Prace Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie
Matematyka V, Częstochowa 1997

Krata podrozmaitości rozmaitości wyznaczonej przez równości pewnej postaci grup abelowych-I

Krystyna Gajewska-Kurdziel, Krystyna Mruczek

Streszczenie

W ostatnich latach intensywnie rozwijają się badania związane z klasami algebr wyznaczonymi przez równości pewnej określonej postaci, na przykład przez równości normalne, zewnętrznie zgodne, początkowo zgodne, regularne i inne. Okazuje się, że zbiory tych równości tworzą teorie równościowe. Znanym faktem jest, że zbiór teorii równościowych danego typu jest kratą uporządkowaną relacją inkluzji. Każdej teorii równościowej Σ odpowiada wzajemnie jednoznacznie rozmaitość $\mathcal{M}od(\Sigma)$. A zatem zbiór wszystkich rozmaitości danego typu uporządkowany relacją inkluzji tworzy kratę (izomorficzną z kratą dualną do kraty teorii równościowych danego typu).

W niniejszej pracy przedstawiono kratę $\mathcal{L}(G^{p\cdot q}_{\mathcal{E}x})$ wszystkich podrozmaitości rozmaitości wyznaczonej przez równości zewnętrznie zgodne grup abelowych z eksponentem $p\cdot q$, gdzie p i q są różnymi liczbami pierwszymi. Badania nad tym zagadnieniem zostały rozpoczęte przez prof.K.Hałkowską, a wyniki uzyskane wspólnie z R.Koch zostały opublikowane w pracy [5].

1 Pojęcia wstępne

(i) Niech $\mathcal{G}^n$ oznacza rozmaitość grup abelowych z eksponentem n, tzn. rozmaitość typu $\tau_0 : \{\cdot, ^{-1}\} \to N$ spełniającą następujące równości:

(1) $x \cdot y = y \cdot x$,

(2) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$,

(3) $x \cdot (x \cdot x^{-1}) = x$,

(4) $x \cdot x^{-1} = y \cdot y^{-1}$,

(5) $x \cdot x^{-1} = x^n$,

gdzie n jest liczbą naturalną wiekszą od zera.

Niech $\mathcal{I}d(\tau_0)$ będzie zbiorem wszystkich równości typu τ_0.

Równość $\phi = \psi$ typu τ_0 nazywamy normalną (patrz [8], [7]) wtedy i tylko wtedy, gdy termy ϕ i ψ są identyczne lub żaden z tych termów nie jest zmienną.

Ponadto równość tę nazywamy zewnętrznie zgodną (zob. [2]) wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona postaci $\phi_1 = \phi_1$ lub postaci $\phi_1 \cdot \phi_2 = \psi_1 \cdot \psi_2$ lub $\phi_1^{-1} = \psi_1^{-1}$ dla pewnych termów $\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2$ typu τ_0.

Przez $\mathcal{N}(\mathcal{G}^n)$ oznaczymy zbiór wszystkich równości normalnych spełnionych w rozmaitości $\mathcal{G}^n$, a przez $\mathcal{N}(\tau_0)$– zbiór wszystkich rozmaitości normalnych typu τ_0. Przez $\mathcal{E}x(\mathcal{G}^n)$ oznaczamy zbiór wszystkich równości zewnętrznie zgodnych spełnionych w rozmaitości $\mathcal{G}^n$, natomiast przez $\mathcal{E}x(\tau_0)$–zbiór wszystkich równości zewnętrznie zgodnych typu τ_0.

2 Krata $\mathcal{L}(\mathcal{G}^{p\cdot q}_{\mathcal{E}x})$

Niech $\mathcal{L}(\mathcal{G}^n_{\mathcal{E}x})$ oznacza kratę wszystkich podrozmaitości rozmaitości zdefiniowanej przez zbiór $\mathcal{E}x(\mathcal{G}^n)$.

Znanym jest fakt, że

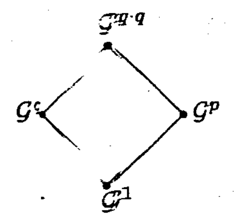
(ii) Krata wszystkich podrozmaitości rozmaitości $\mathcal{G}^n$ jest izomorficzna z kratą $(\{1, ..., n-1\}; |)$, gdzie $|$ oznacza relację podzielności.

Niech p i q będą różnymi liczbami pierwszymi. Z (ii) wynika, że

(iii) Jedynymi podrozmaitościami rozmaitości $\mathcal{G}^{p\cdot q}$ są następujące rozmaitości: $\mathcal{G}^{p\cdot q}$, $\mathcal{G}^p$, $\mathcal{G}^q$ oraz $\mathcal{G}^1$,

gdzie $\mathcal{G}^1$ oznacza rozmaitość trywialną typu τ_0.

Kratę $\mathcal{L}(\mathcal{G}^{p\cdot q})$ przedstawia następujący diagram



(iv) Aksjomatykę rozmaitości $\mathcal{G}^{p\cdot q}_{\mathcal{E}x}$ stanowią równości (1),(2),(4) i (5) dla $n = p\cdot q$ oraz równości

(6) $(x\cdot x\cdot x^{-1})^{-1} = x^{-1}$,

(7) $(x\cdot y)\cdot x\cdot x^{-1} = x\cdot y$.

Niech $\mathcal{G}^n_{\mathcal{N}}$ oznacza rozmaitość zdefiniowaną przez zbiór $\mathcal{N}(\mathcal{G}^n)$.

(v) Aksjomatykę rozmaitości $\mathcal{G}^{p\cdot q}_{\mathcal{N}}$ stanowią równości (1),(2),(4),(5) i (7) dla $n = p\cdot q$ oraz równość

(8) $x^{-1}\cdot x\cdot x^{-1} = x^{-1}$.

(vi) Aksjomatykę rozmaitości $\mathcal{G}^1_{\mathcal{E}x}$ spełniającej wszystkie równości zewnętrznie zgodne typu τ_0 stanowią równości

(9) $x\cdot y = z\cdot t$,

(10) $x^{-1} = y^{-1}$.

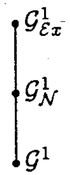
Niech $\mathcal{G}^1_{\mathcal{N}}$ będzie rozmaitością spełniającą wszystkie równości normalne typu τ_0. Wówczas

(vii) Aksjomatykę rozmaitości $\mathcal{G}^1_{\mathcal{N}}$ stanowi równość

(11) $x\cdot y = z^{-1}$.

Rozważmy klasę algebr $\mathcal{M}od(\mathcal{E}x(\tau_0)\cup E)$, gdzie $E\subseteq \mathcal{I}d(\tau_0)$. Jeśli do zbioru E należy przynajmniej jedna równość normalna, która nie jest zewnętrznie zgodna oraz $E\subseteq \mathcal{N}(\tau_0)$, to $\mathcal{M}od(\mathcal{E}x(\tau_0)\cup E) = \mathcal{G}^1_{\mathcal{N}}$. Jeśli natomiast do zbioru E należy przynajmniej jedna równość postaci $x=\phi$, gdzie ϕ jest termem różnym od zmiennej x, to $\mathcal{M}od(\mathcal{E}x(\tau_0)\cup E) = \mathcal{G}^1$. Stąd wynika, że

(viii) $\mathcal{L}(\mathcal{G}_{\mathcal{E}x})$ jest kratą o następującym diagramie



(ix) Niech τ będzie typem algebr i niech $\mathcal{A} = (A;F^{\mathcal{A}})$ i $\mathcal{I} = (I;F^{\mathcal{I}})$ będą algebrami typu τ. Algebra $\mathcal{A}$ jest dyspersją algebry $\mathcal{I}$ (zob. [9], [6]) jeśli istnieje partycja $\{A_i\}$ zbioru A i rodzina odwzorowań $\{c_f\}_{f\in F}$ spełniające warunki

(a) $c_f : I\to A$,

(b) $c_f(i)\in A_i$ dla $i\in I$,

(c) jeśli $f\in F$ oraz $a_i\in A_{k_i}$ dla $i = 0,\dots,\tau(f)-1$, to $f^{\mathcal{A}}(a_0,\dots,a_{\tau(f)-1}) = c_f(f^{\mathcal{I}}(k_0,\dots,k_{\tau(f)-1}))$.

Dla rozmaitości typu τ przez $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ oznaczymy klasę wszystkich dyspersji algebr z rozmaitości $\mathcal{V}$.

Niech

(x) $\mathcal{E}^{\mathcal{V}} = \{\mathcal{K}\in \mathcal{L}(\mathcal{M}od(\mathcal{E}x(\mathcal{V})) : \mathcal{I}d(\mathcal{K}) = \mathcal{E}x(\mathcal{K})\}$,

(xi) $\mathcal{N}^{\mathcal{V}} = \{\mathcal{K}\in \mathcal{L}(\mathcal{M}od(\mathcal{N}(\mathcal{V}) : \mathcal{I}d(\mathcal{K}) = \mathcal{N}(\mathcal{K})\}$,

gdzie $\mathcal{I}d(\mathcal{V})$ oznacza zbiór równości spełnionych w rozmaitości $\mathcal{V}$.

W pracy [3] pokazano, że

(xii) Jeśli $\mathcal{V}$ jest rozmaitością typu τ taką, że dla pewnego termu $\phi(x)$ różnego od zmiennej równość $\phi(x) = x$ należy do $\mathcal{I}d(\mathcal{V})$ oraz $\mathcal{M}od(\mathcal{E}x(\mathcal{V})) = \mathcal{D}(\mathcal{V})$, to kraty $\mathcal{E}^{\mathcal{V}}, \mathcal{N}^{\mathcal{V}}$ i $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ są izomorficzne.

Z pracy [9] wynika, że rozmaitość $\mathcal{G}^{p\cdot q}$ spełnia założenia twierdzenia (xii). Stąd oraz z (iii) wynika natychmiast następujący wniosek.

Wniosek 1 $\mathcal{N}^{\mathcal{G}^{p\cdot q}} = \{\mathcal{G}^{p\cdot q}_{\mathcal{N}}, \mathcal{G}^p_{\mathcal{N}}, \mathcal{G}^q_{\mathcal{N}}, \mathcal{G}^1_{\mathcal{N}}\}$ *oraz* $\mathcal{E}^{\mathcal{G}^{p\cdot q}} = \{\mathcal{G}^{p\cdot q}_{\mathcal{E}x}, \mathcal{G}^p_{\mathcal{E}x}, \mathcal{G}^q_{\mathcal{E}x}, \mathcal{G}^1_{\mathcal{E}x}\}$.

Przyjmijmy oznaczenie $x^0 = x\cdot x^{-1}$ i rozważmy nastepujące równości:

(12) $x = x\cdot x^k$,

(13) $x = ((x^k)^{-1})^{-1}$,

(14) $((x^k)^{-1})^{-1} = ((x^l)^{-1})^{-1}$,

(15) $x^0\cdot x^k = x^0\cdot x^l$,

(16) $x^0\cdot x^k = ((x^l)^{-1})^{-1}$,

gdzie $k,l\in Z_{p\cdot q}$.

W pracy [4] pokazano, że

(xiii) Dla każdego podzbioru E_1 zbioru $\mathcal{I}d(\tau_0)$ istnieje skończony zbiór E równości jednej zmiennej typu τ_0 postaci (12)–(16) taki, że $\mathcal{C}n(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p\cdot q}) \cup E_1) = \mathcal{C}n(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p\cdot q}) \cup E)$.

Stąd wynika, że dla każdej podrozmaitości $\mathcal{K}$ rozmaitości $\mathcal{G}^{p\cdot q}_{\mathcal{E}x}$ istnieje skończony zbiór E równości jednej zmiennej typu τ_0 postaci (12)–(16) taki, że $\mathcal{K} = \mathcal{M}od(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p\cdot q}) \cup E)$.

Lemat 1 *Jeśli $k \in Z_{p\cdot q}$, to $\mathcal{C}n(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p\cdot q}) \cup \{x = x^0 \cdot x^k\}) = \mathcal{I}d(\mathcal{G}^s)$, gdzie $s = (p\cdot q, k-1)$, przy czym dla $k = 1$ przyjmujemy $(p\cdot q, 0) = p\cdot q$.*

Dowód. Jeśli $k = 0$ lub $k = 1$, to wykorzystując (i) oraz (iv) otrzymujemy natychmiast tezę. Załóżmy zatem, że $k \neq 0$ i $k \neq 1$. Dla czytelniejszego zapisu przyjmijmy, że $C = \mathcal{C}n(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p\cdot q}) \cup \{x = x^0 \cdot x^k\})$.

Jeśli $s = (p\cdot q, k-1)$, to w zbiorze $Z_{p\cdot q}$ istnieje element a taki, że $k - 1 = a \cdot s$. Ponieważ równość $x^0 = x^s$ jest spełniona w rozmaitości $\mathcal{G}^s$ zatem równość $x^0 = x^{k-1}$ również jest spełniona w tej rozmaitości. Z aksjomatyki rozmaitości $\mathcal{G}^s$ (zob. (i) dla $n = s$) wynika, że następujący ciąg równości jest spełniony w $\mathcal{G}^s : x = x^0 \cdot x = x^{k-1} \cdot x = x^0 \cdot x^k$. Zatem równość $x = x^0 \cdot x^k$ jest spełniona w rozmaitości $\mathcal{G}^s$. Stąd wynika, że $C \subseteq \mathcal{I}d(\mathcal{G}^s)$.

Aby udowodnić inkluzję odwrotną zauważmy, że $(x^0 = x^0 \cdot x^{k-1}) \in C$. Ponieważ $s = (p\cdot q, k-1)$, to w zbiorze $Z_{p\cdot q}$ istnieją elemnty a i b takie, że $s = a\cdot p\cdot q + b\cdot(k-1)$. Tym samym w rozmaitości $\mathcal{M}od(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p\cdot q}) \cup \{x = x^0 \cdot x^k\})$ spełniony jest następujący ciąg równości: $x^s = x^{a\cdot p\cdot q=b\cdot(k-1)} = x^{a\cdot p\cdot q} x^{b\cdot(k-1)} = (x^{p\cdot q})^a \cdot (x^{b-1})^b = (x^0)^a \cdot (x^0)^b = x^0 \cdot x^0 = x^0$. Stąd otrzymujemy, że równość $x^s = x^0$ należy do $\mathcal{C}n(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p\cdot q}) \cup \{x = x^0 \cdot x^k\})$. Zauważmy, że następujący ciąg równości jest również spełniony w zbiorze C : $x = x^0 \cdot x^k = x^0 \cdot x^{k-1} \cdot x = x^0 \cdot x^0 \cdot x = x^0 \cdot x$. Pozostałe równości aksjomatyzujące rozmaitość $\mathcal{G}^s$ są zewnętrznie zgodne, tym samym dowód inkluzji odwrotnej został zakończony.

Lemat 2 *Jeśli $k \in Z_{p\cdot q}$, to $\mathcal{C}n(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p\cdot q}) \cup \{x = ((x^k)^{-1})^{-1}\}) = \mathcal{I}d(\mathcal{G}^s)$, gdzie $s = (p\cdot q, k-1)$, przy czym dla $k = 1$ przyjmujemy $(p\cdot q, o) = p\cdot q$.*

Dowód lematu pominiemy, gdyż jest analogiczny do dowodu lematu 1.

Z lematów 1 i 2 wynika następujący wniosek

Wniosek 2 *Jeśli E jest zbiorem równości jednej zmiennej typu τ_0 i równość $\varphi = \psi$ jest postaci (12) lub (13) należy do E, to $\mathcal{M}od(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p\cdot q}) \cup E) \in \mathcal{L}(\mathcal{G}^{p\cdot q})$.*

Lemat 3 *Jeśli $k, l \in Z_{p\cdot q}$, to $\mathcal{C}n(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p\cdot q}) \cup \{x^0 \cdot x^k = x^0 \cdot x^l\}) = \mathcal{E}x(\mathcal{G}^s)$, gdzie $s = (p\cdot q, k-l)$, przy czym dla $k = l$ przyjmujemy $(p\cdot q, 0) = p\cdot q$.*

Dowód. Podobnie jak w dowodzie lematu 1 oznaczmy $C = \mathcal{C}n(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p\cdot q}) \cup \{x^0 \cdot x^k = x^0 \cdot x^l\})$. Niech $s = (p\cdot q, k-l)$. Jeśli $k = l$, to dowód jest oczywisty. Załóżmy zatem, że $k \neq l$. Z określenia s wynika, że w zbiorze $Z_{p\cdot q}$ istnieje element a taki, że $s \cdot a = k - l$. Równość $x^0 = x^0 \cdot x^s$ jest spełniona w rozmaitości $\mathcal{G}^s_{\mathcal{E}x}$ a zatem równość $x^0 = x^0 \cdot x^{a\cdot s}$ również jest spełniona w tej rozmaitości. Ostatecznie otrzymujemy, że równość $x^0 \cdot x^k = x^0 \cdot x^l$ należy do zbioru $\mathcal{E}x(\mathcal{G}^s)$ a tym samym pokazaliśmy, że $C \subseteq \mathcal{E}x(\mathcal{G}^s)$.

Aby udowodnić inkluzję odwrotną zauważmy, że równości $x^0 \cdot x^0 = x^0 \cdot x^{p\cdot q}$, $x^0 \cdot x^k = x^0 \cdot x^l$ należą do zbioru C. Zatem równość $x^0 \cdot x^0 = x^0 \cdot x^{k-l}$ również należy do tego zbioru. Z określenia s wynika, że w zbiorze $Z_{p\cdot q}$ istnieją elementy a i b takie, że $a \cdot p \cdot q + b \cdot (l-k) = s$. Ponieważ równości $(x^0)^b = (x^0 \cdot x^{k-l})^b$ i $(x^0)^a = (x^0 \cdot x^{p\cdot q})^a$ należą do zbioru C zatem równości $x^0 = x^0 \cdot x^{b\cdot(l-k)}$ i $x^0 = x^0 \cdot x^{a\cdot p\cdot q}$ również należą do tego zbioru. Stąd równość $x^0 \cdot x^0 = x^0 \cdot x^{a\cdot p\cdot q} \cdot x^{b\cdot(k-l)}$ należy do zbioru C. Pokazaliśmy zatem, że równość $x^0 \cdot x^0 = x^0 \cdot x^{a\cdot p\cdot q+b\cdot(l-k)}$ należy do zbioru C co jest równoważne temu, że równość $x^0 \cdot x^0 = x^0 \cdot x^s$ również należy do zbioru C. Tym samym dowód lematu został zakończony.

Lemat 4 *Jeśli $k, l \in Z_{p\cdot q}$, to $\mathcal{C}n\,\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p\cdot q}) \cup \{((x^k)^{-1})^{-1} = ((x^l)^{-1})^{-1}\}) = \mathcal{E}x(\mathcal{G}^s)$, gdzie $s = (p\cdot q, k-l)$, przy czym dla $k = l$ przyjmujemy $(p\cdot q, 0) = p\cdot q$.*

Dowód jest analogiczny do dowodu poprzedniego lematu.

Z lematów 3 i 4 wynika następujący wniosek

Wniosek 3 *Jeśli E jest zbiorem równości postaci (14) lub (15), to $\mathcal{M}od(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p\cdot q}) \cup E) \in \mathcal{E}^{\mathcal{G}^{p\cdot q}}$.*

Z wniosków 2 i 3 wynika, że interesujące są te klasy algebr $\mathcal{M}od(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p\cdot q}) \cup E)$, dla których do zbioru E należy conajmniej jedna równość postaci (16) i nie należy żadna równość postaci (12) lub (13).

W pracy [4] pokazano, że

(xiii) Dla każdego podzbioru E_1 zbioru $\mathcal{I}d(\tau_0)$ istnieje skończony zbiór E równości jednej zmiennej typu τ_0 postaci (12)–(16) taki, że $\mathcal{C}n(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p\cdot q}) \cup E_1) = \mathcal{C}n(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p\cdot q}) \cup E)$.

Stąd wynika, że dla każdej podrozmaitości $\mathcal{K}$ rozmaitości $\mathcal{G}^{p\cdot q}_{\mathcal{E}x}$ istnieje skończony zbiór E równości jednej zmiennej typu τ_0 postaci (12)–(16) taki, że $\mathcal{K} = \mathcal{M}od(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p\cdot q}) \cup E)$.

Lemat 1 *Jeśli $k \in Z_{p\cdot q}$, to $\mathcal{C}n(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p\cdot q}) \cup \{x = x^0 \cdot x^k\}) = \mathcal{I}d(\mathcal{G}^s)$, gdzie $s = (p \cdot q, k-1)$, przy czym dla $k = 1$ przyjmujemy $(p \cdot q, 0) = p \cdot q$.*

Dowód. Jeśli $k = 0$ lub $k = 1$, to wykorzystując **(i)** oraz **(iv)** otrzymujemy natychmiast tezę. Załóżmy zatem, że $k \neq 0$ i $k \neq 1$. Dla czytelniejszego zapisu przyjmijmy, że $C = \mathcal{C}n(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p\cdot q}) \cup \{x = x^0 \cdot x^k\})$.

Jeśli $s = (p \cdot q, k-1)$, to w zbiorze $Z_{p\cdot q}$ istnieje element a taki, że $k - 1 = a \cdot s$. Ponieważ równość $x^0 = x^s$ jest spełniona w rozmaitości $\mathcal{G}^s$ zatem równość $x^0 = x^{k-1}$ również jest spełniona w tej rozmaitości. Z aksjomatyki rozmaitości $\mathcal{G}^s$ (zob. **(i)** dla $n = s$) wynika, że następujący ciąg równości jest spełniony w $\mathcal{G}^s : x = x^0 \cdot x = x^{k-1} \cdot x = x^0 \cdot x^k$. Zatem równość $x = x^0 \cdot x^k$ jest spełniona w rozmaitości $\mathcal{G}^s$. Stąd wynika, że $C \subseteq \mathcal{I}d(\mathcal{G}^s)$.

Aby udowodnić inkluzję odwrotną zauważmy, że $(x^0 = x^0 \cdot x^{k-1}) \in C$. Ponieważ $s = (p \cdot q, k-1)$, to w zbiorze $Z_{p\cdot q}$ istnieją elemnty a i b takie, że $s = a \cdot p \cdot q + b \cdot (k-1)$. Tym samym w rozmaitości $\mathcal{M}od(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p\cdot q}) \cup \{x = x^0 \cdot x^k\})$ spełniony jest następujący ciąg równości: $x^s = x^{a\cdot p\cdot q=b\cdot(k-1)} = x^{a\cdot p\cdot q} x^{b\cdot(k-1)} = (x^{p\cdot q})^a \cdot (x^{b-1})^b = (x^0)^a \cdot (x^0)^b = x^0 \cdot x^0 = x^0$. Stąd otrzymujemy, że równość $x^s = x^0$ należy do $\mathcal{C}n(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p\cdot q}) \cup \{x = x^0 \cdot x^k\})$. Zauważmy, że następujący ciąg równości jest również spełniony w zbiorze C : $x = x^0 \cdot x^k = x^0 \cdot x^{k-1} \cdot x = x^0 \cdot x^0 \cdot x = x^0 \cdot x$. Pozostałe równości aksjomatyzujące rozmaitość $\mathcal{G}^s$ są zewnętrznie zgodne, tym samym dowód inkluzji odwrotnej został zakończony.

Lemat 2 *Jeśli $k \in Z_{p\cdot q}$, to $\mathcal{C}n(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p\cdot q}) \cup \{x = ((x^k)^{-1})^{-1}\}) = \mathcal{I}d(\mathcal{G}^s)$, gdzie $s = (p \cdot q, k-1)$, przy czym dla $k = 1$ przyjmujemy $(p \cdot q, o) = p \cdot q$.*

Dowód lematu pominiemy, gdyż jest analogiczny do dowodu lematu 1.

Z lematów 1 i 2 wynika następujący wniosek

Wniosek 2 *Jeśli E jest zbiorem równości jednej zmiennej typu τ_0 i równość $\phi = \psi$ jest postaci (12) lub (13) należy do E, to $\mathcal{M}od(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p\cdot q}) \cup E) \in \mathcal{L}(\mathcal{G}^{p\cdot q})$.*

Lemat 3 *Jeśli $k, l \in Z_{p\cdot q}$, to $\mathcal{C}n(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p\cdot q}) \cup \{x^0 \cdot x^k = x^0 \cdot x^l\}) = \mathcal{E}x(\mathcal{G}^s)$, gdzie $s = (p \cdot q, k-l)$, przy czym dla $k = l$ przyjmujemy $(p \cdot q, 0) = p \cdot q$.*

Dowód. Podobnie jak w dowodzie lematu 1 oznaczmy $C = \mathcal{C}n(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p\cdot q}) \cup \{x^0 \cdot x^k = x^0 \cdot x^l\})$. Niech $s = (p \cdot q, k-l)$. Jeśli $k = l$, to dowód jest oczywisty. Załóżmy zatem, że $k \neq l$. Z określenia s wynika, że w zbiorze $Z_{p\cdot q}$ istnieje element a taki, że $s \cdot a = k - l$. Równość $x^0 = x^0 \cdot x^s$ jest spełniona w rozmaitości $\mathcal{G}^s_{\mathcal{E}x}$ a zatem równość $x^0 = x^0 \cdot x^{a\cdot s}$ również jest spełniona w tej rozmaitości. Ostatecznie otrzymujemy, że równość $x^0 \cdot x^k = x^0 \cdot x^l$ należy do zbioru $\mathcal{E}x(\mathcal{G}^s)$ a tym samym pokazaliśmy, że $C \subseteq \mathcal{E}x(\mathcal{G}^s)$.

Aby udowodnić inkluzję odwrotną zauważmy, że równości $x^0 \cdot x^0 = x^0 \cdot x^{p\cdot q}$, $x^0 \cdot x^k = x^0 \cdot x^l$ należą do zbioru C. Zatem równość $x^0 \cdot x^0 = x^0 \cdot x^{k-l}$ również należy do tego zbioru. Z określenia s wynika, że w zbiorze $Z_{p\cdot q}$ istnieją elementy a i b takie, że $a \cdot p \cdot q + b \cdot (l-k) = s$. Ponieważ równości $(x^0)^b = (x^0 \cdot x^{k-l})^b$ i $(x^0)^a = (x^0 \cdot x^{p\cdot q})^a$ należą do zbioru C zatem równości $x^0 = x^0 \cdot x^{b\cdot(l-k)}$ i $x^0 = x^0 \cdot x^{a\cdot p\cdot q}$ również należą do tego zbioru. Stąd równość $x^0 \cdot x^0 = x^0 \cdot x^{a\cdot p\cdot q} \cdot x^{b\cdot(k-l)}$ należy do zbioru C. Pokazaliśmy zatem, że równość $x^0 \cdot x^0 = x^0 \cdot x^{a\cdot p\cdot q+b\cdot(l-k)}$ należy do zbioru C co jest równoważne temu, że równość $x^0 \cdot x^0 = x^0 \cdot x^s$ również należy do zbioru C. Tym samym dowód lematu został zakończony.

Lemat 4 *Jeśli $k, l \in Z_{p\cdot q}$, to $\mathcal{C}n\,\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p\cdot q}) \cup \{((x^k)^{-1})^{-1} = ((x^l)^{-1})^{-1}\}) = \mathcal{E}x(\mathcal{G}^s)$, gdzie $s = (p \cdot q, k-l)$, przy czym dla $k = l$ przyjmujemy $(p \cdot q, 0) = p \cdot q$.*

Dowód jest analogiczny do dowodu poprzedniego lematu.

Z lematów 3 i 4 wynika następujący wniosek

Wniosek 3 *Jeśli E jest zbiorem równości postaci (14) lub (15), to $\mathcal{M}od(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p\cdot q}) \cup E) \in \mathcal{E}^{\mathcal{G}^{p\cdot q}}$.*

Z wniosków 2 i 3 wynika, że interesujące są te klasy algebr $\mathcal{M}od(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p\cdot q}) \cup E)$, dla których do zbioru E należy conajmniej jedna równość postaci (16) i nie należy żadna równość postaci (12) lub (13).

Wzorując się na pracy [5] wprowadźmy oznaczenie

(xiv) $\mathcal{C}^n = \mathcal{M}od(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^n) \cup \{x^0 \cdot x^0 = ((x^0)^{-1})^{-1}\})$,

dla $n \in N, n > 0$.

Zauważmy, że $\mathcal{C}^1 = \mathcal{G}^1_{\mathcal{N}}$.

W pracy [5] udowodniono następujący warunek

(xv) $\mathcal{G}^n_{\mathcal{N}} \subset\neq \mathcal{C}^n \subseteq \mathcal{G}^n_{\mathcal{E}x}$ oraz
$\mathcal{G}^n_{\mathcal{N}} \neq \mathcal{C}^n \neq \mathcal{G}^n_{\mathcal{E}x}$ dla $n \geq 2$.

Lemat 5 $\mathcal{M}od(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^s) \cup \{x^{-1} \cdot x^0 = x^{-1}\}) = \mathcal{G}^s_{\mathcal{N}}$.

Dowód. Oczywistym jest, że $\mathcal{E}x(\mathcal{G}^s) \cup \{x^{-1} \cdot x^0 = x^{-1}\}) \subseteq \mathcal{N}(\mathcal{G}^s)$.
Inkluzja odwrotna łatwo wynika z aksjomatyk rozmaitości $\mathcal{G}^s_{\mathcal{E}x}$ oraz $\mathcal{G}^s_{\mathcal{N}}$ (patrz równości (1),(2),(4),(5)-(8) dla $n = s$.)

Lemat 6 *Jeśli* $l \equiv 0(mod(k-l, p \cdot q))$, *to*
$\mathcal{C}n(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p \cdot q}) \cup \{x^0 \cdot x^k = ((x^l)^{-1})^{-1}\}) = \mathcal{C}n(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{(k-l, p \cdot q)}) \cup \{x^0 \cdot x^0 = ((x^0)^{-1})^{-1}\})$.

Dowód. Przyjmijmy $C_1 = \mathcal{C}n(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p \cdot q}) \cup \{x^0 \cdot x^k = ((x^l)^{-1})^{-1}\})$ oraz $C_2 = \mathcal{C}n(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{(k-l, p \cdot q)}) \cup \{x^0 \cdot x^0 = ((x^0)^{-1})^{-1}\})$. Niech $l \equiv 0(mod(k-l, p \cdot q))$. W zbiorze $Z_{p \cdot q}$ istnieje element a taki, że $a \cdot (p \cdot q, k-l) = l$, zatem równość $x^0 \cdot x^0 = ((x^l)^{-1})^{-1}$ należy do C_2 co implikuje że równość $x^0 \cdot x^l = ((x^l)^{-1})^{-1}$ należy do C_2. Stąd oraz z tego, że równość $x^0 \cdot x^0 = x^0 \cdot x^{k-l}$ należy do C_2 wynika, że równość $x^0 \cdot x^k = ((x^l)^{-1})^{-1}$ również należy do tego zbioru. Łatwo widać, że równość $x^0 = x^{p \cdot q}$ należy do C_2.
Pokazaliśmy więc, że $C_1 \subseteq C_2$.
Inkluzja odwrotna jest oczywista.
Z powyższego lematu wynika następujący wniosek

Wniosek 4 *Jeśli* $l \equiv 0(mod(k-l, p \cdot q))$, *to*
$\mathcal{M}od(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p \cdot q}) \cup \{x^0 \cdot x^k = ((x^l)^{-1})^{-1}\}) = \mathcal{C}^{(p \cdot q, k-l)}$.

Wprowadźmy oznaczenie

(xvi) $\mathcal{P}_n^{\{k_1, \dots, k_s\}} = \mathcal{M}od(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^n) \cup \bigcup_{i=1}^s \{x^0 \cdot x^{k_i} = ((x^{k_i})^{-1})^{-1}\})$.

Lemat 7 *Jeśli* $k_1, \dots, k_s$ *są elementami zbioru* Z_n *oraz dla pewnego* $i \in \{1, \dots, s\}$ $(k_i, n) = 1$, *to* $\mathcal{P}_n^{\{k_1, \dots, k_s\}} = \mathcal{G}^n_{\mathcal{N}}$ *dla* $n \in N, n > 0$.

Dowód. Niech $C = \mathcal{C}n(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^n) \cup \bigcup_{i=1}^s \{x^0 \cdot x^{k_i} = ((x^{k_i})^{-1})^{-1}\})$. Oczywistym jest, że $C \subseteq \mathcal{N}(\mathcal{G}^n)$. Aby udowodnić inkluzję odwrotną wystarczy pokazać, że równość $x^{-1} \cdot x^0 = x^{-1}$ należy do C.
Przypuśćmy, że $(k_i, n) = 1$ dla pewnego i należącego do zbioru $\{1, \dots, s\}$. Wówczas w zbiorze Z_n istnieją elementy a i b takie, że $a_{k_i} + b \cdot n = 1$. Ponieważ $(x^0 \cdot x^{k_i} = ((x^{k_i})^{-1})^{-1}) \in C$, to $x^0 \cdot x^{a \cdot k_i} = ((x^{a \cdot k_i})^{-1})^{-1} \in C$. Stąd otrzymujemy, że $x^0 \cdot x^{1-n \cdot b} = ((x^{1-n \cdot b})^{-1})^{-1} \in C$ co implikuje, że $(x^0 \cdot x = (x^{-1})^{-1}) \in C$. Podstawiając w ostatniej równości x^{-1} za x otrzymujemy, że równość $x^0 \cdot x^{-1} = x^{-1}$ należy do C. Tym samym dowód lematu został zakończony.

Twierdzenie 1 *Jeśli* E *jest zbiorem równości postaci (12)-(16), to* $\mathcal{M}od(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p \cdot q}) \cup E)$ *jest jedną z następujących rozmaitości:*

(xvii) $\mathcal{G}^{p \cdot q}_{\mathcal{E}x}, \mathcal{G}^{p}_{\mathcal{E}x}, \mathcal{G}^{q}_{\mathcal{E}x}, \mathcal{G}^{1}_{\mathcal{E}x}, \mathcal{C}^{p \cdot q}, \mathcal{C}^p, \mathcal{C}^q, \mathcal{P}^{\{p,q\}}_{p \cdot q}, \mathcal{P}^{\{p\}}_{p \cdot q}, \mathcal{P}^{\{q\}}_{p \cdot q}$,
$\mathcal{G}^{p \cdot q}_{\mathcal{N}}, \mathcal{G}^{p}_{\mathcal{N}}, \mathcal{G}^{q}_{\mathcal{N}}, \mathcal{G}^{1}_{\mathcal{N}}, \mathcal{G}^{p \cdot q}, \mathcal{G}^p, \mathcal{G}^q, \mathcal{G}^1$.

Dowód. Niech $E \subseteq \mathcal{I}d(\tau)$ i niech $\mathcal{V} = \mathcal{M}od(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p \cdot q}) \cup E)$. Wówczas zachodzi jeden z następujących przypadków:

(1) $E \subseteq \mathcal{E}x(\tau)$,

(2) do zbioru E należy conajmniej jedna równość postaci (12) lub (13),

(3) do zbioru E należy conajmniej jedna równość postaci (16) i żadna równość ze zbioru E nie jest postaci (12) lub (13).

Dowody dwóch pierwszych przypadków są oczywiste. Pierwszy wymnika z wniosku 3, natomiast drugi z wniosku 2 i z warunku (iii).
Aby udowodnić przypadek (3) załóżmy, że żadna równość należąca do zbioru E nie jest postaci (12) lub (13) oraz, że przynajmniej jedna równość należąca do zbioru E jest postaci (16). Zatem zbiór E jest skończonym zbiorem równości postaci (14)–(16). Możemy go przedstawić w następujący sposób:
$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, gdzie
$E_1 = \{((x^{k_1})^{-1})^{-1} = ((x^{l_1})^{-1})^{-1}, \dots, ((x^{k_t})^{-1})^{-1} = ((x^{l_t})^{-1})^{-1}\}$,
$E_2 = \{x^0 \cdot x^{k_{t+1}} = x^0 \cdot x^{l_{t+1}}, \dots, x^0 \cdot x^{k_r} = x^0 \cdot x^{l_r}\}$,

Wzorując się na pracy [5] wprowadźmy oznaczenie

(xiv) $\mathcal{C}^n = \mathcal{M}od(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^n) \cup \{x^0 \cdot x^0 = ((x^0)^{-1})^{-1}\})$,

dla $n \in N, n > 0$.

Zauważmy, że $\mathcal{C}^1 = \mathcal{G}^1_{\mathcal{N}}$.

W pracy [5] udowodniono następujący warunek

(xv) $\mathcal{G}^n_{\mathcal{N}} \subset\neq \mathcal{C}^n \subseteq \mathcal{G}^n_{\mathcal{E}x}$ oraz
$\mathcal{G}^n_{\mathcal{N}} \neq \mathcal{C}^n \neq \mathcal{G}^n_{\mathcal{E}x}$ dla $n \geq 2$.

Lemat 5 $\mathcal{M}od(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^s) \cup \{x^{-1} \cdot x^0 = x^{-1}\}) = \mathcal{G}^s_{\mathcal{N}}$.

Dowód. Oczywistym jest, że $\mathcal{E}x(\mathcal{G}^s) \cup \{x^{-1} \cdot x^0 = x^{-1}\}) \subseteq \mathcal{N}(\mathcal{G}^s)$.
Inkluzja odwrotna łatwo wynika z aksjomatyk rozmaitości $\mathcal{G}^s_{\mathcal{E}x}$ oraz $\mathcal{G}^s_{\mathcal{N}}$ (patrz równości (1),(2),(4),(5)-(8) dla $n = s$.)

Lemat 6 *Jeśli $l \equiv 0(mod(k-l, p \cdot q))$, to*
$\mathcal{C}n(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p \cdot q}) \cup \{x^0 \cdot x^k = ((x^l)^{-1})^{-1}\}) = \mathcal{C}n(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{(k-l, p\cdot q)}) \cup \{x^0 \cdot x^0 = ((x^0)^{-1})^{-1}\})$.

Dowód. Przyjmijmy $C_1 = \mathcal{C}n(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p\cdot q}) \cup \{x^0 \cdot x^k = ((x^l)^{-1})^{-1}\})$ oraz $C_2 = \mathcal{C}n(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{(k-l,p\cdot q)}) \cup \{x^0 \cdot x^0 = ((x^0)^{-1})^{-1}\})$. Niech $l \equiv 0(mod(k-l, p \cdot q))$. W zbiorze $Z_{p\cdot q}$ istnieje element a taki, że $a \cdot (p \cdot q, k-l) = l$, zatem równość $x^0 \cdot x^0 = ((x^l)^{-1})^{-1}$ należy do C_2 co implikuje, że równość $x^0 \cdot x^l = ((x^l)^{-1})^{-1}$ należy do C_2. Stąd oraz z tego, że równość $x^0 \cdot x^0 = x^0 \cdot x^{k-l}$ należy do C_2 wynika, że równość $x^0 \cdot x^k = ((x^l)^{-1})^{-1}$ również należy do tego zbioru. Łatwo widać, że równość $x^0 = x^{p\cdot q}$ należy do C_2.
Pokazaliśmy więc, że $C_1 \subseteq C_2$.
Inkluzja odwrotna jest oczywista.
Z powyższego lematu wynika następujący wniosek

Wniosek 4 *Jeśli $l \equiv 0(mod(k-l, p \cdot q))$, to*
$\mathcal{M}od(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p\cdot q}) \cup \{x^0 \cdot x^k = ((x^l)^{-1})^{-1}\}) = \mathcal{C}^{(p\cdot q, k-l)}$.

Wprowadźmy oznaczenie

(xv) $\mathcal{P}_n^{\{k_1,\ldots,k_s\}} = \mathcal{M}od(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^n) \cup \bigcup_{i=1}^s \{x^0 \cdot x^{k_i} = ((x^{k_i})^{-1})^{-1}\})$.

Lemat 7 *Jeśli $k_1, \ldots, k_s$ są elementami zbioru Z_n oraz dla pewnego $i \in \{1, \ldots, s\}$ $(k_i, n) = 1$, to $\mathcal{P}_n^{\{k_1,\ldots,k_s\}} = \mathcal{G}^n_{\mathcal{N}}$ dla $n \in N, n > 0$.*

Dowód. Niech $C = \mathcal{C}n(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^n) \cup \bigcup_{i=1}^s \{x^0 \cdot x^{k_i} = ((x^{k_i})^{-1})^{-1}\})$. Oczywistym jest, że $C \subseteq \mathcal{N}(\mathcal{G}^n)$. Aby udowodnić inkluzję odwrotną wystarczy pokazać, że równość $x^{-1} \cdot x^0 = x^{-1}$ należy do C.

Przypuśćmy, że $(k_i, n) = 1$ dla pewnego i należącego do zbioru $\{1, \ldots, s\}$. Wówczas w zbiorze Z_n istnieją elementy a i b takie, że $a_{k_i} + b \cdot n = 1$. Ponieważ $(x^0 \cdot x^{k_i} = ((x^{k_i})^{-1})^{-1}) \in C$, to $x^0 \cdot x^{a\cdot k_i} = ((x^{a\cdot k_i})^{-1})^{-1} \in C$. Stąd otrzymujemy, że $x^0 \cdot x^{1-n\cdot b} = ((x^{1-n\cdot b})^{-1})^{-1} \in C$ co implikuje, że $(x^0 \cdot x = (x^{-1})^{-1}) \in C$. Podstawiając w ostatniej równości x^{-1} za x otrzymujemy, że równość $x^0 \cdot x^{-1} = x^{-1}$ należy do C. Tym samym dowód lematu został zakończony.

Twierdzenie 1 *Jeśli E jest zbiorem równości postaci (12)-(16), to $\mathcal{M}od(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p\cdot q}) \cup E)$ jest jedną z następujących rozmaitości:*

(xvii) $\mathcal{G}^{p\cdot q}_{\mathcal{E}x}, \mathcal{G}^{p}_{\mathcal{E}x}, \mathcal{G}^{q}_{\mathcal{E}x}, \mathcal{G}^{1}_{\mathcal{E}x}, \mathcal{C}^{p\cdot q}, \mathcal{C}^p, \mathcal{C}^q, \mathcal{P}_{p\cdot q}^{\{p,q\}}, \mathcal{P}_{p\cdot q}^{\{p\}}, \mathcal{P}_{p\cdot q}^{\{q\}}$,
$\mathcal{G}^{p\cdot q}_{\mathcal{N}}, \mathcal{G}^{p}_{\mathcal{N}}, \mathcal{G}^{q}_{\mathcal{N}}, \mathcal{G}^{1}_{\mathcal{N}}, \mathcal{G}^{p\cdot q}, \mathcal{G}^p, \mathcal{G}^q, \mathcal{G}^1$.

Dowód. Niech $E \subseteq \mathcal{I}d(\tau)$ i niech $\mathcal{V} = \mathcal{M}od(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p\cdot q}) \cup E)$. Wówczas zachodzi jeden z następujących przypadków:

(1) $E \subseteq \mathcal{E}x(\tau)$,

(2) do zbioru E należy conajmniej jedna równość postaci (12) lub (13),

(3) do zbioru E należy conajmniej jedna równość postaci (16) i żadna równość ze zbioru E nie jest postaci (12) lub (13).

Dowody dwóch pierwszych przypadków są oczywiste. Pierwszy wymnika z wniosku 3, natomiast drugi z wniosku 2 i z warunku (iii).

Aby udowodnić przypadek (3) załóżmy, że żadna równość należąca do zbioru E nie jest postaci (12) lub (13) oraz, że przynajmniej jedna równość należąca do zbioru E jest postaci (16). Zatem zbiór E jest skończonym zbiorem równości postaci (14)–(16). Możemy go przedstawić w następujący sposób:
$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, gdzie
$E_1 = \{((x^{k_1})^{-1})^{-1} = ((x^{l_1})^{-1})^{-1}, \ldots, ((x^{k_t})^{-1})^{-1} = ((x^{l_t})^{-1})^{-1}\}$,
$E_2 = \{x^0 \cdot x^{k_{t+1}} = x^0 \cdot x^{l_{t+1}}, \ldots, x^0 \cdot x^{k_r} = x^0 \cdot x^{l_r}\}$,

$E_3 = \{x^0 \cdot x^{k_{r+1}} = ((x^{l_{r+1}})^{-1})^{-1}, ..., x^0 \cdot x^{k_s} = ((x^{l_s})^{-1})^{-1}\}$.
Zbiory E_1 i E_2 mogą oczywiście być puste, natomiast zbiór E_3 jest niepusty. Wprowadźmy oznaczenie $w = (k_1 - l_1, ..., k_s - l_s, p \cdot q)$, przy czym, jeśli $k_i = l_i$, to przyjmujemy $k_i - l_i = p \cdot q$. Łatwo widać, że jeśli p i q są różnymi liczbami pierwszymi, to $w \in \{1, p, q, p \cdot q\}$. Jeśli $w = 1$ to z warunku **(viii)** otrzymujemy, że $\mathcal{V} = \mathcal{G}^1_{\mathcal{N}}$. Jeśli natomiast $w = p$, to w zbiorze $\{1, ..., s\}$ istnieje element i taki, że $(k_i - l_i, p \cdot q) = p$. Jeśli natomiast $j \neq i$, to $k_j = l_j$ lub $(k_j - l_j, p \cdot q) = p$. Stąd oraz z tego, że $k_j \equiv l_j (mod(p \cdot q, k - l)$ otrzymujemy, że $\mathcal{V} = Cn(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p \cdot q}) \cup E_1 \cup E_2 \cup \{x^0 \cdot x^{(l_{r+1})_{mod(p)}} = ((x^{(l_{r+1})_{mod(p)}})^{-1})^{-1}, ..., x^0 \cdot x^{(l_s)_{mod(p)}} = ((x^{(l_s)_{mod(p)}})^{-1})^{-1}$, $x^0 \cdot x^0 = x^p\})$. Niech $m_i = (l_{r+i})_{mod(p)}$ dla $i = 1, ..., s - r$. Jeśli $(m_i, p) = 1$, to z tego, że równość $x^0 \cdot x^{m_i} = ((x^{m_i})^{-1})^{-1}$ jest spełniona w rozmaitości wynika, że równość $x^0 \cdot x^{-1} = x^{-1}$ jest również spełniona w rozmaitości $\mathcal{V}$. Z lematu 5 otrzymujemy, że $\mathcal{V} = \mathcal{G}^p_{\mathcal{N}}$. Jeśli natomiast $(m_i, p) \neq 1$, to oczywiście $(m_i, p) = p$. Wykorzystując wniosek 4 otrzymujemy, że $\mathcal{V} = \mathcal{C}^p$.

Dowód dla $w = q$ przebiega podobnie jak wyżej.

Załóżmy teraz, że $w = p \cdot q$. Łatwo wówczas widać, że $k_i = l_i$ dla $i \in \{1, ..., s\}$. Jeśli $(k_i, p \cdot q) = 1$ dla pewnego $i \in \{r + 1, ..., s\}$, to na mocy lematu 6 otrzymujemy natychmiast, że $\mathcal{V} = \mathcal{G}^{p \cdot q}_{\mathcal{N}}$. Załóżmy zatem, że $(k_i, p \cdot q) \neq 1$ dla każdego i należącego do zbioru $\{r + 1, ..., s\}$. Wówczas $(k_i, p \cdot q) \in \{p, q, p \cdot q\}$ i z określenia **(xvi)** łatwo wynika, że $\mathcal{V}$ jest jedną z następujących rozmaitości: $\mathcal{P}^p_{p \cdot q}$, $\mathcal{P}^q_{p \cdot q}$, $\mathcal{P}^{p,q}_{p \cdot q}$.

Twierdzenie 2 *Każde dwie rozmaitości wymienione w punkcie* **(xvii)** *są różne.*

Dowód. Oczywiste są następujące inkluzje: $\mathcal{G}^1 \subseteq \mathcal{G}^1_{\mathcal{N}} \subseteq \mathcal{G}^1_{\mathcal{E}x}$, $\mathcal{G}^r \subseteq \mathcal{G}^r_{\mathcal{N}} \subseteq \mathcal{C}^r \subseteq \mathcal{G}^r_{\mathcal{E}x}$, oraz $\mathcal{G}^{p \cdot q} \subseteq \mathcal{G}^{p \cdot q}_{\mathcal{N}} \subseteq \mathcal{P}^{\{r\}}_{p \cdot q} \subseteq \mathcal{P}^{\{p,q\}}_{p \cdot q} \subseteq \mathcal{C}^{p \cdot q} \subseteq \mathcal{G}^{p \cdot q}_{\mathcal{E}x}$, a także inkluzje $\mathcal{C}^r \subseteq \mathcal{P}^{\{r\}}_{p \cdot q}$ dla $r \in \{p, q\}$. Dowód, że inkluzje te są właściwe, ograniczymy do przypadku dla rozmaitości $\mathcal{P}^{\{p\}}_{p \cdot q}$ i $\mathcal{C}^{p \cdot q}$ konstruując algebrę należącą do rozmaitości $\mathcal{C}^{p \cdot q}$ i nienależącą do rozmaitości $\mathcal{P}^{\{p\}}_{p \cdot q}$. Dla pozostałych par rozmaitości dowód przebiega analogicznie.

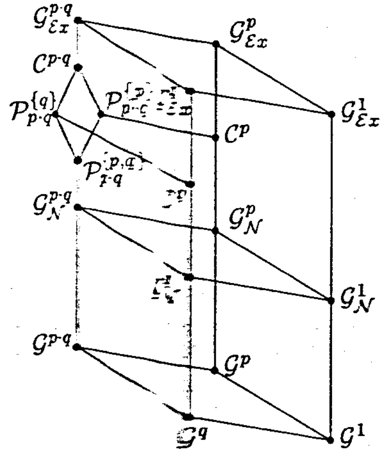
Rozważmy grupę $\mathcal{Z}_n = (Z_{p \cdot q}; +, -)$ i algebrę
$(\{0, 1, ..., p^+, p^-, ..., p \cdot q - 1\}; +, -)$ będącą następującą dyspersją grupy $\mathcal{Z}_n$:
$A_i = \{i\}$ dla $i \in \{0, 1, ..., p - 1, p + 1, ..., p \cdot q - 1\}$,
$A_p = \{p^+, p^-\}$,
$c_+(i) = c_-(i) = i$ dla $i \neq p$ oraz $c_+(p) = p^+, c_-(p) = p^-$.
Widać, że rówość $x^0 \cdot x^0 = ((x^0)^{-1})^{-1}$ jest spełniona w tej algebrze, natomiast równość $x^0 \cdot x^p = ((x^p)^{-1})^{-1}$ nie jest spełniona dla $x = 1$.

Twierdzenie 3 *Jeśli $\mathcal{V}$ jest podrozmaitością rozmaitości $\mathcal{G}^{p \cdot q}_{\mathcal{E}x}$, to jest ona jedną z rozmaitości podanych w warunku* **(xvii)**.

Dowód wynika bezpośrednio z twierdzenia 1 oraz z warunku **(xiii)**.

Bezpośrednio z powyższych twierdzeń wynika następujący wniosek

Wniosek 5 *Kratę $\mathcal{L}(\mathcal{G}^{p \cdot q}_{\mathcal{E}x})$ wszystkich podrozmaitości rozmaitości $\mathcal{G}^{p \cdot q}_{\mathcal{E}x}$ przedstawia następujący diagram.*



Bibliografia

[1] Burris S., Sankappanavar H.P., A Course in Universal Algebra, Springer–Verlag, New York 1981.

[2] Chromik W., Externally compatible identities of algebras, Demonstratio Mathematica, vol.23, No [illegible] (1990) 344–355.

[3] Gajewska–Kurdziel K., On the lattice of some varieties defined by externally compatible identities, General Algebra and Descrete Mathematics, Berlin (1995) 107–[illegible]

[4] Gajewska–Kurdziel K., Mruczek K., Równoważność pewnych zbiorów równości spełnionych w rozmaitości grup abelowych (do wglądu).

[5] Hałkowska K.,Koch R., On the lattice of varieties defined by externally compatible identities of Abelian Groups, Acta Universitatis Vratislaviensis,

[6] Hałkowska K., On the dispersion operator on classes of algebras, Bull.,of the Section of Logic, PAN, vol.A, No.2 (1998)

[7] Mel'nik I.I., Normal clsures of perfect varieties of universal algebras (in Russian), Ordered sets of lattices, Izdat. Saratov (1971) 56–65.

[8] Płonka J., On the subdirect product of some equational classes of algebras, Math. Nachr.63 (1974).

[9] Płonka J., P–compatible identities and their applications to classical algebras, Math.Slovaca 40, No.1 (1990) 21–30.

Prace Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie
Matematyka V, Częstochowa 1997

Ogólny schemat niezależności w ujęciu algebraicznym

Kazimierz Głazek

Wstęp.

W matematyce występuje wiele rozmaitych pojęć niezależności, jak np. niezależność liniowa wektorów punktów lub liczb, niezależność liniowa w teorii liczb i - ogólniej – w teorii rozszerzeń ciał, niezależność wielomianów (ogólniej – funkcji ciągłych), niezależność logiczna aksjomatów, niezależność w teorii krat i w teorii algebr Boole'a, niezależność wierzchołków lub krawędzi w teorii grafów, niezależność ze względu na operator domknięcia, niezależność stochastyczna, niezależność rozważana w teorii baz danych i wiele innych. Są też pokrewne pojęcia wolności. Od lat 30–tych obserwowano, że nazwy „niezależność" i „wolność" występują nieprzypadkowo, oraz iż wymienione tu pojęcia niezależności mają różne cechy wspólne. Starano się ująć te pojęcia w jakiś wspólny schemat. Powstały – z grubsza mówiąc – dwa bardzo ogólne schematy: jeden bardziej teoriomnogościowy, używany często w rozważaniach kombinatorycznych i optymizacyjnych, prowadzący do dwu ostatnio rozwijających się teorii matroidów i greedoidów, oraz drugi oparty na rozważaniach pochodzących z algebry ogólnej. Zajmę się tu głównie tym drugim, ale pokażę również pewne związki między tymi wspomnianymi wyżej podejściami. W szczególności dla zilustrowania tej ogólnej teorii zajmę się pewnymi własnościami rodzin zbiorów niezależnych pozwalającymi w pewnych konkretnych przypadkach scharakteryzować te rodziny oraz mocami niezależnych układów generatorów (czyli baz). Jest jeszcze sporo interesujących problemów i kierunków w tej teorii (por. K. Głazek 1979).
Pracę niniejszą poświęcam pamięci zmarłego w 1976 r. Profesora Edwarda Marczewskiego – twórcy ogólno-algebraicznego podejścia do pojęć niezależności.