete, *Convex four-body central configurations with some equal masses*, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 185(3) (2007), 481-494.
- [70] L. M. Perko, E. L. Walter, *Regular polygon solutions of the N -body problem*, *Proc. Amer. Math. Soc.* 94(2) (1985), 301–309.
- [71] H. Pollard, *Mathematical introduction to celestial mechanics*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1966.
- [72] P. J. Rabier, *Symmetries, topological degree and a theorem of Z. Q. Wang*, *Rocky Mountain J. Math.* 24(3) (1994), 1087–1115.
- [73] P. H. Rabinowitz, *Some global results for nonlinear eigenvalue problems*, *J. Functional Analysis* 7(3) (1971), 487-513.
- [74] P. H. Rabinowitz, *A global theorem for nonlinear eigenvalue problems and applications*, *Contributions to nonlinear functional analysis (Proc. Sympos., Math. Res. Center, Univ. Wisconsin, Madison, Wis., 1971)*, 11–36, Academic Press, New York, 1971.
- [75] S. Rybicki, *Degree for equivariant gradient maps*, *Milan J. Math.* 73 (2005), 103-144.
- [76] S. M. Rybicki, *Współmiennicze odwzorowania gradientowe i ich zastosowania*, *Wiadom. Mat.* 45(1) (2009), 25–46.
- [77] D. G. Saari, *On the role and the properties of n -body central configurations*, *Proceedings of the Sixth Conference on Mathematical Methods in Celestial Mechanics (Math. Forschungsinst., Oberwolfach, 1978)*, Part I, *Celestial Mech.* 21(1) (1980), 9–20.
- [78] D. Salamon, *Connected simple systems and the Conley index of isolated invariant sets*, *Trans. Amer. Math. Soc.* 291(1) (1985), 1-41.
- [79] M. Sekiguchi, *Bifurcation of central configuration in the $2N + 1$ body problem*, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* 90(3-4) (2004), 355-360.
- [80] R. Seydel, *Practical bifurcation and stability analysis*, Third edition, *Interdisciplinary Applied Mathematics* 5, Springer, New York, 2010.

- [81] J. Shi, Z. Xie, *Classification of four-body central configurations with three equal masses*, J. Math. Anal. Appl. 363(2) (2010), 512–524.
- [82] M. Shub, *Appendix to Smale’s paper: Diagonals and relative equilibria*, Manifolds - Amsterdam 1970, Proc. Nuffic Summer School, 199–201, Lecture Notes in Mathematics 197, Springer, Berlin, 1971.
- [83] S. Smale, *Topology and mechanics. II. The planar n -body problem*, Invent. Math. 11 (1970), 45–64.
- [84] S. Smale, *Mathematical problems for the next century*, Math. Intelligencer 20(2) (1998), 7–15.
- [85] J. Smoller, *Shock waves and reaction-diffusion equations*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Science] 258, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983.
- [86] J. Smoller, A. G. Wasserman, *Bifurcation and symmetry-breaking*, Invent. Math. 100(1) (1990), 63–95.
- [87] X. Su, C. Deng, *Two classes of stacked central configurations for the spatial $2n + 1$ -body problem: nested regular polyhedra plus one*, J. Geom. Phys. 76 (2014), 1–9.
- [88] F. Takens, *Some remarks on the Böhme-Berger bifurcation theorem*, Math. Z. 129 (1972), 359–364.
- [89] Z. Wang, F. Li, *A note on the two nested regular polygonal central configurations*, Proc. Amer. Math. Soc. 143(11) (2015), 4817–4822.
- [90] A. G. Wasserman, *Equivariant differential topology*, Topology 8 (1969), 127–150.
- [91] A. Wintner, *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*, Princeton Mathematical Series 5, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1941.

Spis rysunków

2.1.1.	Lokalna bifurkacja ze zbioru G -orbit $\mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]} \subset \mathcal{F}$	46
2.1.2.	Globalna bifurkacja ze zbioru G -orbit $\mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]} \subset \mathcal{F}$	47
2.4.3.	Otoczenia $U \subset \Omega \times \mathbb{R}$ oraz $\Theta^\pm \subset \Omega$ zbiorów, odpowiednio, $\mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]}$ i $G(w(\rho^\pm))$	55
2.4.4.	Otoczenia $Q \subset \Omega \times \mathbb{R}$ oraz $\Theta^\pm \subset \Omega$ zbiorów, odpowiednio, $\mathcal{F}_{(\rho^-, \rho^+)}$ i $G(w(\rho^\pm))$	56
2.4.5.	Otoczenia $Q \subset \Omega \times \mathbb{R}$, $\Theta^\pm \subset \Omega$ oraz $(cl(\mathcal{C}([\rho^-, \rho^+]) \setminus \mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]}) (\varepsilon_0) \subset \Omega \times \mathbb{R}$ zbiorów, odpowiednio, $\mathcal{F}_{(\rho^-, \rho^+)}$, $G(w(\rho^\pm))$ i $cl(\mathcal{C}([\rho^-, \rho^+]) \setminus \mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]})$	57
2.4.6.	Składowa spójności $\mathcal{C}([\rho_k^-, \rho_k^+])$ oraz zbiór G -orbit $\mathcal{F}_{[\rho_k^-, \rho_k^+]}$ dla $k = 0, \dots, m$	60
2.4.7.	Dla $k = 0, \dots, m$ otoczenia $\Theta_k^+ \times (\rho_k^+ - \alpha, \rho_k^+)$ oraz $\Theta_k^- \times (\rho_k^-, \rho_k^- + \alpha)$	61
2.4.8.	Otoczenia $Q_k \subset \Omega \times \mathbb{R}$, $\Theta_k^\pm \subset \Omega$ oraz $W \subset \Omega \times \mathbb{R}$	62
2.4.9.	Stopnie $\nabla_G\text{-deg}(\nabla_v \varphi(\cdot, \rho_k^\pm), \Theta_k^\pm)$ i $\nabla_G\text{-deg}(\nabla_v \varphi(\cdot, \rho_k^\pm), (U \cap (\Omega \times \{\rho_k^\pm\})) \setminus cl(\Theta_k^\pm))$ dla $k = 0, \dots, m$ oraz zbiór $U \subset \Omega \times \mathbb{R}$	64
3.3.1.	Sześć ciał usytuowanych w wierzchołkach sześciokąta foremnego z dodatko- wym ciałem w środku masy	75
3.3.2.	Osiem ciał usytuowanych w wierzchołkach dwóch zagnieżdżonych kwadratów	78
3.3.3.	Trzyście ciał w konfiguracji rozety	81
3.3.4.	Zbiór zer współczynnika a_{25} oraz obszary c_3 , c_5 , c_2 i c_0 , dla których $a_{25} \neq 0$	82
3.3.5.	Zbiór czterech parametrów lokalnej bifurkacji dla rodziny konfiguracji rozety parametryzowanej masą m_1	85
3.4.6.	Centralna konfiguracja dwóch zagnieżdżonych czworościanów foremnych Typu I	87
3.4.7.	Centralne konfiguracje dwóch zagnieżdżonych czworościanów foremnych Typu II	89
3.4.8.	Centralna konfiguracja dwóch zagnieżdżonych ośmiościanów foremnych	91
3.4.9.	Centralna konfiguracja dwóch zagnieżdżonych ośmiościanów foremnych z do- datkowym ciałem w środku masy	93
3.4.10.	Szesnaście ciał w konfiguracji dwóch zagnieżdżonych sześciąt	95
3.4.11.	Siedemnaście ciał w konfiguracji dwóch zagnieżdżonych sześciąt z dodat- kowym ciałem w środku masy	97
3.4.12.	Czternaście ciał w konfiguracji złożonej z sześcianu i ośmiościanu foremnego	99
3.4.13.	Konfiguracja problemu $n + 3$ ciał dla $n = 3$	102

3.4.14. Zbiór zer pewnych współczynników wielomianów charakterystycznych 102

Indeks symboli

Bifurkacje

\mathcal{BIF}	zbiór parametrów lokalnej bifurkacji, 46
$\mathcal{C}([\rho^-, \rho^+])$	spójna składowa $cl(\{(v, \rho) \in (\Omega \times \mathbb{R}) \setminus \mathcal{F} : \nabla_v \varphi(v, \rho) = 0\}) \cup \mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]}$ zawierająca $\mathcal{F}_{[\rho^-, \rho^+]}$, 46
$\mathcal{C}(\rho_0)$	spójna składowa $cl(\{(v, \rho) \in (\Omega \times \mathbb{R}) \setminus \mathcal{F} : \nabla_v \varphi(v, \rho) = 0\})$ zawierająca \mathcal{F}_{ρ_0} , 46
\mathcal{F}	rodzina G -orbit rozwiązań trywialnych równania $\nabla_v \varphi(v, \rho) = 0$, 46
\mathcal{F}_ρ	G -orbita $G(w(\rho)) \times \{\rho\}$, 46
\mathcal{F}_X	zbiór G -orbit rozwiązań trywialnych równania $\nabla_v \varphi(v, \rho) = 0$, 46
\mathcal{GLOB}	zbiór parametrów globalnej bifurkacji, 47
$BIF_{[\rho^-, \rho^+]}$	indeks bifurkacji dla odcinka $[\rho^-, \rho^+]$, 48
w	krzywa rozwiązań trywialnych równania $\nabla_v \varphi(v, \rho) = 0$, 46

Grupy

\mathbb{Z}_m	grupa addytywna klas reszt modulo m , 27
$\mathbf{0} \in U(G)$	element zerowy pierścienia $U(G)$, 29
$\mathbf{1} \in U(G)$	element neutralny pierścienia $U(G)$, 28
$\overline{sub}(G)$	zbiór domkniętych podgrup grupy G , 17
$e \in G$	element neutralny grupy G , 16
G	grupa Liego, 18
G_x	grupa izotropii x , 17
$U(G)$	pierścień Eulera, 28

Macierze

$\det B$	wyznacznik macierzy, 16
$\text{diag}(B_1, \dots, B_n)$	macierz diagonalna z macierzami B_1, \dots, B_n na przekątnej, 16
$\text{diag}(b_1, \dots, b_n)$	macierz diagonalna z liczbami b_1, \dots, b_n na przekątnej, 16

$\Phi(\phi)$	specjalna macierz ortogonalna stopnia 2, 16
$\text{trace}(B)$	śląd macierzy, 16
$B(v_0)$	element rozkładu hesjanu na \mathbb{W}^H , 21
B^T	transpozycja macierzy, 16
B^{-1}	macierz odwrotna, 16
$C(v_0)$	element rozkładu hesjanu na $(\mathbb{W}^H)^\perp$, 21
$Gl(n)$	zbiór macierzy odwracalnych, 16
Id_n	macierz identycznościowa, 15
J	macierz symplektyczna, 71
$M(n)$	zbiór macierzy kwadratowych, 16
$m^-(B)$	indeks Morse'a macierzy symetrycznej, 16
$O(n)$	zbiór macierzy ortogonalnych, 16
$SO(2)$	zbiór specjalnych macierzy ortogonalnych stopnia 2, 16
$SO(n)$	zbiór specjalnych macierzy ortogonalnych, 16
W_ρ	wielomian charakterystyczny hesjanu $\nabla_q^2\varphi(w(\rho), \rho)$, 73

Mechanika nieba

γ	stała grawitacji, 67
λ	dodatnia stała występująca w równaniu na centralne konfiguracje, 69
C	całka momentu pędu, 72
E	całka energii, 72
I	moment bezwładności N punktów materialnych, 69
M	macierz mas, 68
m_j	masa j -tego ciała, 67
q_C	środek masy N punktów materialnych, 69
q_j	położenie j -tego ciała, 67
U	potencjał newtonowski, 68

Niezmiennicza topologia i odwzorowania

$(\nabla\varphi)^G$	obcięcie odwzorowania $\nabla\varphi$ do przestrzeni punktów stałych, 20
$(X, *)$	punktowana G -przestrzeń, 16
(X, A)	para G -przestrzeni, 25
(X, G, ς)	G -działanie na przestrzeni X , 16
$(X/A, [A])$	przestrzeń otrzymana z X przez sklejenie zbioru A do punktu, 25
$\alpha(v)$	29
$\chi_G(X)$	G -niezmiennicza charakterystyka Eulera, 28
$\nabla_G\text{-deg}(\nabla\varphi, \Omega)$	stopień G -współzmiennicznych odwzorowań gradientowych 37

$\mathcal{F}(G)$	podkategoria skończonych G -CW-kompleksów, 28
$\mathcal{F}_*(G)$	podkategoria skończonych punktowanych G -CW-kompleksów, 28
$\nabla\varphi$	gradient potencjału φ , 15
$\nabla^2\varphi$	hesjan potencjału φ , 15
$\nabla_v\varphi$	gradient potencjału φ ze względu na zmienną v , 15
$\omega(v)$	29
Ω^H	zbiór punktów stałych działania grupy H , 19
$\Omega_{(H)}$	zbiór punktów o grupie izotropii sprzężonej z H , 19
$\Omega_{<(H)}$	zbiór punktów o grupie izotropii, która nie jest sprzężona z H i jest podsprzężona z H , 19
$\Omega_{\leq(H)}$	zbiór punktów o grupie izotropii podsprzężonej z H , 19
$\tau(G)$	kategoria zwartych G -przestrzeni, 24
$\tau(H)$	kategoria zwartych H -przestrzeni, 24
$\tau_*(G)$	kategoria zwartych punktowanych G -przestrzeni, 24
$\tau_*(H)$	kategoria zwartych punktowanych H -przestrzeni, 24
$\varphi(B(\mathbb{R}^k) \times G/H)$	otwarta niezmiennicza k -komórka, 26
$\varphi(D(\mathbb{R}^k) \times G/H)$	domknięta niezmiennicza k -komórka, 26
$\varphi(D(\mathbb{R}^k) \times G/H)$	niezmiennicza k -komórka typu $(k, (H))$, 26
φ^G	obciążenie potencjału φ do przestrzeni punktów stałych, 20
$C_G^k(\mathbb{V}, \mathbb{R})$	zbiór G -niezmiennicznych potencjałów klasy C^k , 20
$C_G^k(\mathbb{V} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$	20
$C_G^k(\Omega, \mathbb{R})$	20
$C_G^k(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$	20
$C_G^l(\mathbb{V}, \mathbb{V})$	zbiór G -współzmiennicznych odwzorowań klasy C^l , 20
$C_G^l(\mathbb{V} \times \mathbb{R}, \mathbb{V})$	20
$C_G^l(\Omega, \mathbb{V})$	20
$C_G^l(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{V})$	20
$C_G(\mathbb{V}, \mathbb{R})$	zbiór G -niezmiennicznych potencjałów klasy C^0 , 20
$C_G(\mathbb{V}, \mathbb{V})$	zbiór G -współzmiennicznych odwzorowań klasy C^0 , 20
$C_G(\mathbb{V} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$	20
$C_G(\mathbb{V} \times \mathbb{R}, \mathbb{V})$	20
$C_G(\Omega, \mathbb{R})$	20
$C_G(\Omega, \mathbb{V})$	20
$C_G(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$	20
$C_G(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{V})$	20
$CI_G(S, \eta)$	G -indeks Conley'a, 31

$G(x)$	G -orbita x , 17
$G \times_H f$	18
$G \times_H X$	17
GU	18
N^+	31
X/A	przestrzeń otrzymana z X przez sklejenie zbioru A do punktu, $(X/A, [A])$, 25
$X \sqcup Y$	suma rozłączna G -przestrzeni, 26
$X \vee Y$	bukiet punktowanych G -przestrzeni, 28
$X \wedge Y$	zawieszenie punktowanych G -przestrzeni, 28
X^+	G -przestrzeń z dodanym punktem bazowym, 17
X^+	G -przestrzeń z dodanym punktem bazowym, 28

Reprezentacje

$(T_{v_0}\Omega_{(H)})^\perp$	dopełnienie ortogonalne przestrzeni stycznej, 21
$(T_{v_0}G(v_0))^\perp$	dopełnienie ortogonalne przestrzeni stycznej, 21
$\mathbb{R}[1, 0]$	jednowymiarowa trywialna $SO(2)$ -reprezentacja, 19
$\mathbb{R}[1, m]$	ortogonalna $SO(2)$ -reprezentacja, 19
$\mathbb{R}[k, m]$	suma prosta k kopii $SO(2)$ -reprezentacji $\mathbb{R}[1, m]$, 19
\mathbb{V}	reprezentacja zwartej grupy Liego, 19
\mathbb{V}^G	zbiór punktów stałych, 20
\mathbb{W}	dopełnienie ortogonalne przestrzeni stycznej, $(T_{v_0}G(v_0))^\perp$, 21
ϱ	ciągły homomorfizm grup dla \mathbb{V} , 19
ϱ_m	ciągły homomorfizm grup dla $\mathbb{R}[1, m]$, 19
$T_{v_0}\Omega_{(H)}$	przestrzeń styczna do $\Omega_{(H)}$ w punkcie v_0 , 21
$T_{v_0}G(v_0)$	przestrzeń styczna do $G(v_0)$ w punkcie v_0 , 21

Równoważności i uporządkowania

(H)	klasa sprzężoności podgrupy H , 17
$<$	dla klas sprzężoności podgrup, 17
$[(X, A)]_G$	typ G -homotopii (X, A) , 25
$[g, x]$	klasa abstrakcji (g, x) względem \sim , 17
$[x]$	klasa abstrakcji x względem \sim , 17
$[X]_G$	typ G -homotopii X , 25
$[Y]_H$	typ H -homotopii Y , 25
\leq	dla klas sprzężoności podgrup, 17

$\mathcal{F}[G]$	zbiór typów G -homotopii skończonych G -CW-kompleksów, 28
$\mathcal{F}_*[G]$	zbiór typów G -homotopii skończonych punktowanych G -CW-kompleksów, 28
$\overline{\text{sub}}[G]$	zbiór klas sprzężoności, 17
\sim	dla G -przestrzeni, 17
$\tau[G]$	zbiór typów G -homotopii zwartych G -przestrzeni, 25
$\tau[H]$	zbiór typów H -homotopii zwartych H -przestrzeni, 25
$\tau_*[G]$	zbiór typów G -homotopii zwartych punktowanych G -przestrzeni, 25
$\tau_*[H]$	zbiór typów H -homotopii zwartych punktowanych H -przestrzeni, 25
\approx_G	G -homeomorfizm pomiędzy G -przestrzeniami, 18
gH	klasa abstrakcji g względem \sim , 17
X/G	przestrzeń orbit, 17

Sumy proste

$\bigoplus_{\lambda \in \sigma^+(A)} \mathbb{E}_A(\lambda)$	suma prosta podprzestrzeni własnych, 15
$\bigoplus_{\lambda \in \sigma^-(A)} \mathbb{E}_A(\lambda)$	suma prosta podprzestrzeni własnych, 15
\mathbb{E}_A^+	suma prosta podprzestrzeni własnych, $\bigoplus_{\lambda \in \sigma^+(A)} \mathbb{E}_A(\lambda)$, 15
\mathbb{E}_A^-	suma prosta podprzestrzeni własnych, $\bigoplus_{\lambda \in \sigma^-(A)} \mathbb{E}_A(\lambda)$, 15
\mathbb{E}^+	15
\mathbb{E}^-	15
\mathbb{E}_1^+	22
\mathbb{E}_1^-	22
\mathbb{E}_2^+	22
\mathbb{E}_2^-	22
$\mathbb{E}_A(\lambda)$	podprzestrzeń własna operatora A odpowiadająca wartości własnej λ , 15
$\mathbb{V} \ominus \mathbb{V}_1$	dopełnienie ortogonalne \mathbb{V}_1 , 20
$\mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$	suma prosta G -reprezentacji, 19
\mathbb{V}_1^\perp	dopełnienie ortogonalne \mathbb{V}_1 , $\mathbb{V} \ominus \mathbb{V}_1$, 20
$\sigma(A)$	spektrum operatora A , 15
$\sigma^+(A)$	część dodatnia spektrum, 15
$\sigma^-(A)$	część ujemna spektrum, 15
$\varrho_1 \oplus \varrho_2$	suma prosta homomorfizmów, 19

Topologia i odwzorowania

$\dot{u}(t)$	pochodna funkcji u w punkcie $t \in \mathbb{R}$, 15
--------------	--

$\langle \cdot, \cdot \rangle$	standardowy iloczyn skalarny w \mathbb{R}^n , 15
$\langle \cdot, \cdot \rangle_H$	iloczyn skalarny w H , 15
$\deg_B(f, \Omega, p)$	stopień Brouwera, 39
$ \cdot $	standardowa norma w \mathbb{R}^n , 15
$ \cdot _X$	norma w X , 14
∂A	brzeg zbioru A , 14
$cl(A)$	domknięcie zbioru A , 14
$d(x, A)$	odległość punktu x od zbioru A , 14
$D_x f(x)$	pochodna Fréchet'a odwzorowania f w punkcie x , 15
$Df(x)$	pochodna Fréchet'a odwzorowania f w punkcie x , $D_x f(x)$, 15
$g'_{x_i}(x)$	pochodna cząstkowa potencjału g w punkcie x względem x_i , 15
Id_X	odwzorowanie identycznościowe przestrzeni X , 15
$int(A)$	wnętrze zbioru A , 14

Zbiory

\mathbb{N}	zbiór liczb naturalnych, 15
\mathbb{R}	zbiór liczb rzeczywistych, 15
\mathbb{Z}	zbiór liczb całkowitych, 15
$A(\varepsilon)$	ε -otoczenie zbioru A , 14
$B(X)$	jednostkowa kula otwarta, 14
$B_\varepsilon(X)$	kula otwarta o środku w 0 , 14
$B_\varepsilon(X, x_0)$	kula otwarta o środku w x_0 i promieniu ε , 14
$D(X)$	jednostkowa kula domknięta, 14
$D_\varepsilon(X)$	kula domknięta o środku w 0 , 14
$D_\varepsilon(X, x_0)$	kula domknięta o środku w x_0 i promieniu ε , 14
$Inv(W, \eta)$	maksymalny η -niezmienniczy podzbiór W , 30
$Inv(W \times \Lambda, \eta)$	maksymalny η -niezmienniczy podzbiór $W \times \Lambda$, 33
$S(X)$	sfera jednostkowa, 14
$S_\varepsilon(X)$	sfera o środku w 0 , 14
$S_\varepsilon(X, x_0)$	sfera o środku w x_0 i promieniu ε , 14
U_λ	32
U_ρ	38

Indeks

A

alternatywa typu Rabinowitza, 47

B

bifurkacja

globalna, 47

G-orbita, 47

parametr, 47

lokalna, 46

G-orbita, 46

parametr, 46

C

centralna konfiguracja, 68

klasa, 69

planarna, 68

przestrzenna, 68

współliniowa, 68

D

doklejanie niezmienniczych k -komórek, 26

dopełnienie ortogonalne dla G -reprezentacji, 20

G

G -CW-kompleks, 26

bez wyróżnionego punktu, 26

rozkład komórkowy, 27

typ rozkładu, 27

z wyróżnionym punktem, 26

G -CW-podkompleks, 27

z wyróżnionym punktem, 27

G -działanie, 16

G -orbita, 17

G -przestrzeń, 16

z wyróżnionym punktem, 16

punkt bazowy, 17

punkt stały, 17

punktowana G -przestrzeń, 16

trywialne, 17

wolne, 17

wyróżniony punkt, 17

G -homeomorficzne G -przestrzenie, 18

G -homeomorfizm, 18

G -homotopia, 24

gradientowa, 37

między parami G -przestrzeni, 25

G -homotopijna równoważność, 25

między parami G -przestrzeni, 25

G -indeks Conley'a, 31

własność kontynuacji, 33

G -niezmiennicze twierdzenie o funkcji

uwikłanej, 48

G -niezmienniczy indeks Conley'a, 31

własność kontynuacji, 33

G -niezmienniczy lemat Morse'a, 22

G -odwzorowanie, 18

gradientowe, 37

między parami G -przestrzeni, 25

G -orbita krytyczna, 22

izolowana, 22

niezdegenerowana, 22

specjalna, 22

zdegenerowana, 22

G -otoczenie η -izolujące, 30

dla zbioru, 30

- G-para indeksowa, 30
- G-reprezentacja, 19
 - ortogonalna, 19
 - trywialna, 19
 - wymiar, 19
- grupa
 - izotropii, 17
 - Liego, 18
 - zwarta, 18
- H**
- homotopia w kategorii zwartych punktowanych G-przestrzeni, 24
- I**
- indeks bifurkacji dla odcinka $[\rho^-, \rho^+]$, 47
- indeks Morse'a macierzy, 16
- izolowany zbiór η -niezmienniczy, 30
- K**
- kategoria
 - zwartych G-przestrzeni, 24
 - zwartych H-przestrzeni, 24
 - zwartych punktowanych G-przestrzeni, 24
 - zwartych punktowanych H-przestrzeni, 24
- L**
- lemat o separacji, 54
- lokalny G-potok, 29
- M**
- macierz
 - Hessego, 15
 - mas, 68
 - symplektyczna, 71
- maksymalny podzbiór η -niezmienniczy, 30
- moment bezwładności N punktów
 - materiałnych, 69
- N**
- niezmienniczy
 - Ω -funkcja Morse'a, 23
 - specjalna, 23
- k-komórka, 26
 - brzeg, 26
 - domknięta, 26
 - otwarta, 26
- zbiór ze względu na działanie grupy G, 18
- O**
- odwzorowania
 - G-homotopijne, 25
 - dla par G-przestrzeni, 25
 - gradientowo, 37
 - homotopijne w kategorii zwartych punktowanych G-przestrzeni, 25
- odwzorowanie
 - Ω -dopuszczalne, 22
 - charakterystyczne, 26
 - G-współzmiennicze, 18
 - C^l -odwzorowanie, 20
 - gradientowe, 37
 - homotopia gradientowa, 37
- orbita, 17
- otoczenie zbioru, 14
 - ε -otoczenie, 14
- P**
- para G-przestrzeni, 25
- pierścień Eulera, 28
- planarna rodzina centralnych konfiguracji
 - dwóch zagnieżdżonych kwadratów, 78
 - rozety, 81
 - sześciokąta foremego z dodatkowym ciałem, 75
- podkategoria
 - skończonych G-CW-kompleksów, 28
 - skończonych punktowanych G-CW-kompleksów, 28
- podreprezentacja, 19
- potencjał
 - Ω -dopuszczalny, 22
 - G-niezmienniczy, 18
 - C^k -potencjał, 20
 - gradient, 15

hesjan, 15
 ilorazowy, 24
 newtonowski, 68
 przestrzeń konfiguracji N ciał, 68
 przestrzeń orbit, 17
 przestrzenna rodzina centralnych konfiguracji
 dwóch zagnieżdżonych czworościanów
 foremnych, 86
 Typu I, 87
 Typu II, 89
 dwóch zagnieżdżonych ośmiościanów
 foremnych, 91
 dwóch zagnieżdżonych ośmiościanów
 foremnych z dodatkowym ciałem, 93
 dwóch zagnieżdżonych sześciąt, 95
 dwóch zagnieżdżonych sześciąt
 z dodatkowym ciałem, 97
 problemu $n + 3$ ciał, 101
 $n = 3$, 103
 $n = 4$, 105
 $n = 6$, 106
 sześciatu i ośmiościanu foremnego, 99
 punkt krytyczny potencjału, 21

R

równania ruchu, 68
 równanie
 $\nabla_v \varphi(v, \rho) = 0$, 45
 rodzina G -orbit rozwiązań trywialnych,
 46
 rodzina trywialna G -orbit, 46
 zbiór G -orbit rozwiązań nietrywialnych,
 46
 relacja
 podsprężenia, 17
 sprężenia, 17
 reprezentacja zwartej grupy Liego G , 19
 ortogonalna, 19
 rodzina lokalnych G -potoków, 33
 rozkład hesjanu, 21, 23
 rozwiązanie problemu N ciał
 homograficzne, 70

homotetyczne, 70
 względne położenie równowagi, 70

S

$SO(2)$ -reprezentacja, 19
 stopień
 Brouwera, 39
 G -współmienniczych odwzorowań
 gradientowych, 36
 własności, 38
 suma
 prosta G -reprezentacji, 19
 rozłączna G -przestrzeni, 26

T

twierdzenie typu Rabinowitza, 54, 59
 typ
 G -homotopii, 25
 pary G -przestrzeni, 25
 skończonych G -CW-kompleksów, 28
 skończonych punktowanych
 G -CW-kompleksów, 28
 H -homotopii, 25
 izotropii, 20
 G -orbity, 20

W

warunek dostateczny istnienia globalnej
 bifurkacji, 54
 centralnych konfiguracji, 74
 warunek dostateczny istnienia lokalnej
 bifurkacji, 53
 centralnych konfiguracji, 74
 warunek konieczny istnienia lokalnej
 bifurkacji, 49
 centralnych konfiguracji, 73

Z

zagadnienie Keplera, 72
 zbiór
 η -niezmienniczy, 30
 G -niezmienniczy, 18
 punktów stałych G -działania, 20