ACTA UNIVERSITATIS NICOLAI COPERNICI
EKONOMIA XXXIX – NAUKI HUMANISTYCZNO-SPOŁECZNE – ZESZYT 389 – TORUŃ 2009

Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki

Dominik Śliwicki

JĄDROWE ESTYMATORY WARIANCJI WARUNKOWEJ

Z a r y s t r e ś c i. W artykule zaprezentowano koncepcję estymatorów jądrowych jako narzędzia służącego do opisu warunkowej wariancji procesów ekonomicznych. Za pomocą symulacji Monte Carlo zbadano efektywność jądrowych estymatorów wariancji oraz porównano je z estymatorami według metody największej wiarygodności. Analiza symulacyjna została uzupełniona wynikami badań empirycznych.

S ł o w a k l u c z o w e: estymator jądrowy, analiza symulacyjna, wariancja warunkowa.

1. WSTĘP

Zaproponowane przez Engle’a (1982) oraz Bollersleva (1986) modele warunkowej wariancji stóp zwrotu szeregu czasowego otworzyły nowy rozdział w rozwoju ekonometrii. Od tamtego okresu dynamicznie rozwijała się ekonometria finansowa, w ramach której bardzo dużym zainteresowaniem cieszy się właśnie modelowanie warunkowej zmienności. Najpopularniejsze i najczęściej stosowane narzędzia proponowane przez badaczy należą do grupy metod parametrycznych, których nieodłączną cechą są stosunkowo twarde założenia m.in. co do postaci funkcyjnej zależności oraz własności składnika losowego. Obecnie, wraz z rozwojem techniki komputerowej i związanego z nią aparatu obliczeniowego, na znaczeniu zyskują również nieparametryczne metody analizy warunkowej zmienności. Metody te nie wymagają restrykcyjnych założeń a pozwalają na elastyczne modelowanie procesów ekonomicznych i pozaekonomicznych zarówno w ich warunkowej wartości średniej jak i wariancji. Dynamicznie rozwijająca się gałęzią ekonometrii nieparametrycznej są m.in. estymatory jądrowe, których użycie staje się coraz bardziej powszechne.

Celami niniejszego artykułu są: zaprezentowanie estymatorów jądrowych jako narzędzia modelowania warunkowej wariancji, prezentacja wyników badań ich efektywności w drodze analizy symulacyjnej oraz ukazanie wyników zastosowania tych estymatorów do opisu empirycznych szeregów czasowych.

2. ESTYMATORY WARIANCJI WARUNKOWEJ

Zależność między procesami ekonomicznymi x_t i y_t można przedstawić za pomocą modelu dla warunkowej wartości oczekiwanej:

$$y_t = m(x_t) + \varepsilon_t . \tag{1}$$

Szczególne miejsce w obszarze zainteresowań badaczy znajduje modelowanie warunkowej wariancji procesu resztowego modelu (1). Jądrowy lokalnie stały estymator wariancji warunkowej można zapisać w postaci (Fan, Yao, 1998):

$$\hat{V}(\hat{\varepsilon} \mid x) = \frac{\sum_{t=1}^{n} \hat{\varepsilon}_t^2 k\left(\frac{x - x_t}{h}\right)}{\sum_{t=1}^{n} k\left(\frac{x - x_t}{h}\right)}, \tag{2}$$

gdzie: $\hat{\varepsilon}_t = y_t - \hat{m}(x_t)$ jest resztą z modelu warunkowej wartości oczekiwanej, $k(z)$ jest funkcją jądrową, h oznacza parametr wygładzania.

Uogólnienie na przypadek wielowymiarowy, z wykorzystaniem jądra produktowego, ma następującą postać:

$$\hat{V}(\hat{\varepsilon} \mid x_1, x_2, ..., x_d) = \frac{\sum_{t=1}^{n} \hat{\varepsilon}_t^2 \prod_{j=1}^{d} k\left(\frac{x_j - x_{jt}}{h_j}\right)}{\sum_{t=1}^{n} \prod_{j=1}^{d} k\left(\frac{x_j - x_{jt}}{h_j}\right)}. \tag{3}$$

Podkreślenia wymaga fakt, iż w estymacji warunkowej wariancji procesu resztowego, stosowane są, w roli zmiennych objaśniających, te same zmienne, które są używane w szacowaniu warunkowej wartości średniej.

Obok estymatora lokalnie stałego wariancji warunkowej zaproponowano estymator lokalnie liniowy jako rozwiązanie zadania postaci (Fan, Yao, 1998):

$$\hat{V}_{ll}(\hat{\varepsilon} \mid x) = \arg\min_{\beta} \sum_{t=1}^{n} \left(\hat{\varepsilon}_t^2 - \beta_0(x) - \beta_1(x)(x_t - x)\right)^2 k\left(\frac{x - x_t}{h}\right). \tag{4}$$

Szacunek wariancji warunkowej wynosi $\hat{\beta}_0(x)$.

Estymatory lokalnie stały i lokalnie liniowy są szczególnymi przypadkami lokalnie wielomianowego estymatora jądrowego, będącego rozwiązaniem zadania (Ziegelmann, 2002):

$$\hat{V}_{lp}(\hat{\varepsilon} \mid x) = \arg\min_{\beta} \sum_{t=1}^{n} \left(\hat{\varepsilon}_t^2 - \psi\left(\beta_0(x) - \sum_{j=1}^{p} \beta_j(x)(x_{tj} - x_j) \right) \right)^2 k\left(\frac{x - x_t}{h}\right). \tag{5}$$

Jeżeli $\psi(z) = z$ to wówczas rozwiązanie zadania (5) daje lokalnie liniowy estymator wariancji warunkowej, a gdy $\psi(z) = \exp(z)$ to rozwiązanie to daje estymator lokalnie wykładniczy. Oczywistą przewagą estymatora lokalnie wykładniczego nad pozostałymi jest zapewnienie nieujemności szacunków wariancji warunkowej (Mills, Patterson, 2006).

3. SYMULACYJNE BADANIE EFEKTYWNOŚCI JĄDROWYCH ESTYMATORÓW WARIANCJI WARUNKOWEJ

Badania efektywności jądrowych estymatorów warunkowej wariancji przeprowadzono stosując metodę symulacji Monte Carlo. W pierwszym kroku generowano 10000 razy szeregi za pomocą modeli z równaniem warunkowej wartości oczekiwanej oraz bez równania warunkowej wartości oczekiwanej z normalnym rozkładem błędu. Szeregi generowano dla trzech liczebności prób: 1000, 1500 i 2000 obserwacji.

I. Modele z równaniem warunkowej wartości oczekiwanej:
   a. AR(1) – ARCH(1),
   b. AR(1) – GARCH(1,1),
   c. AR(1) – IGARCH(1,1),
   d. ARMA(1,1) – GARCH(1,1),

II. Modele bez równania warunkowej wartości oczekiwanej:
   a. GARCH(1,1),
   b. ARCH(2).

W kroku drugim dopasowywano parametryczne modele procesów generujących szeregi oraz szacowano równania warunkowej średniej za pomocą estymatora według metody najmniejszych kwadratów albo największej wiarygodności. Z równania regresji dla warunkowej średniej wyznaczano reszty, a następnie szacowano warunkową wariancję tych reszt z użyciem estymatora lokalnie stałego Nadaraya i Watsona określonego wzorem (2) oraz estymatora lokalnie wykładniczego będącego szczególnym przypadkiem rozwiązania zadania danego formułą (5). W ten sposób każdy estymator jądrowy warunkowej wariancji szacuje ten sam proces resztowy. W badaniu pominięto estymatory lokalnie liniowy oraz lokalnie wielomianowy, ponieważ nie gwarantują one dodatniości oszacowań wariancji warunkowej. W kolejnym kroku wyznaczano miarę kierunku zgodności zmian postaci (Brzeszczyński, Kelm, 2002):

$$QX1 = \frac{N\big(y_t(h_t - h_{t-1}) < 0\big)}{n}, \tag{6}$$

gdzie: $N\big(y_t(h_t - h_{t-1}) < 0\big)$ – liczba obserwacji, dla których iloczyn wartości rzeczywistej warunkowej średniej oraz przyrostu wariancji jest ujemny, n oznacza liczbę obserwacji w szeregu.

Wyznaczono również dla modeli parametrycznych wartości kryteriów informacyjnych Akaike'a – *AIC* oraz Schwarza – *SC*, dla lokalnie stałego estymatora jądrowego Nadaraya i Watsona – AIC_{NW} oraz SC_{NW}, dla estymatora lokalnie wykładniczego – AIC_{lw} oraz SC_{lw}. Kryteria wyrażają się formułami:

$$AIC = \frac{-2l + 2d}{n}, \quad SC = \frac{-2l + d \log n}{n}, \tag{7}$$

gdzie: l oznacza logarytm funkcji wiarygodności dany wzorem:

$$l = \sum_{t=1}^{n} l_t\,; \quad l_t = -\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log h_t - \frac{\varepsilon_t^2}{2h_t}.$$

W przypadku kryteriów informacyjnych AIC_{NW}, SC_{NW} oraz AIC_{lw} i SC_{lw} do wyznaczenia logarytmu funkcji wiarygodności zastosowano szacunki wariancji warunkowych dokonane za pomocą estymatorów jądrowych.

Estymacji wartości parametrów wygładzania jądrowych estymatorów warunkowej wariancji dokonano za pomocą wzoru (Silverman, 1986):

$$h_i = 0{,}9 \min\left(s_i, \frac{q_{3i} - q_{1i}}{1{,}349} \right) n^{-1/(d+4)}, \tag{8}$$

gdzie: s_i – odchylenie standardowe i – tej zmiennej objaśniającej modelu, $i = 1, \ldots, d$, d – liczba zmiennych objaśniających modelu, q_{ji} – j – ty kwartyl rozkładu i – tej zmiennej objaśniającej. Wyniki analizy symulacyjnej zawiera tabela 1.

Tabela 1. Wyniki symulacyjnego badania efektywności jądrowych estymatorów wariancji warunkowej

$y_t = 0{,}7y_{t-1} + \varepsilon_t$ $h_t = 1 + 0{,}8\varepsilon_{t-1}^2$											
n		*AIC*	AIC_{NW}	AIC_{lw}	*SC*	SC_{NW}	SC_{lw}	*QX1*	$QX1_{NW}$	$QX1_{lw}$
1000	max	4,3542	27,5619	29,8996	4,3640	27,5718	29,9095	0,5606	0,5591	0,5576
	min	3,3386	3,5714	5,2290	3,3484	3,5812	5,2389	0,4364	0,4449	0,4434
	średnia	3,6754	4,1357	8,0725	3,6852	4,1455	8,0823	0,5001	0,5002	0,5000
1500	max	4,4535	28,7074	29,9711	4,4606	28,7145	29,9782	0,5504	0,5494	0,5510
	min	3,3491	3,5839	5,4484	3,3562	3,5909	5,4555	0,4510	0,4426	0,4503
	średnia	3,6725	4,1544	8,1438	3,6796	4,1615	8,1509	0,4999	0,5000	0,5000
2000	max	4,4065	27,5990	29,9193	4,4121	27,6046	29,9249	0,5393	0,5390	0,5523
	min	3,4370	3,6915	5,4314	3,4426	3,6971	5,4370	0,4607	0,4610	0,4492
	średnia	3,6729	4,1597	8,2969	3,6785	4,1653	8,3025	0,4998	0,5000	0,4999

Ciąg dalszy tabeli 1

$$y_t = 0{,}2y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$h_t = 1 + 0{,}1\varepsilon_{t-1}^2 + 0{,}85h_{t-1}$$

n		*AIC*	*AIC_NW*	*AIC_lw*	*SC*	*SC_NW*	*SC_lw*	*QX1*	*QX1_NW*	*QX1_lw*
1000	max	6,2088	16,6262	10,6918	6,2235	16,6409	10,7065	0,5626	0,5611	0,5586
	min	5,3094	5,3405	6,5197	5,3242	5,3552	6,5344	0,4354	0,4439	0,4474
	średnia	5,7250	5,8236	7,3291	5,7397	5,8383	7,3438	0,5000	0,5002	0,5000
1500	max	6,1709	16,4438	10,1644	6,1816	16,4544	10,1751	0,5530	0,5534	0,5457
	min	5,3921	5,4178	6,6022	5,4028	5,4284	6,6128	0,4516	0,4506	0,4516
	średnia	5,7332	5,8299	7,3430	5,7438	5,8406	7,3536	0,5000	0,4999	0,5001
2000	max	6,0799	16,3522	9,1156	6,0883	16,3606	9,1240	0,5378	0,5430	0,5438
	min	5,4057	5,4571	6,6877	5,4141	5,4655	6,6961	0,4617	0,4595	0,4537
	średnia	5,7354	5,8293	7,3412	5,7438	5,8377	7,3496	0,5000	0,5001	0,5000

$$y_t = 0{,}5y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$h_t = 1 + 0{,}15\varepsilon_{t-1}^2 + 0{,}85h_{t-1}$$

n		*AIC*	*AIC_NW*	*AIC_lw*	*SC*	*SC_NW*	*SC_lw*	*QX1*	*QX1_NW*	*QX1_lw*
1000	max	11,4901	37,4542	39,8127	11,5048	37,4690	39,8274	0,5606	0,5511	0,5656
	min	6,0905	6,2260	7,5964	6,1052	6,2407	7,6112	0,4414	0,4409	0,4354
	średnia	7,2378	7,7921	11,7981	7,2525	7,8068	11,8128	0,5002	0,4997	0,5000
1500	max	10,1102	52,9354	59,9562	10,1209	52,9460	59,9669	0,5510	0,5461	0,5637
	min	6,1833	6,2141	7,4416	6,1939	6,2247	7,4522	0,4443	0,4546	0,4396
	średnia	7,2886	7,9518	12,8191	7,2993	7,9624	12,8297	0,4998	0,5000	0,4999
2000	max	10,3215	79,4634	78,9638	10,3299	79,4718	78,9722	0,5448	0,5440	0,5583
	min	6,2744	6,4977	8,2115	6,2828	6,5061	8,2199	0,4572	0,4580	0,4502
	średnia	7,3255	8,0535	13,6599	7,3339	8,0619	13,6683	0,4999	0,5003	0,4998

$$y_t = 0{,}3y_{t-1} + 0{,}6\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$h_t = 1 + 0{,}05\varepsilon_{t-1}^2 + 0{,}9h_{t-1}$$

n		*AIC*	*AIC_NW*	*AIC_lw*	*SC*	*SC_NW*	*SC_lw*	*QX1*	*QX1_NW*	*QX1_lw*
1000	max	5,4685	19,9431	18,8240	5,4832	19,9530	18,8338	0,5626	0,5581	0,5566
	min	4,6000	4,6262	5,0504	4,6147	4,6360	5,0602	0,4454	0,4349	0,4454
	średnia	4,9760	5,3066	6,8589	4,9908	5,3164	6,8687	0,5000	0,4998	0,5003
1500	max	5,9593	19,9674	11,1911	5,9699	19,9745	11,1982	0,5470	0,5454	0,5544
	min	4,6501	4,6897	5,2134	4,6607	4,6968	5,2205	0,4443	0,4459	0,4490
	średnia	4,9915	5,3195	6,8673	5,0020	5,3266	6,8744	0,5003	0,4999	0,4999
2000	max	5,9836	19,9179	18,6623	5,9920	19,9235	18,6679	0,5443	0,5485	0,5503
	min	4,7093	4,7690	5,5655	4,7177	4,7746	5,5711	0,4577	0,4580	0,4512
	średnia	5,1272	5,4102	6,9268	5,1368	5,4158	6,9324	0,5002	0,5001	0,5001

Ciąg dalszy tabeli 1

$h_t = 1 + 0{,}2\varepsilon_{t-1}^2 + 0{,}7h_{t-1}$										
n		*AIC*	*AIC_{NW}*	*AIC_{lw}*	*SC*	*SC_{NW}*	*SC_{lw}*	*QX1*	*QX1_{NW}*	*QX1_{lw}*
1000	max	5,4225	11,3658	53,6214	5,4372	11,3756	53,6312	0,5556	0,5586	0,7978
	min	4,6083	6,2633	5,9286	4,6230	6,2731	5,9384	0,4384	0,4314	0,2012
	średnia	4,9756	7,6977	6,8537	4,9903	7,7075	6,8635	0,5002	0,5002	0,5056
1500	max	5,3884	10,5334	18,4857	5,3991	10,5405	18,4927	0,5457	0,5490	0,7919
	min	4,6324	6,7496	5,9924	4,6431	6,7567	5,9995	0,4523	0,4516	0,2115
	średnia	4,9796	8,0469	6,8554	4,9902	8,0540	6,8625	0,5000	0,5000	0,4994
2000	max	5,3161	11,1437	14,9476	5,3245	11,1493	14,9532	0,5448	0,5443	0,7804
	min	4,7202	7,1625	6,0928	4,7286	7,1681	6,0984	0,4537	0,4557	0,2166
	średnia	4,9815	8,3150	6,8609	4,9899	8,3206	6,8665	0,5000	0,5003	0,5019
$h_t = 1 + 0{,}2\varepsilon_{t-1}^2 + 0{,}3\varepsilon_{t-2}^2$										
n		*AIC*	*AIC_{NW}*	*AIC_{lw}*	*SC*	*SC_{NW}*	*SC_{lw}*	*QX1*	*QX1_{NW}*	*QX1_{lw}*
1000	max	3,6707	10,0400	10,5936	3,6854	10,0547	10,6083	0,5656	0,5636	0,7948
	min	3,1168	4,7864	4,3659	3,1315	4,8011	4,3806	0,4394	0,4344	0,2092
	średnia	3,3931	6,1508	5,1962	3,4078	6,1655	5,2109	0,5000	0,4993	0,4990
1500	max	3,6409	9,9063	9,2474	3,6515	9,9169	9,2580	0,5477	0,5477	0,7879
	min	3,1808	5,4034	4,4577	3,1914	5,4140	4,4684	0,4510	0,4443	0,2115
	średnia	3,3930	6,5153	5,2078	3,4036	6,5259	5,2184	0,5001	0,4995	0,4969
2000	max	3,6017	11,2492	10,1040	3,6101	11,2577	10,1124	0,5398	0,5458	0,7894
	min	3,2222	5,5404	4,5247	3,2306	5,5488	4,5331	0,4542	0,4572	0,2091
	średnia	3,3934	6,8011	5,2149	3,4018	6,8095	5,2233	0,5000	0,4997	0,5010

Źródło: obliczenia własne.

Przeprowadzone symulacyjne badanie pozwala wysnuć wniosek, że oszacowania warunkowej wariancji uzyskane za pomocą estymatorów jądrowych dają gorsze wyniki aniżeli te uzyskane metodą największej wiarygodności. Świadczą o tym wartości kryteriów *AIC* i *SC*, które dla estymatorów jądrowych osiągają wartości dużo wyższe od tych wyznaczonych dla modeli estymowanych metodą największej wiarygodności. Biorąc pod uwagę miarę kierunku zgodności zmian można zauważyć, że występują oszacowania, dokonane estymatorem lokalnie wykładniczym, dla procesów bez równań warunkowej wartości średniej, charakteryzujące się tym, że albo miary te osiągają niską wartość ok. 0,25 albo wysoką wynoszącą ok. 0,75. Dla pozostałych estymatorów oraz procesów przyjmuje ona wartości z zakresu od ok. 43% do ok. 56%. Wartości przeciętne tej miary w każdym przypadku są równe ok. 50%, co świadczy o wzajemnym znoszeniu się występujących jej niskich i wysokich wartości.

4. ANALIZA EMPIRYCZNA

Do zobrazowania możliwości zastosowań estymatorów jądrowych w analizie danych empirycznych wybrano szeregi czasowe dziennych wartości zamknięcia indeksów giełdowych wyznaczanych na Giełdzie Papierów Wartościowych (GPW) w Warszawie. Analizie poddano:

WIG-BANKI – indeks giełdowy spółek sektora bankowego,

WIG-BUDOW – indeks giełdowy spółek budowlanych,

WIG-INFO – indeks giełdowy spółek sektora informatycznego,

WIG-MEDIA – indeks giełdowy spółek sektora medialnego,

WIG-PALIWA – indeks giełdowy spółek sektora paliwowego,

WIG-PL – indeks giełdowy największych i średnich spółek krajowych,

WIG-TELKOM – indeks giełdowy spółek sektora telekomunikacyjnego,

WIG-SPOZYW – indeks giełdowy spółek sektora spożywczego,

WIG20 – indeks giełdowy największych 20 spółek akcyjnych.

Z wartości zamknięcia indeksów wyznaczono stopy zwrotu według formuły:

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}, \tag{9}$$

gdzie: r_t oznacza stopę zwrotu a P_t wartość zamknięcia indeksu w chwili t.

Badanie jądrowych estymatorów warunkowej wariancji w zastosowaniu do empirycznych szeregów czasowych przeprowadzono w sposób analogiczny do badania symulacyjnego. Do szeregów stóp zwrotu z indeksów giełdowych dopasowano najlepsze, według kryterium Schwarza, modele ARMA-GARCH.

Tabela 2. Typy modeli z równaniami warunkowej wariancji dopasowane do szeregów stóp zwrotu z sektorowych indeksów giełdowych

Stopa zwrotu	Model
r(WIG-BANKI)	AR(1)-GARCH(1,1)
r(WIG-BUDOW)	AR(1)-GARCH(1,1)
r(WIG-INFO)	AR(1)-GARCH(1,1)
r(WIG-MEDIA)	GARCH(1,1)
r(WIG-PALIWA)	GARCH(1,1)
r(WIG-PL)	AR(1)-GARCH(1,1)
r(WIG-SPOZYW)	AR(1)-GARCH(1,1)
r(WIG-TELKOM)	GARCH(1,1)
r(WIG20)	AR(1)-GARCH(1,1)

Źródło: obliczenia własne.

Następnie filtrowano szeregi stóp zwrotu za pomocą równań warunkowej średniej aby pozostały tylko zależności w wariancji warunkowej. Dla stóp zwrotu z indeksów WIG-MEDIA, WIG-PALIWA oraz WIG-TELKOM działanie to zostało pominięte z uwagi na brak równania warunkowej średniej w modelu. Dla tak przefiltrowanych szeregów szacowano, za pomocą metody największej wiarygodności, równania wariancji warunkowej – w każdym przypadku GARCH(1,1) i wyznaczano wartości kryteriów informacyjnych *AIC* i *SC* oraz miarę kierunku zgodności zmian $QX1$. W kolejnym etapie analizy do opisu warunkowej wariancji, odfiltrowanych z zależności w warunkowej średniej, szeregów stosowano estymatory: lokalnie stały oraz lokalnie wykładniczy. Najpierw wyznaczono kwadraty wartości przefiltrowanych szeregów a następnie do ich opisu zastosowano estymatory jądrowe, w których w roli zmiennych objaśniających wystąpiły opóźnione wartości oryginalnych szeregów stóp zwrotu, a w przypadku indeksów WIG-MEDIA, WIG-PALIWA oraz WIG-TELKOM bieżące wartości stóp zwrotu z uwagi na niewystępowanie równania warunkowej średniej w modelu ARMA-GARCH. Dla każdego estymatora jądrowego oszacowano wartości kryteriów informacyjnych *AIC* i *SC* oraz wyznaczono miary kierunku zgodności zmian $QX1_{NW}$ dla estymatora lokalnie stałego oraz $QX1_{lw}$ dla estymatora lokalnie wykładniczego. Zestawienie wartości kryteriów informacyjnych oraz miar $QX1$ dla szacunków warunkowej wariancji uzyskanych metoda największej wiarygodności oraz za pomocą estymatorów jądrowych zawiera tabela 3.

Tabela 3. Wyniki dopasowania jądrowych estymatorów warunkowej wariancji do szeregów czasowych stóp zwrotu z sektorowych indeksów giełdowych

	AIC	AIC_{NW}	AIC_{lw}	SC	SC_{NW}	SC_{lw}	$QX1$	$QX1_{NW}$	$QX1_{lw}$
r(WIG-BANKI)	-5,5676	-5,4264	-2,6273	-5,5606	-5,4194	-2,6203	0,4954	0,4964	0,4901
r(WIG-BUDOW)	-5,7072	-5,4498	-2,9417	-5,7002	-5,4428	-2,9347	0,4954	0,5064	0,4897
r(WIG-INFO)	-5,1688	-4,9645	-1,8408	-5,1618	-4,9575	-1,8338	0,5149	0,5082	0,4984
r(WIG-MEDIA)	-5,4068	-6,6123	-3,2755	-5,3920	-6,6024	-3,2656	0,5066	0,4828	0,7634
r(WIG-PALIWA)	-4,9986	-6,1608	-2,5817	-4,9800	-6,1483	-2,5693	0,4851	0,4885	0,7805
r(WIG-PL)	-5,9925	-5,7699	-2,9395	-5,9802	-5,7575	-2,9271	0,5008	0,5020	0,4952
r(WIG-SPOZYW)	-6,0555	-5,8561	-2,2632	-6,0484	-5,8491	-2,2562	0,4998	0,4952	0,5010
r(WIG-TELKOM)	-4,9796	-6,1470	-3,0718	-4,9726	-6,1423	-3,0671	0,4920	0,5018	0,2307
r(WIG20)	-5,2446	-5,0589	-2,0751	-5,2395	-5,0537	-2,0700	0,4902	0,4956	0,5117

Źródło: obliczenia własne.

Na podstawie uzyskanych wyników można zauważyć, że dla modeli stóp zwrotu bez równań warunkowej średniej, kryteria informacyjne oszacowane dla estymatora lokalnie stałego osiągają wartości niższe od tych wyznaczonych dla modeli dopasowanych metodą największej wiarygodności. Można stwierdzić. że w takim przypadku estymator ten zachowuje się lepiej niż estymator według metody największej wiarygodności. Wartości kryteriów informacyjnych dla estymatora lokalnie wykładniczego pozwalają wysnuć wniosek, że w każdym przypadku zachowuje się on gorzej od pozostałych. Ze względu na miarę $QX1$ można zauważyć, że głównie estymatory jądrowe cechowały się większą trafnością kierunku zmienności w porównaniu z metodą największej wiarygodności. Dla szeregów bez równań warunkowej średniej estymator lokalnie wykładniczy dał w dwóch przypadkach wskazania zgodne z rzeczywistymi w ponad 76%, a w jednym tylko w ok. 23%. W pozostałych przypadkach trafność sięgała ok. 50%. Wyniki analizy empirycznej potwierdzają wyniki badań symulacyjnych zaprezentowanych w części 3 referatu.

LITERATURA

Bollerslev T. (1986), *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, „Journal of Econometrics", 31, 307–327.

Brzeszczyński J., Kelm R. (2002), *Ekonometryczne modele rynków finansowych*, WIG-Press, Warszawa.

Engle R. F. (1982), *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of Variance of United Kingdom Inflation*, „Econometrica", 50, 996–1000.

Fan J., Yao Q. (1998), *Efficient Estimation of Conditional Variance Functions in Stochastic Regression*, „Biometrika", 85, 645–660.

Mills T. C., Patterson K. (2006), *Palgrave Handbook of Econometrics*, Palgrave Macmillan, New York.

Silverman B. W. (1986), *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*, Chapman and Hall.

Ziegelmann F. (2002), *Nonparametric estimation of volatility functions: the local exponential estimator*, „Econometric Reviews", 18, 985–991.

KERNEL ESTIMATORS OF CONDITIONAL VARIANCE

A b s t r a c t. In this paper a concept of kernel estimators was presented. Kernel estimators were used as a tool for analysis of conditional variance of economical time series. A Monte Carlo simulation was used to research the effectiveness of kernel estimators of conditional variance. Kernel estimators of conditional variance were compared with the estimators of maximum likelihood method. Simulation analysis was completed by the results of empirical investigations.

K e y w o r d s: kernel estimator, simulation analysis, conditional variance.