Równościowe i zdaniowe logiki P-zgodne

Krystyna Mruczek-Nasieniewska

Równościowe i zdaniowe logiki P-zgodne

WYDAWNICTWO NAUKOWE
UNIWERSYTETU MIKOŁAJA KOPERNIKA

Toruń 2013

Recenzenci

Janusz Czelakowski
Andrzej Pietruszczak

Projekt okładki

Anna Pietruszczak

Printed in Poland

ISBN 978-83-231-3082-6

Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika

Redakcja: ul. Gagarina 5, 87-100 Toruń
tel. 56 611 42 95, fax 56 611 47 05
e-mail: wydawnictwo@umk.pl
http://www.wydawnictwoumk.pl

Dystrybucja: ul. Reja 25, 87-100 Toruń
tel./fax 56 611 42 38
e-mail: books@umk.pl

Druk: WN UMK
ul. Gagarina 5, 87-100 Toruń, tel. 56 611 22 15

Spis treści

Słowo wstępne

Analizując wyrażenia języka naturalnego lub formuły języka sztucznego zwykle posługujemy się *stricte* wypowiedzianymi regułami syntaktycznymi budowy wyrażeń tego języka bądź pewnymi quasi-regułami dotyczącymi pewnych umów. Najczęściej analizujemy najbardziej zewnętrzne funktory występujące w analizowanych wyrażeniach. Postępując analogicznie rozpatrujemy coraz bardziej wewnętrzne operatory. W szczególności czynności te przeprowadzamy, gdy analizujemy formuły równoważnościowe, które wyrażają związki między funktorami.

Celem pracy jest omówienie pewnych klas logik równościowych wyrażonych zarówno w języku teorii modeli jak i ujętych aksjomatycznie.

W niniejszej pracy wskażemy pewne ogólne związki zachodzące między wybranym klasami logik a odpowiadającymi im podlogikami generowanymi przez tzw. równości, czy szerzej formuły P-zgodne. Wybierając ze zbioru formuł tylko te formuły, które mają pewną określoną strukturę (i domykając ten zbiór ze względu na określony operator konsekwencji) otrzymujemy podsystem logiki wyjściowej. Klasa modeli otrzymanej logiki jest większa w sensie inkluzji od klasy modeli odpowiadającej wyjściowej logice. Takie podejście daje pewien szerszy wgląd w istotę logik. Prowadząc takie badania możemy 'patrzeć' na dany system z pewnej 'odległości'. Mając taką perspektywę możemy rozważać istotne aspekty każdego systemu i pytać o skończoną bazowalność, algebry wolno-generowane, modele podprosto-nierozkładalne (i inne) oraz badać, na ile są one powiązane (odpowiednio) z bazą rówościową, algebrami wolno-generowanymi, modelami podprosto-nierozkładalnymi wyjściowego systemu. W niniejszej pracy będziemy 'patrzeć' z szerszej perspektywy na klasę modeli związaną z logiką klasyczną, logiką wielkowartościową i kwantową.

Przypadek logik równościowo definiowalnych jest w literaturze szeroko znany. Omówimy wyniki dotyczące tego przypadku by nie uchybić kompletności rozważań. Natomiast przypadek logik zdaniowych w kontekście procedury P-zgodności jest — jak mniemamy — zagadnieniem nowym.

Rozważmy więc logikę zdaniową $\mathbf{L}$ — czyli zbiór domknięty na podstawianie i regułę odrywania, w której języku występuje implikacja. Ponadto, niech dany będzie podział zbioru funktorów rozpatrywanego języka. Elementy podziału zwać będziemy blokami. W naturalny sposób generujemy pojęcie równoważności logicznej przyjmując, że formuły A i B są logicznie równoważne na gruncie logiki $\mathbf{L}$ (ozn. $A \equiv_{\mathbf{L}} B$) wtw zarazem $A \to B$ jak i $B \to A$ są tezami logiki $\mathbf{L}$.

Można teraz rozważać tylko równoważności $A \equiv_{\mathbf{L}} B$, w których formuły A i B mają funktory główne należące do tej samej elementu podziału P zbioru stałych. Aby uwzględnić tezy mające jako argument funktora głównego zmienną, należałoby przyjąć, że istnieje dodatkowy obiekt, powiedzmy ‘var’, traktowany jako funktor główny dowolnej zmiennej.

Tak określoną relacją oznaczmy przez $\equiv^P_{\mathbf{L}}$. Łatwo widać, że otrzymana w ten sposób relacja w zbiorze wszystkich formuł jest relacją równoważności:

Definicja 0.0.1. Niech dana będzie logika zdaniowa $\mathbf{L}$ oraz partycja P zbioru stałych $Const_{\mathrm{var}} = \{\sim, \wedge, \vee, \to, \mathrm{var}\}$. Mówimy, że formuła A jest tezą P-zgodną logiki $\mathbf{L}$ wtw

1. A jest tezą logiki $\mathbf{L}$ oraz
2. A jest albo formułą o postaci $\sim B$, dla pewnego B, albo A jest formułą o postaci $B \,\S\, C$, gdzie $B, C \in \mathrm{For}$, przy czym istnieje $\pi \in P$, takie że zarówno funktor główny formuły B jak i funktor główny formuły C należą do π.

Łatwo widać, że zachodzi:

Twierdzenie 0.0.1. *Niech P będzie podziałem zbioru $Const_{\mathrm{var}}$, zaś $\mathbf{L}$ — logiką zdaniową w języku ze stałymi ze zbioru $Const_{\mathrm{var}}$, przy czym*

1. *tezą $\mathbf{L}$ jest prawo tożsamości,*
2. *$\mathbf{L}$ jest domknięta na regułę przechodniości implikacji.*

Wówczas $\equiv^P_{\mathbf{L}}$ jest relacją równoważności.

Fakt 0.0.1. *Jeśli dana jest dowolna logika zdaniowa $\mathbf{L}$ w języku ze stałymi logicznymi ze zbioru $Const$ (odp. $Const_{\mathrm{var}}$) oraz podział $P = \{Const\}$ (odp. $P = \{Const_{\mathrm{var}}\}$), to zbiór wszystkich tez P-zgodnych logiki $\mathbf{L}$ stanowi maksymalny ze względu na inkluzję podzbiór zbioru $\mathbf{L}$ zawierający P-zgodne tezy logiki $\mathbf{L}$.*

Do kwestii związanych z tak poszerzonym zbiorem stałych logicznych wrócimy na końcu tej pracy.

Rozdział 1

Podstawowe pojęcia

Pojęcie rozmaitości algebr wprowadził Garret Birkhoff w latach trzydziestych ubiegłego wieku. Od tamtego czasu powstało wiele prac związanych z tą tematyką. Badaniami dotyczącymi rozmaitości algebr zajmowali się między innymi: A. Tarski, B. Jónsson, R. Dedekind, J. von Neuman, G. Gräter, R. McKenzie. Jednym z kluczowych wyników uzyskanych w zakresie tej problematyki jest twierdzenie (zwane twierdzeniem Tarskiego-Birkhoffa), które mówi, że klasa algebr ustalonego typu jest rozmaitością wtedy i tylko wtedy, gdy jest klasą równościowo definiowalną. Z jednej strony mamy więc klasę domkniętą na obrazy homomorficzne, podalgebry i produkty algebr, z drugiej strony klasę, którą można scharakteryzować za pomocą pewnego układu równości. Jednym z najbardziej znanych przykładów rozmaitości jest klasa wszystkich algebr Boole'a. Czasami wygodnie jest patrzeć na klasę algebr Boole'a jak na klasę, którą wyznacza pewien znany zbiór równości. W pewnych zaś sytuacjach jak na klasę, która ma tę cechę, że obraz homomorficzny, podalgebra i produkt dowolnej rodziny algebr Boole'a jest algebrą Boole'a. Tej własności nie ma np. klasa ciał. I czy powiemy, że klasa ciał nie jest równościowo definiowalna, czy zauważymy, że produkt dwóch ciał nie zawsze jest ciałem, to tak naprawdę stwierdzimy, że klasa ciał nie jest rozmaitością. Twierdzenie Tarskiego-Birkhoffa w naturalny więc sposób łączy algebrę z logiką matematyczną. To z kolei przyczyniło się do szybkiego rozwoju badań nad klasami algebr. Mając pojęcie rozmaitości algebr nasuwa się pytanie o podklasy wyjściowej klasy, które są domknięte na te same operatory co wyjściowa klasa algebr. W ten sposób — bardzo naturalny w algebrze — pojawia się pojęcie podrozmaitości danej rozmaitości. Wiadomo też, że wszystkie podrozmaitości danej rozmaitości z relacją inkluzji tworzą kratę. Krata ta jest dualnie izomorficzna z kratą teorii równościowych, które rozszerzają teorię definiującą wyjściową rozmaitość. Zatem to, co da się udowodnić w odniesieniu do kraty teorii równościowych, można wyrazić w języku rozmaitości. Trudność polega jednak na tym, że niewiele można powiedzieć na ten temat w ogólnym przypadku ([54, 58, 67, 80]). Kraty rozmaitości bądź teorii równościowych dla klasycznych klas algebr były i są nadal szeroko badane ([59, 68, 77, 91, 92]).

Wiadomo, że krata podrozmaitości takich rozmaitości jako jedną z klas zawiera wyjściową rozmaitość. Jeśli przykładowo ze zbioru równości definiujących daną rozmaitość wybierzemy tylko tzw. formuły P-zgodne (definicję tego pojęcia podajemy na s. 19), to otrzymamy mniejszą w sensie inkluzji teorię równościową i tym samym większą klasę modeli. Dla tej większej klasy modeli znalezienie kraty jej podrozmaitości (w przypadku ogólnym) wydaje się bardzo trudne. Potwierdzeniem prawdziwości powyższego zdania mogą być liczne przykłady nieregularnych i często zaskakujących krat rozmaitości wyznaczonych przez tzw. równości P-zgodne czy inne typy równości o szczególnej strukturze.

Ujmijmy to w sposób bardziej formalny. Niech Σ będzie zbiorem równości typu τ[1] i niech $\mathbf{Mod}(\Sigma)$ będzie klasą wszystkich algebr spełniających Σ. Klasę algebr K nazwiemy równościowo definiowalną, jeśli istnieje zbiór równości Σ typu τ, taki że $K = \mathbf{Mod}(\Sigma)$.

Zacytujmy teraz znane twierdzenie:

Twierdzenie 1.0.2 (G. Birkhoff [7], A. Tarski [116]). *Klasa algebr jest klasą równościowo definiowalną wtedy i tylko wtedy, gdy jest rozmaitością.*

Jeśli Σ jest zbiorem równości ustalonego typu, to $\mathsf{Cn}(\Sigma)$ oznacza domknięcie zbioru Σ na reguły Birkhoffa.

Zauważmy, że dla każdego zbioru Σ równości typu τ spełniony jest warunek:

(1.0.1) $\quad \mathsf{Cn}(\Sigma) = \mathsf{Cn}(\mathsf{Cn}(\Sigma)).$

Zbiór Σ równości typu τ nazywamy teorią równościową, gdy

$$\mathsf{Cn}(\Sigma) = \Sigma.$$

Ponadto, jeśli dane są dwie teorie równościowe Σ_1 i Σ_2, to $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ jest największą teorią równościową zawartą w Σ_1 i Σ_2, natomiast $\mathsf{Cn}(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$ jest najmniejszą teorią równościową zawierającą Σ_1 oraz Σ_2. Oznaczmy zbiór wszystkich równości typu τ przez $Id(\tau)$. Znanym faktem jest, że

[1] Podstawowe pojęcia podano w Dodatku na s. 116

rodzina $\{\Sigma \subseteq Id(\tau) : \Sigma = \mathsf{Cn}(\Sigma)\}$, uporządkowana relacją inkluzji, tworzy kratę. Każdej teorii równościowej Σ odpowiada rozmaitość $\mathbf{Mod}(\Sigma)$ i odpowiedniość ta jest wzajemnie jednoznaczna. A zatem zbiór wszystkich rozmaitości typu τ, uporządkowany relacją inkluzji, tworzy kratę, która jest dualnie izomorficzna z kratą teorii równościowych typu τ, przy czym

$$(1.0.2) \quad \boldsymbol{Mod}(\Sigma_1) \vee \boldsymbol{Mod}(\Sigma_2) = \boldsymbol{Mod}(\Sigma_1 \cap \Sigma_2),$$

$$(1.0.3) \quad \boldsymbol{Mod}(\Sigma_1) \cap \boldsymbol{Mod}(\Sigma_2) = \boldsymbol{Mod}(\mathsf{Cn}(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)).$$

Jeśli K jest klasą algebr, to $Id(K)$ oznacza zbiór wszystkich równości spełnionych w klasie K. Przywołajmy łatwy w dowodzie, należący do folkloru fakt:

FAKT 1.0.2. 1. *Jeśli dane sa klasy algebr K_1 i K_2 oraz każda algebra z klasy K_1 jest również algebrą klasy K_2, to $Id(K_2) \subseteq Id(K_2)$.*
2. *Jeśli $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$, to $\boldsymbol{Mod}(\Sigma_2) \subseteq \boldsymbol{Mod}(\Sigma_1)$.*

1.1. Struktury krat teorii równościowych

Odwołamy się do wyniku pochodzącego z [67].

Rozważmy klasę $\mathbf{Mod}(\Sigma)$ wszystkich algebr spełniających wszystkie równości ze zbioru Σ. Niech dana będzie rozmaitość V oraz niech $\mathcal{L}(V)$ będzie kratą wszystkich podrozmaitości rozmaitości V. Niech $\mathcal{L}(\Sigma)$ oznacza kratę wszystkich rozszerzeń teorii Σ. Dla każdej kraty $\mathcal{L}$ rozmaitości, niech $\mathcal{L}^\delta$ będzie kratą teorii, dualną do kraty $\mathcal{L}$. Jak już wspomnieliśmy:

FAKT 1.1.1. 1. *Kraty $\mathcal{L}(\boldsymbol{Mod}(\Sigma))$ i $\mathcal{L}(\Sigma)^\delta$ są izomorficzne.*
2. *Kraty $\mathcal{L}(Id(V))^\delta$ i $\mathcal{L}(V)$ są izomorficzne.*

Doniosłą rolę w wyznaczaniu związków między algebrą a logiką odegrał Malcev [73]. Postawił on między innymi problem charakteryzacji kraty $L(V)$.

Mamy znany:

FAKT 1.1.2. *Każda skończona krata dystrybutywna jest izomorficzna z kratą $\mathcal{L}(\Sigma)$, dla pewnej teorii Σ.*

Jeśli dana jest krata L, to $L+1$ oznacza kratę z dodanym elementem największym 1.

Fakt 1.1.3 ([97]). *Dla każdej kraty algebraicznej L, krata $L+1$ jest izomorficzna z kratą teorii równościowych rozszerzających pewną teorię Σ.*

Przypomnijmy standardowe pojęcia użyte w kolejnym lemacie.

Definicja 1.1.1. Niech dana będzie algebra $\mathfrak{A} = \langle A, \{f_i\}_{i\in I}\rangle$, dwuargumentowa operacja termowa f oraz $a, b \in A$.

1. Mówimy, że a jest lewym zerem względem operacji termowej f wtw dla dowolnego $x \in A$, zachodzi: $f(a,x) = a$.
2. Mówimy, że b jest lewą jedynką względem operacji termowej f wtw dla dowolnego $y \in A$, zachodzi: $f(b,y) = y$.
3. Mówimy, że operacja f ma lewą jedynkę w algebrze $\mathfrak{A}$ wtw istnieje lewa jedynka względem operacji f.

Lemat 1.1.1 (McKenzie, [78, 67]). *Jeśli Σ jest teorią równościową, to $\mathcal{L}(\Sigma)$ jest izomorficzna z kratą kongruencji $Con\,\mathfrak{A}$ pewnej algebry $\mathfrak{A}$ mającej binarną termową operację b, przy czym $\mathfrak{A}$ ma lewe zero i lewą jedynkę.*

Niech M_k będzie kratą o k atomach, mającą 0 i 1. Zatem M_3 jest kratą przedstawioną na Diagramie 1.[2]

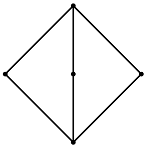


Diagram 1. Krata M_3

Znane jest twierdzenie Dedekinda stanowiące, że krata L nie jest modularna wtedy i tylko wtedy, gdy krata N_5 (przedstawiona na diagramie 2) może być zanurzona izomorficznie w kratę L. Z kolei G. Birhoff pokazał, że krata L nie jest dystrybutywna wtedy i tylko wtedy, gdy krata M_5 lub krata N_5 mogą być zanurzone w kratę L. Interesujące wydaje się pytanie, czy jest jakiś związek krat M_5 oraz N_5, czyli krat, które są istotne dla problemów — nazwijmy to — dystrybutywności i modularności z kratami teorii równościowych. Okazuje się, że prawdziwe są dwa poniższe twierdzenia:

[2]Zwykle oznaczaną przez 'M_5'.

Twierdzenie 1.1.1 ([67]). *Dla dowolnej teorii równościowej Σ i każdego $k \geqslant 3$, M_k nie jest izomorficzna z $\mathcal{L}(\Sigma)$.*

Twierdzenie 1.1.2 ([25]). *Istnieje teoria równościowa, dla której krata rozszerzeń jest izomorficzna z kratą N_5.*

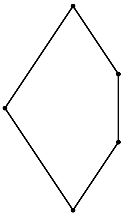


Diagram 2. Krata N_5

Przypomnijmy, że gdy dana jest krata L, przez $\wedge$-endomorfizm rozumiemy dowolny homomorfizm $f\colon L \longrightarrow L$, przy czym dla dowolnych $a, b \in L$ zachodzi $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$.

Definicja 1.1.2 ([67]).

1. Mówimy, że krata L jest $0, 1$-*prosta* wtw dla dowolnej kongruencji w L, jeśli klasa $0/\theta$ jest jednoelementowa a klasa $1/\theta$ ma moc większą od 1, to $\theta = L^2$.
2. Mówimy, że krata L jest *napięta* wtw jest skończona, mocy większej od 2, jest $0, 1$-prosta oraz dla dowolnego $\wedge$-endomorfizmu w L jeśli $f(x) > x$ dla każdego $x < 1$, to $f(0) = 1$.

Fakt 1.1.4 ([67]). *Jeśli skończona krata L jest prosta, iloczyn dowolnych dwóch co-atomów równa się 0 oraz ma uniwersum co najmniej trójelementowe, to L jest napięta.*

Przywołaliśmy pojęcie kraty napiętej, bo okazuje się, że właśnie te kraty grają istotną rolę przy ustalaniu struktury krat teorii równościowych. Prawdziwe jest bowiem następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.1.3 ([67]). *Jeśli L jest napięta, to L nie jest izomorficzna z żadną kratą $\mathcal{L}(\Sigma)$, gdzie Σ byłaby teorią równościową.*

Rozdział 2

Logiki równościowe — podstawowe fakty

Jako wprowadzenie do dziedziny logik równościowych przypomnimy podstawowe pojęcia w rozumieniu pochodzącym od Tarskiego [116].

Teorią pierwszego rzędu (teorią elementarną) nazywamy system nadbudowany nad językiem klasycznego rachunku kwantyfikatorów. Ściśle, przez teorię pierwszego rzędu rozumieć będziemy następującą trójkę:

$$\mathscr{T} = \langle \mathscr{L}, Ax_{\mathrm{s}}(\mathscr{T}), \vdash \rangle$$

gdzie $\mathscr{L}$ jest językiem klasycznego rachunku kwantyfikatorów, $Ax_{\mathrm{s}}(\mathscr{T})$ jest zbiorem aksjomatów specyficznych teorii $\mathscr{T}$ zaś $\vdash$ jest standardową, w dowolny sposób określoną relacją inferencji klasycznego rachunku kwantyfikatorów; w szczególności przyjmujemy, że dla dowolnej formuły A mamy $A \vdash \underset{x}{\forall} A$.

Przejdźmy teraz do określenia logiki równościowej.

Definicja 2.0.3. *Logiką równościową* nazywamy teorię pierwszego rzędu

$$\mathscr{T} = \langle \mathscr{L}, Ax_{\mathrm{s}}(\mathscr{T}), \vdash \rangle$$

gdzie

$$\mathit{Alf}(\mathscr{L}) = \langle \mathrm{Var}, \{f_i\}_{i \in I}, \{\approx\}, \mathit{Const} \rangle$$

przy czym spełnione są następujące warunki:

1. $x \approx x \in Ax_{\mathrm{s}}(\mathscr{T})$,
2. $x \approx y \vdash y \approx x$,
3. $x \approx y, y \approx z \vdash x \approx z$,
4. $x \approx y \vdash t \approx t(x /\!\!/ y)$, dla dowolnego $t \in \mathrm{Term}$.
5. $t \approx u \vdash h(t) \approx h(u)$, dla dowolnego podstawienia h.

Zatem jedynymi formułami atomowymi są równości termów. Przy interpretacji zmienne występujące w termach przebiegają uniwersum danej algebry zaś symbole funkcyjne oznaczają operacje bazowe algebry.

W przypadku gdy operacja jest argumentowości 0, zwana jest stałą lub stałą indywiduową. Standardowo w logice algebraicznej równości traktowane są jakby były poprzedzane kwantyfikatorami ogólnymi ze względu na wszystkie zmienne występujące w równości. Z formalnego punktu widzenie jest to uzasadnione faktem, że w rachunku kwantyfikatorów pierwszego rzędu obowiązuje reguła generalizacji.

Definicja 2.0.4 (Operacja termowa, [14]). Niech dany będzie term t typu τ nad zbiorem Var oraz algebra $\mathfrak{A}$ typu τ. Operacją termową (termu t) nazywamy funkcję $t^{\mathfrak{A}}\colon A^n \longrightarrow A$ określoną przez indukcję następująco:

(1) a) jeśli t jest zmienną x_i, to dla dowolnych $a_1, \ldots, a_n \in A$:

$$t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = a_i$$

b) jeśli $t = f(i)$ oraz $\mathrm{ar}\,(\,f(i)) = 0$, to dla pewnego $c_t \in A$ i dowolnych $a_1, \ldots, a_n \in A$:

$$t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = c_t$$

(2) jeśli t ma postać $f_i(p_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, p_k(x_1, \ldots, x_n))$; gdzie $i \in I$, to

$$t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f_i^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, t_k^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)).$$

Definicja 2.0.5 (Spełnianie równości). Równość $t \approx u$ jest spełniona (prawdziwa) w algebrze $\mathfrak{A}$ wtw $t^{\mathfrak{A}} = u^{\mathfrak{A}}$.

Mając pojęcie spełniania określamy pojęcie wynikania semantycznego.

Definicja 2.0.6. Niech dany będzie zbiór równości X typu τ. Mówimy, że równość $t \approx v$ wynika semantycznie z X wtw dla każdej algebry $\mathfrak{A}$ typu τ jeśli wszystkie równości ze zbioru X są spełnione w $\mathfrak{A}$, to również równość $t \approx v$ jest spełniona w $\mathfrak{A}$. Piszemy $X \models t \approx v$.

Mamy więc pojęcie konsekwencji semantycznej opartej na pojęciu spełniania w algebrze.

Ponadto mamy oczywiście relację dowiedlności wyznaczoną przez reguły nałożone na relację $\vdash$. Zgodnie więc z definicją 2.0.3 mamy regułę dołączenia do dowodu równości postaci $x \approx x$, możliwość zastosowania podstawienia oraz zastępowania ‘równego’ — ‘równym’. Oba pojęcia konsekwencji tzn. wynikania semantycznego oraz relacji dowiedlności są równoważne o czym stanowi stosowne twierdzenie o pełności:

TWIERDZENIE 2.0.4 (Birkhoff, 1935 [7]).

$$X \models t \approx v \ \mathit{wtw}\ X \vdash t \approx v.$$

Na mocy przyjętych określeń, logiki równościowe mogą się różnić tylko jeśli chodzi o symbole operacji. Innymi słowy logika równościowa (w przypadku ze skończoną liczbą stałych funkcyjnych) wyznaczona jest przez ciąg $F = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle$ n różnych symboli funkcyjnych. Zatem zgodnie z uprzednio przyjętym zwyczajem — gdy punktem wyjścia jest pewna algebra $\mathfrak{A} = \langle A, \{\Theta_1, \ldots, \Theta_n\}\rangle$ typu τ — generujemy język logiki równościowej wyznaczony przez ciąg symboli $\Theta = \langle \theta_1, \ldots, \theta_n \rangle$, przy czym przyjmujemy, że każdy z symboli θ_i jest tylu argumentowy, ilu argumentowa jest odpowiadająca mu operacja Θ_i.

W dalszej części przyjmiemy zwyczaj zapisywania algebry $\mathfrak{A}$ w postaci $\langle A, \Theta_1, \ldots, \Theta_n \rangle$.

Przywołajmy definicję teorii równościowej:

DEFINICJA 2.0.7 (Tarski, [116]). Niech $\mathfrak{A} = \langle A, \{\Theta_1, \ldots, \Theta_n\}\rangle$ ($\mathscr{K}$ będzie klasą algebr ustalonego typu τ).

Równościową teorią algebry $\mathfrak{A}$ (klasy $\mathscr{K}$) nazywamy zbiór wszystkich równości w języku logiki równościowej wyznaczonej przez τ, które są spełnione w $\mathfrak{A}$ (we wszystkich algebrach klasy $\mathscr{K}$).

Teorię tę oznaczmy przez $\Sigma_\tau(\mathfrak{A})$ (zaś w przypadku teorii równościowej klasy algebr $\mathscr{K}$ stosujemy oznaczenie $\Sigma_\tau(\mathscr{K})$).[3]

Jak wiadomo, zachodzi:

FAKT 2.0.5. *Dla każdej klasy algebr $\mathscr{K}$ istnieje algebra taka, że*

$$\Sigma(\mathfrak{A}) = \Sigma(\mathscr{K}).$$

DEFINICJA 2.0.8.
1. Zbiór równości Θ nazywamy teorią równościową wtw dla każdej równości $t \approx v$, jeśli $\Theta \vdash t \approx v$, to $t \approx v \in \Theta$.
2. Jeśli Θ jest teorią równościową a Σ jest pewnym zbiorem równości oraz $\Theta = \{t \approx v : \Sigma \vdash t \approx v\}$, to zbiór Σ zwany jest bazą teorii Θ, zaś o Θ mówimy, że jest generowana przez Σ i oznaczamy ją przez $\Theta[\Sigma]$.
3. Bazą równościową algebry $\mathfrak{A}$ (klasy algebr $\mathscr{K}$) nazywamy dowolną bazę teorii $\Sigma(\mathfrak{A})$ ($\Sigma(\mathscr{K})$).

[3]Zwykle — w szczególności, gdy jest on ustalony — pomijamy oznaczenie typu.

Definicja 2.0.9 ([116]). Niech dane będą teoria równościowa Σ typu τ oraz teoria równościowa Σ' typu τ'. Teorie Σ i Σ' są izomorficzne wtw istnieje bijekcja $f\colon \tau \longrightarrow \tau'$, taka że dla każdego $h \in \tau$, $\mathrm{ar}\,(h) = \mathrm{ar}\,(f(h))$ oraz $\mathbf{Mod}(\Sigma) = \mathbf{Mod}(\Sigma')$.

Fakt 2.0.6 ([116]). *Zbiór równości Σ jest teorią równościową wtw Σ jest zbiorem równości spełnionych w pewnym zbiorze.*

Definicja 2.0.10. Niech Θ i Θ' będą teoriami równościowymi. Jeśli Θ jest podzbiorem Θ', to mówimy, że Θ jest podteorią Θ' a Θ' jest rozszerzeniem Θ.

Rozdział 3

Kluczowe fakty z dziedziny logik P-zgodnych

3.1. Pojęcia podstawowe

W tej części monografii zaprezentujemy podstawowe pojęcia dotyczące tzw. logik P-zgodnych i znane z literatury wyniki innych autorów związane z tą tematyką. Wiele twierdzeń i lematów przytoczymy wraz z dowodami, aby pokazać jaki aparat pojęciowy jest w nich stosowany i jakie techniki dowodowe są w nich używane.

Definicja 3.1.1. *Podziałem (partycją) zbioru A* nazywamy dowolną rodzinę P niepustych zbiorów parami rozłącznych (czyli $\underset{X\in P}{\forall} X \neq \varnothing$ oraz $\underset{X,Y\in P}{\forall}$ (jeśli $X \neq Y$, to $X \cap Y = \varnothing$)), taką że $\bigcup P = A$.

Definicja 3.1.2. Rozważmy zbiór skończony A.

1. Niech Π_A oznacza zbiór wszystkich podziałów (partycji) zbioru A. Elementy zbioru Π_A nazywamy blokami partycji zbioru A.
2. Określamy relację $\leqslant$ w ${\Pi_A}^2$ przyjmując dla dowolnych $A_1, A_2 \in \Pi_A$:

$$A_1 \leqslant A_2 \text{ wtw dla każdego } x \in A_1 \text{ istnieje } y \in A_2, \\ \text{takie że } x \subseteq y.$$

Łatwo widać, że

Fakt 3.1.1. *Zbiór Π_A z relacją $\leqslant$ tworzy kratę.*

Dla termu ϕ typu τ niebędącego zmienną oznaczać będziemy przez $\mathrm{ex}(\phi)$ najbardziej zewnętrzny symbol działania w termie ϕ. Łatwo zauważyć, że dla termu ϕ, będącego symbolem działania zeroargumentowego, $\mathrm{ex}(\phi)$ jest właśnie tym symbolem. Niech Π_F oznacza zbiór wszystkich partycji zbioru F i niech $P \in \Pi_F$. Blok partycji P zawierający $f \in F$ oznaczać będziemy przez $[f]_P$.

Przypomnijmy:

DEFINICJA 3.1.3. Równość $\phi \approx \varphi$ typu τ nazywamy P-zgodną wtw

1. jest postaci

   (id) $$a \approx a,$$

   gdzie a jest dowolną zmienną lub
2. żaden z termów ϕ i φ nie jest zmienną oraz $\mathrm{ex}(\phi) \in [\mathrm{ex}(\varphi)]_P$, czyli $\phi = f(t_1, \ldots, t_{\tau(f)})$, $\varphi = g(u_1, \ldots, u_{\tau(g)})$, przy czym $t_1, \ldots, t_{\tau(f)}$, $u_1, \ldots, u_{\tau(g)}$ są dowolnymi termami oraz istnieje $p \in P$, takie że $f, g \in p$.

Możemy więc powiedzieć, że równość $\phi \approx \varphi$ ustalonego typu jest P-zgodna, gdy jest postaci $x \approx x$ lub najbardziej zewnętrzne symbole w termach ϕ oraz φ należą do tego samego bloku partycji P.

Definicja ta pochodzi od J. Płonki [103] i jest uogólnieniem definicji równości zewnętrznie zgodnej i równości normalnej. Pierwszą z nich podała W. Chromik ([20]), drugą — niezależnie od siebie — J. Płonka ([102]) oraz I. J. Mel'nik ([82]). Przypomnijmy te definicje.

DEFINICJA 3.1.4. Równość $\phi \approx \varphi$ typu τ nazywamy zewnętrznie zgodną wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci $x \approx x$ lub żaden z termów ϕ i φ nie jest zmienną oraz $ex(\phi)$ i $ex(\varphi)$ są takie same.

DEFINICJA 3.1.5. Równość $\phi \approx \varphi$ typu τ nazywamy normalną wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci $x \approx x$ lub żaden z termów ϕ oraz φ nie jest zmienną.

Widać więc, że jeśli $P = \{\{f\} : f \in F\}$, to równość P-zgodna jest wtedy równością zewnętrznie zgodną oraz równość $\{F\}$-zgodna jest równością normalną. Partycję $\{\{f\}\}_{f \in F}$ oznaczać będziemy przez Ex, a partycję $\{F\}$ przez N. Dla każdej partycji $P \in \Pi_F$ równość zewnętrznie zgodna jest P-zgodna oraz każda równość P-zgodna jest równością normalną.

DEFINICJA 3.1.6. Niech V oznacza rozmaitość algebr typu τ. Dla $P \in \Pi_F$ przez $P(V)$ oznaczać będziemy zbiór równości P-zgodnych spełnionych w rozmaitości V, a przez V_P — rozmaitość definiowaną przez zbiór $P(V)$, czyli $V_P = \mathbf{Mod}(P(V))$. Klasę tę nazywać będziemy rozmaitością P-zgodną, V_N — rozmaitością normalną, a V_{Ex} — rozmaitością zewnętrznie zgodną.

Oczywiste są następujące inkluzje:

(3.1.1) $Ex(V) \subseteq P(V) \subseteq N(V) \subseteq Id(V)$,

gdzie $Id(V)$ oznacza zbiór wszystkich równości spełnionych w rozmaitości V. Z powyższego warunku wynika prawdziwość następujących inkluzji:

(3.1.2) $V \subseteq V_N \subseteq V_P \subseteq V_{Ex}$

dla każdej partycji P zbioru F.

Przez $P(\tau)$ oznaczać będziemy zbiór wszystkich równości P-zgodnych typu τ, $Id(\tau)$ oznaczać będzie zbiór wszystkich równości typu τ.

Z określenia zbioru $P(V)$ i definicji operatora Cn wynika, że $P(V) = \mathsf{Cn}(P(V))$ dla dowolnej partycji P. Podobnie $P(\tau) = \mathsf{Cn}(P(\tau))$. A zatem $P(V)$ oraz $P(\tau)$ są teoriami równościowymi. Oczywiście $P(V) = Id(V) \cap P(\tau)$.

Przykład 3.1.1. Niech **B** oznacza klasę wszystkich algebr Boole'a typu $\langle 2, 2, 1\rangle$ i niech zbiór działań podstawowych $F = \{\cdot, +, '\}$. Rozważmy następującą partycję zbioru F: $P_1 = \{\{\cdot, '\}, \{+\}\}$. Ponieważ równość $x + y \approx y + x$ jest zewnętrznie zgodna, a zatem jest równością P-zgodną dla dowolnej partycji zbioru F, w szczególności dla partycji P_1.

Równość $x \cdot x \approx x''$ nie jest równością zewnętrznie zgodną, ale jest P_1-zgodną.

Nie istnieje partycja P zbioru F, dla której równość $x \cdot x \approx x$ byłaby P-zgodna.

Zwróćmy uwagę, że — formalnie rzecz biorąc — aby odpowiedzieć na pytanie, czy dana równość jest P-zgodna, to musimy mieć zadaną partycję P zbioru działań podstawowych. Dla każdej równości

$$f(\phi_1, \ldots, \phi_{\tau(f)}) \approx g(\varphi_1, \ldots, \varphi_{\tau(g)})$$

istnieje taka partycja P, że powyższa równość jest P-zgodna. Prawdą jest bowiem, że każda równość

$$f(\phi_1, \ldots, \phi_{\tau(f)}) \approx g(\varphi_1, \ldots, \varphi_{\tau(g)})$$

jest $\{F\}$-zgodna.

3.2. Pewne własności P-zgodnych teorii równościowych

Niech dana jest rozmaitość V typu τ oraz niech F będzie zbiorem symboli funkcyjnych. Ponieważ $Id(V) = \mathsf{Cn}(Id(V))$, zatem $Id(V)$ jest teorią równościową. Niech $\mathcal{L}(V)$ oznacza kratę wszystkich podrozmaitości rozmaitości V, zaś $\mathcal{L}(Id(V))$ oznacza kratę wszystkich teorii równościowych rozszerzających teorię $Id(V)$. Wiadomo, że kraty te są dualnie izomorficzne. Okazuje się, że jeśli rozważymy wszystkie partycje zbioru F, to porządek w kracie partycji wyznaczy położenie pewnych teorii równościowych w kracie podrozmaitości rozmaitości V_P. Prawdziwy jest następujący lemat:

LEMAT 3.2.1 ([51]). *Załóżmy, że dany jest zbiór podziałów Π_F zbioru wszystkich symboli funkcyjnych F, niech ponadto $P_1, P_2 \in \Pi_F$. Wówczas*

$$P_1 \subseteq P_2 \text{ wtw } P_1(\tau) \subseteq P_2(\tau).$$

DOWÓD. Przypuśćmy, że $P_1 \subseteq P_2$ oraz niech $p \approx q \in P_1(\tau)$, gdzie

$$p \approx f(p_1, \ldots, p_{\tau(f)}) \text{ i } q \approx g(q_1, \ldots, q_{\tau(g)}),$$

dla pewnych termów $p_1, \ldots, p_{\tau(f)}, q_1, \ldots, q_{\tau(g)}$, symboli operacji $f, g \in F$, takich że $g \in [f]_{P_1}$. Zatem $g \in [f]_{P_2}$ i $p \approx q \in P_2(\tau)$.

Dla dowodu implikacji odwrotnej załóżmy, że $P_1(\tau) \subseteq P_2(\tau)$, $f, g \in F$ oraz $g \in [f]_{P_1}$. Zatem równość

$$f(x_1, \ldots, x_{\tau(f)}) \approx g(x_{\tau(f)+1}, \ldots, x_{\tau(f)+\tau(g)})$$

należy do zbioru $P_1(\tau)$. Zatem równość ta należy do $P_2(\tau)$ oraz $g \in [f]_{P_2}$. Zatem dla dowolnego $f \in F$ mamy, że $[f]_{P_1} \subseteq [f]_{P_2}$. Czyli $P_1 \subseteq P_2$. $\lhd$

Stąd otrzymuje się:

LEMAT 3.2.2 ([51]). *Dla dowolnych $P_1, P_2 \in \Pi_F$ następujące warunki są równoważne:*

1. $P_1 = P_2$.
2. $P_1(\tau) = P_2(\tau)$.

Nie tylko wiadomo jak w kracie wszystkich podrozmaitości rozmaitości V_P są wzajemnie położone klasy wyznaczone przez zbiory $P(\tau)$, gdzie P jest partycją zbioru F, ale też jakie równości charakteryzują te klasy. Mamy następujący lemat:

LEMAT 3.2.3 ([51]). *Równości postaci (f, g):*

$$(f,g) \qquad f(x_1 \ldots, x_{\tau(f)}) \approx g(x_{\tau(f)+1}, \ldots, x_{\tau(f)+\tau(g)})$$

dla dowolnych $f, g \in F$ oraz $g \in [f]_P$ tworzą bazę równościową dla $P(\tau)$.

Dowód. Jeśli $f, g \in F$ oraz $g \in [f]_P$, to równość (f, g) należy do $P(\tau)$. Niech $p \approx q \in P(\tau)$ oraz niech p i q nie będą tą samą zmienną. Wówczas $ex(p), ex(q) \in F$ oraz dla pewnych termów $p_1, \dots, p_{\tau(ex(p))}$, $q_1, \dots, q_{\tau(ex(q))}$ równość $p \approx q$ ma postać

$$ex(p)(p_1, \dots, p_{\tau(ex(p))}) \approx ex(q)(q_1, \dots, q_{\tau(ex(q))}).$$

Zatem identyczność ta daje się wyprowadzić z równości (f, g), czyli

$$p \approx q \in \mathsf{Cn}(\{(f, g) : f, g \in F \text{ and } g \in [f]_P\}) \qquad \lhd$$

Jako wniosek z lematu (3.2.3) mamy następujący lemat:

Lemat 3.2.4 ([51, 20]). *Wszystkie równości o postaci*

$$(war_f) \qquad f(x_1, \dots, x_{\tau(f)}) = f(x_{\tau(f)+1}, \dots, x_{2\tau(f)})$$

dla $f \in F$ tworzą bazę równościową dla $Ex(\tau)$.

Wiadomo, że $Ex(\tau) \subseteq Id(\tau)$. Można zadać pytanie, czy dla każdej teorii T, takiej, że $Ex(\tau) \subseteq T \subseteq Id(\tau)$ istnieje partycja P zbioru F, taka, że $T = P(\tau)$. Łatwo zauważyć, że taka partycja nie istnieje dla teorii $Id(\tau)$. Dla każdego innego rozszerzenia teorii $Ex(\tau)$ taka partycja istnieje. Co więcej, istnieje dokładnie jedna. Mamy następujący lemat:

Lemat 3.2.5 ([51]). *Niech Σ będzie teorią równościową będącą rozszerzeniem teorii $Ex(\tau)$ oraz $\Sigma \neq Id(\tau)$. Wówczas istnieje dokładnie jedna partycja P zbioru F, taka że $P(\tau) = \Sigma$.*

Dowód. Niech $\Sigma \in \mathcal{L}(Ex(\tau))$ oraz niech $\Sigma \neq Id(\tau)$. Określamy relację $\sim$ na zbiorze F przyjmując dla dowolnych $f, g \in F$:

$$f \sim g \text{ wtw istnieje równość } p \approx q \in \Sigma, \text{ taka że } ex(p) \approx f \text{ i } ex(q) \approx g.$$

Oczywiście $\sim$ jest relacją równoważności na zbiorze F. Przytoczymy dowód faktu, że partycja P indukowana przez $\sim$ spełnia warunek, iż $\Sigma = P(\tau)$. Niech $p \approx q$ będzie identycznością w Σ, niech też p i q nie będą tą samą zmienną. Wówczas ze względu na fakt, że $Ex(\tau) \subseteq \Sigma \neq Id(\tau)$, termy p i q nie są zmiennymi. Istotnie, łatwo widać, że jeśli

$$(p \approx x_1 \text{ i } q \approx f(q_1, \dots, q_{\tau(f)})) \text{ lub } (q \approx x_2 \text{ i } p \approx g(q_1, \dots, q_{\tau(g)}))$$

dla pewnych termów $p_1, \dots, p_{\tau(g)}$, $q_1, \dots, q_{\tau(f)}$, zmiennych x_1, x_2 oraz symboli $f, g \in F$, to $\Sigma = Id(\tau)$. Jest tak ponieważ na mocy faktu, że

$Ex(\tau) \subseteq \Sigma$ oraz lematu 3.2.3, równości (war_f) i (f, g) należą do Σ. Stąd, istnieją $f, g \in F$ oraz termy $p_1, \ldots, p_{\tau(f)}$, $q_1, \ldots, q_{\tau(g)}$, takie że

$$p \approx f(p_1, \ldots, p_{\tau(f)}) \text{ i } q \approx g(q_1, \ldots, q_{\tau(g)}).$$

Czyli $f \sim g$ i na mocy definicji partycji P otrzymujemy, że $p \approx g \in P(\tau)$.

Załóżmy teraz, że $p \approx q$ będzie identycznością należącą do $P(\tau)$, gdzie termy p, q nie są tą samą zmienną. Istnieją więc symbole $f, g \in F$ oraz termy $p_1, \ldots, p_{\tau(f)}$, $q_1, \ldots, q_{\tau(g)}$, takie że

$$p \approx f(p_1 \ldots, p_{\tau(f)}) \text{ i } q \approx g(q_1 \ldots, q_{\tau(g)})$$

oraz $g \in [f]_p$. Zatem $f \sim g$ oraz istnieją $p'_1, \ldots, p'_{\tau(f)}$, $q'_1, \ldots, q'_{\tau(g)}$, takie że równość $f(p'_1, \ldots, p'_{\tau(f)}) \approx g(q'_1, \ldots, q'_{\tau(g)})$ należy do Σ. Ponieważ $Ex(\tau) \subseteq \Sigma$ mamy, że $f(p_1, \ldots, p_{\tau(f)}) \approx f(p'_1, \ldots, p'_{\tau(f)}) \in \Sigma$ i $g(q_1, \ldots, q_{\tau(g)}) \approx g(q'_1, \ldots, q'_{\tau(g)}) \in \Sigma$. Zatem $p \approx q \in \Sigma$. Jest oczywiste, ze P jest jedyny. $\lhd$

Niech $\Pi_F + 1$ jest kratą wszystkich partycji zbioru F z dodanym największym elementem 1. Określamy funkcję $\varphi\colon \Pi_F + 1 \longrightarrow \mathcal{L}(Ex(\tau))$ następująco:

$$\varphi(P) = \begin{cases} Id(\tau) & \text{dla } P = 1 \\ Id(P) & \text{dla } P \in \Pi_F. \end{cases}$$

Widać, że dla dowolnego $P \in \Pi_P$ oraz $\Sigma \in \mathcal{L}(Ex(\tau)) \setminus Id(\tau)$ mamy, że $P \neq 1$ oraz $\Sigma \subsetneq Id(\tau)$. Zatem na mocy lematów 3.2.2 i 3.2.5 funkcja φ jest bijekcją. Przez lemat 3.2.1 funkcja φ ustala izomorfizm krat $\Pi_F + 1$ i $\mathcal{L}(Ex(\tau))$.

Oczywistym jest teraz następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.2.1 ([51]). *Krata $\mathcal{L}(Ex(\tau))$ jest izomorficzna z kratą $\Pi_F + 1$ wszystkich partycji zbioru F z dodanym największym elementem 1.*

3.2.1. Teorie równościowe F-normalnych rozmaitości

Najczęściej rozmaitość algebr oznaczamy literą V. W tej sekcji będziemy mówić o specjalnych klasach algebr, tzw. rozmaitościach F-normalnych i te rozmaitości oznaczać będziemy literą K. Zacznijmy od przywołania następującej definicji:

DEFINICJA 3.2.1. Rozmaitość K typu τ jest F-normalna wtw dla dowolnych $f, g \in F$ istnieje równość $p \approx q \in Id(K)$, taka że $\mathrm{ex}(p) = f$ oraz $\mathrm{ex}(q) = g$.

Przykładem rozmaitości F-normalnej jest klasa algebr Boole'a rozpatrywana w typie $\langle 2, 2, 1\rangle$. Prawdziwe są bowiem równości: $x \cdot x \approx x + x$, $x \cdot x \approx x''$, a stąd oczywiście mamy, że prawdziwa jest też równość : $x + x \approx x''$. Co ciekawe, klasa algebr Boole'a $\mathbf{B}$ nie jest F-normalna, jeśli rozważać ją będziemy w typie $\langle 2, 2, 1, 0, 0\rangle$. Nie istnieje bowiem równość $p \approx q \in Id(\mathbf{B})$, taka że najbardziej zewnętrzny funktor w termie p to stała 0, a najbardziej zewnętrzny funktor w termie q to stała 1. Oczywiście, jeśli rozważymy klasę $\mathbf{B}$ w typie $\langle 2, 2, 1, 0\rangle$, to jest ona F-normalna. Wystarczy zauważyć, że w każdej algebrze Boole'a prawdziwe są równości: $x \cdot x' \approx 0$, $0 + 0 \approx 0$, $0'' \approx 0$.

W niniejszej podsekcji przywołamy wyniki dotyczące charakterystyki kraty $\mathcal{L}(Ex(K))$ równościowych teorii F-normalnej rozmaitości K. Niech T oznacza rozmaitość trywialną typu τ. Wówczas $Id(T) = Id(\tau)$ oraz $P(T) = P(\tau)$ dla dowolnej partycji $P \in \Pi_F$.

Korzystając z twierdzenia 3.2.1 łatwo sprawdzić, że prawdziwy jest poniższy lemat:

LEMAT 3.2.6 ([51]). *$V \in \mathcal{L}(T_{Ex})$ wtw istnieje partycja $P \in \Pi_F$, taka że $V = T_P$ lub $V = T$.*

LEMAT 3.2.7 ([51]). *Niech K będzie rozmaitością typu τ oraz niech $P \in \Pi_F$. Wówczas $K_P = K \wedge T_P$.*

DOWÓD. Zauważmy, że $Id(K_P) = Id(K) \cap P(\tau) = Id(K) \cap Id(T_P)$, co kończy dowód. $\lhd$

LEMAT 3.2.8 ([51]). *Jeśli K jest rozmaitością F-normalną typu τ oraz P_1, $P_2 \in \Pi_F$, to*

$$P_1 \neq P_2 \text{ wtw } P_1(K) \neq P_2(K).$$

DOWÓD. Na mocy lematów 3.2.1 i 3.2.7 wystarczy udowodnić, że

$$P_1(\tau) \neq P_2(\tau) \text{ wtw } Id(K) \cap P_1(\tau) \neq Id(K) \cap P_2(\tau).$$

Dla dowodu implikacji z lewej do prawej załóżmy, że $P_1(\tau) \neq P_2(\tau)$ oraz niech dla równości $p \approx q$ zachodzi albo $p \approx q \in P_1(\tau)$ i $p \approx q \notin P_2(\tau)$, albo $p \approx q \notin P_1(\tau)$ i $p \approx q \in P_2(\tau)$. Przyjmując, że $\mathrm{ex}(p) = f$ i $\mathrm{ex}(q) = g$ mamy: $f, g \in F$, $g \in [f]_{P_1}$ oraz $g \notin [f]_{P_2}$. Ponieważ rozmaitość K jest

F-normalna, więc istnieje równość $p \approx q \in Id(K)$, taka że $\mathrm{ex}(p') = f$ oraz $\mathrm{ex}(q') = g$. Zatem albo $p' = q' \in (Id(K) \cap P_1(\tau))$ i $p' \approx q' \notin (Id(K) \cap P_2(\tau))$ albo $p' \approx q' \notin (Id(K) \cap P_1(\tau))$ i $p' \approx q' \in (Id(K) \cap P_2(\tau))$. Czyli $P_1(K) \neq P_2(K)$.

Implikacja odwrotna jest oczywista. $\lhd$

Z twierdzenia 3.2.1 wynika, że istnieje ścisły związek kraty $\Pi_F + 1$ i $\mathcal{L}(Ex(\tau))$. Okazuje się, że w przypadku rozmaitości F-normalnych można udowodnić twierdzenie stanowiące, że pierwszą z nich da się ‘włożyć’ w kratę $\mathcal{L}(Ex(K))$:

Twierdzenie 3.2.2 ([51]). *Jeśli K jest rozmaitością F-normalną typu τ, to funkcja*

$$\varphi \colon \Pi_F + 1 \longrightarrow \mathcal{L}(Ex(K))$$

określona następująco:

$$\varphi(P) = \begin{cases} Id(\tau) & dla\ P = 1 \\ P(K) & dla\ P \in \Pi_F. \end{cases}$$

jest kratowym włożeniem.

Dowód. Na mocy lematu 3.2.8 φ jest injekcją. Pokazujemy, że

$$P_1 \subseteq P_2 \text{ wtw } Id(K) \cap P_1(\tau) \subseteq Id(K) \cap P_2(\tau).$$

Niech $Id(K) \cap P_1(\tau) \subseteq Id(K) \cap P_2(\tau)$ oraz niech $g \in [f]_{P_1}$, dla dowolnych $g, f \in F$. Ponieważ rozmaitość K jest F-normalna, zatem istnieje identyczność $p \approx q \in Id(K)$, taka że $\mathrm{ex}(p) = f$ oraz $\mathrm{ex}(q) = g$. Zatem $p \approx q \in Id(K) \cap P_1(\tau)$ i na mocy założenia $p \approx q \in P_2(\tau)$.

Znów implikacja odwrotna jest oczywista. $\lhd$

3.2.2. Krata $\mathcal{L}(K_{Ex})$ rozmaitości idempotentnej K

Podobnie jak w poprzedniej podsekcji, rozmaitość algebr oznaczymy literą K. Przywołane zostaną wyniki badań dotyczące kraty $\mathcal{L}(K_{Ex})$, gdzie K jest tzw. rozmaitością idempotentną. Okazuje się bowiem, że w przypadku takiej rozmaitości można podać klarowny opis kraty $\mathcal{L}(K_{Ex})$.

Przypomnijmy standardowe pojęcie

Definicja 3.2.2. Rozmaitość K jest *idempotentna* wtw dla dowolnego $f \in F$ równość

$$f(x, \ldots, x) \approx x$$

należy do K.

Dla rozmaitości idempotentnej K prawdziwe są następujące lematy:

Lemat 3.2.9 ([50]). *Niech K będzie rozmaitością idempotentną typu τ, gdzie $F \neq \varnothing$. Wówczas dla dowolnej rozmaitości $V \in \mathcal{L}(K_{Ex})$ następująca równość zachodzi:*

$$V = (V \cap K) \vee (V \cap T_{Ex}).$$

Lemat 3.2.10 ([50]). *Jeśli K jest rozmaitością idempotentną typu τ, $V_1 \in \mathcal{L}(K)$ oraz $V_2 \in \mathcal{L}(T_{Ex})$, to*

$$(V_1 \vee V_2) \cap K = V_1$$

oraz

$$(V_1 \vee V_2) \cap T_{Ex} = V_2.$$

Następny lemat jest przeformułowaniem rezultatu pochodzącego do G. Grätzera [42], który dziś należy do folkloru logiki algebraicznej.

Lemat 3.2.11 ([42, 50]). *Niech K będzie rozmaitością typu τ. Przekształcenie*

$$\varphi\colon \mathcal{L}(K_{Ex}) \longrightarrow \mathcal{L}(K) \times \mathcal{L}(T_{Ex})$$

określone dla dowolnego $V \in \mathcal{L}(K_{Ex})$ następująco:

$$\varphi(V) = (V \cap K, V \cap T_{Ex})$$

jest kratowym izomorfizmem wtw następujące warunki są spełnione:

(1) $V = (V \cap K) \cup (V \cap T_{Ex})$,

(2) $(V_1 \vee V_2) \cap K = V_1$,

(3) $(V_1 \vee V_2) \cap T_{Ex} = V_2$.

dla każdego $V_1 \in \mathcal{L}(K_{Ex})$ oraz $V_2 \in \mathcal{L}(T_{Ex})$.

Poniżej przytoczymy dowód następującego twierdzenia.

Twierdzenie 3.2.3 ([50]). *Jeśli K jest rozmaitością idempotentną typu τ, to krata $\mathcal{L}(K_{Ex})$ jest izomorficzna z produktem prostym krat $\mathcal{L}(K)$ i $\mathcal{L}(T_{Ex})$.*

Dowód. Określamy przekształcenie $\varphi\colon L(K_{Ex}) \longrightarrow L(K) \times L(T_{Ex})$, jak następuje:

$$\varphi(V) = (V \cap K, V \cap T_{Ex})$$

dla dowolnego $V \in L(K_{Ex})$. Na mocy lematów 3.2.9, 3.2.10 oraz 3.2.11 wnioskujemy, że φ jest poszukiwanym kratowym izomorfizmem. $\lhd$

Przypomnijmy teraz definicję algebry, z jednym działaniem dwuargumentowym.

Definicja 3.2.3. Grupoidem nazywamy dowolny zbiór z dwuargumentowym działaniem określonym w tym zbiorze.

Widać, że jeśli rozważymy dowolną rozmaitość algebr z jednym działaniem, to zbiór wszystkich partycji jest jednoelementowy, więc krata $\Pi_F + 1$ jest dwuelementowym łańcuchem. Prawdziwy jest zatem poniższy wniosek.

Wniosek 3.2.1 ([50]). *Jeśli K jest rozmaitością idempotentnych grupoidów, to krata $\mathcal{L}(K_{Ex})$ jest izomorficzna z $\mathcal{L}(K) \times \mathbf{2}$, gdzie $\mathbf{2}$ jest dwuelementowym łańcuchem.*

Poniżej podany wniosek jest konkluzją z twierdzenia W. Chromik i K. Hałkowskiej z pracy [22].

Wniosek 3.2.2 ([50]). *Jeśli K jest rozmaitość krat dystrybutywnych, to*

$$\mathcal{L}(K_{Ex}) \approxeq \mathbf{2} \times \mathbf{3},$$

gdzie $\mathbf{2}$ jest dwuelementowym łańcuchem, zaś $\mathbf{3}$ jest łańcuchem trójelementowym.

Zauważmy, że założenie w twierdzeniu 3.2.3 jest istotne. W pracy [35] opisano kratę podrozmaitości rozmaitości G^n_{Ex}, gdzie G^n oznacza klasę grup abelowych typu $\langle 2, 1\rangle$ z dodatkową równością $x^n \approx x \cdot x^{-1}$, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną dodatnią. Okazuje się, że w tym przypadku krata $\mathcal{L}(G^n) \times \mathcal{L}(T_{Ex})$ jest właściwą podkratą kraty $\mathcal{L}(G^n_{Ex})$.

3.3. ‘Małe’ modele dla teorii P-zgodnych

W rozdziale tym podamy dwie konstrukcje, dzięki którym wyznaczymy modele istotne — w pewien sposób — dla rozmaitości wyznaczonej przez równości P-zgodne. Wiadomo, że szukając kontrmodeli bardzo wygodna jest praca z modelami ‘małych mocy’. Znanym faktem jest, że wolnogenerowana algebra (definicja podana jest na s. 30) o przeliczalnej ilości zmiennych może zawsze być wykorzystana w pracy z kontrmodelami, ale nie zawsze jest to model wygodny do pracy. Zazwyczaj szukamy modeli skończonych, a najlepiej skończonych ‘małej mocy’.

3.3.1. Konstrukcja Płonki

Pierwsza konstrukcja pochodzi z pracy J. Płonki [103]. Rozważmy dowolną partycję P zbioru działań podstawowych F i dwa dowolne obiekty k_1 i k_2, które nie należą do zbioru F. Niech $[f]_P$ oznacza blok partycji P, do którego należy f. Weźmy pod uwagę algebrę $\mathfrak{A}_P = \langle A_P, F^{\mathfrak{A}_P}\rangle$, w której $A = P \cup \{\{k_1\}, \{k_2\}\}$ oraz dla dowolnego działania f i dowolnych elementów $B_1, \dots, B_{\tau(f)} \in P \cup \{\{k_1\}, \{k_2\}\}$ mamy

$$f^{A_P}(B_1, \dots, B_{\tau(f)}) = [f]_P.$$

Łatwo widać, że

Lemat 3.3.1 ([103]). *Dla każdego $f \in F$, funkcja $f^{\mathfrak{A}_P}$ jest funkcją stałą w zbiorze $P \cup \{\{k_1\}, \{k_2\}\}$ równą $[f]$.*

Przytoczymy dowód następującego lematu:

Lemat 3.3.2 ([103]). *Dla każdej równości typu τ równość ta jest P-zgodna wtw jest ona spełniona w algebrze $\mathfrak{A}_P$.*

Dowód. Jeśli dany jest typ, taki że $F = \varnothing$, to jedyny podział zbioru F, to zbiór pusty. Ponadto, w tym przypadku jedyne równości mają postać

$$a \approx b,$$

gdzie a i b są dowolnymi zmiennymi. Oczywiście równość (id) z Definicji 3.1.3 jest spełniona w każdej algebrze dla dowolnej zmiennej a. Z kolei równość

$$a \approx b,$$

gdzie a i b są różnymi zmiennymi nie jest spełniona w algebrze, gdyż algebra $\mathfrak{A}_P$ jest dwuelementowa.

Rozważmy teraz przypadek, gdy $F \neq \varnothing$. Ponieważ równość (id) jest zawsze spełniona, wystarczy pokazać, że równość

$$f(t_1, \dots, t_{\tau(f)}) \approx g(t_1, \dots, t_{\tau(g)}),$$

gdzie f i g należą do tego samego elementu podziału P, jest spełniona w algebrze $\mathfrak{A}_P$.

Istotnie, jeśli f i g należą do tego samego elementu podziału P, to $[f]_P = [g]_P$, a przez lemat 3.3.1 mamy, że zachodzi równość funkcji $f^{A_P} = g^{A_P}$, co świadczy o tym, że rozpatrywana równość jest prawdziwa w $\mathfrak{A}_P$.

Dla dowodu implikacji odwrotnej wystarczy pokazać, że żadna równość, która nie jest P-zgodna, nie jest spełniona w $\mathfrak{A}_P$. Podobnie, jak w przypadku gdy $F = \varnothing$, ze względu na fakt, że uniwersum algebry $\mathfrak{A}_P$ jest co najmniej dwuelementowe, równość

$$a \approx b,$$

gdzie a i b są dowolnymi zmiennymi, nie jest spełniona w $\mathfrak{A}_P$. Jeśli z kolei dana równość jest postaci

$$f(t_1, \dots, t_{\tau(f)}) \approx g(t_1, \dots, t_{\tau(g)}),$$

gdzie f i g nie należą do tego samego elementu podziału P, to $[f]_P \neq [g]_P$. Na koniec rozpatrzmy równość postaci

$$f(t_1, \dots, t_{\tau(f)}) \approx a,$$

gdzie a jest dowolną zmienną. W takim przypadku wystarczy rozważyć wartościowanie przyporządkowujące zmiennej a klasę abstrakcji elementu $\{k_1\}$, a ponieważ $f^{\mathfrak{A}_P}(B_1, \dots, B_{\tau(f)}) = [f]_P$ i $\{k_1\} \neq [f]_P$, zatem rozważana równość nie jest spełniona w $\mathfrak{A}_P$. $\lhd$

Mamy stąd:

WNIOSEK 3.3.1 ([103]). *Jeśli dana jest partycja P, to rozmaitość K jest P-zgodna wtw $\mathfrak{A}_P$ należy do K.*

Widać oczywistą korzyść z powyższej konstrukcji. Jeśli mamy dwie partycje P_1 i P_2, i $P_1 \leqslant P_2$, to wiadomo, że jeśli klasa P_1-zgodna jest istotnie większa niż klasa P_2-zgodna, to wykorzystując tę konstrukcję można wskazać algebrę, która istotnie różni obie klasy.

3.3.2. Generiki Biegańskiej i Hałkowskiej

Wiadomo, że dla każdej rozmaitości V typu τ istnieje algebra $\mathcal{A}$ generująca tę rozmaitość, tj.

Definicja 3.3.1. Niech dana będzie rozmaitość V. Dowolną algebrę $\mathfrak{A}$ taką, że $V = \mathbf{HSP}(\mathfrak{A})$ nazywamy *generikiem* rozmaitości V.

Definicja 3.3.2 ([14]). Niech V będzie klasą algebr typu τ i niech $T(X)$ będzie algebrą typu τ, generowaną przez zbiór X. Jeśli dla każdej algebry $\mathfrak{A}$ należącej do V i dla każdego odwzorowania $\alpha\colon X \longrightarrow A$ istnieje homomorfizm $\beta\colon T(X) \longrightarrow A$, który jest rozszerzeniem α,to

zbiór X jest zbiorem *wolnych generatorów algebry* $T(X)$ a $T(X)$ jest *algebrą wolnogenerowaną* przez zbiór X.

Wiadomo, że w każdej rozmaitości generikiem jest algebra wolna o przeliczalnej, nieskończonej liczbie generatorów. Nas interesować będą tzw. generiki minimalne rozmaitości V.

Definicja 3.3.3. Generik $\mathcal{A} = (A; F)$ nazywamy minimalnym wtw dla każdego generika $\mathcal{A}' = \langle A'; F\rangle$ rozmaitości V, moc zbioru A jest mniejsza lub równa od mocy zbioru A'.

W pracach [5, 6] badano generiki w rozmaitościach wyznaczonych przez równości zewnętrznie zgodne oraz w rozmaitościach P-zgodnych przy założeniu, że w rozmaitościach tych istnieje tzw. element idempotentny. Przyjmijmy, że $\mathrm{Term}(\tau)$ oznacza zbiór wszystkich termów ustalonego typu. Przypomnijmy, że

Definicja 3.3.4. Element e uniwersum algebry $\mathfrak{A}$ nazywamy idempotentnym wtw dla każdego n-argumentowego symbolu $f \in F$ mamy:

$$f(\underbrace{e, \ldots, e}_{n}) = e$$

Definicja 3.3.5 ([6]). Niech $\mathfrak{A} = \langle A, F\rangle$ będzie algebrą typu τ, e będzie dowolnym ustalonym elementem zbioru A, oraz niech P będzie partycją zbioru F. Niech

$$F' = \{[f] \in P : \underset{\phi,\psi\in\mathrm{Term}(\tau)}{\exists} (\phi \approx \psi \in Id(\mathfrak{A}), \mathrm{ex}(\phi) = f, \mathrm{ex}(\psi) \notin [f])\}$$

czyli niech F' jest zbiorem wszystkich $[f] \in P$, takich że dla pewnych termów ϕ, ψ typu τ mamy $\phi \approx \psi \in \mathit{Id}(\mathfrak{A})$, $\mathrm{ex}(\phi) = f$, $\mathrm{ex}(\psi) = g$ oraz $[f] \neq [g]$. Niech

$$F'_e = \{e_{[f]} : [f] \in F'\},$$

gdzie $F'_e \cap A = \varnothing$ oraz dla dowolnych $f, g \in F$ mamy, że $[f] = [g]$ wtw $e_{[f]} = e_{[g]}$. Niech $a_1, \ldots, a_n \in (A \backslash \{e\}) \cup F'_e$ oraz dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n$ niech obiekt a'_i będzie określony jak następuje:

$$a'_i = \begin{cases} a_i, & \text{o ile } a_i \in A, \\ e & \text{w przeciwnym przypadu.} \end{cases}$$

Dla dowolnego $f \in F$ oraz $a_1, \ldots, a_n \in (A \backslash \{e\}) \cup F'_e$ przyjmujemy, że

$$f^{\mathfrak{A}^e_P}(a_1, \ldots, a_n) = \begin{cases} f^{\mathfrak{A}^e_P}(a'_1, \ldots, a'_n), & \text{o ile } a_i \in A, \\ e_{[f]} & \text{w przeciwnym przypadu.} \end{cases}$$

Algebrę $\mathfrak{A}^e_P$ nazywamy P_e-rozszerzeniem algebry $\mathfrak{A}$.

Prawdziwe są następujące stwierdzenia:

LEMAT 3.3.3 ([6]). *Jeśli $F' \neq \varnothing$ oraz e jest elementem idempotentnym algebry $\mathfrak{A}$, to $\mathit{Id}(\mathfrak{A}^e_P) \subseteq \mathit{Id}(\mathfrak{A})$.*

LEMAT 3.3.4 ([6]). *Jeśli $\langle F'_e, F \rangle$ jest podalgebrą algebry $\mathfrak{A}^e_P$, to dla dowolnych termów ϕ, ψ, jeśli równość $\phi \approx \psi$ jest spełniona w algebrze $\langle F'_e, F \rangle$, to $\phi \approx \psi$ jest P-zgodna.*

Okazuje się, że skonstruowana algebra $\mathfrak{A}^e_P$ nie tylko spełnia równości P-zgodne, ale również wystarczy do wygenerowania dowolnej równości w klasie V_P.

TWIERDZENIE 3.3.1 ([6]). *Jeśli $\mathfrak{A}$ jest generikiem rozmaitości V, e jest elementem idempotentnym $\mathfrak{A}$, P jest partycją F, $F' \neq \varnothing$, to $\mathfrak{A}^e_P$ jest generikiem rozmaitości V_P.*

Przy pewnych dodatkowych założeniach można podać inny sposób skonstruowania algebry, która byłaby generikiem rozmaitości V_P.

Niech $T(X)$ będzie zbiorem wszystkich termów typu τ nad zbiorem zmiennych X. Dla dowolnej algebry $\mathfrak{A} = \langle A, F \rangle$ z elementem idempotentnym e rozważmy algebrę $\mathfrak{A}^*$, której uniwersum to zbiór $A \cup F^*_e$, gdzie

$$F^*_e = \{e_{[f]} : [f] \in F^*\},$$

$$F^* = \{[f] \in P : \underset{\phi \in T(X)}{\exists} \ \underset{x \in X}{\exists} (\phi \approx x \in Id(\mathfrak{A}) \wedge \mathrm{ex}(\phi) = f)\}$$

$$F^*_e \cap A = \varnothing$$

oraz dla dowolnych $f, g \in F$ mamy, że

$$[f] \neq [g] \text{ wtw } e_{[f]} \neq e_{[g]}.$$

Operacje na $\mathfrak{A}^*$ są zdefiniowane analogicznie do operacji charakterystycznych dla e-rozszerzenia $\mathfrak{A}$, czyli przyjmujemy, że dla dowolnych $a_1, \ldots, a_n \in A \cup F^*$:

$$f^{\mathfrak{A}^*}(a_1, \ldots, a_n) = \begin{cases} f^{\mathfrak{A}}(a'_1, \ldots, a'_n), & \text{o ile } f^{\mathfrak{A}}(a'_1, \ldots, a'_n) \neq e, \\ e_{[f]} & \text{w przeciwnym przypadu.} \end{cases}$$

Twierdzenie 3.3.2 ([6]). *Jeśli algebra $\mathfrak{A}$ jest skończonym generikiem rozmaitości V, e — elementem idempotentnym algebry $\mathfrak{A}$, P — partycją F, F^* jest skończonym zbiorem niepustym, to $\mathfrak{A}^*$ jest skończonym generikiem rozmaitości V_P.*

Analizując konstrukcję algebry $\mathfrak{A}^*$ i $\mathfrak{A}^e_P$ widzimy, że generiki rozmaitości V_P są ściśle powiązane z generikami algebry V i mówiąc obrazowo, o ile algebry generujące klasę V są ‘proste’, to tak samo ‘proste’ są generiki algebry V_P.

3.4. Twierdzenie o reprezentacji dla teorii P-zgodnych

Do konstruowania algebr, które spełniają z góry zadane równości, wykorzystamy pojęcie P-dyspersji ([46, 105]) i jego szczególny przypadek — pojęcie dyspersji.

Przed wprowadzeniem pojęcia P-dyspersji przywołamy pojęcie *P-dyspersującego systemu*

Definicja 3.4.1 ([105]). *P-dyspersującym systemem* nazywamy dowolną uporządkowaną czwórkę $D = \langle P, \mathfrak{I}, \{A_i\}_{i \in I}, \{o_{[f]_P}\}_{f \in F}\rangle$, przy czym spełnione są następujące warunki:

1° P jest partycją zbioru F.

2° $\mathfrak{I}$ jest algebrą typu τ oraz $\mathfrak{I} = \langle I, F^{\mathfrak{I}}\rangle$.

3° $\{A_i\}_{i \in I}$ jest rodziną parami rozłącznych, niepustych zbiorów.

4° $\{c_{[f]_P}\}_{f\in F}$ jest rodziną odwzorowań, takich że $c_{[f]_P}\colon I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i$, gdzie dla dowolnego $i \in I$ zachodzi $c_{[f]_P} \in A_i$ oraz jeśli dwa symbole f i g należą do tego samego bloku partycji P, to $c_{[f]_P} = c_{[g]_P}$.

Mając pojęcie P-dyspersującego systemu możemy sformułować definicję P-dyspersji.

Definicja 3.4.2. Niech $\mathfrak{I} = \langle I, F^{\mathfrak{I}}\rangle$ będzie algebrą typu τ oraz niech $D = \langle P, \mathfrak{I}, \{A_i\}_{i\in I}, \{c_{[f]_P}\}_{f\in F}\rangle$ będzie P-dyspersującym systemem. Algebrę $\mathfrak{I}_D = \langle A, F^{\mathfrak{I}_D}\rangle$ typu τ nazywamy *P-dyspersją algebry $\mathfrak{I}$ przez P-dyspersujący system D* (w skrócie *P-dyspersją algebry $\mathfrak{I}$*) wtw

1. $A = \bigcup_{i\in I} A_i$,
2. dla dowolnych $f \in F$, $0 \leqslant k \leqslant \tau(f) - 1$ i $a_k \in A_{i_k}$

$$f^{\mathfrak{I}_D}(a_0, \ldots, a_{\tau(f)-1}) = c_{[f_p]}(f^{\mathfrak{I}}(i_0, \ldots, i_{\tau(f)-1}))$$

Oczywiście, jeśli mamy zadaną algebrę $\mathfrak{I}$ oraz P-dyspersujący system D, to w sposób jednoznaczny z algebry $\mathfrak{I}$ uzyskujemy *P-dyspersję algebry $\mathfrak{I}$ przez P-dyspersujący system D*. Dlatego też w literaturze znane jest inne podejście do tematu, mianowicie: jeśli mamy dwie algebry $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ ustalonego typu i możemy określić taką czwórkę uporządkowaną D, aby algebra $\mathfrak{A}$ była *P-dyspersję algebry $\mathfrak{B}$ przez P-dyspersujący system D*, to wtedy powiemy krótko, że algebra $\mathfrak{A}$ jest P-dyspersją algebry $\mathfrak{B}$. W takiej sytuacji uzyskujemy następującą definicję:

Definicja 3.4.3. Niech $\mathfrak{A} = \langle A, F^{\mathfrak{A}}\rangle$ oraz $\mathfrak{B} = \langle B, F^{\mathfrak{B}}\rangle$ będą algebrami typu τ i niech $P \in \Pi_F$. Algebrę $\mathfrak{A}$ nazywamy P-dyspersją algebry $\mathfrak{B}$, jeśli istnieje partycja $\{A_i\}_{i\in B}$ zbioru A oraz rodzina funkcji $\{c_{[f]_P}\}_{f\in F}$ odwzorowujących B w A, która spełnia następujące warunki:

(3.4.1) *$c_{[f]_P}(i) \in A_i$ dla każdego $i \in B$,*

(3.4.2) *dla każdego $f \in F$ i dla każdego $a_i \in A_{k_i}, i = 0, \ldots, \tau(f) - 1$, $f^{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{\tau(f)-1}) = c_{[f]_P}(f^{\mathfrak{B}}(k_0, \ldots, k_{\tau(f)-1}))$,*

(3.4.3) *jeśli $f \in [g]_P$, to $c_{[f]_P}(i) = c_{[g]_P}(i)$ dla każdego $i \in B$.*

Korzystając z powyższej definicji łatwo sprawdzić, że zachodzą następujące własności.

Fakt 3.4.1.

1. *Relacja równoważności* $\sim$ *indukowana na* A *przez rodzinę* $\{A_i\}_{i\in I}$ *jest kongruencją algebry* $\mathfrak{I}_D$ *i algebra* $\mathfrak{I}_D/\sim$ *jest izomorficzna z* $\mathfrak{I}$.
2. *Jeśli algebry* $\mathfrak{J}$ *i* $\mathfrak{I}$ *są izomorficzne oraz* $\phi\colon J \longrightarrow I$ *jest odpowiednim izomorfizmem, to istnieje system* P*-dyspersujący* D*, taki że* $\mathfrak{I}_D$ *jest* P*-dyspersją algebry* $\mathfrak{J}$.

Zauważmy za Płonką, że jeśli dla danej algebry $\mathfrak{A} = \langle A, F_{\mathfrak{A}}\rangle$ rozważymy następujący P-dysperujący system $D = \langle P, \mathfrak{A}, \{\{a\}\}_{a\in A}, \{c_{[f]_P}\}_{f\in F}\rangle$, gdzie dla każdego $f \in F$, $c_{[f]_P}$ jest funkcją identycznościową zbiorze A, to uzyskana w ten sposób algebra jest izomorficzna z algebrą $\mathfrak{A}$.

Dla rozmaitości V typu τ oznaczmy przez $D_P(V)$ klasę wszystkich P-dyspersji algebr z V. Jeśli partycja P zawiera tylko bloki jednoelementowe, to wtedy zamiast 'P-dyspersja' mówimy krótko 'dyspersja' oraz piszemy c_f zamiast $c_{[f]_{Ex}}$ dla $f \in F$.

Jak już wspomnieliśmy, jedną z podstawowych własności operatora P-dyspersji jest zachowywanie równości P-zgodnych. Prawdziwy jest następujący:

Lemat 3.4.1 ([105]). *Niech* $\mathfrak{A}$ *jest* P*-dyspersją algebry* $\mathfrak{B}$ *typu* τ*. Wtedy algebra* $\mathfrak{A}$ *spełnia wszystkie równości* P*-zgodne spełnione w algebrze* $\mathfrak{B}$.

Rozważmy równość $\phi \approx \psi$ i niech to będzie równość P-zgodna spełniona w $\mathfrak{B}$ oraz $\phi \approx \psi$ będą n-arnymi termami. Mogą się zdarzyć następujące przypadki:

1) $\phi \approx \psi$ jest równością postaci $x \approx x$. Wtedy oczywiście jest ona spełniona w algebrze $\mathfrak{A}$.
2) $\phi \approx \psi$ jest równością postaci
$$f(\phi_0, \dots \phi_{\tau(f)-1}) \approx g(\psi_0, \dots \psi_{\tau(g)-1}).$$
Weźmy $a_k \in A_{i_k}(k = 0, \dots, n-1)$. Wiadomo, że równość $\phi \approx \psi$ jest spełniona w algebrze $\mathfrak{B}$ oraz najbardziej zewnętrzne symbole działań w termach ϕ oraz ψ należą do tego samego bloku partycji P. A stąd już otrzymujemy, że $c_{[ex(\phi)]_P}(\phi^{\mathfrak{B}}(i_0, \dots, i_{n-1})) = c_{[ex(\psi)]_P}(\psi^{\mathfrak{B}}(i_0, \dots, i_{n-1})) = \psi^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1})$.

Okazuje się, że nie tylko jest tak, że algebra, która jest dyspersją pewnej algebry z danej klasy, spełnia wszystkie równości P-zgodne spełnione w tej algebrze. Prawdziwe jest też twierdzenie mocniejsze. Mianowicie:

TWIERDZENIE 3.4.1 ([105]). *Rozmaitość algebr V jest spełniona tylko przez równości P-zgodne wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięta na P-dyspersje algebr z klasy V.*

DOWÓD. Załóżmy, że każda równość, która jest spełniona w rozmaitości V jest P-zgodna (wcześniej oczywiście ustalona jest partycja P zbioru działań podstawowych). Korzystając z ostatniego lematu widzimy, że wtedy rozważając dowolną P-dyspersję dowolnej algebry z klasy V jest ona strukturą spełniającą wszystkie równości P zgodne spełnione w V. Aby pokazać, że zachodzi implikacja odwrotna wystarczy powołać się na konstrukcję z lematu 3.3.2. $\lhd$

3.5. Bazy równościowe dla równościowych logik P-zgodnych

Przypomnimy konstrukcję ([105]) równościowych baz dla P-zgodnych rozmaitości.

Niech $\tau : F \to \mathbb{N}$ będzie typem algebr, zaś P — partycją zbioru F.

Block $[f]_P$ partycji P nazywany jest nullarnym wtw $\tau(g) = 0$ dla dowolnego $g \in [f]_P$.

DEFINICJA 3.5.1. Term jednej zmiennej typu τ jest nazywany *nietrywializującym*, jeśli jest różny od zmiennej.

Niech V będzie rozmaitością typu τ spełniającą następujące warunki:

(3.5.1) *Istnieje nietrywialny unarny term $q(x)$, taki że dla dowolnego $f \in F$, równość $q(f(x_0, \ldots, x_{\tau(f)-1})) \approx q(f(q(x_0), \ldots, q(x_{\tau(f)-1})))$ należy do $Id(V)$.*

(3.5.2) *Jeśli $[f]_P$ nie jest nullarnym blokiem oraz $g, h \in [f]_P$, to istnieje nietrywializujący, unarny term $q_{g,h}(x)$, taki że najbardziej zewnętrzny symbol operacji w termie $q_{g,h}(x)$ należy do $[f]_P$ oraz, że równości:*

$$g(x_0, \ldots, x_{\tau(g)-1}) = q_{g,h}(q(g(x_0, \ldots, x_{\tau(g)-1}))),$$

$$h(x_0, \ldots, x_{\tau(h)-1}) = q_{g,h}(q(h(x_0, \ldots, x_{\tau(h)-1})))$$

należą do $Id(V)$.

(3.5.3) *Jeśli $[f]_P$ jest nullarnym blokiem podziału P, to dla dowolnego $g \in [f]_P$ identyczność $f = g$ należy do $Id(V)$.*

Niech $\mathbf{B}$ będzie równościową bazą rozmaitości V. Określamy zbiór $\mathbf{B}^*$ identyczności typu τ za pomocą trzech następujących warunków:

(3.5.4) *Identyczności* (3.5.1), (3.5.2) *oraz* (3.5.3) *należą do* $\mathbf{B}^*$.

(3.5.5) *Jeśli* $\phi = \psi$ *należy do* $\mathbf{B}$, *to identyczność* $q(\phi) = q(\psi)$ *należy do* $\mathbf{B}^*$.

(3.5.6) $\mathbf{B}^*$ *zawiera tylko identyczności opisane w warunkach* (3.5.4) *i* (3.5.5).

W pracy [105] pokazano, że zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.5.1. *Jeśli* $\mathbf{B}$ *jest równościową bazą rozmaitości* V *spełniającą warunki* (3.5.1), (3.5.2) *i* (3.5.3), *to zbiór* $\mathbf{B}^*$ *określony przez warunki* (3.5.4), (3.5.5) *i* (3.5.6) *jest równościową bazą rozmaitości* V_P.

Można sprawdzić, że większość tzw. klasycznych klas algebr spełnia założenia powyższego twierdzenia. Jak zobaczymy jednak w następnych rozdziałach monografii, stosowanie powyższej konstrukcji prowadzi nas do baz, które najczęściej nie są zbyt proste i naturalne. Dlatego zachodzi potrzeba — aby wygodnie pracować z taką bazą — szukania prostszego i klarowniejszego zbioru równości definiujących klasy P-zgodne. I tak będziemy czynić w dalszej części pracy.

Prawdziwe jest też następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.5.2 ([105]). *Jeżeli* P *jest partycją zbioru* F *i* V *jest rozmaitością typu* τ *spełniającą warunki* (3.5.1), (3.5.2) *i* (3.5.3), *to* $\mathfrak{A}$ *należy do klasy* V_P *wtw* $\mathfrak{A}$ *jest* P*-dyspersją pewnej algebry z* V.

O twierdzeniu tym często mówi się, że stanowi charakterystykę semantyczną klasy V_P. Analizując znane z literatury przykłady krat $\mathcal{L}(V_{Ex})$, gdzie V jest ustaloną rozmaitością algebr, można odnieść wrażenie, że klasa V_{Ex} (i ogólnie klasy V_P dla dowolnej partycji P) jest znacząco 'większa' od klasy V. Rodzi się podejrzenie, że w klasie V_{Ex} znajdują się jakieś 'dziwne' struktury. Ostatnie twierdzenie pokazuje, że w klasie V_P spotkamy tylko modele będące P-dyspersjami pewnych algebr z V. Z jednej strony może napawać to optymizmem, że w klasie V_P nie ma żadnych 'dziwnych' struktur, z drugiej zaś zadanie przebadania całego bogactwa wszystkich P-dyspersji algebr z danej klasy stanowi nie lada wyzwanie.

3.6. Od rozmaitości normalnych do zewnętrznie zgodnych

W zaprezentowanych wcześniej wynikach widzieliśmy jaką rolę w opisie kraty $\mathcal{L}(V_{Ex})$ odgrywa krata $\mathcal{L}(T_{Ex})$, gdzie T jest rozmaitością trywialną. Analizując twierdzenie 3.2.3 zauważamy, że w kracie $\mathcal{L}(V_{Ex})$ widać 'ślad' kraty $\mathcal{L}(V)$. We wspomnianym twierdzeniu rozważana rozmaitość jest idempotentna. Można zadać pytanie, czy jeśli rozważymy dowolną rozmaitość, to również czy w kracie $\mathcal{L}(V_{Ex})$, znaleźć można jakieś 'ślady' izomorficzne z kratą $\mathcal{L}(V)$.

Dla rozmaitości V typu τ wprowadźmy oznaczenie

$$P^{(V)} = \{K \in \mathcal{L}(V_P) : Id(K) = P(K)\}.^4 \tag{3.6.1}$$

W pracy [32] udowodniono następujące:

TWIERDZENIE 3.6.1 ([32]). *Niech V będzie rozmaitością typu τ ,taką że dla pewnego unarnego termu $\phi(x)$, który nie jest zmienną, identyczność $\phi(x) \approx x$ należy do zbioru $Id(V)$. Wówczas odwzorowanie $g : \mathcal{L}(V) \longrightarrow P^{(V)}$ określono następująco*

$$g(K) = K_P \text{ dla dowolnego } K \in \mathcal{L}(V) \tag{df:g}$$

jest izomorficznym włożeniem.

DOWÓD. Najpierw pokażemy, że dla dowolnych $K, M \in \mathcal{L}(V)$ zachodzi

$$K \subseteq M \text{ wtw } K_P \subseteq M_P. \tag{Mon}$$

Na mocy standardowych faktów, jeśli $K \subseteq M$, to $Id(M) \subseteq Id(K)$. Zatem $P(M) \subseteq P(K)$ oraz $K_P \subseteq M_P$. Rozważymy teraz implikację odwrotną. Widać, że jeśli $K_P \subseteq M_P$, to $P(M) \subseteq P(K)$. Załóżmy, że $(\psi_1 \approx \psi_2) \in Id(M)$. Skoro $M \subseteq V$, zatem $(\phi(x) \approx x) \in Id(M)$. Zatem $(\phi(\psi_1) \approx \phi(\psi_2)) \in P(M)$, czyli również $(\phi(\psi_1) \approx \phi(\psi_2)) \in P(K)$ Ale $(\phi(x) \approx x) \in Id(K)$, wobec tego $(\psi_1 \approx \psi_2) \in Id(K)$. Reasumując $K \subseteq M$.

Na mocy warunku (Mon) funkcja g jest różnowartościowa. $\lhd$

---

[4] Pojawia się tutaj pewna nieścisłość. Wcześniej bowiem $\mathcal{L}(V_P)$ oznaczało kratę wszystkich podrozmaitości rozmaitości V_P. Teraz oznacza uniwersum tej kraty. Jest jednak częstą praktyką — o ile nie prowadzi to do nieporozumień — utożsamianie algebry z jej uniwersum. My również w dalszej części będziemy tak postępować.

Twierdzenie 3.6.2 ([32]). *Niech V będzie rozmaitością typu τ, taką że dla pewnego unarnego termu $\phi(x)$, który nie jest zmienną, identyczność $\phi(x) \approx x$ należy do zbioru $Id(V)$. Niech ponadto partycja P zbioru F spełnia warunek:*

$$(V_P) \qquad V_P = D_P(V).$$

Wówczas kraty $\mathcal{L}(V)$ oraz $P^{(V)}$ są izomorficzne.

Dowód. Niech $g\colon \mathcal{L}(V) \longrightarrow P^{(V)}$ będzie odwzorowaniem spełniającym warunek (df:g). Na mocy twierdzenia 3.6.1 funkcja g jest izomorficznym włożeniem. Pokażemy, że g jest funkcją ‘na’. Załóżmy, że $K \in P^{(V)}$. Przyjmijmy, że

$$(\text{df:K'}) \qquad K' = K \cap V.$$

Widać, że $K' \in \mathcal{L}(V)$. Należ pokazać, że $K'_P = K$.

Na mocy warunku (df:K’) mamy, że $K' \subseteq K$, stąd $P(K) \subseteq P(K')$. Ale $Id(K) = P(K)$, zatem $Id(K) \subseteq P(K')$. Czyli $K'_P \subseteq K_{Id(K)} = K$.

Przyjmijmy, że $\mathcal{U} = \langle A, F^{\mathcal{U}} \rangle \in K$. Na mocy warunku (V_P) $\mathcal{U}$ jest P-dyspersją pewnej algebry $\mathcal{I} = \langle I; F^{\mathcal{I}} \rangle \in V$. Określamy w zbiorze $\mathcal{U}$ relację dwuargumentową w następujący sposób:

$$a \sim b \text{ wtw } a, b \in A_i, \text{ dla pewnego } i \in I.$$

Widać, ze relacja $\sim$ jest kongruencją w $\mathcal{U}$ oraz że $\mathcal{U}/\sim$ jest izomorficzna z $\mathcal{I}$. Stąd $\mathcal{I} \in K$, czyli również $\mathcal{I} \in K'$. Zatem $\mathcal{U} \in D_P(K')$ oraz na mocy wcześniejszych ustaleń mamy, że $\mathcal{U} \in K'_P$. Reasumując $K \subseteq K'_P$, co kończy dowód. $\lhd$

Widać, że chociaż oba twierdzenia z tej sekcji nie dają pełnej odpowiedzi na pytanie jak ‘wygląda’ krata $\mathcal{L}(V_{Ex})$, to sam fakt, że przy pewnych założeniach kraty $\mathcal{L}(V)$ oraz $P^{(V)}$ są izomorficzne daje pewien obraz o tym, jaką postać ma krata $\mathcal{L}(V_{Ex})$.

Rozdział 4

P-zgodne algebry Boole'a

Rozważmy rozmaitość $\mathbf{B}$ algebr Boole'a typu $\langle 2,2,1\rangle$, gdzie działaniami dwuargumentowymi są $+$, $\cdot$, zaś $'$ jest działaniem jednoargumentowym. Wiadomo, że rozmaitość $\mathbf{B}$ algebr Boole'a posiada dwie podrozmaitości: rozmaitość $\mathbf{B}$ oraz rozmaitość trywialną. Rozmaitość trywialną tradycyjnie oznaczać będziemy przez T. Wiadomo, że jest ona generowana przez równość $x \approx y$. Jeśli ze zbioru $Id(\mathbf{B})$ wybierzemy tylko równości zewnętrznie zgodne algebr Boole'a, to rozmaitość, którą te identyczności wyznaczą będzie większa w sensie inkluzji od klasy $\mathbf{B}$. Rozmaitość ta została scharakteryzowana w pracy [48]. Wiadomo, że jedynymi partycjami zbioru $\{+,\cdot,'\}$ są:

$$\begin{aligned}
Ex &= \{\{+\},\{\cdot\},\{'\}\},\\
P_1 &= \{\{+,\cdot\},\{'\}\},\\
P_2 &= \{\{\cdot,'\},\{+\}\},\\
P_3 &= \{\{+,\cdot\},\{'\}\},\\
N &= \{\{+,\cdot,'\}\}.
\end{aligned}$$

Oczywiście, każda z klas $\mathbf{B}_{P_1}$, $\mathbf{B}_{P_2}$, $\mathbf{B}_{P_3}$ oraz $\mathbf{B}_N$ jest podrozmaitością rozmaitości $\mathbf{B}_{Ex}$. Korzystając z lematu 3.2.3 dotyczącego postaci równości tworzących bazy rozmaitości wyznaczonych przez wszystkie równości P-zgodne ustalonego typu otrzymujemy:

Wniosek 4.0.1. *Równości*

1. $x+y \approx z+u$, $x\cdot y \approx z\cdot u$, $x' \approx y'$
2. $x+y \approx z'$, $x\cdot y \approx z\cdot u$
3. $x\cdot y \approx z'$, $x+y \approx z+u$
4. $x+y \approx z\cdot u$, $x' \approx y'$
5. $x+y \approx z\cdot u \approx v'$

tworzą odpowiednio bazy klas:

1. T_{Ex},
2. T_{P_1},
3. T_{P_2},
4. T_{P_3},
5. T_N.

Zauważmy, że klasa $\mathbf{B}_{Ex}$ spełnia założenia twierdzenia 3.5.1. Korzystając z tego twierdzenia można wyznaczyć bazę dla każdej rozmaitości P-zgodnej algebr Boole'a, gdzie P jest jedną z partycji: Ex, P_1, P_2, P_3, N. W pracy [48] baza rozmaitości $\mathbf{B}_{Ex}$ została wyznaczona jednak inaczej. Najpierw udowodniono, że dowolny term ϕ typu $\langle 2,2,1\rangle$ zmiennych $x_1, \cdots, x_n$ na gruncie $\mathbf{B}_{Ex}$ jest równoważny termowi $\phi^* + \phi^*$ lub $\phi^* \cdot \phi^*$ lub $(\phi^*)''$ lub jakiejś zmiennej x_i (gdzie $i = 1, \cdots, n$), gdzie ϕ^* jest postacią normalną termu ϕ w klasie $\mathbf{B}$. A następnie używając tych postaci normalnych udowodniono w standardowy sposób następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 4.0.3. *Bazę rozmaitości* $\mathbf{B}_{Ex}$ *stanowią następujące identyczności:*

$$x \vee y = y \vee x, \tag{1}$$

$$x \wedge y = y \wedge x, \tag{1'}$$

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee x, \tag{2}$$

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge x, \tag{2'}$$

$$(x \wedge x)' = x', \tag{3}$$

$$(x \vee x)' = x', \tag{3'}$$

$$(x \wedge x) \vee y = x \vee y, \tag{4}$$

$$(x \vee x) \wedge y = x \wedge y, \tag{4'}$$

$$(x \vee x) \vee y = x \vee y, \tag{5}$$

$$(x \wedge x) \wedge y = x \wedge y, \tag{5'}$$

$$x \vee (x \wedge y) = x \vee x, \tag{6}$$

$$x \wedge (x \vee y) = x \wedge x, \tag{6'}$$

$$x \vee x' = y \vee y', \tag{7}$$
$$x \wedge x' = y \wedge y', \tag{7'}$$

$$x''' = x' \tag{8}$$

$$x \vee (y \wedge (z \vee v)) = x \vee ((y \wedge z) \vee (y \wedge v)), \tag{9}$$
$$x \vee ((y \wedge z) \vee v)) = x \vee ((y \vee v) \wedge (z \vee v)), \tag{9'}$$

$$x \wedge (y \wedge (z \vee v)) = x \wedge ((y \wedge z) \vee (y \wedge v)), \tag{10}$$
$$x \wedge ((y \wedge z) \vee v)) = x \wedge ((y \vee v) \wedge (z \vee v)), \tag{10'}$$

$$(x \wedge (y \vee z))' = ((x \wedge y) \vee (x \wedge z))', \tag{11}$$
$$(x \vee (y \wedge t))' = ((x \vee y) \wedge (x \vee t))', \tag{11'}$$

$$(x \vee x') \vee y = x \vee x', \tag{12}$$
$$(x \wedge x') \wedge y = x \wedge x', \tag{12'}$$

$$(x \vee x') \wedge z = z \wedge z, \tag{13}$$
$$(x \wedge x') \vee z = z \vee z, \tag{13'}$$

$$(x \vee y)' \wedge z = (x' \wedge y') \wedge z, \tag{14}$$
$$(x \wedge y)' \wedge z = (x' \vee y') \wedge z, \tag{14'}$$

$$(x \vee y)' \vee z = (x' \wedge y') \vee z, \tag{15}$$
$$(x \wedge y)' \vee z = (x' \vee y') \vee z, \tag{15'}$$

$$x'' \wedge y = x \wedge y, \tag{16}$$
$$x'' \vee y = x \vee y. \tag{16'}$$

Łatwo zauważyć, że gdybyśmy korzystali z twierdzenia 3.5.1, to uzyskalibyśmy inny zbiór równości, który oczywiście byłby równy wskazanemu powyżej zbiorowi. Bazy dla klas $\mathbf{B}_{P_1}$, $\mathbf{B}_{P_2}$, $\mathbf{B}_{P_3}$ oraz $\mathbf{B}_N$ pominiemy, gdyż można je uzyskać stosując twierdzenie 3.5.1.

Niech teraz 0 oznacza term $x \cdot x'$, a 1 oznacza term $x + x'$. Rozpatrzmy następujące identyczności:

$$0' = 1 \qquad (17) \qquad\qquad 1 \wedge 1 = 0' \qquad (18)$$

$$1 \wedge 1 = 1 \qquad (19) \qquad\qquad 1' = 0 \vee 0 \qquad (20)$$

$$1' = 0 \qquad (21) \qquad\qquad 0 = 0 \vee 0 \qquad (22)$$

$$x'' = x' \qquad (23) \qquad\qquad x' \vee x' = x' \qquad (24)$$

$$x' \wedge x' = x' \qquad (25) \qquad\qquad x \vee x' = x \wedge x \qquad (26)$$

$$x \vee x = x \qquad (27)$$

Po pierwsze zauważmy, że żadna z tych równości nie jest zewnętrznie zgodna. Po drugie, każda z nich spełniona jest w klasie $\mathbf{B}$. Oczywiście równości o tych dwóch cechach jest więcej, ale interesujące jest to, że tylko te równości oraz równości stanowiące bazę klasy $\mathbf{B}_{Ex}$ wystarczą aby scharakteryzować wszystkie podklasy klasy $\mathbf{B}_{Ex}$.

W pracy [48] udowodniono, że każda podrozmaitość rozmaitości $\mathbf{B}_{Ex}$ jest wyznaczona przez sumę zbioru $Ex(\mathbf{B})$ i zbioru składającego się z równości (17)–(27). Postać kraty $\mathcal{L}(\mathbf{B}_{Ex})$ przedstawiono na diagramie 3.

Jak już wspomniano, dla dowolnej rozmaitości K dla kraty przedstawionej na diagramie 3 istnieje skończony podzbiór E, zbioru złożonego z identyczności (17)–(27), taki że $K = \mathbf{Mod}(\mathsf{Cn}(Ex(\mathbf{B}) \cup E))$. Dla przykładu w przypadku K_0 wskazanym w kracie na diagramie 3 mamy $K_0 = \mathbf{Mod}(\mathsf{Cn}(Ex(\mathbf{B}) \cup \{(17), (21)\}))$.

Analizując diagram kraty $\mathcal{L}(\mathbf{B}_{Ex})$ wnioskujemy, że dla trywialnej rozmaitości T krata $\mathcal{L}(T_{Ex})$ ma postać przedstawioną na diagramie 4.

Zauważmy, że istnienie każdej z rozmaitości: T, T_N, T_{P_1}, T_{P_2}, T_{P_3}, T_{Ex} oraz $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}_N$, $\mathbf{B}_{P_1}$, $\mathbf{B}_{P_2}$, $\mathbf{B}_{P_3}$, $\mathbf{B}_{Ex}$ w kracie $\mathcal{L}(\mathbf{B}_{Ex})$ wynika wprost z wcześniej udowodnionych twierdzeń. Natomiast wszystkie pozostałe elementy i ich usytuowanie stanowią cechę specyficzną tejże kraty. To, że krata $\mathcal{L}(\mathbf{B})$ ma jedynie dwa elementy, a w kracie $\mathcal{L}(\mathbf{B}_{Ex})$ jest ich ponad 40 daje nam pewne wyobrażenie o tym, jak 'duża' jest klasa $\mathbf{B}_{Ex}$ oraz o tym, że wybierając ze zbioru $Id(\mathbf{B})$ tylko równości o pewnej specjalnej strukturze otrzymamy klasę, o której można myśleć, że jest 'dużo większa' niż klasa wyjściowa.

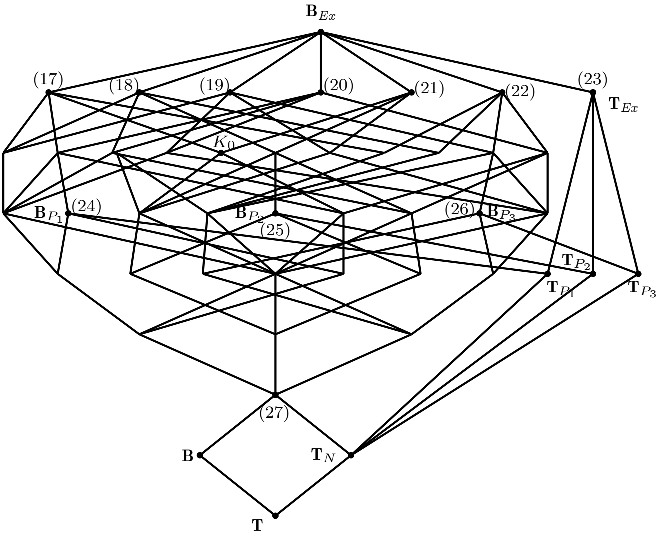


Diagram 3. Zgodnie z notacją przyjętą wcześniej, $\mathbf{B}_{Ex}$, $\mathbf{B}_{P_1}$, $\mathbf{B}_{P_2}$, $\mathbf{B}_{P_3}$ oznaczają odpowiednio klasy wyznaczone przez wszystkie równości zewnętrznie zgodne, wszystkie P_1-zgodne identyczności, wszystkie P_2-zgodne identyczności oraz wszystkie P_3-zgodne identyczności algebr Boole'a. Liczby podane w nawiasach od (17) do (27) oznaczają rozmaitości wyznaczone przez zbiór wszystkich równości zewnętrznie zgodnych algebr Boole'a wraz z identycznościami oznaczonymi za pomocą danej liczy.

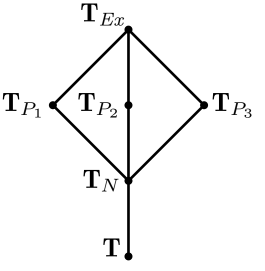


Diagram 4.

Rozdział 5

Równości P-zgodne modularnych ortokrat

5.1. Ortokraty — podstawowe fakty

Rozdział stanowi przegląd podstawowych wyników dotyczących ortokrat, które są istotne dla rozważanych dalej struktur. Podana zostanie charakterystyka zarówno syntaktyczna, jak i semantyczna klasy algebr wyznaczonych przez identyczności P-zgodne modularnych ortokrat. Opisana zostanie również krata pewnych podrozmaitości rozmaitości $\mathbf{MOL}_{Ex}$ zdefiniowanej przez identyczności zewnętrznie zgodne modularnych ortokrat. Większość prezentowanych wyników dotyczących równości P-zgodnych pochodzi z pracy [89].

Klasa orthokrat była badana przez Garretta Birkhoffa i Johna Von Neumanna ([10]). Orthokraty stanowią semantykę dla tzw. logiki kwantowej. W przypadku rozmaitości $\mathbf{M}_\omega$ generowanej przez kratę modularną M_ω długości 2 o $\aleph_0$ atomach ustalono ([44]), że każda podquasirozmaitość rozmaitości $\mathbf{M}_\omega$ jest rozmaitością.

Wiadomo, że każdej algebrze odpowiada $\mathrm{Con}(\mathcal{A})$ — krata jej kongruencji.

Niech Δ będzie relacją diagonalną w uniwersum danej algebry $\mathcal{A}$. Jak wiadomo, jest ona najmniejszą kongruencją w kracie wszystkich kongruencji $\mathcal{A}$. Przypomnijmy należące do kanonu (zob. np. [14, §8]):

Twierdzenie 5.1.1. *Algebra $\mathcal{A}$ jest podprosto-nierozkładalna wtw $\mathcal{A}$ jest trywialna lub w* $\mathrm{Con}(\mathcal{A})\setminus\{\triangle\}$ *istnieje element najmniejszy.*

Czyli krata kongruencji algebry podprosto-nierozkładalnej $\mathcal{A}$ ma postać przedstawioną na rysunku 5.1.

Definicja 5.1.1. Algebra, której krata kongruencji jest dwuelementowa zwana jest prostą[5].

[4] Szczegóły można znaleźć w pracy [83].
[5] Pojęcie algebry semi-prostej podane na s. 46.

Diagram 5. Postać Con($\mathcal{A}$) — kraty kongruencji algebry $\mathcal{A}$.

Przypomnijmy standardowe:

TWIERDZENIE 5.1.2 ([8]). *Niech dana będzie rozmaitość K. Każda algebra $\mathfrak{A} \in K$ jest izomorficzna z podprostym produktem podprosto-nierozkładalnych algebr należących do K.*

Niech $\mathbf{Q}(K)$ oznacza najmniejszą quasirozmaitość zawierającą klasę algebr K. W szczególności, gdy $K = \{\mathfrak{A}\}$, piszemy $\mathbf{Q}(\mathfrak{A})$. Poniżej podajemy inne pojęcie ważne w tym kontekście. Stosowane było w [93] w odniesieniu grup a później rozszerzono je ogólnie na przypadek algebr:

DEFINICJA 5.1.2 ([53]). Algebra $\mathfrak{A}$ zwana jest *krytyczną* wtw $\mathfrak{A}$ jest podprosto $\mathbf{Q}(\mathfrak{A})$-nierozkładalna.

Przywołajmy:

TWIERDZENIE 5.1.3 ([75]). *Skończona algebra jest krytyczna wtw nie należy do quasirozmaitości generowanej przez jej właściwe podalgebry.*

TWIERDZENIE 5.1.4 ([75]). *Każda quasirozmaitość algebr jest generowana przez jej skończenie generowane algebry krytyczne.*

DEFINICJA 5.1.3. Algebra $\mathfrak{A} = \langle A, \vee, \wedge, {}' \rangle$ w typie $\langle 2, 2, 1 \rangle$ zwana jest *ortokratą* wtw $\langle A, \vee, \wedge \rangle$ jest kratą ograniczoną a $'$ jest antymonotoniczym uzupełnieniem w zbiorze A.

Przyjrzyjmy się poniższym równościom:

$$x \wedge ((x \wedge y) \vee x') \approx x \wedge y \qquad \text{(prawo ortomodularności)}$$
$$x \wedge (y \vee (x \wedge z)) \approx (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \qquad \text{(prawo modularności)}$$

Dołączając prawo ortomodularności do zbioru wszystkich identyczności spełnionych w klasie wszystkich ortokrat otrzymujemy równościową charakterystykę klasy krat ortomodularnych. Z kolei dołączając prawo modularności do tegoż zbioru otrzymujemy klasę wszystkich modularnych ortokrat. Niech **MOL** oznacza klasę wszystkich modularnych ortokrat, z kolei *Id*(**MOL**) oznacza zbiór wszystkich identyczności spełnionych w klasie **MOL**.

Postępując za [12] i [75] przyjmijmy, że MOn dla $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ oraz $MO\omega$ oznaczają odpowiednio modularne ortokraty z złożone z $2n$ i $\aleph_0$ parami nieporównywalnych elementów oraz ich kresów — zera i jedynki. Ponadto, niech $MO1$ oznacza dwuelementową algebrę Boole'a. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ niech $\boldsymbol{MO_n}$ i $\boldsymbol{MO_\omega}$ oznaczają odpowiednio rozmaitości generowane przez ortokraty MOn i $MO\omega$. Niech natomiast **OML** oznacza klasę wszystkich krat ortomodularnych.

Przypomnijmy:

Definicja 5.1.4. Rozmaitość V jest *semi-prosta* wtw każda podprosto nierozkładalna algebra z klasy V jest prosta.

Fakt 5.1.1 ([60]). *Rozmaitość* **OML** *jest semi-prosta.*

Fakt 5.1.2 ([72]). *Rozmaitość V typu τ jest kongruencyjnie permutowalna wtw istnieje term $t(x, y, z)$ typu τ, taki że w rozmaitości V spełnione są równości:*

(M1) $$t(x,x,y) \approx t(y,x,x)$$

(M2) $$t(y,x,x) \approx y$$

Fakt 5.1.3 ([75]). *Dla termu*

$$t(x,y,z) \approx f(z, f(x,y,z), x),$$

gdzie

$$f(x,y,z) \approx (z \wedge y) \vee (y' \wedge (x \vee y))$$

spełnione są w rozmaitości **OML** *równości* (M1) *i* (M2)*.*

Wniosek 5.1.1 ([75]). *Rozmaitość* **OML** *jest kongruencyjnie permutawalna.*

Zatem dzięki faktowi 5.1.1 do rozmaitości **OML** daje się stosować poniższy lemat:

Lemat 5.1.1 ([75]). *Niech V będzie semi-prostą, kongruencyjnie permutowalną rozmaitością. Każda skończona krytyczna algebra $\mathfrak{A} \in V$ jest izomorficzna z produktem prostym skończenie wielu parami nieizomorficznych algebr prostych z V.*

Ostatecznie uzyskuje się charakterystykę algebr generujących podquasirozmaitości rozmaitości **OML**.

FAKT 5.1.4 ([12]). *Ciąg* $(\boldsymbol{MO_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *tworzy rosnący łańcuch.*

Krata podquasirozmaitości rozmaitości generowanej przez modularne MO_n, dla $n \in \mathbb{N}$ oraz MO_ω została opisana w pracy J. Malinowskiego [75].

FAKT 5.1.5 ([12]). *Algebry* MOn *dla* $1 < n$ *są jedynymi skończonymi podprosto nierozkładalnymi modularnymi ortokratami.*

Stąd, ma mocy faktu 5.1.1 otrzymuje się:

FAKT 5.1.6 ([75]). *Algebry* MOn *dla* $1 < n$ *są jedynymi skończonymi prostymi modularnymi ortokratami.*

Stąd mamy:

FAKT 5.1.7 ([75]). *Jedynymi lokalnie skończonymi podrozmaitościami rozmaitości* **MOL** *są rozmaitości* $\mathbf{MOL}_n$*, dla* $n \in \mathbb{N}$ *oraz* $\mathbf{MOL}_{\boldsymbol{\omega}}$*.*

TWIERDZENIE 5.1.5 ([75]). *Jedynymi krytycznymi skończonymi algebrami* $\boldsymbol{MO_\omega}$ *są* $MOk \times MOl$*, gdzie* $l > k > 0$*.*

5.2. Syntaksa i semantyka

Przypomnijmy równościową charakterystykę klasy **MOL**.

Stała 0 może być standardowo zdefiniowana, jako sprzeczność, czyli może być traktowana jako skrót dla $x \wedge x'$. Podobnie 1 będzie rozumiana jako skrót dla $x \vee x'$. Podkreślmy, że ani 0 ani 1 nie występują w języku.

Jak wiadomo, następujące równości typu $\langle 2, 2, 1\rangle$ wyznaczają rozmaitość modularnych ortokrat: (1), (1'), (2), (2')

$$x \vee x \approx x, \tag{28}$$

$$x \wedge x \approx x, \tag{28'}$$

$$x \approx x \vee (x \wedge y), \tag{29}$$

$$x \approx x \vee (x \wedge y), \tag{29'}$$

$$x \vee x' \approx y \vee y', \tag{30}$$

$$x \wedge x' \approx y \wedge y', \tag{30'}$$

$$x \wedge (y \vee (x \wedge z)) \approx (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \tag{31}$$

$$x \vee 1 \approx 1, \tag{32}$$
$$x \wedge 1 \approx x, \tag{32'}$$

$$x \vee 0 \approx x, \tag{33}$$
$$x \wedge 0 \approx 0, \tag{33'}$$

$$(x \vee y)' \approx x' \wedge y', \tag{34}$$
$$(x \wedge y)' \approx x' \vee y', \tag{34'}$$

$$x'' \approx x. \tag{35}$$

Wskażemy tylko bazę klasy $\mathbf{MOL}_{Ex}$. Podobnie postąpimy w przypadku baz dla klas $\mathbf{MOL}_P$, gdzie P jest partycją zbioru$\{\vee, \wedge, '\}$ różną od Ex.

Niech $q(x) = x \wedge 1$, $q_\vee(x) = x \vee 0$, $q_\wedge(x) = x \wedge 1$, $q_{'}(x) = x''$. Zauważmy, że termy $q(x), q_\vee(x), q_\wedge(x), q_{'}(x)$ spełniają założenia twierdzenia 3.5.1. Stąd otrzymujemy:

Wniosek 5.2.1 ([89]). *Następujące równości typu $\langle 2, 2, 1\rangle$:*

$$(x \wedge y) \wedge 1 \approx ((x \wedge 1) \wedge (y \wedge 1)) \wedge 1, \tag{36}$$
$$(x \vee y) \wedge 1 \approx ((x \wedge 1) \vee (y \wedge 1)) \wedge 1, \tag{36'}$$

$$x' \wedge 1 \approx (x \wedge 1)' \wedge 1, \tag{37}$$

$$x \vee y \approx ((x \vee y) \wedge 1) \vee 0, \tag{38}$$
$$x \wedge y \approx ((x \wedge y) \wedge 1) \wedge 1, \tag{38'}$$

$$x' \approx (x' \wedge 1)'', \tag{39}$$

$$(x \vee y) \wedge 1 \approx (y \vee x) \wedge 1, \tag{40}$$
$$(x \wedge y) \wedge 1 \approx (y \wedge x) \wedge 1, \tag{40'}$$

$$(x \vee (y \vee z)) \wedge 1 \approx ((x \vee y) \vee z) \wedge 1, \tag{41}$$
$$(x \wedge (y \wedge z)) \wedge 1 \approx ((x \wedge y) \wedge z) \wedge 1, \tag{41'}$$

$$(x \vee x) \wedge 1 \approx x \wedge 1, \tag{42}$$

$$(x \wedge x) \wedge 1 \approx x \wedge 1, \tag{42'}$$

$$x \wedge 1 \approx (x \vee (x \wedge y)) \wedge 1, \tag{43}$$
$$x \wedge 1 \approx (x \wedge (x \vee y)) \wedge 1, \tag{43'}$$

$$(x \vee x') \wedge 1 \approx (y \vee y') \wedge 1, \tag{44}$$
$$(x \wedge x') \wedge 1 \approx (y \wedge y') \wedge 1, \tag{44'}$$

$$(x \wedge (y \vee (x \wedge z))) \wedge 1 \approx ((x \wedge y) \vee (x \wedge z)) \wedge 1, \tag{45}$$

$$(x \vee 1) \wedge 1 \approx 1 \wedge 1, \tag{46}$$
$$(x \wedge 1) \wedge 1 \approx x \wedge 1, \tag{46'}$$

$$(x \vee 0) \wedge 1 \approx x \wedge 1, \tag{47}$$
$$(x \wedge 0) \wedge 1 \approx 0 \wedge 1, \tag{47'}$$

$$((x \vee y)') \wedge 1 \approx (x' \wedge y') \wedge 1, \tag{48}$$
$$((x \wedge y)') \wedge 1 \approx (x' \vee y') \wedge 1, \tag{48'}$$

$$x'' \wedge 1 \approx x \wedge 1 \tag{49}$$

stanowią bazę równościową klasy $\mathbf{MOL}_{Ex}$.

Jest oczywiste, że różne wybory termów $q(x)$, $q_\vee(x)$, $q_\wedge(x)$, $q_{'}(x)$ mogą wyznaczyć różne zbiory równości definiujących klasę $\mathbf{MOL}_{Ex}$. W kolejnym twierdzeniu podamy odmienny — chciałoby się rzec bardziej naturalny — zbiór identyczności, który również definiuje klasę $\mathbf{MOL}_{Ex}$. Istota tego twierdzenia sprowadza się do wykorzystania faktu, że niektóre równości definiujące klasę **MOL**, w szczególności łączność i przemienność, są zewnętrznie zgodne. Zatem w naturalny sposób te właśnie równości powinny być wliczone to zbioru identyczności definiujących klasę $\mathbf{MOL}_{Ex}$. Pokażemy, że baza wynikająca z zastosowania twierdzenia 3.5.1 oraz baza wskazana w poniższym twierdzeniu definiują tę samą rozmaitość.

TWIERDZENIE 5.2.1 ([89]). *Identyczności:*

$$x \vee y \approx y \vee x, \tag{50}$$
$$x \wedge y \approx y \wedge x, \tag{50'}$$

$$x \vee (y \vee z) \approx (x \vee y) \vee z, \tag{51}$$

$$x \wedge (y \wedge z) \approx (x \wedge y) \wedge z, \tag{51'}$$

$$x \vee (y \wedge (z \vee (y \wedge t))) \approx x \vee ((y \wedge z) \vee (y \wedge t)) \tag{52}$$
$$x \wedge (y \wedge (z \vee (y \wedge t))) \approx x \wedge ((y \wedge z) \vee (y \wedge t)) \tag{52'}$$

$$(y \wedge (z \vee (y \wedge t)))' \approx ((y \wedge z) \vee (y \wedge t))' \tag{53}$$

$$1 \vee y \approx 1, \tag{54}$$
$$1 \wedge y \approx y \wedge y, \tag{54'}$$

$$0 \vee y \approx y \vee y, \tag{55}$$
$$0 \wedge y \approx 0, \tag{55'}$$

$$(x \wedge y)' \vee z \approx (x' \vee y') \vee z, \tag{56}$$
$$(x \wedge y)' \wedge z \approx (x' \vee y') \wedge z, \tag{56'}$$

$$(x \vee y)' \vee z \approx (x' \wedge y') \vee z, \tag{57}$$
$$(x \vee y)' \wedge z \approx (x' \wedge y') \wedge z, \tag{57'}$$

$$x \vee y'' \approx x \vee y, \tag{58}$$
$$x \wedge y'' \approx x \wedge y, \tag{58'}$$

oraz (3), (3'), (4), (4'), (5), (5'), (6), (6'), (7), (7') *i* (8) *tworzą bazę równościową klasy* $\mathbf{MOL}_{Ex}$.

Dowód. Oznaczmy zbiór utworzony z identyczności (36)–(49) przez $\mathbf{B}^*$, zaś ten otrzymany z równości (50)–(8) przez $\mathbf{B}^{**}$. Ponieważ każdy element zbioru $\mathbf{B}^{**}$ jest równością zewnętrznie zgodną spełnioną w klasie modularnych ortokrat, zaś zbiór $\mathbf{B}^*$ jest bazą klasy $\mathbf{MOL}_{Ex}$, zatem $\mathsf{Cn}(\mathbf{B}^{**}) \subseteq \mathsf{Cn}(\mathbf{B}^*)$. Jeśli udowodnimy, że $\mathsf{Cn}(\mathbf{B}^*) \subseteq \mathsf{Cn}(\mathbf{B}^{**})$, to pokażemy, że zbiór $\mathbf{B}^{**}$ jest bazą $\mathbf{MOL}_{Ex}$. Na mocy (51') i (50') uzyskujemy, że równość $((x \wedge 1) \wedge (y \wedge 1)) \wedge 1 \approx (x \wedge y) \wedge ((1 \wedge 1) \wedge 1)$ należy do $\mathsf{Cn}(\mathbf{B}^{**})$. Ponadto, z równości (5') wynika, że równość $(x \wedge y) \wedge ((1 \wedge 1) \wedge 1) \approx (x \wedge y) \wedge 1$ należy do $\mathsf{Cn}(\mathbf{B}^{**})$. Pokazaliśmy więc, że (36) należy do zbioru $\mathsf{Cn}(\mathbf{B}^{**})$. Z kolei dzięki (54') i (4) mamy, że (36') należy do $\mathsf{Cn}(\mathbf{B}^{**})$. Stosując (3) i (54') wnioskujemy, że następujące równości są prawdziwe w klasie wyznaczonej przez teorię $\mathsf{Cn}(\mathbf{B}^{**})$: $x' \wedge 1 \approx (x \wedge x)' \wedge 1 \approx (x \wedge 1)' \wedge 1$. Zatem (37) należy do $\mathbf{B}^{**}$. Na mocy równości (54'), (55), (4), (50), (51), (5) otrzymujemy, że równość (38) należy do $\mathbf{B}^{**}$. Dowód faktu, że (38') należy do zbioru $\mathbf{B}^{**}$ jest analogiczny do dowodu faktu, że (36) należy do $\mathbf{B}^{**}$. Na mocy faktu, że równości (54'), (3), (8) należą do $\mathbf{B}^{**}$, wnioskujemy, że również (39) należy do $\mathbf{B}^{**}$. Łatwo widać, że każda z identyczności (40)–(49) należy do zbioru $\mathbf{B}^{**}$, co kończy dowód. $\triangleleft$

Podobnie jak przy wyznaczaniu bazy dla klasy $\mathbf{MOL}_{Ex}$ rozważmy termy $q(x) = x \wedge 1$, $q_\vee(x) = x \vee 0$, $q_\wedge(x) = x \wedge 1$, $q_{'}(x) = x''$. My rozważamy takie termy, chociaż widać, że pewne partycje zbioru $\{\wedge, \vee, '\}$ takie jak np. partycja $\{\{\wedge, \vee\}, \{'\}\}$ nie wymagają 'związania' z każdym symbolem odpowiedniego termu, tylko z każdym blokiem. Jeśli jednak wskażemy takie termy jak wyżej, to będą one odpowiednie dla każdej partycji P. Zatem klasa wszystkich modularnych ortokrat spełnia założenia twierdzenia 3.5.2, czyli mamy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5.2.2 ([89], semantyczna charakterystyka algebr należących do $\mathbf{MOL}_P$). *Jeśli P jest partycją zbioru $\{\wedge, \vee, '\}$, to klasa $\mathbf{MOL}_P$ równa sie klasie wszystkich P-dyspersji algebr należących do klasy modularnych ortokrat.*

5.3. Kraty rozmaitości

Zauważmy, że zbiór $Ex(\mathbf{MOL})$ jest właściwym podzbiorem zbioru równości $Id(\mathbf{MOL})$, zatem rozmaitość modularnych ortokrat jest właściwą podrozmaitością rozmaitości $\mathbf{MOL}_{Ex}$. Oczywiście każda podrozmaitość klasy $\mathbf{MOL}$ jest również właściwą podrozmaitością rozmaitości $\mathbf{MOL}_{Ex}$.

Niech MO_n dla $n \in \mathbb{N}$ (MO_ω) oznacza modularną ortokratę z $2n$ (odpowiednio ω) parami nieporównywalnych elementów oraz ich kresów. Dla klasy algebr V, przez $\mathbf{Q}(V)$ oznaczamy najmniejszą quasirozmaitość zawierającą klasę V.

Przyjmijmy, że liczby 0, 1, 2, …, nk oznaczają odpowiednio quasirozmaitość $\mathbf{Q}(\mathrm{MO}0)$ (trywialną rozmaitość), $\mathbf{Q}(\mathrm{MO}1)$, $\mathbf{Q}(\mathrm{MO}2)$, …, $\mathbf{Q}(\mathrm{MO}n \times \mathrm{MO}k)$. W pracy [75] udowodniono, że krata wszystkich podquasirozmaitości rozmaitości $\mathrm{MO}\omega$ ma postać przedstawioną na diagramie 6.

Łatwo widać, że:

- $Ex = \{\{\wedge\}, \{\vee\}, \{'\}\}$,
- $P_1 = \{\{\wedge, \vee\}, \{'\}\}$,
- $P_2 = \{\{\wedge, '\}, \{\vee\}\}$,
- $P_3 = \{\{\vee, '\}, \{\wedge\}\}$,
- $N = \{\{\wedge, \vee, '\}\}$.

są wszystkimi partycjami zbioru $\{\wedge, \vee, '\}$.

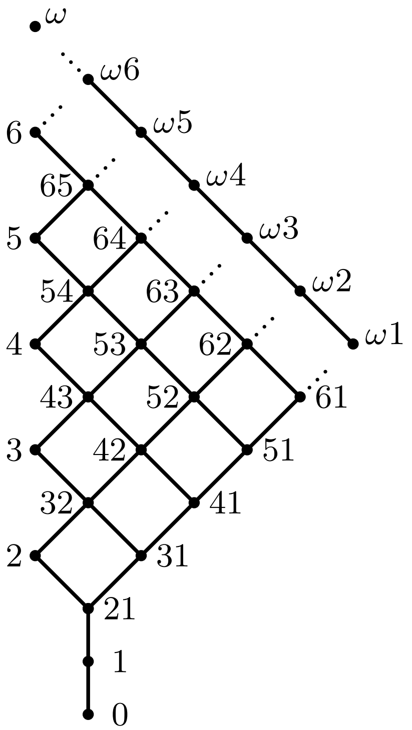


Diagram 6.

Niech T oznacza rozmaitość trywialną typu $\langle 2,2,1\rangle$. Najmniejszą nietrywialną podrozmaitością rozmaitości **MOL** jest klasa **B** wszystkich algebr Boole'a. Zbiór wszystkich zewnętrznie zgodnych identyczności spełnionych w klasie modularnych ortokrat jest zawarty w zbiorze wszystkich zewnętrznie zgodnych algebr Boole'a. Zatem, klasa wyznaczona przez wszystkie zewnętrznie zgodne identyczności algebr Boole'a $\mathbf{B}_{Ex}$ jest jedną z podrozmaitości rozmaitości $\mathbf{MOL}_{Ex}$.

Dla rozmaitości V typu τ przyjmijmy:

$$P^{(V)} = \{K \in \mathcal{L}(V_P) : Id(K) = P(K)\}.$$

Podobnie jak w pracy [32] wprowadzamy następujące oznaczenie:

$$P^{(\mathbf{MOL})} = \{K \in \mathcal{L}(\mathbf{MOL}_P)\colon Id(K) = P(\mathbf{MOL})\}.$$

Łatwo widać, że zbiór $P^{(\mathbf{MOL})}$ z relacją inkluzji jako porządkiem tworzy kratę. Jak już wspomnieliśmy wcześniej, istnieje pięć partycji zbioru $\{\vee, \wedge, '\}$. Ponieważ rozmaitość **MOL** jest F-normalna, zatem możemy skorzystać z twierdzenia 3.2.2. Ponadto, z twierdzeń 3.2.1 oraz z 3.6.2 mamy:

TWIERDZENIE 5.3.1. *Dla dowolnej partycji P zbioru $\{\wedge, \vee, '\}$ krata $P^{(\mathbf{MOL})}$ jest izomorficzna z $\mathcal{L}(\mathbf{MOL})$. Wzajemne położenie krat $P^{(\mathbf{MOL})}$ w kracie $\mathcal{L}(\mathbf{MOL}_{Ex})$ przedstawia poniższy diagram.*

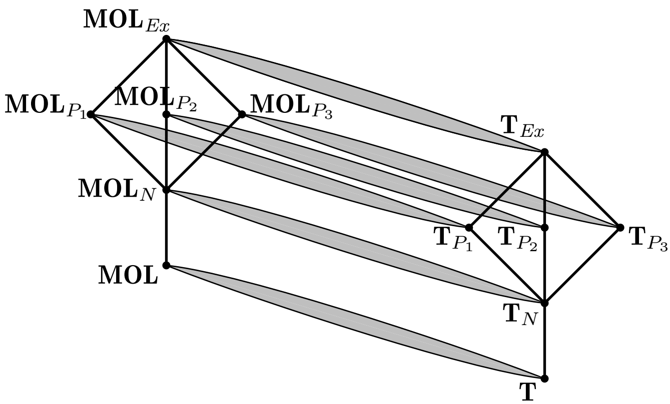


Diagram 7. Szary obszar łączący **MOL** i **T** oznacza kratę wszystkich podrozmaitości rozmaitości **MOL**. Podobnie, szare fragmenty między $\mathbf{MOL}_P$ a $\mathbf{T}_P$ oznaczają $P^{(\mathbf{MOL})}$, gdzie P jest jedną z partycji N, P_1, P_2, P_3, Ex. Zauważmy, że wszystkie owe szare fragmenty są wzajemnie izomorficzne.

Dla dowolnego $V \in \mathcal{L}(\mathbf{MOL})$ definiujemy $\{K \in \mathcal{L}(V_{Ex})\colon V \subseteq K \subseteq V_{Ex}\}$. Widać, że:

$\overline{V} = (\{K \in \mathcal{L}(V_{Ex})\colon V \subseteq K \subseteq V_{Ex}\}; \subseteq)$ jest kratą.

Mamy zatem główne twierdzenie tego rozdziału:

TWIERDZENIE 5.3.2 ([89]). *Dla dowolnej nietrywialnej rozmaitości $V \in \mathcal{L}(\mathbf{MOL})$ istnieje kratowe zanurzenie kraty $\overline{\mathbf{B}}$ w $\overline{V}$, gdzie $\mathbf{B}$ jest klasą algebr Boole'a.*

DOWÓD. Niech V będzie nietrywialną rozmaitością z klasy $\mathcal{L}(\mathbf{MOL})$. W pracy [48] pokazano, że dla dowolnego $K \in \overline{\mathbf{B}}$ istnieje skończony zbiór E_1 (utworzony spośród równości (17)–(27)), taki że $K = \mathbf{Mod}(\mathsf{Cn}(Ex(\mathbf{B}) \cup$

E_1)). Można zauważyć, że dla dowolnych zbiorów E_1 oraz E_2 utworzonych z równości (17)–(27), jeśli $\mathbf{Mod}(\mathsf{Cn}(Ex(\mathbf{B}) \cup E_1)) = \mathbf{Mod}(\mathsf{Cn}(Ex() \cup E_2))$, to $\mathbf{Mod}(\mathsf{Cn}(Ex(V) \cup E_1)) = \mathbf{Mod}(\mathsf{Cn}(Ex(V) \cup E_2))$. Definiujemy funkcję $\alpha : \overline{\mathbf{B}} \to \overline{V}$ przyjmując dla dowolnego $K \in \overline{\mathbf{B}}$:

$$\alpha(K) = \mathbf{Mod}(\mathsf{Cn}(Ex(V) \cup E_1)),$$

gdzie dla E_1 spełniony jest warunek

$$K = \mathbf{Mod}(\mathsf{Cn}(Ex(\mathbf{B}) \cup E_1)).$$

Widać, że funkcja α jest kratowym zanurzeniem. $\lhd$

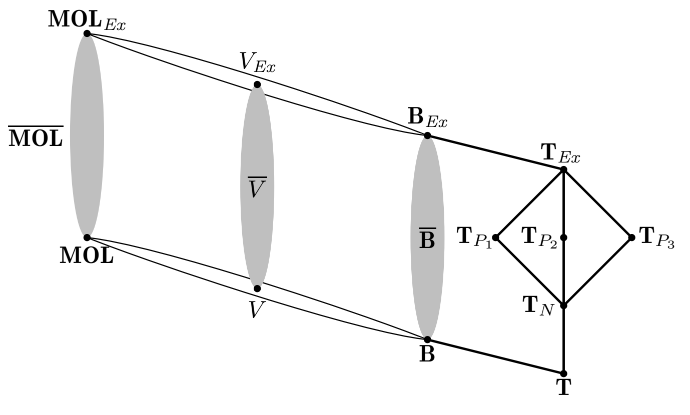


Diagram 8. Szare 'pole' łączące $\mathbf{B}$ i $\mathbf{B}_{Ex}$ oznacza — zgodnie z notacją zaproponowaną na s. 53 — strukturę $\langle\{K \in \mathcal{L}(\mathbf{B}_{Ex}) : \mathbf{B} \subseteq K \subseteq \mathbf{B}_{Ex}\}; \subseteq\rangle$. Szare fragmenty między V a V_{Ex}, jak również między $\mathbf{MOL}$ a $\mathbf{MOL}_{Ex}$ interpretowane są analogicznie.

Mamy zatem

TWIERDZENIE 5.3.3 ([89]). *Krata wszystkich nietrywialnych podrozmaitości rozmaitości $\mathbf{MOL}_{Ex}$, które są generowane przez sumę zbioru $Ex(\mathbf{MOL})$ oraz zbioru wszystkich identyczności jednej zmiennej typu $\langle 2, 2, 1\rangle$, jest izomorficzna z kratą $(\mathcal{L}(\mathbf{MOL})\backslash\mathbf{T}) \times \overline{\mathbf{B}}$.*

DOWÓD. W standardowy sposób dowodzi się, że algebra $\mathfrak{A} = (\{x, x', x \vee x, x \wedge x, x'', 1, 0, 1 \wedge 1, 0 \vee 0, 1', 0', x' \vee x', x' \wedge x'\}, \vee, \wedge, ')$ jest wolna $\mathbf{MOL}_{Ex}$ nad jednoelementowym zbiorem generatorów $\{x\}$. Stąd

$$Ex(\mathbf{MOL}) \subseteq Id(\mathfrak{A}).$$

Zatem każda podrozmaitość rozmaitości $\mathbf{MOL}_{Ex}$, która jest generowana przez równości jednej zmiennej, jest wyznaczona przez sumy zbiorów $Ex(\mathbf{MOL})$ oraz E_1, gdzie E_1 jest utworzony spośród równości (17)–(27). Zatem, na mocy twierdzenia 5.3.2 mamy poszukiwaną tezę. $\lhd$

Diagram 8 ilustruje rezultat otrzymany w twierdzeniach 5.3.2 i 5.3.3.

Rozdział 6

Zewnętrznie zgodne identyczności MV-algebr

6.1. Wprowadzenie

Jan Łukasiewicz wprowadził 3-wartościową logikę zdaniową (zob. [69]) z jedną wyróżnioną wartością, zaś J. Łukasiewicz i A. Tarski [71] uogólnili tę konstrukcję na n-wartościową logikę (gdzie n jest liczbą naturalną lub równa się $\aleph_0$) również z jedną wartością wyróżnioną.

Z kolei C. C. Chang podając algebraiczny dowód twierdzenia o pełności dla nieskończenie wartościowej logiki Łukasiewicza wprowadził MV-algebry. Algebry Boole'a stanowiące semantykę dla logiki klasycznej są w szczególności MV-algebrami. Nie jest oczywiście na odwrót tzn. nie każda MV-algebra jest algebrą Boole'a. Celem Changa było przeniesienie twierdzenia o ideale pierwszym dla algebr Boole'a na przypadek MV-algebr. Przypomnijmy, że twierdzenie to stanowi, że dla dowolnej algebry Boole'a $\mathfrak{A}$ i dowolnych, rozłącznych: ideału I i filtru F w $\mathfrak{A}$ istnieje ideał pierwszy zawierający I, rozłączny jednocześnie z F. Twierdzenie to formułowane w różnych wersjach (np. w wersji relatywnego lematu Lindenbauma, tzw. lematu Łosia-Assera) odgrywa kluczową rolę w dowodach twierdzeń o pełności. Chang pokazuje, że jeśli chodzi o symbole $+$, $\cdot$ oraz $^-$ różnica między MV-algebrami rozumianymi jako uporządkowane szóstki $\langle A, +, \cdot, ^-, 0, 1\rangle$ a algebrami Boole'a polega na braku obowiązywania prawa idempotentności dla operacji $+$, podczas gdy w odniesieniu do operacji $\wedge$, $\vee$ oraz $^-$, MV-alebry nie muszą spełniać prawa wyłączonego środka.

Aksjomatyzacja logiki 3-wartościowej podana została przez Wajsberga [117]. Aksjomatyzacja logiki m-wartosciowej, gdzie $m \neq \aleph_0$, z dowolną liczbą wartości wyróżnionych zaproponowana została przez J. B. Rossera i A. R. Turquette'a (zob. [109]). W [71] padła hipoteza, że $\aleph_0$-wartościowy rachunek jest aksjomatyzowalny przez aksjomatyczny system z regułami modus ponens i podstawiania jako jedynymi regułami inferencji, gdzie aksjomatami są:

1. $p \to (q \to p)$
2. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$
3. $((p \to q) \to q) \to ((q \to p) \to p)$
4. $((p \to q) \to (q \to p)) \to (q \to p)$
5. $(\sim p \to \sim q) \to (q \to p)$.

A. Tarski (zob. [115, s. 51]) w przypisie wskazuje na M. Wajserbga ([118]) jako autora, który potwierdził powyższą hipotezę. A. Rose i J. B. Rosser udowodnili ją w pracy [108]. Algebraiczny dowód został podany przez C. C. Changa (zob. [18, 19]). W pracy [62] podano opis implikacyjnych nadlogik implikacyjnego fragmentu nieskończenie wielowartościowej logiki Łukasiewicza, zaś w [63] opisano nadlogiki nieskończenie wielowartościowej logiki Łukasiewicza.

W poniższej definicji podane aksjomaty traktowane są jako własności poszczególnych operacji na zbiorze A:

Definicja 6.1.1. MV-algebrą nazywamy system $\langle A, +, \cdot, ^{-}, 0, 1\rangle$, gdzie A jest niepustym zbiorem, 0 i 1 są wyróżnionymi elementami zbioru A, $+$ i $\cdot$ są dwuargumentowymi działaniami na zbiorze A oraz $^{-}$ jest operacją unarną na zbiorze A, przy czym spełnione są następujące aksjomaty:

Ax.1	$x + y \approx y + x$	Ax.1'.	$x \cdot y \approx y \cdot x$
Ax.2	$x + (y + z) \approx (x + y) + z$	Ax.2'	$x \cdot (y \cdot z) \approx (x \cdot y) \cdot z$
Ax.3	$x + \overline{x} \approx 1$	Ax.3'	$x \cdot \overline{x} \approx 0$
Ax.4	$x + 1 \approx 1$	Ax.4'	$x \cdot 0 \approx 0$
Ax.5	$x + 0 \approx x$	Ax.5'	$x \cdot 1 \approx x$
Ax.6	$\overline{(x + y)} \approx \overline{x} \cdot \overline{y}$	Ax.6'	$\overline{(x \cdot y)} \approx \overline{x} + \overline{y}$
Ax.7	$x \approx \overline{(\overline{x})}$	Ax.8.	$\overline{0} \approx 1$
Ax.9	$x \vee y \approx y \vee x$	Ax.9'	$x \wedge y \approx y \wedge x$
Ax.10	$x \vee (y \vee z) \approx (x \vee y) \vee z$	Ax.10'	$x \wedge (y \wedge z) \approx (x \wedge y) \wedge z$
Ax.11	$x + (y \wedge z) \approx (x + y) \wedge (x + y)$	Ax.11'	$x \cdot (y \vee z) \approx (x \cdot y) \vee (x \cdot y)$,

gdzie operacje $\vee$ oraz $\wedge$ określone są dla dowolnych $x, y \in A$ następująco:

$$x \vee y \approx (x \cdot \overline{y}) + y$$
$$x \wedge y \approx (x + \overline{y}) \cdot y$$

Przyjmujemy ponadto

Definicja 6.1.2. Niech **MV** oznacza klasę wszystkich MV-algebr, zaś $Id(\mathbf{MV})$ — zbiór wszystkich równości prawdziwych w **MV**.

Już C. C. Chang pisał, że powyższa aksjomatyzacja nie jest najbardziej ‘ekonomiczną’. Podkreślał jednak, że jest ona bardzo intuicyjna i dlatego też ją przytaczamy. Jest jasne, że elementy O i 1, jak również operacje $+, \cdot$ oraz $\vee$ i $\wedge$ są wzajemnie dualne. Ponadto, przyjmuje sie podobnie jak w arytmetyce, że operacja $\cdot$ wiąże silniej niż $+$.

Właśnie z powodu ‘nieekonomiczności’ powyższej bazy badane są inne aksjomatyzacje. W pracy [28] przez MV-algebrę rozumie się dowolną algebrę $\mathfrak{A} = \langle A, 0, 1,^*, \odot, \oplus\rangle$ spełniającą warunki:

Ax.12 $x \odot (y \odot z) \approx (x \odot y) \odot z$

Ax.13 $x \odot y \approx y \odot x$

Ax.14 $x \odot 0 \approx 0$

Ax.15 $x \odot 1 \approx x$

Ax.16 $0^* \approx 1$

Ax.17 $1^* \approx 0$

Ax.18 $(x^* \odot y)^* \odot \approx (y^* \odot x)^* \odot x$

Ax.19 $x \oplus y \approx (x^* \odot y^*)^*$.

Wiadomo, że zbiór $Id(\mathbf{MV})$ wyznacza rozmaitość (czyli niepustą klasę algebr domkniętą na branie podalgebr, homomorficznych obrazów i produktów) i jest nią **MV**.

Rozważając MV-algebry jako struktury typu $\langle 2, 2, 1, 0, 0\rangle$ z operacjami $+, \cdot, \overline{}, 0, 1$ możemy przeformułować definicję równości zewnętrznie zgodnej i przyjąć, że

Definicja 6.1.3. Równość jest *zewnętrznie zgodna* wtw ma jedną z następujących postaci:

$$\varphi_1 \approx \varphi_1 \tag{6.1.1}$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 \approx \psi_1 + \psi_2 \tag{6.1.2}$$

$$\varphi_1 \cdot \varphi_2 \approx \psi_1 \cdot \psi_2 \tag{6.1.3}$$

$$\overline{\varphi_1} \approx \overline{\psi_1}, \tag{6.1.4}$$

gdzie $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ są termami w typie $\langle 2, 2, 1, 0, 0\rangle$.

Zauważmy, że pewne równości prawdziwe w klasie MV-algebr są zewnętrznie zgodne, inne nie. Np. prawo przemienności $x + y \approx y + x$ jest równością zewnętrznie zgodną, natomiast prawo de Morgana $\overline{(x \cdot y)} \approx \overline{x} + \overline{y}$ nie jest.

6.2. Syntaksa i semantyka

Szukając bazy równościowej dla klasy MV_{Ex}, wygodnie będzie rozważać tę klasę w typie $\langle 2, 2, 1\rangle$. Dlatego tez przyjmiemy, że stała 0 może być wydefiniowana np. jako $x \cdot \overline{x}$. Również 1 może być zdefiniowana, np. jako $x + \overline{x}$.

Prawdziwe jest następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 6.2.1. *Następujące równości:*

$$
\begin{array}{llll}
\text{Ax.1.} & x + y \approx y + x & \text{Ax.1}'. & x \cdot y \approx y \cdot x \\
\text{Ax.2.} & x + (y + z) \approx (x + y) + z & \text{Ax.2}'. & x \cdot (y \cdot z) \approx (x \cdot y) \cdot z \\
\text{Ax.3.} & x + \overline{x} \approx y + \overline{y} & \text{Ax.3}'. & x \cdot \overline{x} \approx y \cdot \overline{y} \\
\text{Ax.4.} & x + 1 \approx 1 & \text{Ax.4}'. & x \cdot 0 \approx 0 \\
\text{Ax.5.} & x + y + 0 \approx x + y & \text{Ax.5}'. & x \cdot y \cdot 1 \approx x \cdot y \\
 & (x + 0) \cdot y \approx x \cdot y & & (x \cdot 1) + y \approx x + y \\
 & \overline{x + 0} \approx \overline{x} & & \overline{x \cdot 1} \approx \overline{x} \\
\text{Ax.6.} & \overline{x + y} + z \approx \overline{x} \cdot \overline{y} + z & \text{Ax.6}'. & \overline{x \cdot y} + z \approx (\overline{x} + \overline{y}) + z \\
 & (\overline{x + y}) \cdot z \approx (\overline{x} \cdot \overline{y}) \cdot z & & (\overline{x \cdot y}) \cdot z \approx (\overline{x} + \overline{y}) \cdot z \\
 & \overline{\overline{x + y}} \cdot 0 \approx \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}} & & \overline{\overline{x \cdot y}} \approx \overline{\overline{x} + \overline{y}} \\
\text{Ax.7.} & \overline{\overline{\overline{x}}} \approx \overline{x} & \text{Ax.8.} & \overline{0} + x \approx 1 + x \\
 & \overline{\overline{x}} + y \approx x + y & & \overline{0} \cdot x \approx 1 \cdot x \\
 & \overline{\overline{x}} \cdot y \approx x \cdot y & & \overline{\overline{0}} \approx \overline{1} \\
\text{Ax.9.} & x \vee y \approx y \vee x & \text{Ax.9}'. & x \wedge y \approx y \wedge x \\
\text{Ax.10.} & x \vee (y \vee z) \approx (x \vee y) \vee z & \text{Ax.10}'. & x \wedge (y \wedge z) \approx (x \wedge y) \wedge z
\end{array}
$$

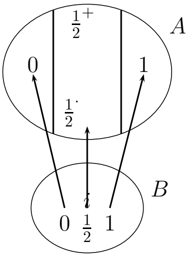
$$
\begin{array}{ll}
\text{Ax.11.} & (x + (y \wedge z)) + t \approx ((x + y) \wedge (x + y)) + t \\
 & (x + (y \wedge z)) \cdot t \approx ((x + y) \wedge (x + y)) \cdot t \\
 & \overline{x + (y \wedge z)} \approx \overline{(x + y) \wedge (x + y)} \\
\text{Ax.11'.} & (x \cdot (y \vee z)) + t \approx (x \cdot y) \vee (x \cdot z) + t \\
 & (x \cdot (y \vee z)) \cdot t \approx (x \cdot y) \vee (x \cdot z) \cdot t \\
 & \overline{x \cdot (y \vee z)} \approx \overline{(x \cdot y) \vee (x \cdot z)}
\end{array}
$$

stanowią bazę równościową klasy $\mathbf{MV}_{Ex}$.

SZKIC DOWODU. Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 5.2.1 zauważmy, że klasa $\mathbf{MV}_{Ex}$ spełnia założenia twierdzenia 3.5.1. Oznaczmy przez B_1 zbiór równości, którego elementami są wszystkie spośród równości Ax.1–Ax.11 oraz Ax.1'–Ax.11'. Niech zaś B_2 oznacza zbiór równości otrzymany z twierdzenia 3.5.1 dla klasy $\mathbf{MV}_{Ex}$. Szczegóły dowodu pomijamy, gdyż sprowadza się on do pokazania, że $\mathsf{Cn}(B_1) = \mathsf{Cn}(B_2)$ i jest analogiczny do dowodu lematu 5.2.1. $\lhd$

Rozważmy następujący przykład.

Przykład 6.2.1. Niech algebra $\mathcal{A} = \langle\{0, \frac{1}{2}^+, \frac{1}{2}^\cdot, 1\}; +, \cdot, ^-\rangle$ jest następującą dyspersją algebry $\mathcal{B} = (\{0, \frac{1}{2}, 1\}; +, \cdot, ^-)$:



$c_+(k) = c_\cdot(k) = c_-(k) = k$, dla $k \in \{0, 1\}$,
$c_+(\frac{1}{2}) = c_-(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}^+$,
$c_\cdot(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}^\cdot$.

Widać, że $\overline{\overline{\frac{1}{2}^\cdot}} = \frac{1}{2}^+$. Zatem równość $\overline{\overline{x}} \approx x$ nie jest spełniona w algebrze $\mathcal{A}$. Można pokazać, że algebra ta spełnia natomiast wszystkie równości zewnętrznie zgodne prawdziwe w klasie $\mathbf{MV}_{Ex}$. Klasa ta bowiem spełnia założenia twierdzenia 3.5.2. Zatem mamy następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 6.2.2. *Klasa* $\mathbf{MV}_{Ex}$ *jest równa klasie dyspersji wszystkich* MV-*algebr.*

Mamy tez oczywiście twierdzenie ogólniejsze, mianowicie:

TWIERDZENIE 6.2.3. *Dla dowolnej partycji P klasa* $\mathbf{MV}_P$ *jest równa klasie dyspersji wszystkich P-dyspersji algebr z klasy* $\mathbf{MV}$.

6.3. Podprosto-nierozkładalne algebry z rozmaitości MV_n-algebr

W tej sekcji opiszemy wszystkie podprosto-nierozkładalne algebry z klasy MV_n-algebr.

6.3.1. $\mathbf{MV}_n$ — rozmaitość MV_n-algebr

R. Grigolia w pracy [45] wyróżnił algebry będące semantycznymi odpowiednikami logik n-wartościowych dla $2 < n < \aleph_0$. $\mathbf{MV}_n$ — klasa MV_n-algebr jest podklasą klasy wszystkich MV-algebr. Klasa ta wyznaczona jest przez zbiór wszystkich równości prawdziwych w klasie MV-algebr poszerzony o następujące identyczności:

Ax.12. $(n-1)x + x \approx (n-1)x$

Ax.12'. $x^{n-1} \cdot x \approx x^{n-1}$

A dla $n > 3$, dodatkowo przyjmowane są aksjomaty

Ax.13. $((jx)\cdot(\bar{x}+((j-1)\cdot x)^{-}))^{(n-1)} \approx 0$

Ax.13'. $(n-1)\big(x^j + (\bar{x}\cdot(x^{j-1})^{-})\big) \approx 1,$

gdzie $1 < j < n-1$ oraz j nie dzieli $n-1$.

Otrzymujemy $\mathbf{MV}_n$ — klasę MV_n-algebr. Tak więc każda algebra Boole'a jest MV_n-algebrą dla $2 < n < \aleph_0$ oraz każda MV_n-algebra dla $2 < n < \aleph_0$ jest MV-algebrą.

Niech $\mathcal{L}_n = \langle L_n, +, \cdot, -, 1, 0\rangle$, gdzie $L_n = \{0, \frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}$ oraz dla dowolnych $x, y \in L_n$:

- $x + y = \min(1, x+y)$,
- $x \cdot y = \max(0, x+y-1)$,
- $\bar{x} = 1 - x$.

Przywołajmy:

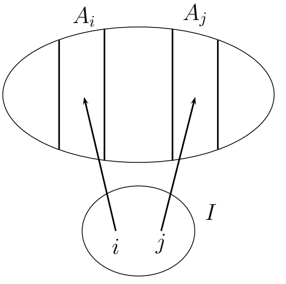
TWIERDZENIE 6.3.1 ([45]). *Każda MV_n-algebra $\mathcal{A}$ jest izomorficzna z podprostym produktem algebr $\mathcal{L}_m$, gdzie $m \leqslant n$ oraz $m-1$ dzieli $n-1$.*

Niech algebra $\mathcal{A}$ należy do klasy $\mathbf{MV}_{nEx}$. Wiadomo, że $\mathcal{A}$ jest dyspersją pewnej algebry $\mathcal{I}$ z rozmaitości $\mathbf{MV}_n$.

Mogą zdarzyć następujące przypadki (porównaj [106]):

1. Jeśli $|A_i| = 1$ dla każdego $i \in I$, to $\mathcal{A}$ należy do rozmaitości $\mathbf{MV}_n$, gdyż każda funkcja c_f wyznacza izomorfizm algebr $\mathcal{I}$ i $\mathcal{A}$. Zatem $\mathcal{A}$ jest podprosto-nierozkładalna wtw gdy spełnia warunki twierdzenia 6.3.1 dotyczącego podprosto-nierozkładalnych MV_n-algebr.

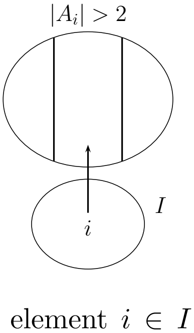
2. Jeśli $|I| = 1$ (czyli jest algebrą trywialną), to $\mathcal{A}$ należy do klasy wyznaczonej przez zewnętrznie zgodne identyczności typu ⟨2, 2, 1, 0, 0⟩. Łatwo udowodnić, że w tym przypadku algebra $\mathcal{A}$ jest podprosto-nierozkładalna wtw jest algebrą 2-elementową zdefiniowaną przez wszystkie zewnętrznie zgodne identyczności typu $\langle 2, 2, 1, 0, 0\rangle$.



3. Niech $|I| > 1$ oraz istnieje $i \in I$, takie że $|A_i| > 1$ (patrz rysunek powyżej). Dla każdego takiego i definiujemy relację R_i w $\mathcal{A}$ przyjmując dla $a, b \in A$:

$$aR_ib \text{ wtw } a = b \text{ lub } a, b \in A_i.$$

Relacja R_i jest kongruencją różną od Δ. Jeśli teraz dane są różne $i, j \in I$, takie że $|A_i| \neq 1 \neq |A_j|$, to $\mathcal{A}$ jest podprosto-rozkładalna gdyż $R_i \cap R_j = \Delta$.



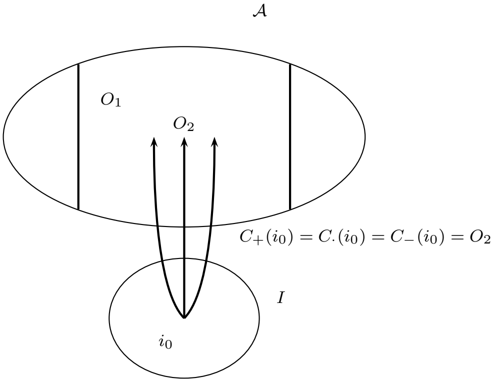
4. Istnieje dokładnie jeden element $i \in I$, dla którego moc zbioru A_i jest różna od 1 i niech ta moc jest większa od 2 (patrz powyższy diagram). Wtedy dla każdego $a \in A_{i_0}$ możemy określić kongruencję $R(a)$ przyjmując dla dowolnych x, y:

$$xR(a)y \text{ wtw } x = y \text{ lub } x, y \in A \setminus \{a\}.$$

Każda spośród relacji $R(a)$ jest kongruencją różną od Δ oraz

$$\bigcap_{a \in A_{i_0}} R(a) = \Delta.$$

Zatem $\mathcal{A}$ jest podprosto-rozkładalna.



5. Istnieje dokładnie jeden element $i \in I$, dla którego $A_i = \{0_1, 0_2\}$, gdzie 0_1 jest różne od 0_2 i funkcje c_f są określone następująco (patrz powyższy rysunek):

$$C_+(i_0) = C_\cdot(i_0) = C_-(i_0) = O_2.$$

W tym przypadku rozważamy kongruencję R'' określona następująco:

$$aR''b \text{ wtw } a = b \text{ lub } a, b \in A \setminus \{O_1\}.$$

Możemy łatwo sprawdzić, że

$$R_{i_0} \cap R'' = \Delta.$$

Zatem $\mathcal{A}$ jest podprosto-rozkładalna.

Łatwo widać, że jedynie następujące dyspersje mogłyby być algebrami podprosto-nierozkładalnymi: istnieje dokładnie jeden element $i_0 \in I$, taki że $|A_{i_0}| = 2$, powiedzmy $A_{i_0} = \{O_1, O_2\}$ oraz istnieje partycja $\{F_1, F_2\}$ zbioru $\{+, \cdot, -\}$ z blokami $F_1, F_2 \neq \emptyset$, takimi że $c_f(i_0) = O_k$ dla $f \in F_k$ (k=1,2).

Okazuje się, że powyższe dyspersje są podprosto-nierozkładalne.

Mamy zatem następujące, główne twierdzenie w tej części:

TWIERDZENIE 6.3.2. *Niech $\mathcal{A}$ będzie algebrą z klasy $\mathbf{MV}_{n_{Ex}}$. Algebra $\mathcal{A}$ jest podprosto-nierozkładalna wtw co najmniej jeden z poniższych trzech warunków zachodzi:*

1. *$\mathcal{A}$ należy do rozmaitości MV_n-algebr i jest podprosto nierozkładalna,*
2. *$\mathcal{A}$ jest 2-elementową algebrą z klasy zdefiniowanej przez wszystkie zewnętrznie zgodne identyczności w typie $\langle 2, 2, 1, 0, 0 \rangle$,*
3. *$\mathcal{A}$ jest dyspersją algebry $\mathcal{I}$ z klasy MV_n-algebr oraz istnieje dokładnie jeden element $i_0 \in I$, taki że $|A_{i_0}| = 2$, powiedzmy $A_{i_0} = \{O_1, O_2\}$ i istnieje partycja $\{F_1, F_2\}$ zbioru $\{+, \cdot, -\}$, gdzie F_1, $F_2 \neq \emptyset$, przy czym $c_f(i_0) = O_k$ dla $f \in F_k$ (k=1,2).*

6.4. Krata rozmaitości

Widać, że $Ex(\mathbf{MV})$ jest właściwym podzbiorem zbioru $Id(\mathbf{MV})$. Wnioskujemy stąd, że rozmaitość MV-algebr jest właściwą podrozmaitością rozmaitością $\mathbf{MV}_{Ex}$. Oczywiście każda podrozmaitość klasy $\mathbf{MV}$ jest również właściwą podrozmaitością rozmaitością $\mathbf{MV}_{Ex}$.

Zacznijmy od analizy rozmaitości MV-algebr.

Dla rozmaitości V typu τ przyjmijmy:

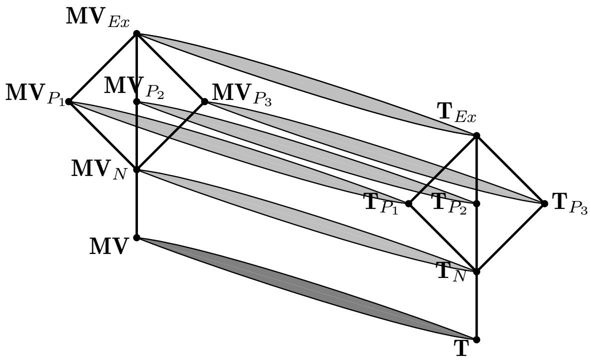
$$P^{(V)} = \{K \in \mathcal{L}(V_P) : Id(K) = P(K)\}.$$

Analogicznie jak w rozdziale wcześniejszym (patrz [32]) wprowadzamy następującą notację:

$$P^{(\mathbf{MV})} = \{K \in \mathcal{L}(\mathbf{MOL}_P)\colon Id(K) = P(\mathbf{MV})\}.$$

Oczywiście zbiór $P^{(\mathbf{MV})}$ z relacją inkluzji jest kratą. W odniesieniu do klasy $\mathbf{MV}$ można powiedzieć, że podobnie jak klasa modularnych ortokrat jest F-normalna oraz rozpatrując ją w typie $\langle 2, 2, 1 \rangle$ istnieje pięć partycji zbioru symboli działań podstawowych. Korzystać z twierdzeń 6.2.3, 3.2.1 oraz z 3.6.2 otrzymujemy twierdzenie analogiczne do twierdzenia 5.3.1. Mamy więc:

TWIERDZENIE 6.4.1. *Dla dowolnej partycji P zbioru $\{+, \cdot, ^-\}$ krata $P^{(\mathbf{MV})}$ jest izomorficzna z $\mathcal{L}(\mathbf{MV})$. Wzajemne położenie krat $P^{(\mathbf{MV})}$ w kracie $\mathcal{L}(\mathbf{MV}_{Ex})$ przedstawia poniższy diagram.*



Podrozmaitości MV-algebr były badane przez R. Grigolię, Y. Komori'ego, A. Di Nola'ę, i A. Lettieri. A. Lettieri i A. Di Nola ([28]) podali równościową bazę dla wszystkich **MV**-rozmaitości, podczas gdy Komori wyznaczył kratę podrozmaitości rozmaitości MV-algebr (patrz [63]).

Postępując za [28] dla dowolnej liczby naturalnej i większej od 1 określamy zbiór:

$$\delta(i) = \{n \in \mathbf{Z} : 1 \leqslant n \text{ i } n \text{ dzieli } i\}.$$

Z kolei, dla niepustego skończonego podzbioru zbioru liczb naturalnych większych od 1, niech

$$\Delta(i, J) = \{d \in \delta(i) \setminus \bigcup_{j \in J} \delta(j)\}$$

W przypadku, gdy $J = \varnothing$, kładziemy:

$$\Delta(i, J) = \delta(i).$$

Mamy:

Twierdzenie 6.4.2 ([28]). *Niech V będzie właściwą podrozmaitością rozmaitości* **MV**. *Wtedy istnieją skończone zbiory I oraz J liczb naturalnych większych od* 1, *takie że $I \cap J \neq \varnothing$ oraz dla dowolnej* MV-*algebry $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ należy do V wtw $\mathfrak{A}$ spełnia następujące równości:*

$$((n+1)x^n)^2 \approx 2x^{n+1}, \text{ gdzie } n = \max\{I \cup J\}; \tag{6.4.5}$$

$$(px^{p-1})^{n-1} \approx (n+1)x^p \tag{6.4.6}$$

dla dowolnej liczby naturalnej $1 < p < n$, takiej że p nie dzieli żadnej liczby ze zbioru $I \cup J$;

$$(n+1)x^q \approx (n+2)x^q, \text{ dla dowolnego } q \in \bigcup_{j \in J} \Delta(i, J). \tag{6.4.7}$$

Przypomnijmy, że najmniejszą właściwą podrozmaitość rozmaitości MV-algebr stanowi klasa algebr Boole'a. Klasa ta jest scharakteryzowana przez pojedynczą równość $x + x \approx x$ (to znaczy, w tym kontekście, aby wyznaczyć klasę algebr Boole'a wystarczy rozważyć równość $x + x \approx x$ oraz wszystkie równości spełnione w klasie **MV** i otrzymamy zbiór domknąć na operator Cn).

Podobnie jak w rozdziale wcześniejszym z każdą klasą V z kraty $\mathcal{L}(\mathbf{MV})$ zwiążmy zbiór $\{K \in \mathcal{L}(V_{Ex})\colon V \subseteq K \subseteq V_{Ex}\}$. Oczywiście jest on kratą, którą — jak poprzednio — oznaczymy przez $\overline{V}$.

Prawdziwe są następujące dwa twierdzenia, których dowody pominiemy, ze względu na to, są analogiczne do dowodów twierdzeń 5.3.2 oraz 5.3.3.

Twierdzenie 6.4.3. *Dla każdej nietrywialnej rozmaitości* $V \in L(\mathbf{MV})$ *istnieje kratowe włożenie kraty* $\overline{\mathbf{B}}$ *w* $\overline{V}$, *gdzie* $\mathbf{B}$ *jest klasą algebr Boole'a.*

Twierdzenie to zilustrowano na diagramie 6.4. Chociaż nie jest znany

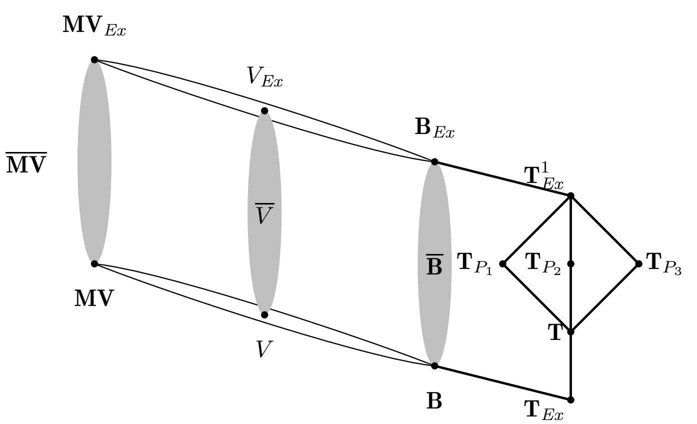


Diagram 9. Krata podrozmaitości rozmaitości $\mathbf{MV}_{Ex}$.

opis całej kraty $\mathcal{L}(\mathbf{MV}_{Ex})$, to wiemy jak 'wygląda' podkrata tej kraty, która jest generowana tylko przez równości jednej zmiennej.

Ściśle mówiąc, zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 6.4.4. *Krata wszystkich podrozmaitości rozmaitości* $\mathbf{MV}_{Ex}$, *które są generowane przez równości jednej zmiennej jest izomorficzna z kratą* $\overline{T} \cup ((L(\mathbf{MV})\backslash T) \times \overline{\mathbf{B}})$.

Po przeanalizowaniu struktury algebr podprosto-nierozkładalnych w klasie wyznaczonej przez zewnętrznie zgodne identyczności MV_n-algebr widzimy, że istnieje całkiem sporo — jeśli wolno tak rzec — różnych typów algebr. Można to wiązać z faktem, że krata $\mathcal{L}(\mathbf{MV}_{Ex})$ jest również stosunkowo duża i — jak można zauważyć — dość skomplikowana. Analiza ‘horyzontalna’ — wyróżniająca rozmaitości opisane przez Y. Komoriego, A. Di Nolę i A. Lettieriego oraz analiza ‘pozioma’ — wskazująca na korelację z klasą algebr Boole’a, mogą być traktowane jako częściowe rozwiązanie naszkicowanego na początku sekcji problemu. Wydaje się jednak, że wielce prawdopodobna jest następująca:

HIPOTEZA. *W kracie $\mathcal{L}(\mathbf{MV}_{Ex})$ nie ma innych elementów niż te, których istnienie wynika z powyższego twierdzenia.*

Rozdział 7

Zdaniowe systemy zewnętrznie zgodne logiki klasycznej

7.1. Relacja powiązania Epsteina

Rozważania przedstawione w tej części stanowią kontynuację dotychczas zaprezentowanych badań, tym razem jednak zastosowanych do dziedziny logiki zdaniowej. Jeśli chodzi o genezę prezentowanych idei, można nawiązywać zarówno, do poszukiwań relewantystów, którzy zmierzają do idealnej formalizacji związku wynikania, w którym to w przesłankach nie powinno być nic ponad to, co konieczne do wyprowadzenia danego wniosku jak i badań w zakresie formalizowania wynikania zachowującego informację (zob. [95]). Ponadto, można nawiązywać też do pomysłu Epsteina ([30, r. III]) dotyczącego relacji powiązania (relatedness) oznaczanej symbolem 'R'. Przypomnijmy warunki nakładane na relację R.

R1 $\mathsf{R}(A, B)$ wtw $\mathsf{R}(\sim A, B)$,

R2 $\mathsf{R}(A, B \wedge C)$ wtw $\mathsf{R}(A, B \to C)$

R3 $\mathsf{R}(A, B)$ wtw $\mathsf{R}(B, A)$

R4 $\mathsf{R}(A, A)$

R5 $\mathsf{R}(A, B \wedge C)$ wtw $\mathsf{R}(A, B)$ lub $\mathsf{R}(A, C)$

Jak wniosek otrzymuje się, że:

$$\mathsf{R}(A, B \to C) \text{ wtw } \mathsf{R}(A, B) \text{ lub } \mathsf{R}(A, C)$$

Warunki R1 i R2 wyrażają fakt, że zarówno wyrażenie i jego negacja oraz koniunkcja dwóch wyrażeń i ich implikacja są powiązane z tymi samymi wyrażeniami. Relacja R jest zdefiniowana aksjomatycznie i każda relacja w zbiorze formuł, która spełnia powyższe warunki otrzymuje nazwę relacji powiązania.

Epstein formułuje między innymi następujący lemat:

Lemat 7.1.1 ([30, s. 67]). *Dla dowolnych zdań A, B, $R(A, B)$ wtw istnieje zdanie atomowe C, które występuje w A oraz istnieje zdanie atomowe D, które występuje w B, takie że $R(C, D)$.*

Powyższy lemat eksplikuje naturę relacji powiązania zachodzącej między dwoma formułami, sprowadzając ją do poziomu składowych atomowych. Podobnie jak to ma ogólnie miejsce w logice, o pozostawaniu w relacji o charakterze logicznym decyduje struktura, albo przynajmniej niektóre jej składowe.

W naszym przypadku — przy sformułowaniu bazowego systemu — kluczową cechą będzie posiadanie tego samego funktora głównego. Pozostaje do rozstrzygnięcia, czy owo obostrzenie powinno być nakładane na wszystkie spójniki, czy może przynajmniej w pewnych kontekstach powinna być wyjęta spod owego ograniczenia implikacja. Problem polega na tym, że — jak ma to często miejsce w przypadku wielu rachunków logicznych — implikacja odgrywa podwójną rolę: z jednej strony jest spójnikiem zdaniowym, z drugiej zaś — ze względu na naszą inklinację do traktowania jej jako odpowiednika wnioskowań — oddawać może zachodzenie wynikania. Tu niestety pojawia się trudność polegająca na tym, że nie zawsze wynikanie — przez jakąś wersją twierdzenia o dedukcji — przekłada się na prawdziwość zdania implikacyjnego. Co więcej, może się zdarzyć, że pojęcie, które staramy się eksplikować, nie jest nawet domknięte na regułę odrywania. Jak zobaczymy, obie te trudności pojawią w przypadku pojęcia zewnętrznej zgodności.

7.2. System dla równości zewnętrznie zgodnych algebr Boole'a

Przejdziemy teraz do przedstawienia zagadnienia systemów zewnętrznie zgodnych.

Przypomnijmy, że semantyka algebraiczna stanowi jedno z ważnych narzędzi służących do adekwatnego opisu logik zdaniowych. Mając na uwadze rozmaitości algebr P-zgodnych powstaje pytanie o postać oraz opis odpowiadających im logik zdaniowach. Przykładowo, klasa algebr Boole'a odpowiada — jak wiadomo — za semantyczny opis zdaniowej logiki klasycznej. Już wspominaliśmy, że rozpatrując tylko niektóre spośród równości charakteryzujących algebry Boole'a otrzymujemy nadklasę klasy wszystkich algebr Boole'a. Odpowiada im pewna logika. Powstaje naturalne pytanie — jaka?

Bazę równościową rozmaitości wyznaczonej przez identyczności zewnętrznie zgodne algebr Boole'a przedstawiono na s. 40

Oczywiście można rozpatrywać wszystkie tautologie struktur spełniających te równości, gdzie zbiorem wartości wyróżnionych są 1-ki odpowiadające najbardziej zewnętrznym operacjom danego termu. Niestety łatwo widać, że zbiór formuł stanowiący zawartość tak otrzymanej matrycy nie jest zbyt interesujący.

7.2.1. Semantyka matrycowa

Dla kompletności rozważań przypomnimy standardowy sposób generowania logiki przez interpretację formuł zdaniowych w algebrze (zob. [122]).

Definicja 7.2.1. Niech dana będzie algebra $\mathfrak{A} = \langle A, f_1, \ldots, f_n \rangle$ oraz zbiór $D \subseteq A$.

1. Wartościowaniem (interpretacją) w algebrze $\mathfrak{A}$ nazywamy dowolną funkcję przekształcającą For w A, przy czym dla dowolnych formuł B, C i $\S \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$:

   $$v(B \S C) = f_{\S}(v(B), v(C)),$$

   gdzie $f_{\S}$ jest interpretacją funktora $\S$ oraz

   $$v(\sim B) = f_{\sim}(v(B)),$$

   gdzie $f_{\sim}$ jest interpretacją funktora $\sim$.
2. *Matrycą* nazywamy dowolną parę uporządkowaną $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{A}, D_{\mathfrak{M}} \rangle$, gdzie $\mathfrak{A} = \langle A, f_1, \ldots f_n \rangle$ jest algebrą, zaś $D_{\mathfrak{M}} \subseteq A$ jest *zbiorem wartości wyróżnionych*.
3. Mówimy, że formuła A jest *spełniona w matrycy* $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{A}, D_{\mathfrak{M}} \rangle$, przy wartościowaniu v (ozn. $\mathfrak{M} \models_v A$) wtw

   $$v(A) \in D.$$

4. Formuła A jest *tautologią matrycy* $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{A}, D_{\mathfrak{M}} \rangle$ (ozn. $\mathfrak{M} \models A$) wtw dla każdej interpretacji v w matrycy $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \models_v A$.
5. Zbiór wszystkich tautologii matrycy nazywamy *zawartością matrycy.*

Dla zinterpretowania formuły w algebrze musimy dokonać wyboru odpowiednich funkcji określonych w zbiorze będącym uniwersum danej algebry. Poniżej rozważymy jedną z algebr podprosto-nierozkładalnych w rozmaitości zewnętrznie zgodnych algebr Boole'a.

Niech dana będzie algebra $\mathfrak{C} = \langle\{1^+, 1^{\cdot\prime}, 0\}, +_{\mathfrak{C}}, \cdot_{\mathfrak{C}}, {}'_{\mathfrak{C}}\rangle$ w typie $\langle 2,\ 2,\ 1\rangle$, gdzie

$$x +_{\mathfrak{C}} y = \begin{cases} 0 & \text{o ile } x = 0 = y \\ 1^+ & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$x \cdot_{\mathfrak{C}} y = \begin{cases} 1^{\cdot\prime} & \text{o ile } x, y \in \{1^+, 1^{\cdot\prime}\} \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$x'_{\mathfrak{C}} = \begin{cases} 1^{\cdot\prime} & \text{o ile } x = 0 \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Oczywiście będziemy przyjmować, że interpretacjami dla spójników $\wedge$, $\vee$ oraz $\sim$ będą odpowiednio $+_{\mathfrak{C}}$, $\cdot_{\mathfrak{C}}$, ${}'_{\mathfrak{C}}$. Jak to ma zwykle miejsce największą trudność przysparzać będzie implikacja. Rozważymy jako możliwą interpretację dla spójnika $\rightarrow$, funkcję $f_{\rightarrow\mathfrak{C}}$ określoną dla dowolnych x, y jako:

$$f_{\rightarrow\mathfrak{C}}(x, y) = x'_{\mathfrak{C}} +_{\mathfrak{C}} y$$

Rozważmy więc matrycę:

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{C}} = \langle\langle\{1^+, 1^{\cdot\prime}, 0\}, +_{\mathfrak{C}}, \cdot_{\mathfrak{C}}, {}'_{\mathfrak{C}}, f_{\rightarrow\mathfrak{C}}\rangle, \{1^+, 1^{\cdot\prime}\}\rangle.$$

Łatwo zauważyć, że zawartością powyższej matrycy jest logika klasyczna. Dla dowodu stosownego twierdzenia wprowadzimy funkcję translacji h przyjmując:

Definicja 7.2.2. Niech h będzie funkcją określoną na zbiorze $\{1^+, 1^{\cdot\prime}, 0\}$ o wartościach ze zbioru $\{1, 0\}$, przy czym dla dowolnego $x \in \{1^+, 1^{\cdot\prime}, 0\}$:

$$\mathsf{h}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \{1^+, 1^{\cdot\prime}\}, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Wprost z określeń otrzymujemy następujący:

Fakt 7.2.1. *Dla dowolnego wartościowania v w matrycy $\mathfrak{M}_{\mathfrak{C}}$ zachodzi:*

1. *dla dowolnych formuł A, B*

$$\begin{aligned}\mathsf{h}(v(\sim A)) &= 1 - \mathsf{h}(v(A))\\ \mathsf{h}(v(A \S B)) &= \mathsf{h}(v(A)) f_{\S}^{\mathbf{CL}} \mathsf{h}(v(B)),\end{aligned}$$

   gdzie $\S \in \{\wedge, \vee, \to\}$, zaś $f_{\S}^{\mathbf{CL}}$ jest funkcją binarną wyznaczającą klasyczną interpretację danego spójnika $\S$.
2. $\mathsf{h} \circ v$ *jest klasycznym wartościowaniem formuł.*

Niech **CL** oznacza zbiór wszystkich tez zdaniowej logiki klasycznej. Otrzymujemy:

WNIOSEK 7.2.1. *Zawartością matrycy $\mathfrak{M}_{\mathfrak{C}}$ jest* **CL**.

DOWÓD. Niech $A \in \mathbf{CL}$. Weźmy dowolne wartościowanie v w matrycy $\mathfrak{M}_{\mathfrak{C}}$. Gdyby $v(A) = 0$, to $\mathsf{h} \circ v(A) = 0$, co dzięki faktowi 7.2.1 przeczy założeniu. $\lhd$

Przypomnijmy, że podobnie, jak to miało miejsce w sekcji 6, otrzymujemy ponadto, że:

FAKT 7.2.2. *$\mathfrak{C}$ jest algebrą podprosto-nierozkładalną w rozmaitości zewnętrznie zgodnych algebr Boole'a.*

Dowód pomijamy, gdyż przebiega on podobnie do dowodu w przypadku rozmaitości zewnętrznie zgodnych MV-algebr.

W dalszych rozważaniach spróbujemy odmiennie rozwinąć ideę P-zgodności dla logik zdaniowych. Tym razem odniesiemy ją bezpośrednio do formuł logiki zdaniowej. Poniżej podajemy przykładowe tezy, które — jak się wydaje — oddają ideę zewnętrznej zgodności. Dodatkowo rozpatrujemy reguły, które zachowują tę że własność. Całość więc można określić mianem systemu. System ten określimy formalnie.

7.3. System zewnętrznie zgodny logiki klasycznej

Jako częściową odpowiedź na pytanie o podsystemy zewnętrznie zgodne rozważymy pewien podsystem logiki klasycznej. Może on być zaliczony do swego rodzaju rachunków relewantnych, gdzie relewancja dotyczy spójników głównych poszczególnych tez.

Wartości logiczne oznaczymy jak w definicji 7.3.1. Rozważane poniżej wersje wartości logicznych 1 i 0 informować nas będą, co jest funktorem głównym formuły, której przyporządkowuje się — odpowiednio —

wartość prawdy bądź fałszu. Ponadto, indeks górny ‘+’ wskazuje, że funktory główne obu argumentów danego funktora głównego są jednokształtne, indeks ‘−’ informuje o tym, że funktory te są różne. Celem zachowania domkniętości zbioru tez na regułę odrywania, w przypadku formuł implikacyjnych będziemy musieli odrobinę zmodyfikować powyżej opisaną strategię przyporządkowywania wartości logicznych.

Rozważmy matrycę:

Definicja 7.3.1. Niech

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_{ext} &= \{1, 0, 1^{\wedge+}, 1^{\wedge-}, 0^{\wedge}, 1^{\vee+}, 1^{\vee-}, 0^{\vee}, 1^{\rightarrow+}, 1^{\rightarrow-}, 0^{\rightarrow}, 1^{\sim}, 0^{\sim}\} \\ D_{ext} &= \{1, 1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\rightarrow+}, 1^{\sim}\} \\ \mathfrak{M}_{ext} &= \langle\langle \mathrm{M}_{ext}, ⩕, ⩖, \Rrightarrow, \boldsymbol{\sim}, \rangle, D_{ext}\rangle, \end{aligned}$$

gdzie operacje ⩕, ⩖, $\Rrightarrow$, $\boldsymbol{\sim}$ zadane zostały odpowiednio na diagramach 10, 12, 13 i 14.

Jak widać, podane definicje to odpowiednio zmodyfikowane klasyczne tabelki zero-jedynkowe.

⩕	1	0	$1^{\wedge+}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\vee+}$	$1^{\vee-}$	$0^{\vee}$	$1^{\rightarrow+}$	$1^{\rightarrow-}$	$0^{\rightarrow}$	$1^{\sim}$	$0^{\sim}$
1	$1^{\wedge+}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$
0	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$
$1^{\wedge+}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge+}$	$1^{\wedge+}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$
$1^{\wedge-}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge+}$	$1^{\wedge+}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$
$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$
$1^{\vee+}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge+}$	$1^{\wedge+}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$
$1^{\vee-}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge+}$	$1^{\wedge+}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$
$0^{\vee}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$
$1^{\rightarrow+}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge+}$	$1^{\wedge+}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$
$1^{\rightarrow-}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge+}$	$1^{\wedge+}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$
$0^{\rightarrow}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$
$1^{\sim}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge+}$	$0^{\wedge}$
$0^{\sim}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$

Diagram 10. Definicja $\wedge$

Diagram 11 przedstawia rozumienie formuł implikacyjnych, przy którym otrzymamy wszystkie implikacyjne formuły zewnętrznie zgodne jako dokładnie te, które należą do zawartości matrycy.

Jednak to dopiero diagram 14 przedstawia taki sposób rozumienia implikacji, który zapewnia domkniętość zbioru formuł stanowiących za-

$\Rrightarrow_-$	1	0	$1^{\wedge +}$	$1^{\wedge -}$	$0^{\wedge}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$	$1^{\to +}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\sim}$	$0^{\sim}$
1	$1^{\to +}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$
0	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$
$1^{\wedge +}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$
$1^{\wedge -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$
$0^{\wedge}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$
$1^{\vee +}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$
$1^{\vee -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$
$0^{\vee}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$
$1^{\to +}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$
$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$
$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$
$1^{\sim}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to +}$	$0^{\to}$
$0^{\sim}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$

Diagram 11. Definicja $\to$

$\Vee$	1	0	$1^{\wedge +}$	$1^{\wedge -}$	$0^{\wedge}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$	$1^{\to +}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\sim}$	$0^{\sim}$
1	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$
0	$1^{\vee +}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$
$1^{\wedge +}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$
$1^{\wedge -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$
$0^{\wedge}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$
$1^{\vee +}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$
$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$
$0^{\vee}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$
$1^{\to +}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$
$1^{\to -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$
$0^{\to}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$
$1^{\sim}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$
$0^{\sim}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee +}$	$0^{\sim}$

Diagram 12. Definicja $\vee$

	$\sim$
1	$0^{\sim}$
0	$1^{\sim}$
$1^{\wedge +}$	$0^{\sim}$
$1^{\wedge -}$	$0^{\sim}$
$0^{\wedge}$	$1^{\sim}$
$1^{\vee +}$	$0^{\sim}$
$1^{\vee -}$	$0^{\sim}$
$0^{\vee}$	$1^{\sim}$
$1^{\to +}$	$0^{\sim}$
$1^{\to -}$	$0^{\sim}$
$0^{\to}$	$1^{\sim}$
$1^{\sim}$	$0^{\sim}$
$0^{\sim}$	$1^{\sim}$

Diagram 13. Definicja $\sim$

wartość matrycy na regułę odrywania. Zatem właściwą definicję interpretacji dla funktora implikacji prezentujemy na diagramie 14.

$\Rrightarrow$	1	0	$1^{\wedge +}$	$1^{\wedge -}$	$0^{\wedge}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$	$1^{\to +}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\sim}$	$0^{\sim}$
1	$1^{\to +}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$
0	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$
$1^{\wedge +}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to +}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$
$1^{\wedge -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$
$0^{\wedge}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$
$1^{\vee +}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to +}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$
$1^{\vee -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$
$0^{\vee}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$
$1^{\to +}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to +}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$
$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$
$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$
$1^{\sim}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to +}$	$0^{\to}$
$0^{\sim}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$

Diagram 14. Ostateczna definicja $\to$

Jak zwykle, stosując indukcję ze względu na złożoność formuły otrzymujemy:

Fakt 7.3.1. *Dla każdego wartościowania zmiennych istnieje dokładnie jedna interpretacja w matrycy, będąca jego rozszerzeniem.*

Odnotujmy, że

Uwaga 7.3.1. Obcięcie funkcji $\Rrightarrow$ do zbioru $\{1^{\to +}, 1^{\to -}, 0^{\to}\}$ pokrywa się z definicją implikacji w matrycy G_3 Gödla, przy interpretacji $1^{\to +}$, $1^{\to -}$ i $0^{\to}$ odpowiednio jako 1, $\frac{1}{2}$ i 0.

Definicja 7.3.2. Niech $\mathbf{CL}_{Ex}$ będzie zbiorem wszystkich formuł A, takich że $\mathfrak{M}_{ext} \models_v A$, dla dowolnego wartościowania v, takiego że $v|_{\mathrm{Var}} \subseteq \{0, 1\}$.

Oczywiście widać, że zamiast mówić o prawdziwości w matrycy można określić rozważany system za pomocą pojęcia interpretacji. Dla łatwiejszego sformułowania warunków definicyjnych owej interpretacji poniżej określamy funkcję f oraz nieostry częściowy porządek w M_{ext}.

Definicja 7.3.3. Niech f będzie funkcją określoną na zbiorze M_{ext} o wartościach ze zbioru $\{0, 1\}$, gdzie dla dowolnego $x \in \mathrm{M}_{ext}$:

$$\mathsf{f}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \{1^{\wedge +}, 1^{\vee +}, 1^{\to +}, 1^{\vee -}, 1^{\wedge -}, 1^{\sim}, 1^{\to -}\} \\ 0 & \text{dla } x \in \{0^{\vee}, 0^{\to}, 0^{\sim}\}. \end{cases}$$

Definicja 7.3.4. Przyjmijmy nieostry częściowy porządek $\leqslant_{\mathrm{M}_{ext}}$ w zbiorze M_{ext}, który przedstawiamy za pomocą diagramu Hassego na rysunku 15.

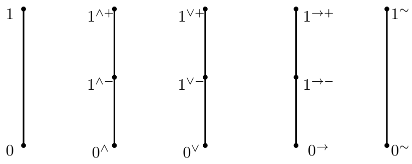


Diagram 15. Cześciowy (nieostry) porządek w zbiorze M_{ext}

Przez $\vee_{\mathrm{M}_{ext}}$ i $\wedge_{\mathrm{M}_{ext}}$ oznaczamy odpowiednio kres górny i dolny w zbiorze M_{ext}.

Definicja 7.3.5. 1. Dowolną funkcję $v\colon \mathrm{Var} \longrightarrow \{1,0\}$ nazywamy (klasycznym) wartościowaniem zmiennych.[6]

2. *Ext-interpretacją* (w skrócie: *interpretacją*) nazywamy dowolną funkcję $V\colon \mathrm{For} \longrightarrow \mathrm{M}_{ext}$, która spełnia następujące warunki:

(a) dla każdej zmiennej a, $V(a) \in \{1,0\}$, czyli $V|_{\mathrm{Var}}$ jest wartościowaniem zmiennych,

(b) $$V(A \wedge B) = \begin{cases} 1^{\wedge +}, & \text{o ile } V(A) \wedge_{\mathrm{M}_{ext}} V(B) \text{ jest określone} \\ & \text{i } 1 = \mathsf{f}(V(A) \wedge_{\mathrm{M}_{ext}} V(B)) \\ 1^{\wedge -}, & \text{o ile nie jest określone } V(A) \wedge_{\mathrm{M}_{ext}} V(B) \\ & \text{i } 1 = \min\{\mathsf{f}(V(A)), \mathsf{f}(V(B))\} \\ 0^{\wedge}, & \text{o ile } 0 = \min\{\mathsf{f}(V(A)), \mathsf{f}(V(B))\} \end{cases}$$

(c) $$V(A \vee B) = \begin{cases} 1^{\vee +}, & \text{o ile jest określone } V(A) \vee_{\mathrm{M}_{ext}} V(B) \\ & \text{i } V(A) = V(A) \vee_{\mathrm{M}_{ext}} V(B) \\ 1^{\vee -}, & \text{o ile nie jest określone } V(A) \vee_{\mathrm{M}_{ext}} V(B) \\ & \text{i } 1 = \max\{\mathsf{f}(V(A)), \mathsf{f}(V(B))\} \\ 0^{\vee}, & \text{o ile } 0 = \max\{\mathsf{f}(V(A)), \mathsf{f}(V(B))\} \end{cases}$$

(d) $$V(A \to B) = \begin{cases} 1^{\to +}, & \text{o ile } V(A) \leqslant_{\mathrm{M}_{ext}} V(B) \\ 1^{\to -}, & \text{o ile nieprawda, że } V(A) \leqslant_{\mathrm{M}_{ext}} V(B) \\ & \text{i } \mathsf{f}(V(A)) \leqslant \mathsf{f}(V(B)) \\ 0^{\to}, & \text{o ile } \mathsf{f}(V(A)) > \mathsf{f}(V(B)) \end{cases}$$

(e) $$V(\sim A) = \begin{cases} 1^{\sim}, & \text{o ile } 0 = \mathsf{f}(V(A)) \\ 0^{\sim}, & \text{o ile } 1 = \mathsf{f}(V(A)) \end{cases}.$$

[6] Mówimy o klasycznym wartościowaniu zmiennych, gdyż teoretycznie moglibyśmy rozważać funkcje przyjmujące dla zmiennych inne niż 1 i 0 wartości.

Na mocy określeń widać, że:

FAKT 7.3.2. *Dla dowolnej formuły A, $A \in \mathbf{CL}_{Ex}$ wtw dla każdej ext-interpretacji V, $V(A) \in D_{ext}$.*

Powyższy fakt uzasadnia możliwość pomijania przedrostka 'ext' w nazwie 'ext-interpretacji'.

Zauważmy, że nie każda funkcja ze zbioru formuł w uniwersum algebry $\mathfrak{M}_{ext}$ jest interpretacją. Przyjmowana bowiem wartość informuje nas o postaci formuły, którą interpretujemy. W przypadku zmiennych zdaniowych są to wartości 0 i 1, i tylko te wartości mogą być przyporządkowywane zmiennym. Przyjęty sposób selekcji nie jest czymś wyjątkowym. Podobnie postępujemy np. przy definiowaniu iloczynu kartezjańskiego nieskończonej ilości zbiorów.

Poniżej zaprezentujemy przykłady tez systemu $\mathbf{CL}_{Ex}$. Ponieważ każda z nich jest tautologią klasyczną, więc na mocy lematu 7.3.10 wartość interpretacji V od owych formuł nie może należeć do zbioru $\{0^{\wedge}, 0^{\vee}, 0^{\rightarrow}, 0^{\sim}\}$. Istotnie, w przeciwnym razie istniałoby wartościowanie — w postaci funkcji $\mathsf{f} \circ V$ — falsyfikujące tę formułę, czyli nie byłaby ona tautologią klasyczną.

LEMAT 7.3.1. *Dla dowolnych A, B, C następujące formuły będące wariantami prawa tożsamości są tezami $\mathbf{CL}_{Ex}$.*

(`pr.tożs.`) $$A \rightarrow A$$

(`pr.tożs.i`) $$((\sim C \vee C) \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

(`pr.tożs.ii`) $$(\sim(C \wedge \sim C) \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

(`pr.tożs.iii`) $$((C \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

(`pr.tożs.iv`) $$((C \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

DOWÓD. *Ad* (`pr.tożs.`) — widać, że na przekątnej w tabeli przedstawionej na diagramie 14 wszędzie występuje $1^{\rightarrow+} \in D_{\mathfrak{M}}$.

Ad (`pr.tożs.i`). Przypuśćmy nie wprost, że $V((\texttt{pr.tożs.i})) = 1^{\rightarrow-}$, czyli $V((\sim C \vee C) \rightarrow (A \rightarrow B)) = 1^{\rightarrow+}$ oraz $V(A \rightarrow B) = 1^{\rightarrow-}$. Ale pierwsza równość nie może się zdarzyć.

Przypadek (`pr.tożs.ii`) dowodzimy analogicznie.

Ad (`pr.tożs.iii`). Niech $V((\texttt{pr.tożs.iii})) = 1^{\rightarrow-}$, czyli $V((C \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)) = 1^{\rightarrow+}$ oraz $V(A \rightarrow B) = 1^{\rightarrow-}$. Ale jak uprzednio ustaliliśmy, $V(C \rightarrow C) = 1^{\rightarrow+}$, zatem $V(A \rightarrow B) = 1^{\rightarrow+}$, co daje sprzeczność.

Ad (pr.tożs.iv). Niech $V((\texttt{pr.tożs.iv})) = 1^{\to -}$, czyli $V((C \to C) \wedge (C \to C) \to (A \to B)) = 1^{\to +}$ oraz $V(A \to B) = 1^{\to -}$. Ale widać, że $V((C \to C) \wedge (C \to C)) = 1^{\wedge +}$, zatem $V((C \to C) \wedge (C \to C) \to (A \to B)) = 1^{\to -}$ — sprzeczność. ◁

LEMAT 7.3.2. *Dla dowolnych A, B, C i D następujące formuły będące wariantami prawa poprzedzania są tezami* $\mathbf{CL}_{Ex}$.

(pr.sym.i) $\quad (A \to B) \to ((C \to D) \to (A \to B)),$

(pr.sym.ii) $\quad ((A \to A)\S(A \to A) \to (B\S C)) \to ((D \S E) \to (B \S C)),$ *dla* $\S \in \{\wedge, \vee, \to\}$

DOWÓD. *Ad* (pr.sym.i). Przypuśćmy, że $V((\texttt{pr.sym.i})) = 1^{\to -}$. Na mocy określenia funkcji $\Rrightarrow$ znaczy to, że $V(A \to B) = 1^{\to +}$ oraz $V((C \to D) \to (A \to B)) = 1^{\to -}$. Ale to by znaczyło, że $V((A \to B)) = 1^{\to -}$, co daje sprzeczność.

Ad (pr.sym.ii). Załóżmy, że $V((\texttt{pr.sym.ii})) = 1^{\to -}$. Zatem $V((A \to A)\S(A \to A) \to (B\S C)) = 1^{\to +}$ oraz $V((D \S E) \to (B \S C)) = 1^{\to -}$. Zatem $V(D \S E) = 1^{\S +}$ i $V(B \S C) = 1^{\S -}$. Ale $V((A \to A)\S(A \to A)) = 1^{\S +}$, stąd, skoro $V((A \to A)\S(A \to A) \to (B\S C)) = 1^{\to +}$, zatem $V(B \S C) = 1^{\S +}$ — sprzeczność. ◁

LEMAT 7.3.3. *Dla dowolnych A, B, C i D następujące podstawienie prawa sylogizmu Fregego* (pr.syl.Fr) *oraz prawo sylogizmu hipotetycznego* (pr.s.hip) *są tezami* $\mathbf{CL}_{Ex}$.

(pr.syl.Fr) $\quad (A \to (B \to (C \to D))) \to ((A \to B) \to (A \to (C \to D)))$

(pr.s.hip) $\quad (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

DOWÓD. *Ad* (pr.syl.Fr). Rozważmy formułę o postaci $(A \to (B \to (C \to D))) \to ((A \to B) \to (A \to (C \to D)))$. Rozważmy przypadek, że $V((\texttt{pr.syl.Fr})) = 1^{\to -}$. Na mocy określenia funkcji $\Rrightarrow$ znaczy to, że $V(A \to (B \to (C \to D))) = 1^{\to +}$, $V(A \to B) = 1^{\to +}$ i $V(A \to (C \to D)) = 1^{\to -}$. Zachodzą więc następujące możliwości:

1. $V(A) = 1^{\to +}$ i $V(B \to (C \to D)) = 1^{\to +}$,
2. $V(A) = 1^{\to -}$ i $V(B \to (C \to D)) = 1^{\to +}$,
3. $V(A) = 1^{\to -}$ i $V(B \to (C \to D)) = 1^{\to -}$,
4. $V(A) = 0^{\to}$ i $V(B \to (C \to D)) = 1^{\to +}$,
5. $V(A) = 0^{\to}$ i $V(B \to (C \to D)) = 1^{\to -}$,

6. $V(A) = 0^{\rightarrow}$ i $V(B \rightarrow (C \rightarrow D)) = 0^{\rightarrow}$.

Ad 1. Możliwość pierwsza nie może się zdarzyć, gdyż ze względu na założenie, iż $V(A \rightarrow B) = 1^{\rightarrow +}$, otrzymalibyśmy, że $V(B) = 1^{\rightarrow +}$ oraz $V(C \rightarrow D) = 1^{\rightarrow +}$, ale $V(A \rightarrow (C \rightarrow D)) = 1^{\rightarrow -}$, więc mielibyśmy, że $V(C \rightarrow D) = 1^{\rightarrow -}$ — sprzeczność.

Ad 2. Ponieważ $V(A \rightarrow B) = 1^{\rightarrow +}$, więc $V(B) = 1^{\rightarrow -}$ lub $V(B) = 1^{\rightarrow +}$. Rozważmy pierwszy przypadek. Ponieważ $V(B \rightarrow (C \rightarrow D)) = 1^{\rightarrow +}$ więc $V(C \rightarrow D) = 1^{\rightarrow -}$ lub $V(C \rightarrow D) = 1^{\rightarrow +}$, jednak w każdym z tych przypadków $V(A \rightarrow (C \rightarrow D)) = 1^{\rightarrow +}$ wbrew wyjściowemu założeniu. Jeśli z kolei $V(B) = 1^{\rightarrow +}$, to $V(C \rightarrow D) = 1^{\rightarrow +}$ i znów $V(A \rightarrow (C \rightarrow D)) = 1^{\rightarrow +}$, gdyż $V(A) = 1^{\rightarrow -}$.

Ad 3. Skoro $V(A \rightarrow B) = 1^{\rightarrow +}$, zatem $V(B) = 1^{\rightarrow +}$ lub $V(B) = 1^{\rightarrow -}$. W pierwszym przypadku $V(C \rightarrow D) = 1^{\rightarrow -}$. Ale $V(A) = 1^{\rightarrow -}$, więc $V(A \rightarrow (C \rightarrow D)) = 1^{\rightarrow +}$ — sprzeczność. Gdy $V(B) = 1^{\rightarrow -}$, sytuacja, że $V(B \rightarrow (C \rightarrow D)) = 1^{\rightarrow -}$ nie może się zdarzyć, gdyż ogólnie $V(C \rightarrow D) \in \{1^{\rightarrow -}, 1^{\rightarrow +}\}$.

Ad 4, 5 i 6. Widać, że na mocy definicji funkcji $\Rrightarrow$, skoro $V(A) = 0^{\rightarrow}$, $V(A \rightarrow (C \rightarrow D)) = 1^{\rightarrow +}$.

Ad (`pr.s.hip`). Załóżmy, że $V(\mathtt{pr.s.hip}) = 1^{\rightarrow -}$. Na mocy określenia funkcji $\Rrightarrow$ znaczy to, że $V(A \rightarrow B) = 1^{\rightarrow +}$, $V(B \rightarrow C) = 1^{\rightarrow +}$ i $V(A \rightarrow C) = 1^{\rightarrow -}$. Ponieważ $V(A \rightarrow B) = 1^{\rightarrow +}$, więc na mocy określenia funkcji $\Rrightarrow$, formuły A i B mają ten sam funktor główny bądź są zmiennymi. Podobnie, ze względu na fakt, że $V(B \rightarrow C) = 1^{\rightarrow +}$, wnioskujemy, iż B i C mają ten sam funktor główny bądź — odpowiednio względem formuł A i B — są zmiennymi. Przypuśćmy, że funktorem tym jest implikacja — przypadki pozostałych funktorów dwuargumentowych analizujemy analogicznie. Ponieważ $V(A \rightarrow C) = 1^{\rightarrow -}$, więc $V(A) = 1^{\rightarrow +}$ i $V(C) \neq 1^{\rightarrow +}$. Ale z faktu, że $V(A \rightarrow B) = 1^{\rightarrow +}$ i $V(B \rightarrow C) = 1^{\rightarrow +}$, wnioskujemy iż $V(B) = 1^{\rightarrow +}$ oraz $V(C) = 1^{\rightarrow +}$, co daje sprzeczność. Dodajmy, że przypadek, w którym A i C są obie zmiennymi, bądź obie są formułami negacyjnymi, nie może się zdarzyć, gdyż mielibyśmy $V(A), V(C) \in \{1, 0\}$ lub $V(A), V(C) \in \{1^{\sim}, 0^{\sim}\}$ więc w obu tych przypadkach $V(A \rightarrow C) \in \{1^{\rightarrow +}, 0^{\rightarrow}\}$. $\lhd$

Dla $A \in \mathrm{For} \backslash \mathrm{Var}$ przez $\mathrm{fg}(A)$ oznaczmy funktor główny formuły A.

LEMAT 7.3.4. *Dla dowolnych A, B, C, D i E następujące klasyczne tautologie są tezami* $\mathbf{CL}_{Ex}$.

(pr.kon) $$((A \to A) \wedge (A \to A) \to B \wedge C) \to \\ \to ((D \wedge E) \to (D \wedge E) \wedge (B \wedge C))$$

(kom$^\wedge$) $$A \wedge B \to B \wedge A$$

(kom$^\vee$) $$A \vee B \to B \vee A$$

(dołącz.kon) $$(A \to B) \to (A \wedge C \to B \wedge C)$$

(dołącz.alt) $$(A \to B) \to (A \vee C \to B \vee C)$$

(pr.os.i) $$(((A \to A) \wedge (A \to A)) \to (B \wedge C)) \to \\ ((D \wedge E) \to (B \wedge C))$$

(r. add.) $$A \wedge B, \text{ o ile } \mathrm{fg}(A) = \mathrm{fg}(B) \text{ oraz } A, B \in \mathbf{CL}.$$

DOWÓD. *Ad* (pr.kon). W przypadku, gdy $V(\texttt{pr.kon}) \neq 1^{\to+}$, mielibyśmy, że $V(\texttt{pr.kon}) = 1^{\to-}$. Na mocy określenia funkcji $\Rrightarrow$ otrzymujemy, że $V((A \to A) \wedge (A \to A) \to B \wedge C) = 1^{\to+}$, $V((D \wedge E) \to (D \wedge E) \wedge (B \wedge C)) = 1^{\to-}$, czyli $V(D \wedge E) = 1^{\wedge+}$ i $V((D \wedge E) \wedge (B \wedge C)) = 1^{\wedge-}$. Ale ze względu na określenie funkcji $\curlywedge$ widać, że dowolna formuła koniunkcyjna, w szczególności $D \wedge E$ i $B \wedge C$, przyjmuje wartości ze zbioru $\{1^{\wedge+}, 1^{\wedge-}, 0^{\wedge}\}$, zatem mamy, że $V((D \wedge E) \wedge (B \wedge C)) \in \{1^{\wedge+}, 0^{\wedge}\}$. Uzyskujemy sprzeczność.

Ad (kom$^\wedge$). Rezultat jest oczywisty, gdyż dla dowolnych $a, b \in \mathrm{M}$ mamy, że $a \curlywedge b = b \curlywedge a$.

Ad (kom$^\vee$). Podobnie, jak w przypadku (kom$^\wedge$), łatwo widzimy, że funkcja $\curlyvee$ jest przemienna na zbiorze M.

Ad (dołącz.kon). Załóżmy, że $V((A \to B) \to (A \wedge C \to B \wedge C)) = 1^{\to-}$. Na mocy określenia funkcji $\Rrightarrow$ znaczy to, że $V(A \to B) = 1^{\to+}$ i $V(A \wedge C \to B \wedge C) = 1^{\to-}$, czyli $V(A \wedge C) = 1^{\wedge+}$ i $V(B \wedge C) = 1^{\wedge-}$. Stąd mamy, że $V(A) = V(C) = 1$ lub $V(A), V(C) \in \{1^{\wedge+}, 1^{\wedge-}\}$ lub $V(A), V(C) \in \{1^{\vee+}, 1^{\vee-}\}$ lub $V(A), V(C) \in \{1^{\to+}, 1^{\to-}\}$ lub $V(A) = V(C) = 1^{\sim}$. Ale $V(A \to B) = 1^{\to+}$, czyli $V(B) = V(C) = 1$ lub $V(B), V(C) \in \{1^{\wedge+}, 1^{\wedge-}\}$ lub $V(B), V(C) \in \{1^{\vee+}, 1^{\vee-}\}$ lub $V(B)$, $V(C) \in \{1^{\to+}, 1^{\to-}\}$ lub $V(B) = V(C) = 1^{\sim}$, zatem $V(B \wedge C) = 1^{\wedge+}$ — wbrew założeniu.

Ad (dołącz.alt). Załóżmy, że $V((A \to B) \to (A \vee C \to B \vee C)) = 1^{\to-}$. Na mocy określenia funkcji $\Rrightarrow$ mamy, że $V(A \to B) = 1^{\to+}$ i $V(A \vee C \to B \vee C) = 1^{\to-}$, czyli $V(A \vee C) = 1^{\vee+}$ i $V(B \vee C) = 1^{\vee-}$.

Stąd mamy, że $V(A), V(C) \in \{0, 1\}$ lub $V(A), V(C) \in \{0^{\wedge}, 1^{\wedge+}, 1^{\wedge-}\}$ lub $V(A), V(C) \in \{0^{\vee}, 1^{\vee+}, 1^{\vee-}\}$ lub $V(A), V(C) \in \{0^{\rightarrow}, 1^{\rightarrow+}, 1^{\rightarrow-}\}$ lub $V(A), V(C) \in \{0^{\sim}, 1^{\sim}\}$. Ale $V(A \rightarrow B) = 1^{\rightarrow+}$, zatem $V(B), V(C) = \{0, 1\}$ lub $V(B), V(C) \in \{0^{\wedge}, 1^{\wedge+}, 1^{\wedge-}\}$ lub $V(B), V(C) \in \{0^{\vee}, 1^{\vee+}, 1^{\vee-}\}$ lub $V(B), V(C) \in \{0^{\rightarrow}, 1^{\rightarrow+}, 1^{\rightarrow-}\}$ lub $V(B), V(C) \in \{0^{\sim}, 1^{\sim}\}$, zatem $V(B \vee C) \neq 1^{\vee-}$ — sprzeczność.

Ad (`pr.os.i`). Załóżmy, że dla pewnej interpretacji V w modelu M_{ext}, $V((((A \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow A)) \rightarrow (B \wedge C)) \rightarrow ((E \wedge F) \rightarrow (B \wedge C))) = 1^{\rightarrow-}$, czyli $V((((A \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow A)) \rightarrow (B \wedge C))) = 1^{\rightarrow+}$ i $V((E \wedge F) \rightarrow (B \wedge C)) = 1^{\rightarrow-}$, zatem w szczególności mielibyśmy, że $V(B \wedge C) = 1^{\wedge-}$, ale $V((A \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow A)) = 1^{\wedge+}$, czyli $V((((A \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow A)) \rightarrow (B \wedge C))) = 1^{\rightarrow-}$ — sprzeczność.

Ad (`r. add.`). Widać, że dla dowolnej tautologii o postaci $A' \wedge A''$ i dowolnej interpretacji V w modelu M_{ext} mamy: $V(A' \wedge A'') \in \{1^{\wedge+}, 1^{\wedge-}\}$, zatem dla dowolnej interpretacji V: $V((A' \,\S\, A'') \wedge (B' \,\S\, B'')) = 1^{\wedge+}$. Podobnie postępujemy, gdy funktorem głównym formuł A i B jest negacja. ◁

Lemat 7.3.5. *Dla dowolnych formuł A i B, jeśli $A \rightarrow B$ jest tautologią klasyczną, to $\sim B \rightarrow \sim A \in \mathbf{CL}_{Ex}$.*

Dowód. Ze względu na określenie funkcji $\boldsymbol{\sim}$, $V(\sim A)$, $V(\sim B) \in \{0^{\sim}, 1^{\sim}\}$, zatem $V(\sim B \rightarrow \sim A) \in \{0^{\rightarrow}, 1^{\rightarrow+}\}$. Gdyby zatem istniała interpretacja V w matrycy $\mathfrak{M}_{ext}$ taka, że $V(\sim B \rightarrow \sim A) = 0^{\rightarrow}$, to na mocy lematu 7.3.10 i określenia funkcji z definicji 7.2.2, mielibyśmy, że $V \circ \mathsf{f}(\sim B \rightarrow \sim A) = 0$, co przez kontrapozycję daje sprzeczność. ◁

Lemat 7.3.6. *Dla dowolnych formuł A i B następujące klasyczne tautologie są tezami $\mathbf{CL}_{Ex}$.*

(`pr.niesp`)	$\sim(A \wedge \sim A)$
(`pr.wył.śr`)	$\sim A \vee \sim\sim A$
(`pr.kontr`)	$(A \rightarrow B) \rightarrow (\sim B \rightarrow \sim A)$
(`kontr.sym`)	$\sim(\sim A \rightarrow A) \rightarrow \sim A$
(`sil.pp.-podst.`)	$\sim\sim\sim A \rightarrow \sim A$
(`sł.pp.-podst.`)	$\sim A \rightarrow \sim\sim\sim A$
(`s. kontr.zm`)	$(\sim a \rightarrow \sim b) \rightarrow (b \rightarrow a)$,

gdzie a, b są dowolnymi zmiennymi.

Dowód. *Ad* (`pr.niesp`). Widać, że jeśli $V(A) \in \{1,\ 1^{\wedge+},\ 1^{\wedge-},\ 1^{\vee+},\ 1^{\vee-},\ 1^{\to+},\ 1^{\to-}\}$, to $V({\sim} A) = 0^{\sim}$ i dalej $V(A \wedge {\sim} A) = 0^{\wedge}$, a stąd $V({\sim}(A \wedge {\sim} A)) = 1^{\sim}$. Podobnie, gdy $V(A) \in \{0,\ 0^{\wedge},\ 0^{\vee},\ 0^{\to},\ 0^{\sim}\}$, $V({\sim} A) = 1^{\sim}$, a stąd $V({\sim}(A \wedge {\sim} A)) = 1^{\sim}$.

Ad (`pr.wył.śr`). Na mocy określenia funkcji $\pmb{\sim}$, $V({\sim} A), V({\sim}{\sim} A) \in \{0^{\sim}, 1^{\sim}\}$ oraz $V({\sim} A) = 0^{\sim}$ wtw $V({\sim}{\sim} A) = 1^{\sim}$ a stąd, na mocy definicji funkcji $\mathbb{V}$ otrzymujemy, że $V({\sim} A \vee {\sim}{\sim} A) = 1^{\vee+}$.

Ad (`pr.kontr`). Załóżmy, że $V((A \to B) \to ({\sim} B \to {\sim} A)) = 1^{\to-}$. Na mocy określenia funkcji $\Rrightarrow$ znaczyłoby to w szczególności, że $V({\sim} B \to {\sim} A) = 1^{\to-}$, ale to nie jest możliwe gdyż $V({\sim} A), V({\sim} B) \in \{0^{\sim}, 1^{\sim}\}$ a stąd $V({\sim} B \to {\sim} A) \in \{0^{\to}, 1^{\to+}\}$.

Ad (`kontr.sym`), (`sil.pp.-podst.`), (`sł.pp.-podst.`) — przypadki te wynikają z lematu 7.3.5

Ad (`s. kontr.zm`). Przypuśćmy, że pewnej interpretacji V i zmiennych a, b mamy: $V(({\sim} a \to {\sim} b) \to (b \to a)) = 1^{\to-}$, czyli w szczególności $V(b \to a) = 1^{\to-}$, ale taka możliwośc nie istnieje (istotnie, dla dowolnych zmiennych a i b, $V(b \to a) \in \{1, 0\}$). $\lhd$

Przyjmijmy oznaczać formuły

$$
\begin{gathered}
{\sim} p \wedge {\sim}{\sim} p, \\
({\sim} p \wedge {\sim}{\sim} p) \vee ({\sim} p \wedge {\sim}{\sim} p), \\
({\sim}(p \wedge {\sim} p) \wedge {\sim}(p \wedge {\sim} p)) \to ({\sim} p \wedge {\sim}{\sim} p),
\end{gathered}
$$

odpowiednio za pomocą $\bot_{\wedge}$, $\bot_{\vee}$, $\bot_{\to}$.

Lemat 7.3.7. *Dla dowolnych A, B, C, D i E następujące klasyczne tautologie są tezami $\mathbf{CL}_{Ex}$.*

(`pr.DS`$_{\wedge}$) $\quad \bot_{\wedge} \to B \wedge C$

(`pr.DS`$_{\vee}$) $\quad \bot_{\vee} \to B \vee C$

(`pr.DS`$_{\to}$) $\quad \bot_{\to} \to (B \to C)$

(`pr.os`$_{\vee}$) $\quad A \vee B \to (A \vee B) \vee (C \vee D)$

(`pr.os`$_{\wedge}$) $\quad A \wedge B \to (A \wedge B) \wedge ((C \vee {\sim} C) \wedge (C \vee {\sim} C))$

(`r. do abs.`) $\quad (((A \to B) \to ((C \to C) \to {\sim}(C \to C))) \to {\sim}(C \to C)) \to (A \to B)$

(`r. p.`) $\quad ((A \to B) \to ({\sim}{\sim}(C \to C) \to {\sim}(C \to C))) \to (A \to B)$, *gdzie* $A \to B \in \mathbf{CL}$, Dowód. *Ad* ($\mathtt{pr.DS}_\wedge$), ($\mathtt{pr.DS}_\vee$) i ($\mathtt{pr.DS}_\to$) — widać, że dla dowolnej interpretacji V zachodzi $V(\bot_\wedge) \leqslant_{\mathrm{M}_{ext}} V(B \wedge C)$, $V(\bot_\vee) \leqslant_{\mathrm{M}_{ext}} V(B \vee C)$, $V(\bot_\to) \leqslant_{\mathrm{M}_{ext}} V(B \to C)$, dla porządku $\leqslant_{\mathrm{M}_{ext}}$ z definicji 7.3.4, gdzie B i C są dowolnymi formułami.

Ad ($\mathtt{pr.os}_\vee$). Na mocy określenia funkcji $\curlyvee$ mamy, że $V(A \vee B)$, $V(C \vee D) \in \{1^{\vee+}, 1^{\vee-}, 0^{\vee}\}$ Zatem $V(A \vee B \to (A \vee B) \vee (C \vee D)) \in \{1^{\vee+}, 0^{\vee}\}$, a ponieważ ($\mathtt{pr.os}_\vee$) jest tautologią klasyczną, więc w przypadku, gdy $V(A \vee B) \in \{1^{\vee+}, 1^{\vee-}\}$, mamy: $V(A \vee B \to (A \vee B) \vee (C \vee D)) = 1^{\vee+}$.

Ad ($\mathtt{pr.os}_\wedge$). Dla dowolnej interpretacji V w modelu M_{ext} mamy $V(C \vee {\sim} C) \in \{1^{\vee+}, 1^{\vee-}\}$, wobec tego na mocy określenia funkcji $\curlywedge$ widzimy, że $V((C \vee {\sim} C) \wedge (C \vee {\sim} C)) = 1^{\wedge+}$, zatem łatwo widać, że $V(A \wedge B) \leqslant_{\mathrm{M}_{ext}} V((A \wedge B) \wedge ((C \vee {\sim} C) \wedge (C \vee {\sim} C)))$, dla dowolnej interpretacji V w modelu M_{ext}.

Ad ($\mathtt{r.\,do\,abs.}$). Ponieważ formuła ($\mathtt{r.\,do\,abs.}$) jest znów tautologią klasyczną, zatem na mocy lematu 7.3.10, dla dowolnej interpretacji w V w matrycy $\mathfrak{M}_{ext}$ oraz określenia $\mathfrak{M}_{ext}$ zachodzi $V((((A \to B) \to ((C \to C) \to {\sim}(C \to C))) \to {\sim}(C \to C)) \to (A \to B)) \in \{1^{\to+}, 1^{\to-}\}$. Przypuśćmy, że dla pewnej interpretacji V zachodzi: $V((((A \to B) \to ((C \to C) \to {\sim}(C \to C))) \to {\sim}(C \to C)) \to (A \to B)) = 1^{\to-}$, czyli $V(((A \to B) \to ((C \to C) \to {\sim}(C \to C))) \to {\sim}(C \to C)) = 1^{\to+}$ i $V(A \to B) = 1^{\to-}$. Ponieważ $V(C \to C) = 1^{\to+}$, zaś $V({\sim}(C \to C)) = 0^{\sim}$, zatem $V((C \to C) \to {\sim}(C \to C)) = 0^{\to}$ a stąd $V((A \to B) \to ((C \to C) \to {\sim}(C \to C))) = 0^{\to}$, czyli $V(((A \to B) \to ((C \to C) \to {\sim}(C \to C))) \to {\sim}(C \to C)) = 1^{\to-}$, co daje sprzeczność.

Ad ($\mathtt{r.\,p.}$). Niech V będzie dowolną interpretacją. Na mocy założenia o formule $(A \to B)$ i lematu 7.3.10 mamy, że $V(A \to B) \in \{1^{\to+}, 1^{\to-}\}$. Z kolei na mocy określenia działań w matrycy $\mathfrak{M}_{ext}$ mamy: $V({\sim}{\sim}(C \to C) \to {\sim}(C \to C)) = 0^{\to}$, zatem również $V((A \to B) \to ({\sim}{\sim}(C \to C) \to {\sim}(C \to C))) = 0^{\to}$, czyli $V(((A \to B) \to ({\sim}{\sim}(C \to C) \to {\sim}(C \to C))) \to (A \to B)) = 1^{\to+}$. ◁

Lemat 7.3.8. *Zbiór* $\mathbf{CL}_{Ex}$ *jest domknięty na:*
regułę odrywania

(MP) $$\frac{A \to B, \quad A}{B},$$

regułę symplifikacji

(RS) $$\frac{A \,\S\, B}{(C \,\S\, D) \to (A \,\S\, B),}$$

gdzie $\S \in \{\wedge, \vee, \to\}$ *a* $C, D \in \mathrm{For}$*,*
w sposób trywialny na regułę Dunsa Szkota

(RDS) $$\frac{A, \sim A}{B},$$

regułę dołączania alternatywy

(RDA) $$\frac{A \,\S\, B}{(A \,\S\, B) \vee (C \,\S\, D)},$$

regułę dylematu alternatywnego

(RDylA) $$\frac{A \vee \sim B}{\sim A \to \sim B}.$$

Dowód. Pokażemy, że reguły zachowują wartości wyróżnione. Dla (MP) widzimy, że wprost z określenia funkcji $\Rrightarrow$ widać, że jeśli $V(A \to B) = 1^{\to+}$, to o ile $V(A) = 1$, $1^{\wedge+}$, $1^{\vee+}$, $1^{\to+}$ bądź $1^{\sim}$, to $V(B)$ równa się odpowiednio 1, $1^{\wedge+}$, $1^{\vee+}$, $1^{\to+}$ bądź $1^{\sim}$.

Z kolei w przypadku reguły (RS), jeśli $V(A \,\S\, B) = 1^{\to+}$, to ponieważ $V(C \,\S\, D) \in \{1^{\to+}, 1^{\to-}, 0^{\to}\}$, zatem $V((C \,\S\, D) \to (A \,\S\, B)) = 1^{\to+}$.

Reguła (RDS) zachowuje wartości wyróżnione w sposób trywialny, gdyż nie jest możliwe by formuły A i $\sim A$ jednocześnie przyjmowały wartości wyróżnione dla jakiejś interpretacji.

Rozważmy przypadek (RDA). Jeśli $V(A \,\S\, B) = 1^{\S\,+}$, to ze względu na fakt, że $V(C \,\S\, D) \in \{1^{\S\,+}, 1^{\S\,-}, 0^{\S}\}$, z definicji $\mathbb{v}$ każdorazowo mamy, iż $V((A \,\S\, B) \vee (C \,\S\, D)) = 1^{\vee+}$.

Przy uzasadnieniu dowodzonej tezy dla reguły (RDylA) wystarczy zakładając, że dla pewnego wartościowania V, $V(A \vee \sim B) = 1^{\vee+}$ pokazać, iż $V(\sim A \to \sim B) = 1^{\to+}$. Przyjmijmy więc, że $V(A \vee \sim B) = 1^{\vee+}$. Ponieważ $V(\sim B) \in \{1^{\sim}, 0^{\sim}\}$, zatem na mocy określenia funkcji $\mathbb{v}$ mamy, że $V(A) \in \{1^{\sim}, 0^{\sim}\}$. Stąd przez określenie funkcji $\Rrightarrow$ mamy: $V(\sim A \to \sim B) \in \{1^{\to+}, 0^{\to}\}$. Wobec tego dzięki lematowi 7.3.10 i faktowi, że reguła RDylA jest niezawodna na gruncie logiki klasycznej mamy, że $V(\sim A \to \sim B) = 1^{\to+}$. $\lhd$

Dowody dla faktu, że poniższe formuły należą do systemu $\mathbf{CL}_{Ex}$ pomijamy.

`(pr.s.hip.kom)`	$(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
$(\mathtt{id}^{\vee})$	$A \vee A \to A \vee A$
$(\mathtt{id}^{\wedge})$	$(A \wedge B) \to (A \wedge A) \wedge (B \wedge B)$
$(\mathtt{symp}^{\sim})$	$\sim A \to \sim(C \wedge \sim C)$
$(\mathtt{symp}^{\wedge}_{\sim})$	$\sim A \wedge B \to \sim(C \wedge \sim C) \wedge B$
$(\mathtt{symp}^{\vee})$	$A \vee B \to (\sim C \vee \sim\sim C)$
$(\mathtt{symp}^{\wedge}_{\vee})$	$(A \vee B) \wedge D \to (\sim C \vee \sim\sim C) \wedge D$
$(\mathtt{symp}^{\to})$	$(A \to B) \to (C \to C)$
$(\mathtt{symp}^{\wedge}_{\to})$	$(A \to B) \wedge D \to (C \to C) \wedge D$
$(\mathtt{symp}^{\wedge})$	$A \wedge B \to ((C \to C) \wedge (C \to C))$
$(\mathtt{symp}^{\wedge}_{\wedge})$	$(A \wedge B) \wedge D \to ((C \to C) \wedge (C \to C)) \wedge D$

Teraz odniesiemy się do związku prezentowanego systemu z ideą zewnętrznej zgodności. W tym celu sformułujmy następującą definicję, wykorzystaną *de facto* w *Słowie wstępnym.*

DEFINICJA 7.3.6. *Formułą zewnętrznie zgodną* nazywamy

1. dowolną zmienną zdaniową,
2. dowolną formułę postaci $B \,\S\, C$, gdzie $B, C \in \mathrm{For}$, $\S \in \{\wedge, \vee, \to\}$ oraz $\mathrm{fg}(B) = \mathrm{fg}(C)$.
3. dowolną formułę postaci $\sim B$, gdzie $B \in \mathrm{For}$.

Zbiór wszystkich formuł zewnętrznie zgodnych oznaczamy przez $\mathrm{For}_{\mathrm{Ex}}$.

LEMAT 7.3.9. *Każda formuła, która przy jakimś wartościowaniu w matrycy $\mathfrak{M}_{ext}$ przyjmuje wartość wyróżnioną jest formułą zewnętrznie zgodną.*

DOWÓD. Dla dowodu postulowanej tezy, pokażemy, że dla dowolnej interpretacji V w matrycy $\mathfrak{M}_{ext}$ oraz dowolnej formuły A takiej, że $V(A) \in \{1, 1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\to+}, 1^{\sim}\}$, A jest formułą zewnętrznie zgodną. Na mocy określenia formuły zewnętrznie zgodnej, każda zmienna zdaniowa oraz każda formuła negacyjna jest zewnętrznie zgodna. Przypomnijmy ponadto, że na mocy samego określenia działań w matrycy $\mathfrak{M}_{ext}$ dla formuł o postaci $B \wedge C$, $B \vee C$, $B \to C$ dla dowolnego wartościowania V zachodzi odpowiednio: $V(B \wedge C) \in \{1^{\wedge+}, 1^{\wedge-}, 0^{\wedge}\}$, $V(B \vee C) \in \{1^{\vee+}, 1^{\vee-}, 0^{\vee}\}$, $V(B \to C) \in \{1^{\to+}, 1^{\to-}, 0^{\to}\}$.

Rozważmy więc formułę postaci $B \wedge C$, taką że $V(B \wedge C) \in \{1, 1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\to+}, 1^{\sim}\}$. Na mocy określenia funkcji $\curlywedge$ wiadomo, że $V(B \wedge C) = 1^{\wedge+}$, czyli albo $V(B) = V(C) = 1$, albo $V(B), V(C) \in \{1^{\wedge+}, 1^{\wedge-}\}$, albo $V(B), V(C) \in \{1^{\vee+}, 1^{\vee-}\}$, albo $V(B), V(C) \in \{1^{\to+}, 1^{\to-}\}$, albo $V(B) = V(C) = 1^{\sim}$. Na mocy określenia operacji w matrycy $\mathfrak{M}_{ext}$ oraz definicji 7.3.6 pojęcia formuły zewnętrznie zgodnej, w każdym z tych przypadków, formuła $B \wedge C$ jest zewnętrznie zgodna.

Przypuśćmy teraz, że dla formuły o postaci $B \vee C$, zachodzi $V(B \vee C) \in \{1, 1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\to+}, 1^{\sim}\}$. Na mocy określenia funkcji $\curlywedge$ wiadomo, że $V(B \vee C) = 1^{\vee+}$, czyli albo $V(B), V(C) \in \{1, 0\}$, albo $V(B), V(C) \in \{1^{\wedge+}, 1^{\wedge-}, 0^{\wedge}\}$, albo $V(B), V(C) \in \{1^{\vee+}, 1^{\vee-}, 0^{\vee}\}$, albo $V(B), V(C) \in \{1^{\to+}, 1^{\to-}, 0^{\to}\}$, albo $V(B), V(C) \in \{1^{\sim}, 0^{\sim}\}$. Znów na mocy określeń operacji w matrycy $\mathfrak{M}_{ext}$ oraz definicji pojęcia formuły zewnętrznie zgodnej, w każdym z tych przypadków, formuła $B \vee C$ jest zewnętrznie zgodna.

Na koniec przeanalizujmy przypadek formuły o postaci $B \to C$. Niech $V(B \to C) \in \{1, 1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\to+}, 1^{\sim}\}$, stąd $V(B \to C) = 1^{\to+}$. Czyli $V(B) \leqslant_{\mathrm{M}_{ext}} V(C)$ oraz albo $V(B), V(C) \in \{1, 0\}$, albo $V(B), V(C) \in \{1^{\wedge+}, 1^{\wedge-}, 0^{\wedge}\}$, albo $V(B), V(C) \in \{1^{\vee+}, 1^{\vee-}, 0^{\vee}\}$, albo $V(B), V(C) \in \{1^{\to+}, 1^{\to-}, 0^{\to}\}$, albo $V(B), V(C) \in \{1^{\sim}, 0^{\sim}\}$. Ale znów w każdym z wymienionych przypadków, formuła $B \to C$ jest zewnętrznie zgodna. $\lhd$

Mamy stąd:

Wniosek 7.3.1.

$$\mathbf{CL}_{Ex} \subseteq \mathrm{For}_{\mathrm{Ex}}.$$

Widać, że przy dowolnej interpretacji w matrycy $\mathfrak{M}_{ext}$, przeciwobraz zbioru D_{ext} jest maksymalnym zbiorem formuł zewnętrznie zgodnych. Ściśle, mamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7.3.1. *Dla dowolnej interpretacji V w matrycy $\mathfrak{M}_{ext}$ i dowolnej formuły A takiej, że $V(A) \in \{1^{\wedge-}, 1^{\vee-}, 1^{\to-}\}$ ze zbioru $\{A\} \cup V^{-1}\{1, 1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\to+}, 1^{\sim}\}$ jest wyprowadzalna czysto-odrywaniowo jakaś formuła, która nie jest zewnętrznie zgodna.*

Dowód. Dla formuł, które przekształcane są na jedną z dwóch wartości ze zbioru $\{1^{\wedge-}, 1^{\vee-}\}$ teza jest oczywista, gdyż na mocy samego określenia działań w matrycy $\mathfrak{M}_{ext}$, każda taka formuła, sama nie jest zewnętrznie zgodna.

Przypuśćmy zatem, że $V(A) = 1^{\to -}$. Tezę pokazujemy stosując rozumowanie rekurencyjne. Na mocy określenia funkcji $\Rrightarrow$ zachodzą dwie możliwości: albo formuła A nie jest formułą zewnętrznie zgodną, albo jest formułą zewnętrznie zgodną i ma postać $B \,\S\, C$, gdzie $\S \in \{\wedge, \vee, \sim\}$ oraz $V(B) = 1^{\S\,+}$ i $V(C) = 1^{\S\,-}$.

Zatem przez odrywanie otrzymujemy formułę C, która znów albo nie jest formułą zewnętrznie zgodną, albo ma postać implikacji, jak uprzednio formuła A. $\lhd$

Mamy:

Fakt 7.3.3. *Nie każda klasyczna tautologia, która jest formułą zewnętrznie zgodną, należy do zawartości matrycy* $\mathfrak{M}_{ext}$.

Istotnie, łatwo widać, że przykładowo formuła $(p \to p) \to (p \to p \wedge p)$ nie jest tezą systemu $\mathfrak{M}_{ext}$, choć na mocy definicji jest formułą zewnętrznie zgodną.

Lemat 7.3.10. *Dla dowolnej interpretacji V w matrycy $\mathfrak{M}_{ext}$, funkcja $\mathsf{f} \circ V$ jest klasycznie rozumianym wartościowaniem formuł.*

Mamy stąd:

Wniosek 7.3.2. *Każda formuła należąca do zawartości matrycy $\mathfrak{M}_{ext}$ jest tautologią klasyczną.*

Dowód. Pokażemy, że jeśli formuła nie jest tautologią klasyczną, to nie należy do zawartości matrycy $\mathfrak{M}_{ext}$.

Niech dana będzie formuła A, która nie jest tautologią. Istnieje więc klasycznie rozumiane wartościowanie v takie, że $v(A) = 0$. Rozważmy interpretację V w matrycy $\mathfrak{M}_{ext}$ indukowaną przez $v|_{\mathrm{Var}}$. Ponieważ na mocy określeń, dla dowolnej zmiennej $a \in \mathrm{Var}$ mamy:

$$\mathsf{f}(V(a)) = v(a),$$

zatem dowodząc indukcyjnie ze względu na złożoność formuły łatwo pokazujemy, że dla każdej formuły B zachodzi

$$\mathsf{f}(V(B)) = v(B),$$

ale to w szczególności znaczy, że $\mathsf{f}(V(A)) = v(A)$. Gdyby $V(A) \in \{1, 1^{\wedge+}, 1^{\wedge-}, 1^{\vee+}, 1^{\vee-}, 1^{\to+}, 1^{\to-}, 1^{\sim}\}$, to $\mathsf{f}(V(a)) = 1$, czyli $v(A) = 1$. Zatem A nie należy do zawartości matrycy $\mathfrak{M}_{ext}$. $\lhd$

FAKT 7.3.4. *Następujące formuły nie są tezami systemu* $\mathbf{CL}_{Ex}$.

(słpp) $(\sim\sim p \to q) \to (p \to q)$

(silpp) $(p \to \sim\sim q) \to (p \to q)$

(pr.sym.i′) $(p \to p) \to ((p \wedge p) \to (p \to p))$

(pr.syl.Fr′) $((p \to p \wedge p) \to ((p \to p) \to (p \wedge p))) \to$
$((p \to p \wedge p) \to (p \to p) \to (p \to p \wedge p) \to (p \wedge p))$

Odnotujmy łatwy w dowodzie:

FAKT 7.3.5. *Dla dowolnej tautologii klasycznej* A *i dowolnej interpretacji* V *w matrycy* $\mathfrak{M}_{ext}$ *mamy:* $V(A) \in \{1^{\wedge+}, 1^{\wedge-}, 1^{\vee+}, 1^{\vee-}, 1^{\to+}, 1^{\to-}, 1^{\sim}\}$.

Mamy więc następującą charakterystykę koniunkcyjnych i alternatywnych tez systemu $\mathbf{CL}_{Ex}$:

WNIOSEK 7.3.3. *Dla dowolnej formuły* A *o postaci koniunkcji* $B \wedge C$*:*

$A \in \mathbf{CL}_{Ex}$ *wtw* $B, C \in \mathbf{CL}$ *i dla pewnych formuł* B_1, B_2, C_1, C_2 *zachodzi jeden z następujących warunków*

1. $B = B_1 \to B_2$ *oraz* $C = C_1 \to C_2$,
2. $B = B_1 \wedge B_2$ *oraz* $C = C_1 \wedge C_2$,
3. $B = B_1 \vee B_2$ *oraz* $C = C_1 \vee C_2$,
4. $B = \sim B_1$ *oraz* $C = \sim C_1$.

Dla dowolnej formuły A *o postaci koniunkcji* $B \vee C$*:*

$A \in \mathbf{CL}_{Ex}$ *wtw* $A \in \mathbf{CL}$ *i dla pewnych formuł* B_1, B_2, C_1, C_2 *zachodzi jeden z następujących warunków*

1. $B = B_1 \to B_2$ *oraz* $C = C_1 \to C_2$,
2. $B = B_1 \wedge B_2$ *oraz* $C = C_1 \wedge C_2$,
3. $B = B_1 \vee B_2$ *oraz* $C = C_1 \vee C_2$,
4. $B = \sim B_1$ *oraz* $C = \sim C_1$.

Innymi słowy:

WNIOSEK 7.3.4. *Każda zewnętrznie zgodna teza logiki klasycznej, o postaci* $B \wedge C$ *bądź* $B \vee C$ *jest tezą* $\mathbf{CL}_{Ex}$.

Widać, że

FAKT 7.3.6. *System* $\mathbf{CL}_{Ex}$ *nie jest domknięty na podstawianie.*

Dowód. Mamy, że formuła $(\sim p \to \sim q) \to (q \to p) \in \mathbf{CL}_{Ex}$, podczas gdy $(\sim\sim p \to \sim q) \to (q \to \sim p) \notin \mathbf{CL}_{Ex}$. Istotnie, wystarczy zauważyć, że dla wartościowania v takiego, że $v(p) = v(q) = 1$, mamy $V(q \to \sim p) = 1^{\to -}$, $V(\sim\sim p \to \sim q) = 1^{\to +}$, zatem $V((\sim\sim p \to \sim q) \to (q \to \sim p)) = 1^{\to -}$. $\lhd$

Niestety kłopot polega na tym, że nawet, gdybyśmy podstawiali za wszystkie zmienne, formuły o tej samej strukturze, to i tak możemy otrzymać formułę, która nie jest zewnętrznie zgodna. Przykładowo, rozważmy prawo eksportacji:

$$(p \wedge q \to r) \to (p \to (q \to r))$$

W tej postaci należy ono do $\mathbf{CL}_{Ex}$. Jednak podstawienie

$$((p \wedge p) \wedge (p \wedge p) \to (p \wedge p)) \to ((p \wedge p) \to ((p \wedge p) \to (p \wedge p)))$$

nie jest już tezą $\mathbf{CL}_{Ex}$.

Do kwestii podstawiania wrócimy jeszcze na końcu rozdziału o zdaniowych systemach P-zgodnych.

Przez indukcję ze względu na złożoność formuły pokazujemy, łącznie dowodząc trzech implikacji, że:

Fakt 7.3.7. *Dla dowolnej formuły A i dowolnych interpretacji V_0, V_1:*

1. *jeśli* $V_0(A) \in \{1, 1^{\wedge +}, 1^{\vee +}, 1^{\to +}, 1^{\sim}\}$, *to* $V_1(A) \in \{1, 1^{\wedge +}, 1^{\vee +}, 1^{\to +}, 1^{\sim}, 0, 0^{\wedge}, 0^{\vee}, 0^{\to}, 0^{\sim}\}$.
2. *jeśli* $V_0(A) \in \{1^{\wedge -}, 1^{\vee -}, 1^{\to -}\}$, *to* $V_1(A) \in \{1^{\wedge -}, 1^{\vee -}, 1^{\to -}, 0^{\wedge}, 0^{\vee}, 0^{\to}\}$.
3. *jeśli* $V_0(A) \in \{1^{\wedge +}, 1^{\vee +}, 1^{\to +}\}$, *to* $V(A) \in \{1^{\wedge +}, 1^{\vee +}, 1^{\to +}, 0^{\wedge}, 0^{\vee}, 0^{\to}\}$.

Mamy stąd kolejne trzy wnioski.

Wniosek 7.3.5. *Niech A będzie dowolną formułą. Jeśli istnieje interpretacja V_0 taka, że* $V_0(A) \in \{1, 1^{\wedge +}, 1^{\vee +}, 1^{\to +}, 1^{\sim}\}$, *to dla każdej interpretacji V zachodzi, że* $V(A) \in \{1, 1^{\wedge +}, 1^{\vee +}, 1^{\to +}, 1^{\sim}, 0, 0^{\wedge}, 0^{\vee}, 0^{\to}, 0^{\sim}\}$.

Wniosek 7.3.6. *Niech A będzie dowolną formułą. Jeśli istnieje interpretacja V_0 taka, że* $V_0(A) \in \{1^{\wedge -}, 1^{\vee -}, 1^{\to -}\}$, *to dla każdej interpretacji V zachodzi, że* $V(A) \in \{1^{\wedge -}, 1^{\vee -}, 1^{\to -}, 0^{\wedge}, 0^{\vee}, 0^{\to}\}$.

Wniosek 7.3.7. *Niech A będzie dowolną formułą. Jeśli istnieje interpretacja V_0 taka, że $V_0(A) \in \{1^{\wedge+},\ 1^{\vee+},\ 1^{\rightarrow+}\}$, to dla każdej interpretacji V zachodzi, że $V(A) \in \{1^{\wedge+},\ 1^{\vee+},\ 1^{\rightarrow+},\ 0^{\wedge},\ 0^{\vee},\ 0^{\rightarrow}\}$.*

7.4. Wynikanie logiczne

Jak zwykle, w oparciu o matrycę można określić relację konsekwencji. Naturalnym wymogiem w przypadku relacji semantycznej konsekwencji jest zachowanie wartości wyróżnionych przy przechodzeniu od przesłanek, do konkluzji. Narzucany zazwyczaj jest więc warunek o postaci:

$$(\diamondsuit)\qquad \begin{array}{c}\text{Jeśli } X \models A, \text{ to dla dla dowolnego wartościowania } v\\ v(X) \subseteq D \Longrightarrow v(A) \in D,\end{array}$$

gdzie D, to zbiór wartości wyróżnionych. Jednak warunek $\diamondsuit$ dla rozważanej przez nas matrycy wyprowadza relację konsekwencji poza to, co obowiązuje dla logiki klasycznej. Rozważmy zbiór $\{\sim p \vee p\}$ jako X oraz $q \wedge \sim q$ — jako formułę A. Łatwo widać, że gdyby warunek ($\diamondsuit$) miałby być traktowany jako równoważność, to istotnie zachodziłoby, że $\{\sim p \vee p\} \models q \wedge \sim q$. Jest tak, gdyż dla każdego wartościowania v mamy, że $v(\{\sim p \vee p\}) \cap D = \varnothing$. Przy takim rozumieniu wynikania logicznego każda formuła, która nie jest zewnętrznie zgodna traktowana byłaby jak sprzeczność w logice klasycznej, czyli prowadziłaby od przepełnienia zbioru konkluzji. Podany więc przykład pokazuje, że istniałyby nawet tautologie klasyczne, z których wynikałaby każda formuła. Taką rolę przykładowo odgrywałaby dowolna formuła (w tym również tautologia), która nie jest zewnętrznie zgodna. Jej obecność wśród przesłanek powodowałaby strywializowanie zbioru konsekwencji danego zbioru.

Kwestie związane z tego rodzaju konsekwencją wydają się interesujące, jednak wykraczają poza ramy niniejszej pracy.

Inna możliwość jeśli chodzi o rozumienie relacji konsekwencji, to taka by rozpatrywać następujące dwuetapowe sformułowanie:

Definicja 7.4.1. Dla dowolnych $X \subseteq \mathrm{For}$ i $A \in \mathrm{For}$ mamy: $X \models_{\mathbf{CL}_{Ex}} A$ wtw dla dowolnej interpretacji w matrycy $\mathfrak{M}$:

1. jeśli $V(X) \subseteq \{1^{\wedge+}, 1^{\wedge-}, 1^{\vee+}, 1^{\vee-}, 1^{\rightarrow+}, 1^{\rightarrow-}\}$, to $V(A) \in \{1, 1^{\wedge+},\ 1^{\vee+},\ 1^{\rightarrow+},\ 1^{\sim},\ 1^{\wedge-},\ 1^{\vee-},\ 1^{\rightarrow-}\}$,
2. jeśli $V(X) \subseteq \{1, 1^{\wedge+},\ 1^{\vee+},\ 1^{\rightarrow+},\ 1^{\sim}\}$, to $V(A) \in \{1, 1^{\wedge+},\ 1^{\vee+},\ 1^{\rightarrow+},\ 1^{\sim}\}$.

Dla relacji konsekwencji wskazanej w powyższej definicji zachodzi semantyczny odpowiednik twierdzenia o dedukcji.

LEMAT 7.4.1. *Niech* $X \subseteq \mathrm{For}$ *i* $A, B \in \mathrm{For}$, $\mathrm{fg}(A) = \mathrm{fg}(B)$ *oraz niech dla dowolnej interpretacji* V *w matrycy* $\mathfrak{M}$, $V(A) \in \{1, 1^{\wedge +}, 1^{\vee +}, 1^{\rightarrow +}, 1^{\sim}, 0, 0^{\wedge}, 0^{\vee}, 0^{\rightarrow}\}$. *Wówczas*

$$X \cup \{A\} \models_{\mathbf{CL}_{Ex}} B \textit{ wtw } X \models_{\mathbf{CL}_{Ex}} A \rightarrow B.$$

DOWÓD. Niech $X \subseteq \mathrm{For}$ i $A, B \in \mathrm{For}$ oraz $X \cup \{A\} \models_{\mathbf{CL}_{Ex}} B$. Rozważmy dowolną interpretację V i załóżmy, że $V(X) \subseteq \{1, 1^{\wedge +}, 1^{\vee +}, 1^{\rightarrow +}, 1^{\sim}\}$. Jeśli $V(A) \in \{0, 0^{\wedge}, 0^{\vee}, 0^{\rightarrow}\}$, to przez założenie, że $\mathrm{fg}(A) = \mathrm{fg}(B)$ mamy: $V(A \rightarrow B) \in \{1, 1^{\wedge +}, 1^{\vee +}, 1^{\rightarrow +}, 1^{\sim}\}$. Jeśli zaś $V(A) \in \{1, 1^{\wedge +}, 1^{\vee +}, 1^{\rightarrow +}, 1^{\sim}\}$, to na mocy założenia i przyjętej definicji wynikania $V(B) \in \{1, 1^{\wedge +}, 1^{\vee +}, 1^{\rightarrow +}, 1^{\sim}\}$, zatem również $V(A \rightarrow B) \in \{1, 1^{\wedge +}, 1^{\vee +}, 1^{\rightarrow +}, 1^{\sim}\}$. Jeśli z kolei $V(A) \in \{1^{\wedge -}, 1^{\vee -}, 1^{\rightarrow -}\}$, to przez definicję 7.4.1 i założenie mamy, że $V(B) \in \{1, 1^{\wedge +}, 1^{\vee +}, 1^{\rightarrow +}, 1^{\sim}, 1^{\wedge -}, 1^{\vee -}, 1^{\rightarrow -}\}$, a to znów wystarcza to stwierdzenia, że $V(A \rightarrow B) \in \{1, 1^{\wedge +}, 1^{\vee +}, 1^{\rightarrow +}, 1^{\sim}\}$.

Załóżmy teraz, że $V(X) \subseteq \{1^{\wedge +}, 1^{\wedge -}, 1^{\vee +}, 1^{\vee -}, 1^{\rightarrow +}, 1^{\rightarrow -}\}$. Tym razem wystarczy pokazać, że $V(A \rightarrow B) \in \{1, 1^{\wedge +}, 1^{\vee +}, 1^{\rightarrow +}, 1^{\sim}, 1^{\wedge -}, 1^{\vee -}, 1^{\rightarrow -}\}$. Znów jeśli $V(A) \in \{0, 0^{\wedge}, 0^{\vee}, 0^{\rightarrow}\}$, to na mocy założenia, iż $\mathrm{fg}(A) = \mathrm{fg}(B)$ otrzymujemy, że: $V(A \rightarrow B) \in \{1, 1^{\wedge +}, 1^{\vee +}, 1^{\rightarrow +}, 1^{\sim}\}$. Jeśli zaś $V(A) \in \{1, 1^{\wedge +}, 1^{\vee +}, 1^{\rightarrow +}, 1^{\sim}\}$, to na mocy założenia i przyjętej definicji wynikania $V(B) \in \{1, 1^{\wedge +}, 1^{\vee +}, 1^{\rightarrow +}, 1^{\sim}, 1^{\wedge -}, 1^{\vee -}, 1^{\rightarrow -}\}$, a to wystarczy do konstatacji, że $V(A \rightarrow B) \in \{1, 1^{\wedge +}, 1^{\vee +}, 1^{\rightarrow +}, 1^{\sim}, 1^{\wedge -}, 1^{\vee -}, 1^{\rightarrow -}\}$. Jeśli na koniec $V(A) \in \{1^{\wedge -}, 1^{\vee -}, 1^{\rightarrow -}, 1^{\sim}\}$, to przez definicję 7.4.1 i założenie mamy, że $V(B) \in \{1, 1^{\wedge +}, 1^{\vee +}, 1^{\rightarrow +}, 1^{\sim}, 1^{\wedge -}, 1^{\vee -}, 1^{\rightarrow -}\}$, czyli $V(A \rightarrow B) \in \{1, 1^{\wedge +}, 1^{\vee +}, 1^{\rightarrow +}, 1^{\sim}\}$. $\triangleleft$

Jeśli chodzi o inne własności relacji konsekwencji $\models_{\mathbf{CL}_{Ex}}$, to ze względu na określenie funkcji $⩕$, $⩖$, $\Rrightarrow$, zachodzą następujące obserwacje.

TWIERDZENIE 7.4.1. *Niech* $\S \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.

1. *Jeśli* $X \models_{\mathbf{CL}} A \S B$ *i* $X \models_{\mathbf{CL}} C \S D$, *to* $X \models_{\mathbf{CL}_{Ex}} (A \S B) \wedge (C \S D)$.
2. *Jeśli* $X \models_{\mathbf{CL}_{Ex}} A \S B$, *to* $X \models_{\mathbf{CL}_{Ex}} (A \S B) \vee (C \S D)$.
3. *Jeśli* $X \models_{\mathbf{CL}_{Ex}} A \S B$, *to* $X \models_{\mathbf{CL}_{Ex}} (C \S D) \rightarrow (A \S B)$.

Przyjmijmy:

Definicja 7.4.2. Dla dowolnych $X \subseteq \mathrm{For}$ i $A \in \mathrm{For}$:

$$\langle X, A\rangle \in \mathsf{Cn}_{\mathbf{CL}_{Ex}} \text{ wtw } X \models_{\mathbf{CL}_{Ex}} A.$$

Standardowo, zachodzi następujący fakt stanowiący o zachodzeniu (meta)reguły cięcia dla relacji $\mathsf{Cn}_{\mathbf{CL}_{Ex}}$:

Fakt 7.4.1. *Jeśli* $A \in \mathsf{Cn}_{\mathbf{CL}_{Ex}}(X)$ *i* $B \in \mathsf{Cn}_{\mathbf{CL}_{Ex}}(X \cup \{A\})$, *to* $B \in \mathsf{Cn}_{\mathbf{CL}_{Ex}}(X)$.

Dzięki lematowi 7.3.10 i faktowi, że $p \to q \not\models_{\mathbf{CL}_{Ex}} {\sim} p \vee q$ otrzymujemy, że:

Fakt 7.4.2. $\mathsf{Cn}_{\mathbf{CL}_{Ex}} \subsetneq \mathsf{Cn}_{\mathbf{CL}}$.

Kwestią wymagającą dalszych badań, w szczególności nad zbiorami maksymalnymi w sensie inkluzji, które zawierałyby same tylko formuły zewnętrznie zgodne, jest aksjomatyzacja relacji $\mathsf{Cn}_{\mathbf{CL}_{Ex}}$. Widać, że nie każdemu zbiorowi maksymalnemu w tym sensie, będzie odpowiadało wartościowanie w matrycy. Generowanie stosownych zbiorów metodą Lindenbauma będzie najprawdopodobniej wymagało szczególnego ustawienia formuł w ciąg podczas tworzenia coraz to większych zbiorów zawierających same zewnętrznie zgodne formuły.

Rozdział 8

Zdaniowe systemy P-zgodne logiki klasycznej

8.1. Systemy P-zgodne

DEFINICJA 8.1.1. Niech dany będzie podział P zbioru $\{\sim, \wedge, \vee, \rightarrow\}$. *Formułą P-zgodną* nazywamy

1. dowolną formułę postaci $B \,\S\, C$, gdzie $B, C \in \mathrm{For}$, $\S \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ przy czym istnieje $\pi \in \Pi$, takie że $\mathrm{fg}(B) \in \pi$ oraz $\mathrm{fg}(C) \in \pi$, czyli oba funktory główne formuł będących argumentami funktora $\S$ należą do tej samego bloku podziału P.
2. dowolną formułę postaci $\sim B$, gdzie $B \in \mathrm{For}$.
3. dowolną zmienną zdaniową.

Zbiór wszystkich formuł P-zgodnych oznaczamy przez For_P.

DEFINICJA 8.1.2. Dla dowolnej logiki zdaniowej $\mathbf{L}$, dowolnego podziału P zbioru $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \sim\}$, przez P-zgodny (pod)system logiki $\mathbf{L}$ rozumiemy dowolny podzbiór zbioru $\mathbf{L} \cap \mathrm{For}_P$ domknięty na regułę odrywania.

Zachodzi następujący fakt:

FAKT 8.1.1. *Niech $\mathbf{L}$ będzie dowolną logiką, której tezą jest formuła o postaci $a \,\S\, A$, gdzie $A \in \mathrm{For} \backslash \mathrm{Var}$, zaś $a \in \mathrm{Var}$. Wówczas dla dowolnej partycji P, P-zgodny system logiki $\mathbf{L}$ jest właściwie zawarty w $\mathbf{L}$.*

Rozpatrzmy wszystkie podziały zbioru $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \sim\}$. Są to następujące:

$$\Pi_{\mathrm{Ful}} = \{\{\wedge, \vee, \rightarrow, \sim\}\}$$
$$\{\{\wedge, \vee\}, \{\rightarrow, \sim\}\}$$
$$\{\{\wedge, \rightarrow\}, \{\vee, \sim\}\}$$
$$\{\{\wedge, \sim\}, \{\rightarrow, \vee\}\}$$
$$\{\{\wedge\}, \{\vee\}, \{\rightarrow, \sim\}\}\}$$

$$\{\{\wedge\},\{\to\},\{\vee,\sim\}\}\}$$
$$\{\{\vee\},\{\to\},\{\wedge,\sim\}\}\}$$
$$\{\{\wedge\},\{\sim\},\{\to,\vee\}\}\}$$
$$\{\{\vee\},\{\sim\},\{\to,\wedge\}\}\}$$
$$\{\{\to\},\{\sim\},\{\wedge,\vee\}\}\}$$
$$\Pi_{\mathrm{i}d} = \{\{\vee\},\{\to\},\{\wedge\},\{\sim\}\}\}$$

WNIOSEK 8.1.1. *Niech* $\mathbf{CL}_P$ *będzie dowolnym P-zgodnym systemem logiki* **CL**. *Wówczas:*

$$\mathbf{CL}_P \subsetneq \mathbf{CL}.$$

8.1.1. Inne P-zgodne podsystemy logiki klasycznej

W podsekcji tej dokonamy krótkiej charakterystyki P-zgodnych systemów logiki $\mathcal{L}$ wyznaczonych przez poszczególne podziały zbioru funktorów.

Każdy z rozważanych poniżej systemów wyznaczony jest przez pewną matrycę. Względem systemu $\mathbf{CL}_{Ex}$, definicja negacji pozostaje każdorazowo bez zmian.

System $\mathbf{CL}_{\{\wedge\},\{\vee,\to,\sim\}}$ Poszczególne działania matrycy definiujemy za pomocą tabelek w sposób następujący.

$\wedge\!\!\!\wedge_1$	1	0	$1^{\wedge+}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\vee+}$	$1^{\vee-}$	$0^{\vee}$	$1^{\to+}$	$1^{\to-}$	$0^{\to}$	$1^{\sim}$	$0^{\sim}$
1	$1^{\wedge+}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$
0	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$
$1^{\wedge+}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge+}$	$1^{\wedge+}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$
$1^{\wedge-}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge+}$	$1^{\wedge+}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$
$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$
$1^{\vee+}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge+}$	$1^{\wedge+}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge+}$	$1^{\wedge+}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge+}$	$0^{\wedge}$
$1^{\vee-}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge+}$	$1^{\wedge+}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge+}$	$1^{\wedge+}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge+}$	$0^{\wedge}$
$0^{\vee}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$
$1^{\to+}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge+}$	$1^{\wedge+}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge+}$	$1^{\wedge+}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge+}$	$0^{\wedge}$
$1^{\to-}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge+}$	$1^{\wedge+}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge+}$	$1^{\wedge+}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge+}$	$0^{\wedge}$
$0^{\to}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$
$1^{\sim}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge-}$	$1^{\wedge-}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge+}$	$1^{\wedge+}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge+}$	$1^{\wedge+}$	$0^{\wedge}$	$1^{\wedge+}$	$0^{\wedge}$
$0^{\sim}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$	$0^{\wedge}$

Diagram 16. Definicja $\wedge$ dla systemu $\mathbf{CL}_{\{\wedge\},\{\vee,\to,\sim\}}$

$\Rrightarrow_1$	1	0	$1^{\wedge +}$	$1^{\wedge -}$	$0^{\wedge}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$	$1^{\to +}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\sim}$	$0^{\sim}$
1	$1^{\to +}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$
0	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$
$1^{\wedge +}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to +}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$
$1^{\wedge -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$
$0^{\wedge}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$
$1^{\vee +}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to +}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to +}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to +}$	$0^{\to}$
$1^{\vee -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$0^{\to}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$0^{\to}$	$1^{\to +}$	$0^{\to}$
$0^{\vee}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$
$1^{\to +}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to +}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to +}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to +}$	$0^{\to}$
$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$0^{\to}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$0^{\to}$	$1^{\to +}$	$0^{\to}$
$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$
$1^{\sim}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to +}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to +}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\to +}$	$0^{\to}$
$0^{\sim}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to -}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$	$1^{\to +}$

Diagram 17. Definicja $\to$ dla systemu $\mathbf{CL}_{\{\wedge\},\{\vee,\to,\sim\}}$

$\Vvee_1$	1	0	$1^{\wedge +}$	$1^{\wedge -}$	$0^{\wedge}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$	$1^{\to +}$	$1^{\to -}$	$0^{\to}$	$1^{\sim}$	$0^{\sim}$
1	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$
0	$1^{\vee +}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$
$1^{\wedge +}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$
$1^{\wedge -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$
$0^{\wedge}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$
$1^{\vee +}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$
$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$
$0^{\vee}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee +}$	$0^{\vee}$
$1^{\to +}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$
$1^{\to -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$
$0^{\to}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee +}$	$0^{\vee}$
$1^{\sim}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$
$0^{\sim}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee -}$	$1^{\vee -}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee +}$	$1^{\vee +}$	$0^{\vee}$	$1^{\vee +}$	$0^{\sim}$

Diagram 18. Definicja $\vee$ dla systemu $\mathbf{CL}_{\{\wedge\},\{\vee,\to,\sim\}}$

DEFINICJA 8.1.3.

$$\mathfrak{M}_{ext_{\{\wedge\},\{\vee,\to,\sim\}}} = \langle\langle \mathrm{M}_{ext}, \Wedge_1, \Vvee_1, \Rrightarrow_1, \sim_1\rangle, \{1, 1^{\wedge +}, 1^{\vee +}, 1^{\to +}, 1^{\sim}\}\rangle,$$

Niech $\mathbf{CL}_{\{\wedge\},\{\vee,\to,\sim\}}$ będzie zbiorem wszystkich formuł należących do zawartości matrycy $\mathfrak{M}_{ext_{\{\wedge\},\{\vee,\to,\sim\}}}$.

Bezpośrednio z definicji mamy:

FAKT 8.1.2. *Zbiór $\mathbf{CL}_{\{\wedge\},\{\vee,\to,\sim\}}$ jest domknięty na odrywanie, czyli jest P-zgodnym podsystemem logiki klasycznej.*

Rozpatrywany system krzyżuje się z $\mathbf{CL}_{Ex}$:

FAKT 8.1.3.

$$\mathbf{CL}_{Ex} \not\subseteq \mathbf{CL}_{\{\wedge\},\{\vee,\to,\sim\}}$$

Dowód. Na mocy określeń poszczególnych funkcji będących interpretacjami funktorów, mamy, że np. $(p \vee \sim p) \to (p \to p) \notin \mathbf{CL}_{Ex}$, zaś z drugiej strony $(p \vee \sim p) \to (p \to p) \in \mathbf{CL}_{\{\wedge\},\{\vee,\to,\sim\}}$. $\lhd$

Fakt 8.1.4. *Poniższe formuły są tezami systemu* $\mathbf{CL}_{\{\wedge\},\{\vee,\to,\sim\}}$.

(`syl.alt.`) $\sim A \vee \sim B \to (A \to \sim B)$ *gdzie* $\mathrm{fg}(A) \in \{\vee, \to, \sim\}$

(`syl.alt.`$^{-1}$) $(\sim A \to B) \to A \vee B$ *gdzie* $\mathrm{fg}(A) \in \{\vee, \to, \sim\}$

(`zaprz.kon.`) $\sim(A \wedge B) \to (A \to \sim B)$ *gdzie* $\mathrm{fg}(A) \in \{\vee, \to, \sim\}$

(`zaprz.kon.odw.`$^{-}$) $(A \to B) \to \sim(A \wedge \sim B)$

Dowód. *Ad* (`syl.alt.`) Na na mocy określenia działań w $\mathfrak{M}_{ext_{\{\wedge\},\{\vee,\to,\sim\}}}$ mamy, że $V(A \to \sim B) \in \{1^{\to+}, 1^{\to-}, 0^{\to}\}$, zatem jeśli $V(\sim A \vee \sim B) = 0^{\vee}$, to na mocy definicji funkcji $\Rrightarrow_1$ mamy, że $V(\sim A \vee \sim B \to (A \to \sim B)) = 1^{\to+}$. Ponadto widać, że $V(\sim A \vee \sim B) \neq 1^{\vee-}$. Rozważmy więc przypadek, że $V(\sim A \vee \sim B) = 1^{\vee+}$. Jeśli $V(A) \in \{0^{\to}, 0^{\vee}, 0^{\sim}\}$, to niezależnie od przyjmowanej wartości dla formuły $\sim B$, mamy każdorazowo, że $V(A \to \sim B) = 1^{\to+}$, zatem $V(\sim A \vee \sim B \to (A \to \sim B)) = 1^{\to+}$. Jeśli teraz $V(A) \in \{1^{\to+}, 1^{\to-}, 1^{\vee+}, 1^{\vee-}, 1^{\sim}\}$, $V(\sim A) = 0^{\sim}$, czyli $V(\sim B) = 1^{\sim}$. Ale to znaczy, że $V(A \to \sim B) = 1^{\to+}$.

Ad (`syl.alt.`$^{-1}$). Jeśli $V(\sim A \to B) = 0^{\to}$, to na mocy określenia działań w matrycy $\mathfrak{M}_{ext_{\{\wedge\},\{\vee,\to,\sim\}}}$ otrzymujemy wówczas, że $V((\sim A \to B) \to A \vee B) = 1^{\to+}$. W przypadku, gdy $V(\sim A \to B) = 1^{\to-}$, widać, że $V(A \vee B) \in \{1^{\vee-}, 1^{\vee+}\}$, zatem znów $V((\sim A \to B) \to A \vee B) = 1^{\to+}$. Jeśli z kolei $V(\sim A \to B) = 1^{\to+}$, to $\mathrm{fg}(B) \in \{\vee, \to, \sim\}$. Na mocy założenia o formule A również $\mathrm{fg}(A) \in \{\vee, \to, \sim\}$, więc podobnie, jak w logice klasycznej mamy, że $V(A) \in \{1^{\vee-}, 1^{\vee+}, 1^{\to-}, 1^{\to+}, 1^{\sim}\}$ lub $V(B) \in \{1^{\vee-}, 1^{\vee+}, 1^{\to-}, 1^{\to+}, 1^{\sim}\}$, zatem $V(A \vee B) = 1^{\vee+}$, czyli $V((\sim A \to B) \to A \vee B) = 1^{\to+}$.

Ad (`zaprz.kon.`). Jeśli $V(\sim(A \wedge B)) = 0^{\sim}$, to niezależnie od przyjmowanych wartościach dla formuły $(A \to \sim B)$ mamy, że $V(\sim(A \wedge B) \to (A \to \sim B)) = 1^{\to+}$.

Jeśli $V(\sim(A \wedge B)) = 1^{\sim}$, to $V(A \wedge B) = 0^{\wedge}$, czyli $V(A) \in \{0, 0^{\to}, 0^{\wedge}, 0^{\vee}\}$ lub $V(B) \in \{0, 0^{\to}, 0^{\wedge}, 0^{\vee}\}$. W pierwszym przypadku, niezależnie od wartości dla formuły $(A \to \sim B)$ otrzymujemy, że $V(\sim(A \wedge B) \to (A \to \sim B)) = 1^{\to+}$. W drugim zaś $V(\sim B) = 1^{\sim}$, czyli $V(A \to \sim B) = 1^{\to+}$. Zatem znów $V(\sim(A \wedge B) \to (A \to \sim B)) = 1^{\to+}$.

Ad (`zaprz.kon.odw.`$^-$). Jeśli $V(A \to B) = 0^{\to}$, to w każdym z możliwych przypadków odnośnie wartości dla formuły $\sim(A \wedge \sim B)$ mamy, że $V((A \to B) \to \sim(A \wedge \sim B)) = 1^{\to +}$.

Jeśli $V(A \to B) \in \{1^{\to -}, 1^{\to +}\}$, to $V(B) \in \{1,\ 1^{\to +},\ 1^{\to -},\ 1^{\vee +},\ 1^{\vee -},\ 1^{\wedge +},\ 1^{\wedge -},\ 1^{\sim}\}$ lub $V(A) \in \{0,\ 0^{\to},\ 0^{\wedge},\ 0^{\vee}\}$. Jednak zarówno w każdej z pierwszych możliwości, jak i każdorazowo w drugiej możliwości mamy, że $V(\sim(A \wedge \sim B)) = 1^{\sim}$, zatem $V((A \to B) \to \sim(A \wedge \sim B)) = 1^{\sim}$, $\lhd$

Warto zauważyć, że już formuły niewiele różniące się od powyższych nie należą do systemu $\mathbf{CL}_{\{\wedge\},\{\vee,\to,\sim\}}$. Podamy kilka przykładów. Oczywiście każda z wymienionych formuł jest tautologią klasyczną.

Fakt 8.1.5. *Poniższe formuły nie są tezami systemu* $\mathbf{CL}_{\{\wedge\},\{\vee,\to,\sim\}}$

$$\sim p \vee \sim q \to (p \to \sim q) \tag{8.1.1}$$

$$(\sim p \to \sim q) \to p \vee \sim q \tag{8.1.2}$$

$$\sim(p \wedge q) \to (p \to \sim q) \tag{8.1.3}$$

$$\sim(p \to q) \to (p \wedge \sim q) \tag{8.1.4}$$

Dowód. Z wyliczeń mamy, że dla wartościowania V w matrycy, dla którego $V(p) = V(q) = 0$:

$V(\sim p) = 1^{\sim}$, $V(\sim q) = 1^{\sim}$, $V(\sim p \vee \sim q) = 1^{\vee +}$, $V(p \to \sim q) = 1^{\to -}$, czyli $V(\sim p \vee \sim q \to (p \to \sim q)) = 1^{\to -}$.

Ponadto $V(p \vee \sim q) = 1^{\vee -}$ oraz $V(\sim p \to \sim q) = 1^{\to +}$, zatem $V((\sim p \to \sim q) \to p \vee \sim q) = 1^{\to -}$.

Dalej $V(p \wedge q) = 0^{\wedge}$, $V(\sim(p \wedge q)) = 1^{\sim}$, $V(p \to \sim q) = 1^{\to -}$, wobec tego $V(\sim(p \wedge q) \to (p \to \sim q)) = 1^{\to -}$.

Na koniec $V(p \to q) = 1^{\to +}$, $V(\sim(p \to q)) = 0^{\sim}$, $V(p \wedge \sim q) = 0^{\wedge}$, stąd $V(\sim(p \to q) \to (p \wedge \sim q)) = 1^{\to -}$. $\lhd$

8.1.2. Ogólna postać pewnych systemów P-zgodnych logiki klasycznej

Definicja 8.1.4. Niech $\mathsf{g} : \mathrm{M}_{ext} \longrightarrow \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ będzie funkcją zdefiniowaną dla dowolnego $x \in \mathrm{M}_{ext}$ następująco:

$$\mathsf{g}(x) = \begin{cases} 1, & \text{o ile } x \in \{1, 1^{\wedge +}, 1^{\vee +}, 1^{\to +}, 1^{\sim}\} \\ \frac{1}{2}, & \text{o ile } x \in \{1^{\wedge -}, 1^{\vee -}, 1^{\to -}\} \\ 0, & \text{o ile } x \in \{0, 0^{\wedge}, 0^{\vee}, 0^{\to}, 0^{\sim}\}. \end{cases}$$

Wprost z określenia mamy, że:

Fakt 8.1.6. *Dla dowolnych $x, y \in M_{ext}$ jeśli $\mathsf{g}(x) \leqslant \mathsf{g}(y)$, to $\mathsf{f}(x) \leqslant \mathsf{f}(y)$.*

Definicja 8.1.5. Niech dany będzie podział P zbioru $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \sim\}$. Rozważmy matrycę:

$$\mathfrak{M}_{ext_P} \quad = \quad \langle\langle \mathrm{M}_{ext}, \curlywedge_P, \curlyvee_P, \Rrightarrow_P, \sim_P\rangle, \{1, 1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\rightarrow+}, 1^{\sim}\}\rangle,$$

gdzie operacje $\curlywedge_P, \curlyvee_P, \Rrightarrow_P, \sim_P$ określone są następująco:

$$1.\ \ x \curlywedge_P y = \begin{cases} 1^{\wedge+}, & \text{o ile } x \in \{1^{\S_1+}, 1^{\S_1-}, 0^{\S_1}\},\ y \in \{1^{\S_2+}, 1^{\S_2-}, 0^{\S_2}\}, \\ & 1 = \min\{\mathsf{f}(x), \mathsf{f}(y)\} \text{ i istnieje } \pi \in P, \text{ takie że } \S_1, \S_2 \in \pi, \\ & \text{lub o ile } 1 = x = y \\ 1^{\wedge-}, & \text{o ile } x \in \{1^{\S_1+}, 1^{\S_1-}, 0^{\S_1}\},\ y \in \{1^{\S_2+}, 1^{\S_2-}, 0^{\S_2}\}, \\ & 1 = \min\{\mathsf{f}(x), \mathsf{f}(y)\} \text{ i nie istnieje } \pi \in P, \text{ że } \S_1, \S_2 \in \pi, \\ 0^{\wedge}, & \text{o ile } 0 = \min\{\mathsf{f}(x), \mathsf{f}(y)\} \end{cases}$$

$$2.\ \ x \curlyvee_P y = \begin{cases} 1^{\vee+}, & \text{o ile } x \in \{1^{\S_1+}, 1^{\S_1-}, 0^{\S_1}\},\ y \in \{1^{\S_2+}, 1^{\S_2-}, 0^{\S_2}\}, \\ & 1 = \max\{\mathsf{f}(x), \mathsf{f}(y)\} \text{ i istnieje } \pi \in P, \text{ takie że } \S_1, \S_2 \in \pi, \\ & \text{lub o ile } x, y \in \{0, 1\} \text{ i } 1 = \max\{x, y\} \\ 1^{\vee-}, & \text{o ile } x \in \{1^{\S_1+}, 1^{\S_1-}, 0^{\S_1}\},\ y \in \{1^{\S_2+}, 1^{\S_2-}, 0^{\S_2}\}, \\ & 1 = \max\{\mathsf{f}(x), \mathsf{f}(y)\} \\ & \text{i nie istnieje } \pi \in P, \text{ takie że } \S_1, \S_2 \in \pi, \\ 0^{\vee}, & \text{o ile } 0 = \max\{\mathsf{f}(x), \mathsf{f}(y)\}\} \end{cases}$$

$$3.\ \ V_P(A \rightarrow B) = \begin{cases} 1^{\rightarrow+}, & \text{o ile } x \in \{1^{\S_1+}, 1^{\S_1-}, 0^{\S_1}\},\ y \in \{1^{\S_2+}, 1^{\S_2-}, 0^{\S_2}\}, \\ & \text{istnieje } \pi \in P, \text{ takie że } \S_1, \S_2 \in \pi \text{ oraz } \mathsf{g}(x) \leqslant \mathsf{g}(y) \\ & \text{lub o ile } x, y \in \{0, 1\} \text{ i } 1 = \max\{1 - x, y\} \\ 1^{\rightarrow-}, & \text{o ile } x \in \{1^{\S_1+}, 1^{\S_1-}, 0^{\S_1}\},\ y \in \{1^{\S_2+}, 1^{\S_2-}, 0^{\S_2}\}, \\ & \text{nie istnieje } \pi \in P, \text{ że } \S_1, \S_2 \in \pi, \text{ i } \mathsf{f}(x) \leqslant \mathsf{f}(y) \\ 0^{\rightarrow}, & \text{o ile } \mathsf{f}(x) > \mathsf{f}(y) \end{cases}$$

$$4.\ \ V_P(\sim A) = \begin{cases} 1^{\sim}, & \text{o ile } 0 = \mathsf{f}(V_P(A)) \\ 0^{\sim}, & \text{o ile } 1 = \mathsf{f}(V_P(A)) \end{cases}.$$

Definicja 8.1.6. Interpretacją w matrycy nazywamy dowolny homomorfizm $h\colon \mathrm{For} \longrightarrow \mathfrak{M}_{ext_P}$, taki że dla każdej zmiennej a, $h(a) \in \{1, 0\}$.

Oczywiście przy definiowaniu systemów P-zgodnych możemy się posłużyć również pojęciem interpretacji bez wykorzystania homomorfizmów.

Definicja 8.1.7. *P-interpretacją* nazywamy dowolną funkcję

$$V_P \colon \mathrm{For} \longrightarrow \mathrm{M}_{ext},$$

która spełnia następujące warunki:

1. dla każdej zmiennej a, $V_P(a) \in \{1, 0\}$, czyli $V_P|_{\mathrm{Var}}$ jest wartościowaniem zmiennych, dla dowolnych $A, B \in \mathrm{For}$

2. $$V_P(A \wedge B) = \begin{cases} 1^{\wedge +}, & \text{o ile istnieje } \pi \in P, \text{ takie że } \mathrm{fg}(A), \mathrm{fg}(B) \in \pi \\ & \text{i } 1 = \min\{\mathsf{f}(V_P(A)), \mathsf{f}(V_P(B))\} \\ & \text{lub} \\ & A \text{ i } B \text{ są zmiennymi i } 1 = \min\{\mathsf{f}(V_P^\star(A)), \mathsf{f}(V_P^\star(B))\} \\ 1^{\wedge -}, & \text{o ile nie istnieje } \pi \in P, \text{ takie że } \mathrm{fg}(A), \mathrm{fg}(B) \in \pi \\ & \text{i } 1 = \min\{\mathsf{f}(V_P(A)), \mathsf{f}(V_P(B))\} \\ 0^{\wedge}, & \text{o ile } 0 = \min\{\mathsf{f}(V_P(A)), \mathsf{f}(V_P(B))\} \end{cases}$$

3. $$V_P(A \vee B) = \begin{cases} 1^{\vee +}, & \text{o ile istnieje } \pi \in P, \text{ takie że } \mathrm{fg}(A), \mathrm{fg}(B) \in \pi \\ & \text{i } 1 = \max\{\mathsf{f}(V_P(A)), \mathsf{f}(V_P(B))\} \\ & \text{lub} \\ & \text{o ile } A \text{ i } B \text{ są zmiennymi} \\ & \text{oraz } 1 = \max\{\mathsf{f}(V_P^\star(A)), \mathsf{f}(V_P^\star(B))\} \\ 1^{\vee -}, & \text{o ile nie istnieje } \pi \in P, \text{ takie że } \mathrm{fg}(A), \mathrm{fg}(B) \in \pi \\ & \text{i } 1 = \max\{\mathsf{f}(V_P(A)), \mathsf{f}(V_P(B))\} \\ 0^{\vee}, & \text{o ile } 0 = \max\{\mathsf{f}(V_P(A)), \mathsf{f}(V_P(B))\} \end{cases}$$

4. $$V_P(A \rightarrow B) = \begin{cases} 1^{\rightarrow +}, & \text{o ile istnieje } \pi \in P, \text{ takie że } \mathrm{fg}(A), \mathrm{fg}(B) \in \pi \\ & \text{i } \mathsf{g}(V_P(A)) \leqslant \mathsf{g}(V_P(B)) \\ & \text{lub} \\ & \text{o ile } A \text{ i } B \text{ są zmiennymi oraz } \mathsf{g}(V_P(A)) \leqslant \mathsf{g}(V_P(B)), \\ 1^{\rightarrow -}, & \text{o ile nie istnieje } \pi \in P, \text{ takie że } \mathrm{fg}(A), \mathrm{fg}(B) \in \pi \\ & \text{i } \mathsf{f}(V_P(A)) \leqslant \mathsf{f}(V_P(B)) \\ & \text{lub} \\ & \text{o ile istnieje } \pi \in P, \text{ takie że } \mathrm{fg}(A), \mathrm{fg}(B) \in \pi \\ & \text{oraz } \mathsf{f}(V_P(A)) \leqslant \mathsf{f}(V_P(B)), \text{ i } \mathsf{g}(V_P(A)) > \mathsf{g}(V_P(B)) \\ 0^{\rightarrow}, & \text{o ile } \mathsf{f}(V_P(A)) > \mathsf{f}(V_P(B)) \end{cases}$$

5. $$V_P(\sim A) = \begin{cases} 1^{\sim}, & \text{o ile } 0 = \mathsf{f}(V_P(A)) \\ 0^{\sim}, & \text{o ile } 1 = \mathsf{f}(V_P(A)) \end{cases}.$$

Standardowo, przez indukcję ze względu na złożoność formuły otrzymujemy:

FAKT 8.1.7. *Dla dowolnego wartościowania zmiennych V w zbiór $\{0,1\}$ istnieje dokładnie jedno rozszerzenie funkcji V do P-interpretacji.*

Zauważmy, że:

FAKT 8.1.8.

$$\mathbf{CL}_{Ex} = \mathbf{CL}_{\{\vee\},\{\to\},\{\wedge\},\{\sim\}}$$

Łatwo widać, że dzięki samemu określeniu pojęcia P-interpretacji, przez fakt 8.1.6 mamy:

FAKT 8.1.9. *Dla dowolnego wartościowania zmiennych V, dowolnych partycji P_1 i P_2 zbioru $\{\wedge,\vee,\to,\sim\}$ oraz dowolnej formuły A zachodzi:*

$$\mathsf{f}(V_{P_1}(A)) = \mathsf{f}(V_{P_2}(A)),$$

gdzie V_{P_1} i V_{P_2} to rozszerzenia funkcji V odpowiednio do P_1- i P_2-interpretacji.

DEFINICJA 8.1.8. Dla dowolnego podziału P, niech $\mathbf{CL}_P$ będzie zbiorem wszystkich takich formuł A, że dla dowolnej P-interpretacji V_P, zachodzi: $V_P(A) \in \{1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\to+}, 1^{\sim}\}$.

Zatem wprost z określeń mamy:

FAKT 8.1.10. *Dla dowolnego podziału P i dowolnej formuły A, $A \in \mathbf{CL}_P$ wtw A należy do zawartości matrycy $\mathfrak{M}_{ext_P}$.*

Przez indukcję ze względu na złożoność formuły otrzymujemy, że

WNIOSEK 8.1.2. *Dla dowolnego podziału P,*

$$\mathbf{CL}_P \subseteq \mathrm{For}_P.$$

Zachodzi następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 8.1.1. *Niech P_1, P_2 będą podziałami zbioru $\{\wedge,\vee,\to,\sim\}$. Jeśli dla każdego $\pi \in P_1$ istnieje $\pi' \in P_2$, takie że $\pi \subseteq \pi'$, to dla dowolnej tezy $A \in \mathbf{CL}_{P_1}$, gdzie* $\mathrm{fg}(A) \neq$ *'$\to$', zachodzi: $A \in \mathbf{CL}_{P_2}$.*

DOWÓD. Niech dane będą podziały P_1, P_2 zbioru $\{\wedge,\vee,\to,\sim\}$, spełniające warunek, iż dla każdego $\pi \in P_1$ istnieje $\pi' \in P_2$, takie że $\pi \subseteq \pi'$, Niech A należy do systemu $\mathbf{CL}_{P_1}$. Rozważmy dowolną P_2-interpretację

V_{P_2}. Pokażemy, że $V_{P_2}(A) \in \{1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\to+}, 1^{\sim}\}$. Po pierwsze zauważmy, że A nie jest zmienną. Istotnie, zgodnie z definicją P-interpretacji, wystarczy rozważyć wartościowanie, które danej zmiennej przyporzadkowuje wartość 0.

Rozważmy przypadek, że A ma postać $B \wedge C$, dla pewnych formuł B, C. Obcięcie funkcji V_{P_2} do zbioru zmiennych wyznacza P_1-interpretację. Oznaczmy ją przez V_{P_1}. Na mocy założenia, $V_{P_1}(B \wedge C) \in \{1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\to+}, 1^{\sim}\}$, czyli $V_{P_1}(B \wedge C) = 1^{\wedge+}$. Na mocy określenia P-interpretacji otrzymujemy, że istnieje $\pi \in P_1$, takie że $\mathrm{fg}(A), \mathrm{fg}(B) \in \pi$ oraz $1 = \min\{\mathsf{f}(V_{P_1}(A)), \mathsf{f}(V_{P_1}(B))\}$. Z kolei dzięki faktowi 8.1.9, mamy też, że $1 = \min\{\mathsf{f}(V_{P_2}(A)), \mathsf{f}(V_{P_2}(B))\}$. Na mocy założenia widzimy, że istnieje $\pi' \in P_2$, takie że $\mathrm{fg}(A), \mathrm{fg}(B) \in \pi$. Zatem przez definicję 8.1.7 wnioskujemy, że $V_{P_2}(B \wedge C) = 1^{\wedge+}$.

Tezę dla Przypadku alternatywy dowodzimy analogicznie, zaś teza w przypadku negacji wynika wprost z faktu 8.1.9. $\lhd$

Jak widać, w twierdzeniu 8.1.1 pominięto przypadek formuły, których funktorem głównym jest implikacja. Mamy bowiem następującą obserwację. Jest ona uogólnieniem faktu 8.1.3.

Fakt 8.1.11. *Dla dowolnego podziału $P \neq \{\{\wedge\}, \{\vee\}, \{\to\}, \{\sim\}\}$ istnieje formuła A, taka że $A \in \mathbf{CL}_{Ex}$ oraz $A \notin \mathbf{CL}_P$.*

Dowód. Dla dowolnej partycji $P \neq \{\{\wedge\}, \{\vee\}, \{\to\}, \{\sim\}\}$ istnieje $\pi \in P$, takie że któryś z następujących zbiorów jest podzbiorem π: $\{\wedge, \vee\}$, $\{\wedge, \to\}$, $\{\wedge, \sim\}$, $\{\vee, \to\}$, $\{\vee, \sim\}$, $\{\to, \sim\}$. Łatwo widać że następujące formuły nie należą do odpowiednich systemów, choć każda z nich należy do systemu $\mathbf{CL}_{Ex}$.

$$(p \wedge p \to p \vee p) \to ({\sim}{\sim} p \to p)$$
$$(p \wedge p \to (p \to p)) \to ({\sim}{\sim} p \to p)$$
$$(p \wedge p \to {\sim}{\sim} p) \to ({\sim}{\sim} p \to p)$$
$$(p \vee p \to (p \to p)) \to ({\sim}{\sim} p \to p)$$
$$(p \vee p \to {\sim}{\sim} p) \to ({\sim}{\sim} p \to p)$$
$$((p \to p) \to {\sim}{\sim} p) \to ({\sim}{\sim} p \to p) \qquad \lhd$$

Mamy ponadto odwrotną zależność:

Fakt 8.1.12. *Dla dowolnego podziału $P \neq \{\{\wedge\}, \{\vee\}, \{\to\}, \{\sim\}\}$ istnieje formuła A, taka że $A \notin \mathbf{CL}_{Ex}$ oraz $A \in \mathbf{CL}_P$.*

Dowód. Dla dowolnej partycji $P \neq \{\{\wedge\},\{\vee\},\{\rightarrow\},\{\sim\}\}$ istnieje $\pi \in P$, takie że któryś z następujących zbiorów jest podzbiorem π: $\{\wedge,\vee\}$, $\{\wedge,\rightarrow\}$, $\{\wedge,\sim\}$, $\{\vee,\rightarrow\}$, $\{\vee,\sim\}$, $\{\rightarrow,\sim\}$. Łatwo widać że następujące formuły należą do odpowiednich systemów i żadna z nich nie należy do systemu $\mathbf{CL}_{Ex}$:

$$p \wedge p \rightarrow p \vee p$$
$$p \wedge p \rightarrow (p \rightarrow p)$$
$$p \wedge p \rightarrow \sim\sim p$$
$$p \vee p \rightarrow (p \rightarrow p)$$
$$p \vee p \rightarrow \sim\sim p$$
$$(p \rightarrow p) \rightarrow \sim\sim(p \rightarrow p) \qquad \triangleleft$$

Ponadto mamy bardziej ogólne stwierdzenie.

Fakt 8.1.13. *Dla dowolnych podziałów $P_1 \neq P_2$ istnieje formuła A, taka że $A \in \mathbf{CL}_{P_1}$ i $A \notin \mathbf{CL}_{P_2}$ oraz istnieje formuła A, taka że $A \notin \mathbf{CL}_{P_1}$ i $A \in \mathbf{CL}_{P_2}$.*

Dowód. Najpierw zauważmy, że

$$\mathbf{CL}_{\{\rightarrow\},\{\sim\},\{\wedge,\vee\}} \nsubseteq \mathbf{CL}_{\{\wedge,\vee,\rightarrow,\sim\}}$$
$$\mathbf{CL}_{\{\rightarrow\},\{\sim\},\{\wedge,\vee\}} \nsubseteq \mathbf{CL}_{\{\vee\},\{\wedge,\rightarrow,\sim\}}$$
$$\mathbf{CL}_{\{\rightarrow\},\{\sim\},\{\wedge,\vee\}} \nsubseteq \mathbf{CL}_{\{\wedge\},\{\vee,\rightarrow,\sim\}}$$

Dla wykazania powyższych zależności wystarczy odnotować, że formuła

$$(\sim p \rightarrow (p \rightarrow p)) \rightarrow (\sim\sim p \rightarrow p)$$

należy do systemu $\mathbf{CL}_{\{\rightarrow\},\{\sim\},\{\wedge,\vee\}}$ i nie należy do żadnego z systemów wymienionych powyżej po prawej stronie.

Z kolei dla wykazania, że

$$\mathbf{CL}_{\{\rightarrow\},\{\sim\},\{\wedge,\vee\}} \nsubseteq \mathbf{CL}_{\{\rightarrow\},\{\wedge,\vee,\sim\}}$$
$$\mathbf{CL}_{\{\rightarrow\},\{\sim\},\{\wedge,\vee\}} \nsubseteq \mathbf{CL}_{\{\sim\},\{\rightarrow,\wedge,\vee\}}$$

podobnie powołajmy się odpowiednio na formuły:

$$(\sim\sim p \rightarrow (p \wedge p)) \rightarrow (\sim\sim p \rightarrow p)$$
$$((p \rightarrow p) \rightarrow (p \wedge p)) \rightarrow (\sim\sim p \rightarrow p)$$

W przypadku następujących zależności

$$\mathbf{CL}_{\{\to\},\{\sim\},\{\wedge,\vee\}} \nsubseteq \mathbf{CL}_{\{\wedge,\vee\},\{\to,\sim\}}$$
$$\mathbf{CL}_{\{\to\},\{\sim\},\{\wedge,\vee\}} \nsubseteq \mathbf{CL}_{\{\wedge,\to\},\{\vee,\sim\}}$$
$$\mathbf{CL}_{\{\to\},\{\sim\},\{\wedge,\vee\}} \nsubseteq \mathbf{CL}_{\{\wedge,\sim\},\{\to,\vee\}}$$

rozważmy następujące formuły:

$$(\sim\sim p \to (p \to p)) \to (\sim\sim p \to p)$$
$$(\sim\sim p \to (p \vee p)) \to (\sim\sim p \to p)$$
$$((p \to p) \to (p \vee p)) \to (\sim\sim p \to p)$$

Dla poniższych związków

$$\mathbf{CL}_{\{\to\},\{\sim\},\{\wedge,\vee\}} \nsubseteq \mathbf{CL}_{\{\wedge\},\{\vee\},\{\to,\sim\}}$$
$$\mathbf{CL}_{\{\to\},\{\sim\},\{\wedge,\vee\}} \nsubseteq \mathbf{CL}_{\{\wedge\},\{\to\},\{\vee,\sim\}}$$
$$\mathbf{CL}_{\{\to\},\{\sim\},\{\wedge,\vee\}} \nsubseteq \mathbf{CL}_{\{\vee\},\{\to\},\{\wedge,\sim\}}$$
$$\mathbf{CL}_{\{\to\},\{\sim\},\{\wedge,\vee\}} \nsubseteq \mathbf{CL}_{\{\wedge\},\{\sim\},\{\to,\vee\}}$$
$$\mathbf{CL}_{\{\to\},\{\sim\},\{\wedge,\vee\}} \nsubseteq \mathbf{CL}_{\{\vee\},\{\sim\},\{\to,\wedge\}}$$

wystarczy przywołać formuły:

$$(\sim\sim p \to (p \to p)) \to (\sim\sim p \to p)$$
$$(\sim\sim p \to (p \vee p)) \to (\sim\sim p \to p)$$
$$(\sim\sim p \to (p \wedge p)) \to (\sim\sim p \to p)$$
$$((p \to p) \to (p \vee p)) \to (\sim\sim p \to p)$$
$$((p \to p) \to (p \wedge p)) \to (\sim\sim p \to p)$$

Analogicznie, dzięki formule $(\sim\sim p \to (p \to p)) \to (\sim\sim p \to p)$ pokazujemy, że

$$\mathbf{CL}_{\{\wedge,\vee,\to,\sim\}} \nsubseteq \mathbf{CL}_{\{\to\},\{\sim\},\{\wedge,\vee\}}$$
$$\mathbf{CL}_{\{\vee\},\{\wedge,\to,\sim\}} \nsubseteq \mathbf{CL}_{\{\to\},\{\sim\},\{\wedge,\vee\}}$$
$$\mathbf{CL}_{\{\wedge\},\{\vee,\to,\sim\}} \nsubseteq \mathbf{CL}_{\{\to\},\{\sim\},\{\wedge,\vee\}}$$
$$\mathbf{CL}_{\{\wedge,\vee\},\{\to,\sim\}} \nsubseteq \mathbf{CL}_{\{\to\},\{\sim\},\{\wedge,\vee\}}$$
$$\mathbf{CL}_{\{\wedge\},\{\vee\},\{\to,\sim\}} \nsubseteq \mathbf{CL}_{\{\to\},\{\sim\},\{\wedge,\vee\}}$$

Formuła $(\sim\sim p \to (p \vee p)) \to (\sim\sim p \to p)$ pozwala uzasadnić, że:

$$\mathbf{CL}_{\{\to\},\{\wedge,\vee,\sim\}} \nsubseteq \mathbf{CL}_{\{\to\},\{\sim\},\{\wedge,\vee\}}$$
$$\mathbf{CL}_{\{\wedge,\to\},\{\vee,\sim\}} \nsubseteq \mathbf{CL}_{\{\to\},\{\sim\},\{\wedge,\vee\}}$$
$$\mathbf{CL}_{\{\wedge\},\{\to\},\{\vee,\sim\}} \nsubseteq \mathbf{CL}_{\{\to\},\{\sim\},\{\wedge,\vee\}}$$

Formuła $((p \to p) \to (p \vee p)) \to (\sim\sim p \to p)$ należy do każdego z systemów wymienionych poniżej po lewej stronie:

$$\mathbf{CL}_{\{\sim\},\{\to,\wedge,\vee\}} \nsubseteq \mathbf{CL}_{\{\to\},\{\sim\},\{\wedge,\vee\}}$$
$$\mathbf{CL}_{\{\wedge,\sim\},\{\to,\vee\}} \nsubseteq \mathbf{CL}_{\{\to\},\{\sim\},\{\wedge,\vee\}}$$
$$\mathbf{CL}_{\{\wedge\},\{\sim\},\{\to,\vee\}} \nsubseteq \mathbf{CL}_{\{\to\},\{\sim\},\{\wedge,\vee\}}$$

Na koniec powołując się formułę $(p \wedge p) \to (p \vee p)$ uzasadniamy, że

$$\mathbf{CL}_{\{\vee\},\{\to\},\{\wedge,\sim\}} \nsubseteq \mathbf{CL}_{\{\to\},\{\sim\},\{\wedge,\vee\}}$$
$$\mathbf{CL}_{\{\vee\},\{\sim\},\{\to,\wedge\}} \nsubseteq \mathbf{CL}_{\{\to\},\{\sim\},\{\wedge,\vee\}}$$

Pozostałe możliwe przypadki uzasadniamy podobnie. $\lhd$

Problem z naturalną — jak by się wydawało — odpowiedniością między podziałami zbioru stałych a systemami skłania do rozważenia innej klasy systemów nawiązujących do idei P-zgodności. Wprowadźmy więc odrobinę zmodyfikowany sposób rozumienia pojęcia interpretacji.

Definicja 8.1.9. $P^\star$-interpretacją nazywamy dowolną funkcję

$$V_P^\star\colon \mathrm{For} \longrightarrow \mathrm{M}_{ext},$$

która spełnia następujące warunki:

1. dla każdej zmiennej a, $V_P^\star(a) \in \{1, 0\}$,

2. $$V_P^\star(A \wedge B) = \begin{cases} 1^{\wedge+}, & \text{o ile istnieje } \pi \in P, \text{ takie że } \mathrm{fg}(A), \mathrm{fg}(B) \in \pi \\ & \text{i } 1 = \min\{\mathsf{f}(V_P^\star(A)), \mathsf{f}(V_P^\star(B))\} \\ & \text{lub} \\ & A \text{ i } B \text{ są zmiennymi i } 1 = \min\{\mathsf{f}(V_P^\star(A)), \mathsf{f}(V_P^\star(B))\} \\ 1^{\wedge-}, & \text{o ile nie istnieje } \pi \in P, \text{ takie że } \mathrm{fg}(A), \mathrm{fg}(B) \in \pi \\ & \text{i } 1 = \min\{\mathsf{f}(V_P^\star(A)), \mathsf{f}(V_P^\star(B))\} \\ 0^{\wedge}, & \text{o ile } 0 = \min\{\mathsf{f}(V_P^\star(A)), \mathsf{f}(V_P^\star(B))\} \end{cases}$$

$$3.\ V_P^\star(A\vee B) = \begin{cases} 1^{\vee+}, & \text{o ile istnieje } \pi\in P, \text{ takie że } \mathrm{fg}(A),\mathrm{fg}(B)\in\pi \\ & \text{i } 1=\max\{\mathsf{f}(V_P^\star(A)),\mathsf{f}(V_P^\star(B))\} \\ & \text{lub} \\ & \text{o ile } A \text{ i } B \text{ są zmiennymi} \\ & \text{oraz } 1=\max\{\mathsf{f}(V_P^\star(A)),\mathsf{f}(V_P^\star(B))\} \\ 1^{\vee-}, & \text{o ile nie istnieje } \pi\in P, \text{ takie że } \mathrm{fg}(A),\mathrm{fg}(B)\in\pi \\ & \text{i } 1=\max\{\mathsf{f}(V_P^\star(A)),\mathsf{f}(V_P^\star(B))\} \\ 0^{\vee}, & \text{o ile } 0=\max\{\mathsf{f}(V_P^\star(A)),\mathsf{f}(V_P^\star(B))\} \end{cases}$$

$$4.\ V_P^\star(A\to B)=\begin{cases} 1^{\to+}, & \text{o ile istnieje } \pi\in P, \text{ takie że } \mathrm{fg}(A),\mathrm{fg}(B)\in\pi \\ & \text{oraz } \mathsf{g}(V_P^\star(A))\leqslant \mathsf{g}(V_P^\star(B)), \\ & \text{i nieprawda, że } \mathsf{g}(V_P^\star(A))=\mathsf{g}(V_P^\star(B))=\tfrac{1}{2} \\ & \text{lub} \\ & \text{o ile } A \text{ i } B \text{ są zmiennymi oraz } \mathsf{g}(V_P^\star(A))\leqslant \mathsf{g}(V_P^\star(B)), \\ 1^{\to-}, & \text{o ile } \mathsf{f}(V_P(A))\leqslant \mathsf{f}(V_P(B)) \\ & \text{i nie istnieje } \pi\in P, \text{ takie że } \mathrm{fg}(A),\mathrm{fg}(B)\in\pi \\ & \text{lub} \\ & \text{o ile } \mathsf{g}(V_P^\star(A))=\mathsf{g}(V_P^\star(B))=\tfrac{1}{2} \\ & \text{lub} \\ & \text{o ile } \mathsf{g}(V_P^\star(A))=1 \text{ i } \mathsf{g}(V_P^\star(B))=\tfrac{1}{2} \\ 0^{\to}, & \text{o ile } \mathsf{f}(V_P^\star(A))>\mathsf{f}(V_P^\star(B)) \end{cases}$$

$$5.\ V_P^\star(\sim A) = \begin{cases} 1^{\sim}, & \text{o ile } 0=\mathsf{f}(V_P^\star(A)) \\ 0^{\sim}, & \text{o ile } 1=\mathsf{f}(V_P^\star(A)). \end{cases}$$

Odnotujmy, że zmiany w powyższym określeniu względem pojęcia P-interpretacji dotyczą funktora implikacji. Znów widzimy, że zachodzi:

Fakt 8.1.14. *Dla dowolnego wartościowania zmiennych V w zbiór $\{0,1\}$ istnieje dokładnie jedno rozszerzenie funkcji V do $P^\star$-interpretacji.*

Definicja 8.1.10. Dla dowolnego podziału P, niech $\mathbf{CL}_P^\star$ będzie zbiorem wszystkich takich formuł A, że dla dowolnej $P^\star$-interpretacji $V_P^\star$, zachodzi: $V_P^\star(A)\in\{1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\to+}, 1^{\sim}\}$.

Stosując indukcję ze względu na złożoność formuły, dzięki temu, że jeśli $\mathsf{g}(V_P^\star(A))\leqslant \mathsf{g}(V_P^\star(B))$, to $\mathsf{f}(V_P^\star(A))\leqslant \mathsf{f}(V_P^\star(B))$, oraz jeżeli albo

$\mathsf{g}(V_P^\star(A)) = \mathsf{g}(V_P^\star(B)) = \frac{1}{2}$, albo $\mathsf{g}(V_P^\star(A)) = 1$ i $\mathsf{g}(V_P^\star(B)) = \frac{1}{2}$, to również $\mathsf{f}(V_P^\star(A)) \leqslant \mathsf{f}(V_P^\star(B))$, otrzymujemy następujący:

Fakt 8.1.15. *Dla dowolnego wartościowania zmiennych V, dowolnych partycji P_1 i P_2 zbioru $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \sim\}$ oraz dowolnej formuły A zachodzi:*

$$\mathsf{f}(V_{P_1}^\star(A)) = \mathsf{f}(V_{P_2}^\star(A)),$$

gdzie $V_{P_1}^\star$ i $V_{P_2}^\star$ to rozszerzenia funkcji V odpowiednio do $P_1^\star$- i $P_2^\star$-interpretacji.

Wprost z samych określeń mamy, że

Fakt 8.1.16. *Dla dowolnej formuły, której funktorem głównym jest §, wartości przyjmowane przez P-interpretacje i $P^\star$-interpretacje należą do zbioru $\{1^{\S+}, 1^{\S-}, 0^{\S}\}$ — o ile § jest dwuargumentowy, zaś do zbioru $\{1^{\sim}, 0^{\sim}\}$ — w przypadku negacji.*

Dla dowolnej zmiennej wartości przyjmowane przez P-interpretacje i $P^\star$-interpretacje należą do zbioru $\{1, 0\}$.

Mamy następujące:

Twierdzenie 8.1.2. *Dla dowolnego podziału P zbioru $\{\sim, \wedge, \vee, \rightarrow\}$:*

$$\mathbf{CL}_P^\star \subseteq \mathbf{CL}_P$$

Dowód. Załóżmy, że $A \in \mathbf{CL}_P^\star$. Niech dana będzie P-interpretacja V_P. Rozważmy jej obcięcie do zbioru zmiennych. Niech ponadto $V_P^\star$ będzie rozszerzeniem tego obcięcia do $P^\star$-interpretacji.

Pokażemy indukcyjnie ze względu na złożoność formuły, że dla dowolnej formuły A:

1. jeśli $V_P^\star(A) \in \{0,\ 0^\wedge,\ 0^\vee,\ 0^\rightarrow,\ 0^\sim\}$, to $V_P(A) \in \{0,\ 0^\wedge,\ 0^\vee,\ 0^\rightarrow,\ 0^\sim\}$,
2. jeśli $V_P^\star(A) \in \{1^{\wedge-},\ 1^{\vee-},\ 1^{\rightarrow-}\}$, to $V_P(A) \in \{1^{\wedge-},\ 1^{\wedge+},\ 1^{\vee-},\ 1^{\vee+},\ 1^{\rightarrow-},\ 1^{\rightarrow+}\}$,
3. jeśli $V_P^\star(A) \in \{1, 1^{\wedge+},\ 1^{\vee+},\ 1^{\rightarrow+},\ 1^\sim\}$, to $V_P(A) \in \{1, 1^{\wedge+},\ 1^{\vee+},\ 1^{\rightarrow+},\ 1^\sim\}$.

Przypadek zmiennej jest oczywisty.

Niech A ma postać $B \wedge C$, dla pewnych formuł B, C. Niech $V_P^\star(B \wedge C) \in \{1^{\wedge+},\ 1^{\vee+},\ 1^{\rightarrow+},\ 1^\sim\}$, czyli $V_P^\star(B \wedge C) = 1^{\wedge+}$. Istnieje więc $\pi \in P$, takie że $\mathrm{fg}(A), \mathrm{fg}(B) \in \pi$ oraz $1 = \min\{\mathsf{f}(V_P^\star(A)), \mathsf{f}(V_P^\star(B))\}$, czyli

$1 = \mathsf{f}(V_P^\star(A)) = \mathsf{f}(V_P^\star(B))$. Zatem na mocy określenia funkcji f mamy, że $V_P^\star(A), V_P^\star(B) \in \{1, 1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\to+}, 1^{\sim}, 1^{\wedge-}, 1^{\vee-}, 1^{\to-}\}$ Na mocy założenia indukcyjnego mamy, że $V(A), V(B) \in \{1, 1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\to+}, 1^{\sim}, 1^{\wedge-}, 1^{\vee-}, 1^{\to-}\}$, czyli przez określenie funkcji f wnioskujemy, że $1 = \min\{\mathsf{f}(V_P(A)), \mathsf{f}(V_P(B))\}$. Zatem przez definicję 8.1.7 wnioskujemy, że $V_P(B \wedge C) = 1^{\wedge+}$.

Podobnie rozumowanie przebiega w przypadku, gdy $V_P^\star(B \wedge C) = 1^{\wedge-}$ jak i w przypadku, gdy $V_P^\star(B \wedge C) = 0^{\wedge}$.

Analogicznie dowód przebiega w przypadku alternatywy i negacji.

Rozpatrzmy przypadek implikacji. Przypuśćmy, że A ma postać $B \to C$, dla pewnych formuł B, C. Niech $V_P^\star(B \to C) \in \{1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\to+}, 1^{\sim}\}$. Wówczas $V_P^\star(B \to C) = 1^{\to+}$. Na mocy określenia $P^\star$-interpretacji otrzymujemy, że istnieje $\pi \in P_1$, takie że $\mathrm{fg}(A), \mathrm{fg}(B) \in \pi$, $\mathsf{g}(V_P^\star(A)) \leqslant \mathsf{g}(V_P^\star(B))$ oraz nie jest tak, że $\mathsf{g}(V_P^\star(A)) = \mathsf{g}(V_P^\star(B)) = \frac{1}{2}$. Rozważmy przypadek, że $\mathsf{g}(V_P^\star(A)) = \frac{1}{2}$ oraz $\mathsf{g}(V_P^\star(B)) = 1$. Na mocy założenia indukcyjnego oraz dzięki definicji funkcji g widzimy, że $\mathsf{g}(V_P(A)) \leqslant \mathsf{g}(V_P(B))$. A to wystarcza do stwierdzenia, że $V_P(A \to B) = 1^{\to+}$. Podobnie przebiega dowód w pozostałych możliwych przypadkach. $\lhd$

Widzimy, że

Wniosek 8.1.3. *Dla dowolnego podziału P zbioru $\{\sim, \wedge, \vee, \to\}$:*

$$\mathbf{CL}_P^\star \subsetneq \mathbf{CL}_P$$

Dowód. Wystarczy zauważyć, że dla dowolnego podziału P zbioru $\{\sim, \wedge, \vee, \to\}$, formuła $p \wedge \sim p \to p \wedge \sim p \in \mathbf{CL}_P$, podczas gdy $p \wedge \sim p \to p \wedge \sim p \notin \mathbf{CL}_P^\star$. $\lhd$

Przez wniosek 8.1.2 otrzymujemy ponadto:

Wniosek 8.1.4. *Dla dowolnego podziału P zbioru $\{\sim, \wedge, \vee, \to\}$:*

$$\mathbf{CL}_P^\star \subseteq \mathrm{For}_P.$$

Lemat 8.1.1. *Niech P_1, P_2 będą podziałami zbioru $\{\wedge, \vee, \to, \sim\}$. Jeśli dla każdego $\pi \in P_1$ istnieje $\pi' \in P_2$, takie że $\pi \subseteq \pi'$, to dla dowolnego wartościowania zmiennych V i dowolnej formuły A, jeśli $V_{P_1}^\star(A) \in \{1, 1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\to+}, 1^{\sim}\}$, to $V_{P_2}^\star(A) \in \{1, 1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\to+}, 1^{\sim}\}$, gdzie $V_{P_1}^\star$ i $V_{P_2}^\star$, to rozszerzenia wartościowania V odpowiednio do $P_1^\star$- i $P_2^\star$-interpretacji.*

Dowód. Niech dane będą podziały P_1, P_2 zbioru $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \sim\}$, spełniające warunek, iż dla każdego $\pi \in P_1$ istnieje $\pi' \in P_2$, takie że $\pi \subseteq \pi'$.

Pokażemy indukcyjnie ze względu na złożoność formuły, że dla dowolnej formuły A, jeśli $V^\star_{P_1}(A) \in \{1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\rightarrow+}, 1^{\sim}\}$, to $V^\star_{P_2}(A) \in \{1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\rightarrow+}, 1^{\sim}\}$, gdzie $V^\star_{P_1}$ i $V^\star_{P_2}$ są rozszerzeniami wartościowania V odpowiednio do $P^\star_1$- i $P^\star_2$-interpretacji.

Przypadek zmiennej jest oczywisty.

Rozważmy przypadek, że A ma postać $B \wedge C$, dla pewnych formuł B, C. Jeśli $V^\star_{P_1}(B \wedge C) \in \{1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\rightarrow+}, 1^{\sim}\}$, to istnieje $\pi \in P_1$, takie że $\mathrm{fg}(A), \mathrm{fg}(B) \in \pi$ oraz $1 = \min\{\mathsf{f}(V^\star_{P_1}(A)), \mathsf{f}(V^\star_{P_1}(B))\}$. Z kolei dzięki faktowi 8.1.15, mamy też, że $1 = \min\{\mathsf{f}(V^\star_{P_2}(A)), \mathsf{f}(V^\star_{P_2}(B))\}$. Na mocy założenia widzimy, że istnieje $\pi' \in P_2$, takie że $\mathrm{fg}(A), \mathrm{fg}(B) \in \pi$. Zatem przez definicję 8.1.9 wnioskujemy, że $V^\star_{P_2}(B \wedge C) = 1^{\wedge+}$.

Przypadek alternatywy dowodzimy analogicznie, zaś przypadek negacji wynika znów wprost z faktu 8.1.15.

Rozważmy więc przypadek implikacji. Przypuśćmy, że A ma postać $B \rightarrow C$, dla pewnych formuł B, C. Skoro $V^\star_{P_1}(B \rightarrow C) \in \{1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\rightarrow+}, 1^{\sim}\}$, to $V^\star_{P_1}(B \rightarrow C) = 1^{\rightarrow+}$. Na mocy określenia $P^\star$-interpretacji otrzymujemy, że istnieje $\pi \in P_1$, takie że $\mathrm{fg}(A), \mathrm{fg}(B) \in \pi$, $\mathsf{g}(V^\star_{P_1}(A)) \leqslant \mathsf{g}(V^\star_{P_1}(B))$ oraz nie jest tak, że $\mathsf{g}(V^\star_{P_1}(A)) = \mathsf{g}(V^\star_{P_1}(B)) = \frac{1}{2}$.

Możliwe przypadki, to

1° $V^\star_{P_1}(A) \in \{0, 0^{\wedge}, 0^{\vee}, 0^{\rightarrow}, 0^{\sim}\}$ i $V^\star_{P_1}(B) \in \{0, 0^{\wedge}, 0^{\vee}, 0^{\rightarrow}, 0^{\sim}\}$

2° $V^\star_{P_1}(A) \in \{0, 0^{\wedge}, 0^{\vee}, 0^{\rightarrow}, 0^{\sim}\}$ i $V^\star_{P_1}(B) \in \{1^{\wedge-}, 1^{\vee-}, 1^{\rightarrow-}\}$

3° $V^\star_{P_1}(A) \in \{0, 0^{\wedge}, 0^{\vee}, 0^{\rightarrow}, 0^{\sim}\}$ i $V^\star_{P_1}(B) \in \{1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\rightarrow+}, 1^{\sim}\}$

4° $V^\star_{P_1}(A) \in \{1^{\wedge-}, 1^{\vee-}, 1^{\rightarrow-}\}$ i $V^\star_{P_1}(B) \in \{1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\rightarrow+}, 1^{\sim}\}$

5° $V^\star_{P_1}(A) \in \{1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\rightarrow+}, 1^{\sim}\}$ i $V^\star_{P_1}(B) \in \{1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\rightarrow+}, 1^{\sim}\}$

Ad 1°. Na mocy faktu 8.1.15 również $V^\star_{P_2}(A) \in \{0, 0^{\wedge}, 0^{\vee}, 0^{\rightarrow}, 0^{\sim}\}$ i $V^\star_{P_2}(B) \in \{1^{\wedge-}, 1^{\vee-}, 1^{\rightarrow-}\}$, ponieważ ponadto na mocy założenia istnieje $\pi' \in P_2$, takie że $\mathrm{fg}(A), \mathrm{fg}(B) \in \pi'$, zatem $V^\star_{P_2}(B \rightarrow C) \in \{1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\rightarrow+}, 1^{\sim}\}$, w szczególności nawet $V^\star_{P_2}(B \rightarrow C) = 1^{\rightarrow+}$.

Ad 2° i 3°. Wystarczy zauważyć, że zarówno jeśli $V^\star_{P_1}(B) \in \{1^{\wedge-}, 1^{\vee-}, 1^{\rightarrow-}\}$, jak i $V^\star_{P_1}(B) \in \{1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\rightarrow+}, 1^{\sim}\}$, to dzięki faktowi 8.1.15, $\mathsf{f}(V^\star_{P_2}(B)) \neq 0$, czyli $V^\star_{P_2}(B) \in \{1^{\wedge-}, 1^{\vee-}, 1^{\rightarrow-}, 1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\rightarrow+}, 1^{\sim}\}$, a to przez założenie pozwala jak wyżej na stwierdzenie, że $V^\star_{P_2}(B \rightarrow C) = 1^{\rightarrow+}$.

Ad 4° i 5°. Na mocy faktu 8.1.15, zarówno w przypadku, gdy $V^{\star}_{P_1}(A) \in \{1^{\wedge-}, 1^{\vee-}, 1^{\to-}\}$ jaki i $V^{\star}_{P_1}(A) \in \{1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\to+}, 1^{\sim}\}$ mamy, że $V^{\star}_{P_2}(A) \in \{1^{\wedge-}, 1^{\vee-}, 1^{\to-}, 1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\to+}, 1^{\sim}\}$. Z kolei jeśli $V^{\star}_{P_1}(B) \in \{1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\to+}, 1^{\sim}\}$, to na mocy założenia indukcyjnego mamy, że $V^{\star}_{P_2}(B) \in \{1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\to+}, 1^{\sim}\}$. Zatem znów ze względu na założenie o podziałach P_1 i P_2 wnioskujemy, że $V^{\star}_{P_2}(B \to C) = 1^{\to+}$. ◁

TWIERDZENIE 8.1.3. *Niech P_1, P_2 będą podziałami zbioru $\{\wedge, \vee, \to, \sim\}$. Jeśli dla każdego $\pi \in P_1$ istnieje $\pi' \in P_2$, takie że $\pi \subseteq \pi'$, to*

$$\mathbf{CL}^{\star}_{P_1} \subseteq \mathbf{CL}^{\star}_{P_2}.$$

DOWÓD. Niech dane będą podziały P_1, P_2 zbioru $\{\wedge, \vee, \to, \sim\}$, spełniające warunek, iż dla każdego $\pi \in P_1$ istnieje $\pi' \in P_2$, takie że $\pi \subseteq \pi'$, Niech A należy do systemu $\mathbf{CL}^{\star}_{P_1}$. Udowodnimy, że $A \in \mathbf{CL}^{\star}_{P_2}$. Rozważmy w tym celu dowolną $P_2^{\star}$-interpretację $V^{\star}_{P_2}$. Z kolei rozpatrzmy obcięcie funkcji $V^{\star}_{P_2}$ do zbioru Var, a następnie rozszerzmy owo obcięcie do $P_1^{\star}$-interpretacji. Otrzymaną $P_1^{\star}$-interpretację oznaczmy przez $V^{\star}_{P_1}$. Na mocy założenia $A \in \mathbf{CL}^{\star}_{P_2}$, zatem $V^{\star}_{P_1}(A) \in \{1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\to+}, 1^{\sim}\}$. Stosując zaś lemat 8.1.1 otrzymujemy oczekiwany rezultat, iż $V^{\star}_{P_2}(A) \in \{1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\to+}, 1^{\sim}\}$. ◁

Poniższy wniosek jest rozszerzeniem faktu 8.1.12.

WNIOSEK 8.1.5. *Niech P_1, P_2 będą różnymi podziałami zbioru $\{\wedge, \vee, \to, \sim\}$. Jeśli dla każdego $\pi \in P_1$ istnieje $\pi' \in P_2$, takie że $\pi \subseteq \pi'$, to*

$$\mathbf{CL}^{\star}_{P_1} \subsetneq \mathbf{CL}^{\star}_{P_2}.$$

DOWÓD. To, że zachodzi inkluzja, wiemy dzięki twierdzeniu 8.1.3. Dla wykazania, że zachodzi inkluzja właściwa rozpatrzmy możliwe pary funktorów, które znajdą się w jakimś bloku podziału P_2, podczas gdy nie będzie istniał blok podziału P_1, do którego oba te funktory należałyby. Rozważmy każdą z takich możliwości:

1° $\wedge$ i $\vee$,
2° $\wedge$ i $\to$,
3° $\wedge$ i $\sim$,
4° $\vee$ i $\to$,
5° $\vee$ i $\sim$,
6° $\to$ i $\sim$.

Na mocy określenia $P^\star$-interpretacji widać, że następujące klasyczne tautologie nie należą do $\mathbf{CL}^\star_{P_1}$, ale należą do $\mathbf{CL}^\star_{P_2}$.

1°' $p \wedge p \to p \vee p$,
2°' $p \wedge p \to (p \to p)$,
3°' $p \wedge p \to \sim\sim p$,
4°' $p \vee p \to (p \to p)$,
5°' $p \vee p \to \sim\sim p$,
6°' $\sim p \to (p \to p)$, $\lhd$

8.1.3. Krata pewnych P-zgodnych podsystemów **CL**

W tej podsekcji podsumujemy rozpatrywane uprzednio P-zgodne podsystemy logiki klasycznej.

Na diagramie 19 przedstawiono wzajemne usytuowanie P-zgodnych systemów, o których była mowa we wniosku 8.1.5.

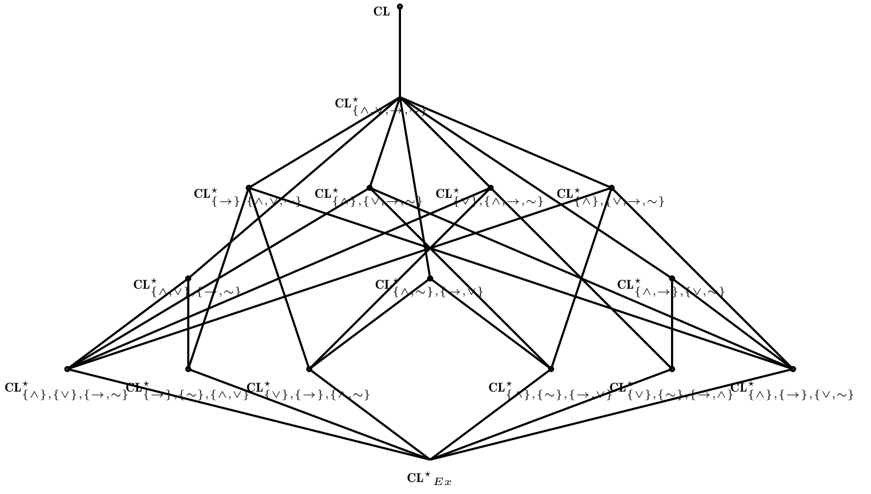


Diagram 19. Fragment kraty P-zgodnych podsystemów logiki **CL**

Na koniec zauważmy, że możliwych jest sporo różnych wariantów prezentowanego podejścia do analizy zagadnienia P-zgodności w odniesieniu do logik zdaniowych. Pierwsza taka możliwość polegałaby na zaliczeniu do zbioru funktorów również operatora tożsamości. W ten sposób, przyjmując utożsamienie zmiennej a i wyrażania $\top(a)$ moglibyśmy uznać za P-zgodną tezę $p \to {\sim}{\sim} p$, o ile do podziału P należy jakaś partycja zawierająca zbiór $\{\top, \sim\}$. W takim ujęciu symbol $\top$ traktowany byłby jak funktor główny zmiennej. W przypadku sformułowania P-zgodnych systemów za pomocą P-interpretacji, czy $\star$-interpretacji, same określenia w zasadzie nie zmieniają się. W zasadzie, gdyż nie trzeba formułować specjalnego przypadku dla zmiennych. Definicje te odpowiednio przyjmują postać:

Definicja 8.1.11. Niech dany będzie podział zbioru $\{\top, \wedge, \vee, \to, \sim\}$. P'-interpretacją nazywamy dowolną funkcję

$$V'_P \colon \mathrm{For} \longrightarrow \mathrm{M}_{ext},$$

która spełnia następujące warunki:

1. dla każdej zmiennej a, $V'_P(a) \in \{1, 0\}$, czyli $V'_P|_{\mathrm{Var}}$ jest wartościowa-: niem zmiennych,
   oraz dla dowolnych $A, B \in \mathrm{For}$

2. $$V'_P(A \wedge B) = \begin{cases} 1^{\wedge+}, & \text{o ile istnieje } \pi \in P, \text{ takie że } \mathrm{fg}(A), \mathrm{fg}(B) \in \pi \\ & \text{i } 1 = \min\{\mathsf{f}(V'_P(A)), \mathsf{f}(V'_P(B))\} \\ 1^{\wedge-}, & \text{o ile nie istnieje } \pi \in P, \text{ takie że } \mathrm{fg}(A), \mathrm{fg}(B) \in \pi \\ & \text{i } 1 = \min\{\mathsf{f}(V'_P(A)), \mathsf{f}(V'_P(B))\} \\ 0^{\wedge}, & \text{o ile } 0 = \min\{\mathsf{f}(V'_P(A)), \mathsf{f}(V'_P(B))\} \end{cases}$$

3. $$V'_P(A \vee B) = \begin{cases} 1^{\vee+}, & \text{o ile istnieje } \pi \in P, \text{ takie że } \mathrm{fg}(A), \mathrm{fg}(B) \in \pi \\ & \text{i } 1 = \max\{\mathsf{f}(V'_P(A)), \mathsf{f}(V'_P(B))\} \\ 1^{\vee-}, & \text{o ile nie istnieje } \pi \in P, \text{ takie że } \mathrm{fg}(A), \mathrm{fg}(B) \in \pi \\ & \text{i } 1 = \max\{\mathsf{f}(V'_P(A)), \mathsf{f}(V'_P(B))\} \\ 0^{\vee}, & \text{o ile } 0 = \max\{\mathsf{f}(V'_P(A)), \mathsf{f}(V'_P(B))\} \end{cases}$$

4. $$V'_P(A \to B) = \begin{cases} 1^{\to+}, & \text{o ile istnieje } \pi \in P, \text{ takie że } \mathrm{fg}(A), \mathrm{fg}(B) \in \pi \\ & \text{i } \mathsf{g}(V'_P(A)) \leqslant \mathsf{g}(V'_P(B)) \\ 1^{\to-}, & \text{o ile nie istnieje } \pi \in P, \text{ takie że } \mathrm{fg}(A), \mathrm{fg}(B) \in \pi \\ & \text{i } \mathsf{f}(V'_P(A)) \leqslant \mathsf{f}(V'_P(B)) \\ & \text{lub} \\ & \text{o ile istnieje } \pi \in P, \text{ takie że } \mathrm{fg}(A), \mathrm{fg}(B) \in \pi \\ & \text{oraz } \mathsf{f}(V'_P(A)) \leqslant \mathsf{f}(V'_P(B)), \text{ i } \mathsf{g}(V'_P(A)) > \mathsf{g}(V'_P(B)) \\ 0^{\to}, & \text{o ile } \mathsf{f}(V'_P(A)) > \mathsf{f}(V'_P(B)) \end{cases}$$

5. $V'_P(\sim A) = \begin{cases} 1^{\sim}, & \text{o ile } 0 = \mathsf{f}(V'_P(A)) \\ 0^{\sim}, & \text{o ile } 1 = \mathsf{f}(V'_P(A)) \end{cases}.$

Niech $\mathbf{CL}'_P$ będzie zbiorem wszystkich formuł, które dla dowolnej P'-interpretacji przyjmują wartości ze zbioru $\{1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\rightarrow+}, 1^{\sim}\}$.

Definicja 8.1.12. Niech dany będzie podział zbioru $\{\top, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim\}$. $P^{\star\prime}$-interpretacją nazywamy dowolną funkcję

$$V_P^{\star\prime} : \mathrm{For} \longrightarrow \mathrm{M}_{ext},$$

która spełnia następujące warunki:

1. dla każdej zmiennej a, $V_P^{\star}(a) \in \{1, 0\}$,

2. $V_P^{\star\prime}(A \wedge B) = \begin{cases} 1^{\wedge+}, & \text{o ile istnieje } \pi \in P, \text{ takie że } \mathrm{fg}(A), \mathrm{fg}(B) \in \pi \\ & \text{i } 1 = \min\{\mathsf{f}(V_P^{\star\prime}(A)), \mathsf{f}(V_P^{\star\prime}(B))\} \\ 1^{\wedge-}, & \text{o ile nie istnieje } \pi \in P, \text{ takie że } \mathrm{fg}(A), \mathrm{fg}(B) \in \pi \\ & \text{i } 1 = \min\{\mathsf{f}(V_P^{\star\prime}(A)), \mathsf{f}(V_P^{\star\prime}(B))\} \\ 0^{\wedge}, & \text{o ile } 0 = \min\{\mathsf{f}(V_P^{\star\prime}(A)), \mathsf{f}(V_P^{\star\prime}(B))\} \end{cases}$

3. $V_P^{\star\prime}(A \vee B) = \begin{cases} 1^{\vee+}, & \text{o ile istnieje } \pi \in P, \text{ takie że } \mathrm{fg}(A), \mathrm{fg}(B) \in \pi \\ & \text{i } 1 = \max\{\mathsf{f}(V_P^{\star\prime}(A)), \mathsf{f}(V_P^{\star\prime}(B))\} \\ 1^{\vee-}, & \text{o ile nie istnieje } \pi \in P, \text{ takie że } \mathrm{fg}(A), \mathrm{fg}(B) \in \pi \\ & \text{i } 1 = \max\{\mathsf{f}(V_P^{\star\prime}(A)), \mathsf{f}(V_P^{\star\prime}(B))\} \\ 0^{\vee}, & \text{o ile } 0 = \max\{\mathsf{f}(V_P^{\star\prime}(A)), \mathsf{f}(V_P^{\star\prime}(B))\} \end{cases}$

4. $V_P^{\star\prime}(A \rightarrow B) = \begin{cases} 1^{\rightarrow+}, & \text{o ile istnieje } \pi \in P, \text{ takie że } \mathrm{fg}(A), \mathrm{fg}(B) \in \pi \\ & \text{oraz } \mathsf{g}(V_P^{\star\prime}(A)) \leqslant \mathsf{g}(V_P^{\star\prime}(B)), \\ & \text{i nieprawda, że } \mathsf{g}(V_P^{\star\prime}(A)) = \mathsf{g}(V_P^{\star\prime}(B)) = \frac{1}{2} \\ 1^{\rightarrow-}, & \text{o ile } \mathsf{f}(V_P(A)) \leqslant \mathsf{f}(V_P(B)) \\ & \text{i nie istnieje } \pi \in P, \text{ takie że } \mathrm{fg}(A), \mathrm{fg}(B) \in \pi \\ & \text{lub} \\ & \text{o ile } \mathsf{g}(V_P^{\star\prime}(A)) = \mathsf{g}(V_P^{\star\prime}(B)) = \frac{1}{2} \\ & \text{lub} \\ & \text{o ile } \mathsf{g}(V_P^{\star\prime}(A)) = 1 \text{ i } \mathsf{g}(V_P^{\star\prime}(B)) = \frac{1}{2} \\ 0^{\rightarrow}, & \text{o ile } \mathsf{f}(V_P^{\star\prime}(A)) > \mathsf{f}(V_P^{\star\prime}(B)) \end{cases}$

5. $V_P^{\star\prime}(\sim A) = \begin{cases} 1^{\sim}, & \text{o ile } 0 = \mathsf{f}(V_P^{\star\prime}(A)) \\ 0^{\sim}, & \text{o ile } 1 = \mathsf{f}(V_P^{\star\prime}(A)). \end{cases}$

Niech $\mathbf{CL}_P^{\star\prime}$ będzie zbiorem wszystkich formuł, które dla dowolnej $P^{\star\prime}$-interpretacji przyjmują wartości ze zbioru $\{1^{\wedge+},\ 1^{\vee+},\ 1^{\to+},\ 1^{\sim}\}$.

Oczywiście

Fakt 8.1.17. *Dla dowolnej partycji i dowolnego wartościowania zmiennych V istnieje dokładanie jedno rozszerzenie V do P'-interpretacji oraz istnieje dokładnie jedno rozszerzenie V do $P^{\star\prime}$-interpretacji.*

Przez indukcję ze względu na złożoność formuły pokazując jednocześnie obie implikacje otrzymujemy:

Lemat 8.1.2. *Niech P będzie podziałem zbioru $\{\top, \wedge, \vee, \to, \sim\}$. Dla dowolnych $P^{\star\prime}$-interpretacji V_1 i V_2 i dowolnej formuły A:*

1. *jeśli $V_1(A) \in \{1, 0, 1^{\wedge+},\ 0^{\wedge},\ 1^{\vee+},\ 0^{\vee},\ 1^{\to+},\ 0^{\to},\ 1^{\sim}, 0^{\sim}\}$, to $V_2(A) \in \{1, 0, 1^{\wedge+},\ 0^{\wedge},\ 1^{\vee+},\ 0^{\vee},\ 1^{\to+},\ 0^{\to},\ 1^{\sim}, 0^{\sim}\}$.*
2. *jeśli $V_1(A) \in \{1^{\wedge-},\ 0^{\wedge},\ 1^{\vee-},\ 0^{\vee},\ 1^{\to-},\ 0^{\to}\}$, to $V_2(A) \in \{1^{\wedge-},\ 0^{\wedge},\ 1^{\vee-},\ 0^{\vee},\ 1^{\to-},\ 0^{\to}\}$.*

Stąd mamy:

Wniosek 8.1.6. *Niech P będzie podziałem zbioru $\{\top, \wedge, \vee, \to, \sim\}$. Jeśli istnieje $P^{\star\prime}$-interpretacja V'_{P0} taka, że dla danej formuły A zachodzi: $V_P^{\star\prime}(A) \in \{1, 0, 1^{\wedge+},\ 0^{\wedge},\ 1^{\vee+},\ 0^{\vee},\ 1^{\to+},\ 0^{\to},\ 1^{\sim}, 0^{\sim}\}$, to dla dowolnej $P^{\star\prime}$-interpretacji mamy, że $V_P^{\star\prime}(A) \in \{1, 0, 1^{\wedge+},\ 0^{\wedge},\ 1^{\vee+},\ 0^{\vee},\ 1^{\to+},\ 0^{\to},\ 1^{\sim}, 0^{\sim}\}$.*

Stosownej zmianie ulec musiałyby określenia matryc, w przypadku gdyby omawiane systemy byłyby rozumiane jako zawartość matrycy. Przewagą omawianego ujęcia jest to, że otrzymane systemy były domknięte na pewną wersję reguły podstawiania. W szczególności zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 8.1.4. *Niech P będzie podziałem zbioru $\{\wedge, \vee, \to, \sim, \top\}$. Niech $\pi \in P$ będzie partycją, do której należy $\top$. Wówczas system $\mathbf{CL}_P^{\star}$ jest domknięty na podstawienie za zmienne formuł, dla których spełnione są oba następujące warunki:*

1. *funktor główny należy do* π,
2. *istnieje* $P^{\star\prime}$*-interpretacja* V *przekształcająca owe formuły w zbiór* $\{1, 1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\rightarrow+}, 1^{\sim}\}$.

Dowód. Rozważmy dowolne podstawienie s spełniające warunki twierdzenia. Niech $A \in \mathbf{CL}^{\star}_{P}$. Rozważmy dowolną $P^{\star\prime}$-interpretację $V^{\star\prime}_{P}$. Chcemy pokazać, że $V^{\star\prime}_{P}(s(A)) \in \{1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\rightarrow+}, 1^{\sim}\}$.

Rozważmy wartościowanie V_1, które każdej zmiennej a przyporządkowuje wartość 0, jeśli $V^{\star\prime}_{P}(s(a)) \in \{0, 0^{\wedge}, 0^{\vee}, 0^{\rightarrow}, 0^{\sim}\}$, zaś 1, jeśli $V^{\star\prime}_{P}(s(a)) \in \{1, 1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\rightarrow+}, 1^{\sim}\}$. Widać, że na mocy założeń oraz lematu 8.1.2 nie ma innych możliwości.

Rozszerzamy V_1 do $P^{\star\prime}$-interpretacji $V^{\star\prime}_{1P}$.

Pokażemy przez indukcję ze względu na złożoność formuły, że dla dowolnej formuły A zachodzi:

1. jeśli $V^{\star\prime}_{1P}(A) \in \{0, 0^{\wedge}, 0^{\vee}, 0^{\rightarrow}, 0^{\sim}\}$, to $V^{\star\prime}_{P}(s(A)) \in \{0, 0^{\wedge}, 0^{\vee}, 0^{\rightarrow}, 0^{\sim}\}$,
2. jeśli $V^{\star\prime}_{1P}(A) \in \{1^{\wedge-}, 1^{\vee-}, 1^{\rightarrow-}\}$, to $V^{\star\prime}_{P}(s(A)) \in \{1^{\wedge-}, 1^{\wedge+}, 1^{\vee-}, 1^{\vee+}, 1^{\rightarrow-}, 1^{\rightarrow+}\}$,
3. jeśli $V^{\star\prime}_{1P}(A) \in \{1, 1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\rightarrow+}, 1^{\sim}\}$, to $V^{\star\prime}_{P}(s(A)) \in \{1, 1^{\wedge+}, 1^{\vee+}, 1^{\rightarrow+}, 1^{\sim}\}$.

Przypadek zmiennej jest oczywisty na mocy określenia wartościowania V_1. Natomiast w przypadku formuł złożonych $B \S C$ wystarczy rozważyć sytuację, gdy jeden z argumentów danego funktora jest zmienną, a drugi argument nie jest zmienną. Widać, że na mocy założeń twierdzenia, iż jeśli istnieje $\pi \in P$, takie że $\mathrm{fg}(A), \mathrm{fg}(B) \in \pi$, to również $\mathrm{fg}(s(A)), \mathrm{fg}(s(B)) \in \pi$. Oczywiście stwierdzenie to pozostaje prawdziwe również dla złożonych formuł B i C. Reszta rozumowań standardowo przebiega dzięki założeniu indukcyjnemu. $\lhd$

Łatwo widać, że przez indukcję ze względu na złożoność formuły pokazujemy, że:

Lemat 8.1.3. *Dla podziału jednoelementowego* $P = \{\{\top, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim\}\}$ *i dowolnego wartościowania* V, *wartości* P'*-interpretacji oraz* $P^{\star\prime}$*-interpretacji należą dla dowolnej formuły do zbioru* $\{1, 0, 1^{\wedge+}, 0^{\wedge}, 1^{\vee+}, 0^{\vee}, 1^{\rightarrow+}, 0^{\rightarrow}, 1^{\sim}, 0^{\sim}\}$.

Stąd otrzymujemy:

WNIOSEK 8.1.7.

$$\mathbf{CL}^{\star\prime}_{\{\{\top,\wedge,\vee,\to,\sim\}\}} = \mathbf{CL} = \mathbf{CL}'_{\{\{\top,\wedge,\vee,\to,\sim\}\}}.$$

Inna możliwość mogłaby polegać na badaniu P-zgodności na pewnej ‘głębokości’ argumentów danej formuły. I tak można by badać formuły P-zgodne ‘na głębokość 2, 3’ itd. Zatem zapis P-zgodności ‘w głąb’ miałby postać np. $\langle\{\{\vee,\sim\},\{\wedge,\to,\top\}\},\{\{\wedge,\sim\},\{\wedge,\to,\top\}\}\rangle$. W takim ujęciu formuła P-zgodna ‘na głębokość 2’, musiałaby mieć funktory główne należące do jakiegoś bloku pierwszego z wymienionych podziałów, a ponadto powinna spełniać wymóg posiadania funktorów głównych należących do jakiegoś bloku — tym razem drugiego z wymienionych podziałów. Drugi wymóg dotyczyłby podformuł argumentów funktora głównego. Przykładowo formuła, która byłaby P-zgodna ‘na głębokość 2’, to np. pierwsze prawo de Morgana

$$\sim(p \wedge q) \to \sim p \vee \sim q.$$

Dodatek

A Algebra uniwersalna — podstawowe fakty

W niniejszym rozdziale omówimy podstawowe definicje używane w tej monografii. Wszystkie pojęcia algebry uniwersalnej, z których korzystamy w tej pracy, są zgodne z terminologią przyjętą w książce [14].

Typem (językiem) algebr nazywamy każdą funkcję $\tau\colon F \longrightarrow \mathscr{N}$, gdzie F jest dowolnym zbiorem, a $\mathscr{N}$ jest zbiorem wszystkich liczb naturalnych. Elementy zbioru F nazywamy symbolami funkcyjnymi, a $\tau(f)$ arnością symbolu $f \in F$.

Algebrą typu τ nazywamy każdą parę $\mathfrak{A} = (A, F^{\mathfrak{A}})$, gdzie A jest niepustym zbiorem, a $F^{\mathfrak{A}}$ jest rodziną skończenie arnych działań określonych na zbiorze A, taką że każdemu symbolowi $f \in F$ odpowiada działanie $f^{\mathfrak{A}} \in F^{\mathfrak{A}}$, które jest $\tau(f)$-argumentowe. Ponadto, każdy element zbioru $F^{\mathfrak{A}}$ jest postaci $f^{\mathfrak{A}}$ dla pewnego $f \in F$.

Przyjmiemy zwyczaj, że uniwersum algebry będzie oznaczane tą samą literą (jednakże pisaną italikiem), którą oznaczana jest sama algebra.

Działanie $f^{\mathfrak{A}}$ nazywamy realizacją symbolu f w algebrze $\mathfrak{A}$, a zbiór A-uniwersum (nośnikiem) algebry $\mathfrak{A}$, zbiór $F^{\mathfrak{A}}$ — zbiorem działań podstawowych algebry $\mathfrak{A}$. Jeśli $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ i dana jest algebra $\mathfrak{A} = (A; f_1^{\mathfrak{A}_1}, \ldots, f_n^{\mathfrak{A}_n})$ typu τ, to przyjmujemy umowę, że $\tau(f_1) \geqslant \tau(f_2) \geqslant \cdots \geqslant \tau(f_n)$.

Przypomnijmy min. definicję podalgebry danej algebry, homomorfizmu i produktu prostego algebr.

Definicja A1. Niech algebry $\mathfrak{A} = (A, F^{\mathfrak{A}})$ i $\mathfrak{B} = (B, F^{\mathfrak{B}})$ będą algebrami typu τ.

1. Algebra $\mathfrak{B} = (B, F^{\mathfrak{B}})$ jest podalgebrą algebry $\mathfrak{A} = (A, F^{\mathfrak{A}})$ (co oznaczamy $\mathfrak{B} \leqslant \mathfrak{A}$) wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{B}$ jest tego samego typu co $\mathfrak{A}$, $B \subseteq A$ oraz każde działanie podstawowe algebry $\mathfrak{B}$ jest obcięciem pewnego działania podstawowego algebry $\mathfrak{A}$.
2. Funkcję $\alpha : A \to B$ nazywamy homomorfizmem, jeśli dla dowolnego działania $f \in F$ i dla dowolnych $a_0, \ldots, a_{\tau(f)-1} \in A$ spełniony jest warunek: $\alpha(f^{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{\tau(f)-1})) = f^{\mathfrak{B}}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_{\tau(f)-1}))$.

Definicja A2. Niech $\{\mathfrak{A}_k\}_{k\in I}$ będzie indeksowaną niepustą rodziną algebr typu τ, gdzie $\mathfrak{A}_k = (A_k, F_k^{\mathfrak{A}})$ dla $k \in I$. Produktem prostym $\prod\limits_{k\in I} \mathfrak{A}_k$ tej rodziny nazywamy algebrę $\mathfrak{A} = (A, F^{\mathfrak{A}})$ typu τ, której uniwersum jest zbiór $A = \prod\limits_{k\in I} A_k$ oraz dla dowolnego $f \in F$ i dowolnych $a_0, \ldots, a_{\tau(f)-1} \in A$ mamy $f^{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{\tau(f)-1})(k) = f^{\mathfrak{A}_k}(a_0(k), \ldots, a_{\tau(f)-1}(k))$.

Przywołajmy jeszcze definicję włożenia i izomorfizmu.

Definicja A3. Niech algebry $\mathfrak{A} = (A, F^{\mathfrak{A}})$ i $\mathfrak{B} = (B, F^{\mathfrak{B}})$ będą algebrami typu τ.

1. Jeśli α jest homomorfizmem algebr $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ i jest to jest funkcja różnowartościowa, to α nazywamy włożeniem.
2. Jeśli α jest homomorfizmem algebr $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ i jest to jest funkcja różnowartościowa oraz $\alpha(A) = B$, to α nazywamy izomorfizmem.

Definicja A4. Załóżmy, że K jest klasą algebr typu τ. Wprowadźmy następujące operatory H, S, P przyporządkowujące klasie K nową klasę algebr typu τ.

(A1) $\mathfrak{A} \in H(K) \iff \mathfrak{A}$ *jest obrazem homomorficznym pewnej algebry a z* K.

(A2) $\mathfrak{A} \in S(K) \iff \mathfrak{A}$ *jest podalgebrą pewnej algebry z* K.

(A3) $\mathfrak{A} \in P(K) \iff \mathfrak{A}$ *jest produktem prostym pewnej rodziny algebr z* K.

Niepustą klasę K algebr typu τ nazywamy rozmaitością, jeśli jest ona domknięta ze względu na obrazy homomorficzne, podalgebry i produkty proste algebr z tej klasy czyli na operatory H, S i P, tzn. $H(S(P(K))) \subseteq K$. W tej monografii rozważamy tylko klasy algebr domknięte na H, S, P i dlatego czasem będziemy pisać 'klasa algebr' zamiast 'rozmaitość algebr'. Chcąc zatem stwierdzić, czy klasa algebr jest rozmaitością, należy zbadać jej domkniętość na operatory H, S i P. Istnieje jednak inna możliwość. Okazuje się, że jeśli daną klasę można zdefiniować za pomocą zbioru pewnych równości (są to tzw. klasy równościowo definiowalne), to jest ona rozmaitością, i odwrotnie. Dalej przytoczymy potrzebne definicje.

Niech X będzie przeliczalnym zbiorem, którego elementy nazywać będziemy zmiennymi i niech τ będzie typem algebr. Oznaczmy przez F_0

podzbiór zbioru F złożony ze wszystkich symboli zeroargumentowych. Wówczas najmniejszy zbiór $T(X)$, taki że:

(A4) $X \cup F_0 \subseteq T(X)$,

(A5) *jeśli* $f \in F, \tau(f) = n$ *i* $p_1, \ldots, p_n \in T(X)$,
to $f(p_1, \ldots, p_n) \in T(X)$,

nazywamy zbiorem termów typu τ określonych na zbiorze X, albo krótko — zbiorem termów typu τ.

Term p jest n-arny, jeśli liczba zmiennych występujących w p jest mniejsza lub równa n. Tak więc każdy term n-arny jest m-arny, gdy $n \leqslant m$. W szczególności dla $n = 1$ mamy term unarny. Załóżmy teraz, że dany jest term n-arny p typu τ oraz dana jest algebra $\mathfrak{A}$ typu τ. Odwzorowanie $p^{\mathfrak{A}}\colon A^n \longrightarrow A$ zdefiniujemy następująco:

(A6) *jeśli* p *jest zmienną* x_i*, gdzie* $i \leqslant n$*, to* $p^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = a_i$ *dla* $a_1, \ldots, a_n \in A$ *(*$p^{\mathfrak{A}}$ *jest wówczas* i*-tym rzutem);*

(A7) *jeśli* p *jest postaci* $f(p_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, p_k(x_1, \ldots, x_n))$ *dla* $f \in F$, $\tau(f) = k$*, wówczas* $p^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathfrak{A}}(p_1^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, p_k^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n))$.

Tak zdefiniowane odwzorowanie $p^{\mathfrak{A}}\colon A^n \longrightarrow A$ nazywamy realizacją termu p w algebrze $\mathfrak{A}$ lub operacją termową wyznaczoną przez term p.

Definicja A5. 1. *Równością typu* τ jest wyrażenie postaci $p \approx q$, gdzie $p, q \in T(X)$.

2. Algebra $\mathfrak{A}$ typu τ *spełnia równość* $p(x_1, \ldots, x_n) \approx q(x_1, \ldots, x_n)$, co symbolicznie zapisujemy $\mathfrak{A} \models p \approx q$, jeśli dla dowolnych a_1, $\ldots$, $a_n \in A$ zachodzi

   (A8) $p^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = q^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)$.

3. *Klasa algebr* K *spełnia równość* $p \approx q$ (symbolicznie zapisujemy to $K \models p \approx q$), jeśli dla dowolnej algebry $\mathfrak{A} \in K$ zachodzi $\mathfrak{A} \models p \approx q$.

4. Niech Σ będzie zbiorem równości typu τ. Powiemy, że *klasa* K *spełnia zbiór równości* Σ (co oznaczać będziemy $K \models \Sigma$), jeśli dla dowolnej równości $p \approx q$, należącej do Σ, zachodzi $K \models p \approx q$.

Dla zbioru $\Sigma \subseteq Id(\tau)$ przez $\mathsf{Cn}(\Sigma)$ oznaczać będziemy domknięcie zbioru Σ na konsekwencję Cn.

Wynik zastąpienia dowolnej liczby wystąpień termu p termem q w termie r oznaczamy przez $r(p /\!\!/ q)$.

Definicja A6. $\mathsf{Cn}(\Sigma)$ jest najmniejszym podzbiorem zbioru $Id(\tau)$ zawierającym Σ, takim że:

(A9) *$p \approx p \in \mathsf{Cn}(\Sigma)$ dla dowolnego termu p typu τ;*

(A10) *jeśli $p \approx q \in \mathsf{Cn}(\Sigma)$, to $q \approx p \in \mathsf{Cn}(\Sigma)$ dla dowolnych termów p, q typu τ;*

(A11) *jeśli $p \approx q \in \mathsf{Cn}(\Sigma)$ oraz $q \approx r \in \mathsf{Cn}(\Sigma)$, to $p \approx r \in \mathsf{Cn}(\Sigma)$ dla dowolnych termów p, q, r typu τ;*

(A12) *$\mathsf{Cn}(\Sigma)$ jest domknięty na zastępowanie, to znaczy dla dowolnej równości $p \approx q$ należącej do zbioru $\mathsf{Cn}(\Sigma)$ i dla dowolnego termu r typu τ, jeśli p jest podtermem r, to dla termu s równego $r(p /\!\!/ q)$ mamy $r \approx s \in \mathsf{Cn}(\Sigma)$;*

(A13) *$\mathsf{Cn}(\Sigma)$ jest domknięty na podstawienie, to znaczy dla każdej równości $p \approx q$ należącej do zbioru $\mathsf{Cn}(\Sigma)$ i każdego termu r typu τ, jeśli zastąpimy każde wystąpienie zmiennej x w równości $p \approx q$ przez r, to otrzymana równość należy do $\mathsf{Cn}(\Sigma)$.*

Definicja A7. Warunki (A9)–(A13) nazywamy *regułami Birkhoffa.* Zbiór równości domknięty na reguły Birkhoffa nazywamy *teorią równościową.*

Przypomnijmy:

Definicja A8. Parę uporządkowaną $\langle A, R \rangle$, gdzie R jest relacją zwrotną, przechodnią i antysymetryczną w zbiorze A nazywamy *zbiorem częściowo uporządkowanym* (przez relację R).

Definicja A9 ([14]).

1. Zbiór częściowo uporządkowany $\langle A, R \rangle$ jest *kratą* wtw dla dowolnych $a, b \in A$, w A istnieje zarazem kres górny, jak i dolny. Kres górny a i b oznaczamy przez $a \vee b$, zaś dolny przez $a \wedge b$.
2. Zbiór częściowo uporządkowany P jest *zupełny* wtw dla każdego zbioru $A \subseteq P$, w P istnieje zarazem kres górny, jak i dolny. Kres górny zbioru A oznaczamy przez $\bigvee A$ zaś dolny przez $\bigwedge A$.

3. Jeśli dane są kraty $\langle A, R\rangle$ i $\langle B, S\rangle$ oraz $f\colon A \longrightarrow B$ jest włożeniem, to mówimy, że f jest włożeniem kratowym.
4. Jeśli dane są kraty $\langle A, R\rangle$ i $\langle B, S\rangle$ oraz $f\colon A \longrightarrow B$ jest bijekcją, to mówimy, że f jest *izomorfizmem kratowym.*

FAKT A1. *Każdy zupełny zbiór częściowo uporządkowany jest kratą.*

DEFINICJA A10. 1. Krata, która jest częściowo uporządkowanym zbiorem zupełnym, zwana jest *kratą zupełną.*

2. Niech L będzie kratą. Niech $a \in L$. Mówimy, że a jest zwarty wtw dla dowolnego $A \subseteq L$, jeśli kres górny elementów ze zbioru A istnieje w L (ozn. $\bigvee A$) oraz $a \leqslant \bigvee A$, to istnieje skończony zbiór $B \subseteq A$, taki że $a \leqslant \bigvee B$.
3. Krata L jest *zwarto-generowana* wtw dla każdego $a \in L$, a jest kresem górnym elementów zwartych. Krata L jest *algebraiczna* wtw L jest zupełna oraz zwarto-generowana.

Ze względu na fakt, że konsekwencja sumy zbioru teorii równościowych jest kresem górnym tego zbioru, zatem $L(\Sigma)$ jest kratą zupełną. Ponadto, zbiór wszystkich równości jest teorią równościową wyznaczoną przez równość $x = y$, zatem korzystając z finitystyczności przez typowy przy dowodzeniu zwartości argument mamy standardowy wniosek:

FAKT A2. *$L(\Sigma)$ jest kratą algebraiczną, której jedynka jest elementem zwartym.*

DEFINICJA A11. Quasi-identycznością nazywamy dowolną formułę postaci

$$t_1 \approx u_1 \wedge \cdots \wedge t_n \approx u_n \to t \approx u$$

gdzie $t, u \in \mathrm{Term}$, $n \in \mathbb{N}$, zaś dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n$, $t_i, u_i \in \mathrm{Term}$.

Dla $n = 0$ przyjmujemy, że quasi-identyczność przyjmuje postać identyczności, zatem mamy

WNIOSEK A1. *Zbiór wszystkich identyczności danego typu zawiera się w zbiorze wszystkich quasi-identyczności tegoż typu.*

DEFINICJA A12. Klasa algebr $\mathcal{K}$ jest quasirozmaitością wtw istnieje zbiór quasi-identyczności, których klasa modeli równa się klasie $\mathcal{K}$.

0.1.1. Algebry Boole'a

Wiadomo, że kratę można również definiować równościowo.

Definicja A13. Niepusty zbiór A z dwiema operacjami binarnymi $\vee$ i $\wedge$ na A zwany jest *kratą* wtw dla dowolnych $x, y \in A$ spełnione są następujące równości:

L1: (a) $x \vee y \approx y \vee x$
(b) $x \wedge y \approx y \wedge x$ (prawa przemienności)

L2: (a) $x \vee (y \vee z) \approx (x \vee y) \vee z$
(b) $x \wedge (y \wedge z) \approx (x \wedge y) \wedge z$ (prawa łączności)

L3: (a) $x \vee x \approx x$
(b) $x \wedge x \approx x$ (prawa idempotentności)

L4: (a) $x \approx x \vee (x \wedge y)$
(b) $x \approx x \wedge (x \vee y)$ (prawa pochłaniania)

Działania $\vee$ i $\wedge$ zwane są odpowiednio *sumą (kratową)* i *iloczynem (kratowym)*.

Innymi słowy, kraty są pewnymi algebrami $\langle A, \vee, \wedge \rangle$, w typie $\langle 2, 2 \rangle$. W standardowy sposób określa się porządek w kracie częściowy porządek przyjmując, że

$$x \leqslant y \text{ wtw } x \vee y = y$$

Definicja A14. Algebrę $\mathfrak{A} = \langle L, \vee, \wedge, 0, 1 \rangle$ typu $\langle 2, 2, 0, 0 \rangle$ nazywamy *kratą ograniczoną* wtw

1. $\mathfrak{A}$ jest kratą $\langle L, \vee, \wedge \rangle$,
2. spełnione są równości:

$$x \wedge 0 \approx 0, \qquad\qquad x \vee 1 \approx 1.$$

Definicja A15. Niech dana będzie krata ograniczona $\mathfrak{A} = \langle L, \vee, \wedge, 0, 1 \rangle$.

1. Mówimy, że $a \in L$ jest atomem w $\mathfrak{A}$ wtw $a \neq 0$ i dla każdego $x \in L$, jeśli $0 \leqslant x \leqslant a$, to $0 = x$ lub $x = a$.
2. Mówimy, że $a \in L$ jest co-atomem w $\mathfrak{A}$ wtw $a \neq 1$ i dla każdego $x \in L$, jeśli $a \leqslant x \leqslant 1$, to $a = x$ lub $x = 1$.

Definicja A16. *Krata dystrybutywna*, to krata, dla której spełnione są następujące równości

D1: $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

D2: $x \vee (y \wedge z) \approx (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Definicja A17. Krata $\mathfrak{A}$ jest *modularna* wtw w $\mathfrak{A}$ spełniona jest równość:

$$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \approx y \wedge ((y \wedge y) \vee z).$$

Pojęcie algebry Boole'a nawiązuje do [11] autorstwa George'a Boole'a, choć w istotny sposób zostało zmodyfikowane przez Ernsta Schrödera w [110].

Przyjmijmy następującą definicję.

Definicja A18. Algebrą Boole'a nazywamy algebrę $\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ z dwoma działaniami 2-argumentowymi, jednym działaniem 1-argumentowym i dwoma stałymi[7] (działaniami 0-argumentowymi), przy czym spełnione są następujące warunki:

B1: $\langle B, \vee, \wedge\rangle$ jest kratą dystrybutywną.

B2: $x \wedge 0 \approx 0, \qquad x \vee 1 \approx 1,$

B3: $x \wedge x' \approx 0, \qquad x \vee x' \approx 1.$

Przypomnijmy:

Lemat A1. *Dla każdej algebry Boole'a prawdziwe są następujące równości*

1. $a \vee 0 = a$.
2. $a \wedge 1 = a$.
3. *Jeśli* $a \wedge b = 0$ *i* $a \vee b = 1$, *to* $a = b'$.
4. $0' = 1$.
5. $1' = 0$.
6. *prawo podwójnego przeczenia:* $(a')' = a$
7. *pierwsze prawo de Morgana:* $(a \wedge b)' = (a') \vee (b')$
8. *drugie prawo de Morgana:* $(a \vee b)' = (a') \wedge (b')$

[7]'Stała' w tym kontekście to tzw. 'stała nazwowa', czyli wybrany, ustalony element w danym zbiorze.

Dowód. Ad 1. $a \vee 0 = a \vee (a \wedge 0)$ przez B2. Zatem przez pochłanianie L4 otrzymujemy, że $a \vee (a \wedge 0) = a$.

Ad 2. $a \wedge 1 = a \wedge (a \vee 1)$ przez B2, skąd znów przez pochłanianie L4 otrzymujemy, że $a \wedge (a \vee 1) = a$.

Ad 3. Załóżmy, że $a \wedge b = 0$ i $a \vee b = 1$.

Korzystamy z 1, 2, B3, D1, D2, L1, L4:

$b' = b' \vee 0 = b' \vee (a \wedge b) = (b' \vee a) \wedge (b' \vee b) = (b' \vee a) \wedge 1 = b' \vee a =$
$(1 \wedge b') \vee a = ((a \vee b) \wedge b') \vee a = ((a \wedge b') \vee (b \wedge b')) \vee a =$
$((a \wedge b') \vee 0) \vee a = (a \wedge b') \vee a = a.$

Ad 4. Stosując 3 wystarczy pokazać, że $1 \wedge 0 = 0$ oraz $1 \vee 0 = 1$, a to zachodzi na mocy B2 i L1.

Ad 5. Na mocy B3, L4 i L1 mamy $0 = 1 \wedge 1' = (1 \vee 1') \wedge 1' = 1' \wedge (1' \vee 1) = 1'$.

Ad 6. Wobec 3 i B3 dowodzona własność jest oczywista na mocy B3.

Ad 7. Znów na mocy 3 wystarczy zauważyć, że $(a \wedge b) \vee (a') \vee (b') = 1$ oraz $(a \wedge b) \wedge (a' \vee b') = 0$.

Mamy:

$(a \wedge b) \vee ((a') \vee (b')) = (a \vee (a' \vee b')) \wedge (b \vee (a' \vee b')) =$
$((a \vee a') \vee b') \wedge (a' \vee (b' \vee b)) = (1 \vee b') \wedge (a' \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1.$

Analogicznie mamy:

$(a \wedge b) \wedge ((a') \vee (b')) = ((a \wedge b) \wedge a') \vee ((a \wedge b) \wedge b') =$
$((a \wedge a') \wedge b) \vee ((b \wedge b') \wedge a) = (0 \wedge b) \vee (0 \wedge a) = 0 \vee 0 = 0.$

Ad 8. Stosując 3 wystarczy zauważyć, że $(a \vee b) \wedge ((a') \wedge (b')) = 0$ oraz $(a \vee b) \vee ((a') \wedge (b')) = 1$. Poniżej opuścimy nawiasy ujmujące a' i b'.

Na mocy L1, D1, L2, B3, B2, L3 mamy:

$(a \vee b) \wedge (a' \wedge b') = (a' \wedge b') \wedge (a \vee b) = ((a' \wedge b') \wedge a) \vee ((a' \wedge b') \wedge b) =$
$(a \wedge (a' \wedge b')) \vee (a' \wedge (b' \wedge b)) =$
$((a \wedge a') \wedge b') \vee (a' \wedge (b \wedge b')) = (0 \wedge b') \vee (a' \wedge 0) = (b' \wedge 0) \vee 0 =$
$0 \vee 0 = 0.$

Analogicznie na mocy D2, L2, L1, B3, B2, L3 mamy:

$(a \vee b) \vee (a' \wedge b') = ((a \vee b) \vee a') \wedge ((a \vee b) \vee b') =$
$(a \vee (b \vee a')) \wedge (a \vee (b \vee b')) = (a \vee (a' \vee b)) \wedge (a \vee 1) =$
$((a \vee a') \vee b) \wedge 1 = (1 \vee b) \wedge 1 = (b \vee 1) \wedge 1 = 1 \wedge 1 = 1.$ $\lhd$

B Języki pierwszego rzędu

Jak wiadomo, na język klasycznego rachunku kwantyfikatorów $\mathscr{L}$ składają się poniżej zdefiniowane: alfabet *Alf*, zbiór termów Term i zbiór formuł For.

Definicja B1 (Alfabet języka pierwszego rzędu). Alfabetem języka pierwszego rzędu nazywamy dowolny układ

$$Alf = \langle \mathrm{Var}, \{f_i\}_{i\in I}, \{p_j\}_{j\in J}, Const\rangle$$

gdzie

a) $\mathrm{Var} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{x, y, z\}$ jest zbiorem zmiennych indywiduowych;

b) zarówno zbiór $\{f_i\}_{i\in I}$, jak i $\{p_j\}_{j\in J}$ jest rozłączny z każdym z pozostałych wyrazów czwórki uporządkowanej *Alf*;

c) dana jest funkcja arności

$$\mathrm{ar}\colon \{f_i\}_{i\in I} \cup \{p_j\}_{j\in J} \longrightarrow \mathbb{N}$$

d) $Const = \{\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \Leftrightarrow\} \cup \{\underset{a}{\forall} :\ a \in \mathrm{Var}\} \cup \{\underset{a}{\exists} :\ a \in \mathrm{Var}\}$.

$\{f_i\}_{i\in I}$ i $\{p_j\}_{j\in J}$ nazywamy odpowiednio, zbiorem symboli funkcyjnych i zbiorem symboli predykatów.

Po drugie na język składa się zbiór termów.

Po trzecie na język składa się zbiór formuł, w szczególności formuł atomowych:

Definicja B2 (Zbiór formuł atomowych języka $\mathscr{L}$). Niech

$$\mathrm{For}_{\mathscr{A}} = \{p_j(t_1, \ldots, t_{\mathrm{ar}(p_j)})| j \in J, \mathrm{ar}(p_j) \neq 2, t_l \in \mathrm{Term} \text{ dla } 1 \leqslant l \leqslant \mathrm{ar}(p_j)\} \cup$$
$$\cup \{t\, p_j\, u : j \in J, \mathrm{ar}(p_j) = 2 \text{ oraz } t, u \in \mathrm{Term}\}$$

Elementy $\mathscr{L}$ zwane są formułami atomowymi języka nazywamy zbiór

Definicja B3 (Zbiór formuł języka $\mathscr{L}$). Zbiorem formuł języka $\mathscr{L}$ nazywamy zbiór

$$\mathrm{For} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathrm{For}_i$$

gdzie

$$\begin{array}{rcll}
\mathrm{For}_0 & = & \mathrm{For}_{\mathscr{A}} & \\
\mathrm{For}_{n+1} & = & \mathrm{For}_n & \cup\ \{\sim A : A \in \mathrm{For}_n\} \cup \\
& & & \{(A \vee B) : A, B \in \mathrm{For}_n\} \cup \\
& & & \{(A \wedge B) : A, B \in \mathrm{For}_n\} \cup \\
& & & \{(A \to B) : A, B \in \mathrm{For}_n\} \cup \\
& & & \{(A \Leftrightarrow B) : A, B \in \mathrm{For}_n\} \cup \\
& & & \{\underset{a}{\forall} A : a \in \mathrm{Var} \text{ oraz } A \in \mathrm{For}_n\} \cup \\
& & & \{\underset{a}{\exists} A : a \in \mathrm{Var} \text{ oraz } A \in \mathrm{For}_n\}.
\end{array}$$

Dodajmy, że w kontekście logik zdaniowych stosujemy symbol Var do oznaczania zbioru zmiennych zdaniowych. Jeśli w powyższej definicji jako $\mathrm{For}_{\mathscr{A}}$ przyjmiemy ów zbiór zmiennych zdaniowych i pominiemy warunki dotyczące kwantyfikatorów, otrzymamy zbiór formuł zdaniowych.

Definicja B4 (Podstawienie za zmienne do formuł). Niech dane będzie podstawienie za zmienne do termów $h : \mathrm{Term} \longrightarrow \mathrm{Term}$. Niech $s_h : \mathrm{For} \longrightarrow \mathrm{For}$ spełnia następujące warunki:

1° dla dowolnych: $j \in J$, termów $t_1, \ldots, t_{\mathrm{ar}(f_i)}$, gdzie $\mathrm{ar}(f_i) \neq 2$:

$$s_h(p_j(t_1, \ldots, t_{\mathrm{ar}(p_j)})) = p_j(h(t_1), \ldots, h(t_{\mathrm{ar}(p_j)}))$$

2° dla dowolnych: $j \in J$, takiego że $\mathrm{ar}(f_i) = 2$ oraz dowolnych, termów t, u:

$$s_h(t\, p_j\, u) = h(t)\, p_j\, h(u)$$

2° a) dla dowolnych $* \in \{\vee, \wedge, \to B, \Leftrightarrow\}$, $A, B \in \mathrm{For}$:

$$s_h(A * B) = (s_h(A) * s_h(B))$$

b) dla dowolnego $A \in \mathrm{For}$:

$$s_h(\sim A) = \sim s_h(A)$$

b) dla dowolnego $A \in \mathrm{For}$, $a \in \mathrm{Var}$ oraz $Q \in \{\forall, \exists\}$:

(B5) jeśli $h(a) = a$, to $s_h(\underset{a}{Q} A) = \underset{a}{Q}\, s_h(A)$

(B6) jeśli $h(a) \neq a$ to $s_h(\underset{a}{Q} A) = \underset{a}{Q}(A)$

nazywamy *podstawieniem* (za zmienne do formuł).

Wykaz symboli

$\mathfrak{A}$	algebra o uniwersum A	116
$\mathbf{CL}$	logika klasyczna	72
$\mathbf{CL}_{Ex}$	logika $\mathbf{CL}_{Ex}$	75
$\mathbf{CL}_P^{\star'}$	system wyznaczony przez $P^{\star\prime}$-interpretacje	112
$\mathbf{CL}_P'$	system wyznaczony przez P'-interpretacje	112
Cn	konsekwencja	118
$\mathsf{Cn}(\Sigma)$	domknięcie zbioru Σ na reguły Birkhoffa	10
`dołącz.kon`	dołączanie czynnika koniunkcji	79
`dołącz.alt`	dołączanie składnika alternatywy	79
$\mathrm{ex}(\phi)$	najbardziej zewnętrzny symbol działania w termie ϕ	18
$\mathrm{fg}(A)$	funktor główny formuły A	79
$\mathrm{For}_{\mathrm{Ex}}$	zbiór wszystkich formuł zewnętrznie zgodnych	85
H	operator brania obrazu homomorficznego	117
$\mathfrak{I}_D$	P-dyspersja algebry $\mathfrak{I}$	33
$\mathtt{id}^{\wedge}$	idempotentność koniunkcji	84
$\mathtt{id}^{\vee}$	idempotentność alternatywy	84
$\mathtt{kom}^{\vee}$	przemienność alternatywy	79
$\mathtt{kom}^{\wedge}$	przemienność koniunkcji, ($\mathtt{kom}^{\wedge}$)	79
`kontr.sym`	skontraponowane prawo symplifikacji	81
$K \models \Sigma$	spełnianie zbioru równości w klasie	118
$\mathbf{Mod}(\Sigma)$	klasa algebr spełniających Σ	10
MP	reguła odrywnia	83
P	operator brania produktu algebr	117
P_e	P_e-rozszerzenie algebry	31
Π_A	zbiór wszystkich podziałów (partycji) zbioru A	18
$\prod\limits_{k\in I}$	tej produkt prosty algebra	116
$\mathtt{pr.DS}_{\vee}$	prawo Dunsa Szkota wersja dla alternatywy	82
$\mathtt{pr.DS}_{\rightarrow}$	prawo Dunsa Szkota wersja dla implikacji	82

$\mathtt{pr.DS}_{\wedge}$	prawo Dunsa Szkota wersja dla koniunkcji	82
$\mathtt{pr.os}_{\vee}$	prawo osłabiania dla alternatywy	82
$\mathtt{pr.os}_{\wedge}$	prawo osłabiania dla koniunkcji	82
`pr.kon`	prawo koniunkcji — wersja	79
`pr.kontr`	prawo kontrapozycji	81
`pr.niesp`	prawo niesprzeczności	81
`pr.os.i`	prawa osłabiania, wersja	79
`pr.s.hip`	prawo przechodniości $\to$	78
`pr.s.hip`	prawo przechodniości $\to$ w wersji skomutowanej	84
`pr.syl.Fr`	prawo sylogizmu Fregego, podst.	78
`pr.sym.ii`	prawo symplifikacji, wer. II	78
`pr.sym.i`	prawo symplifikacji	78
`pr.tożs.`	prawo tożsamości	77
`pr.tożs.i`	prawo tożsamości	77
`pr.tożs.ii`	prawo tożsamości	77
`pr.tożs.iii`	prawo tożsamości	77
`pr.tożs.iv`	prawo tożsamości	77
`pr.wył.śr`	prawo wyłączonego środka — podstawienie	81
RDA	reguła dołącznia alternatywy	84
`r. do abs.`	prawo redukcji do absurdu	82
RDS	reguła Dunsa Szkota	84
RDylA	dylematu alternatywnego	84
RS	reguła symplifikacji	83
S	operator brania podalgebr	117
Σ	zbiorem równości	10
`silpp`	teza $\mathbf{CL}_{Ex}$	88
`sil.pp.-podst.`	podstawienie silnego prawa podwójnego przeczenia	81
`słpp`	wzmocnienie słabego prawa podwójnego przeczenia	88
`sł.pp.-podst.`	podstawienie słabego prawa podwójnego przeczenia	81
$\mathtt{syl.alt.}^{-1}$	implikacja odwrotna do sylogizmu alternatywnego	96
`syl.alt.`	sylogizm alternatywny, prawo	96
$\mathtt{symp}^{\vee}$	prawo symplifikacji dla alternatywy	84
$\mathtt{symp}^{\wedge}_{\to}$	prawo symplifikacji dla implikacji	84
$\mathtt{symp}^{\wedge}$	prawo symplifikacji dla koniunkcji	84
$\mathtt{symp}^{\wedge}_{\vee}$	prawo symplifikacji dla koniunkcji — wersja trzecia	84
$\mathtt{symp}^{\wedge}_{\to}$	prawo symplifikacji dla koniunkcji — wersja czwarta	84
$\mathtt{symp}^{\wedge}_{\wedge}$	prawo symplifikacji dla koniunkcji — wersja druga	84
$\mathtt{symp}^{\wedge}_{\sim}$	prawo symplifikacji dla koniunkcji — wersja pierwsza	84
$\mathtt{symp}^{\sim}$	prawo symplifikacji dla negacji	84
T	rozmaitość trywialna typu τ	24, 39

Wykaz pojęć i nazwisk

Literatura

[1] Zofia Adamowicz i Paweł Zbierski, *Logika matematyczna*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1991.

[2] M. E. Adams, K. V. Adaricheva, W. Dziobiak, A. V. Kravchenko, „Open Questions Related to the Problem of Birkhoff and Malcev”, *Studia Logica* 78 (2004): 357–378.

[3] L. P. Belluce, A. Di Nola i A. Lettieri, „Local MV-algebras”, *Rend. Circ. Mat.*, Palermo 2, vol. 42, 1993.

[4] L. Peter Belluce, Revaz Grigolia i Ada Lettieri, „Representations of monadic MV-algebras”, *Studia Logica* 81 (2005): 123–144.

[5] Teresa Biegańska i Katarzyna Hałkowska, „Minimal Generic of Externally Compatible Varieties”, *Bulletin of the Section of Logic* 29 (3) (2000): 107–114.

[6] Teresa Biegańska i Katarzyna Hałkowska, „Finite Generics of P-compatible Varieties”, *Bulletin of the Section of Logic* 32 (1/2), (2003): 1–7.

[7] Garrett Birkhoff, „On the Structure of Abstract Algebras”, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 31 (1935): 433–454.

[8] Garrett Birkhoff, „Subdirect unions in universal algebra”, *Bulletin of the American Mathematical Society* 50 (10) (1944): 764–768.

[9] Garrett Birkhoff, *Lattice theory*, American Mathematical Society, New York, 1948.

[10] Garrett Birkhoff i John Von Neumann, „The Logic of Quantum Mechanics”, *The Annals of Mathematics* 37 (4) (1936): 823–843.

[11] George Boole, *The laws of thought*, 1853.

[12] Günter Bruns, „Orthomodular Lattices”, *Annals of Discrete Mathematics* 23 (1984), s. 99–102.

[13] Roger M. Bryant, „On s-Critical Groups”, *Q. J. Math* 22 (1) (1971): 91–101.

[14] S. Burris i H. P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra,* Springer-Verlag, New York, 1981.

[15] Ivan Chajda, „Jónsson’s lemma for normally presented varieties”, *Mathematica Bohemica* 122 (4) (1997): 381–382.

[16] Ivan Chajda i Helmut Länger, „A Note on Normal Varieties of Monounary Algebras”, *Czechoslovak Mathematical Journal*, 52 (127) (2002): 369–373.

[17] Ivan Chajda i Ewa Graczyńska, „Algebras Presented by Normal Identities”, *Acta Univ. Palacki. Olomuc, Fac. rer. nat., Mathematica* 38 (1999): 49–58.

[18] C. C. Chang, „Algebraic Analysis of Many Valued Logics”, *Transactions of the American Mathematical Society* 88 (1958): 467–490.

[19] C. C. Chang, „A new proof of the completeness of Lukasiewicz axioms”, *Transactions of the American Mathematical Society* 93 (1959): 74–80.

[20] Wiesława Chromik, „Externally compatible identities of algebras”, *Demonstratio Mathematica* 23 (2) (1990): 345–355.

[21] Wiasława Chromik i Katarzyna Hałkowska, „Subvarieties of the variety defined by externally compatible identities of distributive lattices”, *Demonstratio Mathematica* 24 (1–2) (1991): 235–240.

[22] Wiasława Chromik i Katarzyna Hałkowska, „The lattice of subvarieties of the variety defined by externally compatible identities of distributive lattices”, *Demonstratio Mathematica* 24 (1–2) (1991): 235–240.

[23] Janusz Czelakowski, „Logics and operators”, *Logic and Logical Philosophy* 3 (1995): 87–100.

[24] Janusz Czelakowski, „Filtered subdirect products”, *Bulletin of the Section of Logic* 24 (1996): 92–96.

[25] Alan Day i Ralph Freese, „A Characterization of Identities Implying Congruence Modularity I”, *Can. J. Math.* 32 (5) (1980): 1140–1167.

[26] K. Denecke i S. L. Wismath, „A characterization of k-normal varieties”, Algebra Universalis 51 (2004): 395–409.

[27] A. Di Nola i A. Lettieri, „Perfect MV-algebras are categorically equivalent to abelian l-groups”, *Studia Logica* 53 (1994): 417–432.

[28] A. Di Nola i A. Lettieri, „Equational Characterization of All Varieties of MV-Algebras”, *Journal of Algebra* 221 (1999): 463–474.

[29] A. Di Nola, F. Liguori i S. Sessa, „Using maximal ideals in the classification of MV-algebras”, *Portugaliae Mathematica* 50, fasc. 1 (1993): 87–102.

[30] Richard L. Epstein, *Propositional Logics*, The Semantic Foundations of Logic, tom 1, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1990.

[31] Ralph Freese, William A. Lampe i Walter Taylor, „Congruence lattices of algebras of fixed similarity type 1”, *Pac. J. Math.* 82 (1) (1979): 59–68.

[32] Katarzyna Gajewska-Kurdziel, „On the lattice of some varieties defined by P-compatible identities”, *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Opolskiego, Matematyka* 29 (1995): 45–47.

[33] Katarzyna Gajewska-Kurdziel, „On the lattices of some warieties defined by externally comapatible identities”, [w:] K. Denecke, (red.), *General Algebra and Discrete Mathematics*, Heldermann-Verlag, Berlin, 1995, s. 107–110.

[34] Katarzyna Gajewska-Kurdziel i Krystyna Mruczek, „On some sets of identities satisfied in Abelian groups”, *Demonstratio Mathematica* 35 (3) (2002): 447–453.

[35] Katarzyna Gajewska-Kurdziel i Krystyna Mruczek-Nasieniewska, „The Lattice of Subvarieties of the Variety Defined by Externally Compatible Identities of Abelian Groups of Exponent n”, *Studia Logica* 85 (3) (2007): 361–379.

[36] Kurt Gödel, „Zum intuitionistischen Aussagenkalkül”, *Anzeiger Akademie der Wissenschaffen Wien, Math.-Naturwissensch, Klasse* 69 (1933): 65–66, [przedrykowane w:] *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 4 (1933): 40.

[37] Ewa Graczyńska, „On regular identities”, *Algebra Universalis* 17 (1983): 369–375.

[38] Ewa Graczyńska, *On normal and regular identities*, *Algebra Universalis* 27 (1990): 387–397.

[39] Ewa Graczyńska, „A Note on Hyperidentities”, *Bulletin of the Section of Logic* 37 (1) (2008): 1–9.

[40] Ewa Graczyńska, „On normal and regular identifies”, *Algebra Universalis* 27 (1990): 387–397.

[41] Ewa Graczyńska i Dietmar Schweigert, „Hypervarieties of a given type”, *Algebra Universalis* 27 (1990): 305–318.

[42] George Grätzer, *Universal Algebra*, Springer-Verlag Berlin, 1979.

[43] George Grätzer, *Lattice Theory: Foundation*, Springer Basel, Berlin, 2011.

[44] George Grätzer i H. Lakser, „A variety of lattices whose quasivarieties are varieties”, *Algebra Universalis* 8 (1978): 135–136.

[45] Ravez Grigolia, „Algebraic analysis of Łukasiewicz-Tarski’s n-valued logical systems”, *Selected Papers on Łukasiewicz Sentential Calcui*, red. Ryszard Wójcicki, Zakład Narodowy imienia Ossolińskich, Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk, Wrocław, Warszawa, Kraków, Gdańsk 1977, s. 81–92.

[46] Katarzyna Hałkowska, „On dispersion operator on classes of algebras”, *Bulletin of the Section of Logic* 17 (2) (1988): 67–70.

[47] Katarzyna Hałkowska, „On free algebras in varieties defined by externally compatible identities”, [w:] Hałkowska K., Stawski B. (red.), *Universal and applied algebra*, Proceedings of the V Universal Algebra Symposium, World Scientific, Singapore, 1988, s. 143–148.

[48] Katarzyna Hałkowska, „Equational theories of varieties defined by P-compatible identities of Boole’an algebras”, *Beiträge zur Algebra und Geometrie* 33 (1992): 103–108.

[49] Katarzyna Hałkowska, „A representation theorem for algebras from varieties dedined by P-compatible identities”, [w:] *General Algebra and Applications, Research and Exposition in Mathematics* vol. 20, No. 2, Helderman-Verlag, Berlin, 1993, s. 121–125.

[50] Katarzyna Hałkowska, „Equational theories of P-compatible varieties”, *Prace Naukowe Wyzszej Szkoly Pedagogicznej w Czestochowie*, Maternatyka V, Czestochowa 1997.

[51] Katarzyna Hałkowska, „Lattice of equational theories of P-compatible varieties”, [w:] E. Orłowska, (red.), *Logic at Work. Essays dedicated to the memory of Helena Rasiowa*, Springer, Heidelberg, New York, 1998, s. 587–595.

[52] Katarzyna Hałkowska, Barbara Cholewińska i Ramona Wiora, „Externally compatible identities of Abelian Groups”, *Acta Universitatis Wratislaviensis* No 1890, Logika 17 (1997): 163–170.

[53] Graham Higman, „Identical relations in finite groups”, *Conv. Intemaz. di Teoria dei Gruppi Finiti*, Firenze 1960, s. 93–100. Rome, Cremonese 1960.

[54] J. Ježek, *The lattice of equational theories*, Part I, Part II, Part III, Czeh. Math. J. 31 (1981): 127–157, 31 (1981): 573–603, 32 (1982): 129–164.

[55] Bjarni Jónsson, „Universal relational systems”, *Mathematica Scandinavica* 4 (1956): 193–208.

[56] Bjarni Jónsson, „Algebraic extension8 oj relational systems”, *Mathematica Scandinavica* 11 (1962): 179–205.

[57] Bjarni Jónsson, „Algebras whose Congruence Lattices are Distributive”, *Mathematica Scandinavica* 21 (1967): 110–121.

[58] Bjarni Jónsson, „Equational classes of lattices”, *Math. Scand.* 22 (1968): 187–196.

[59] Bjarni Jónson oraz Ivan Rival, „Lattice varieties covering the smallest non-modular lattice variety”, *Pacific J. Math.* 82 (1979): 463–478.

[60] Gudrun Kalmbach, *Orthomodular Lattices*, Academic Press, London, 1983.

[61] Stephen Cole Kleene, *Introduction to Metamathematics*, Van North-Holland Publishing Co., P. Noordhoff N.V., Amsterdam–Groningen, 1959.

[62] Yuichi Komori, „Super-Lukasiewicz implicational logics”, *Nagoya Mathematical Journal* 72 (1978): 127–133.

[63] Yuichi Komori, „Super Łukasiewicz propositional logics”, *Nagoya Mathematical Journal* 84 (1981): 119–133.

[64] G. Kreisler, *Reports of the seminar on Foundations of Analysis, Stanford University*, Summer 1963 (Mimeographed), Section IV: Theory of free choice sequences of natural numbers.

[65] Tomasz Kowalski, Francesco Paoli i Matthew Spinks „Quasi-subtractive Varieties”, *The Journal of Symbolic Logic*, w druku.

[66] Tomasz Kowalski i Francesco Paoli, „Joins and subdirect products of varieties”, *Algebra Universalis* 65 (2011): 371–391.

[67] William A. Lampe, „A property of the lattice of equational theories”, *Algebra Universalis* 23 (1986): 61–69,

[68] K. B. Lee, „Equational classes of distributive pseudo-complemented lattices”, *Can. J. Math.* 22 (4) (1970): 881–891.

[69] Jan Łukasiewicz, „O logice trójwartosciowej”, *Ruch filozoficzny* 5 (1920): 169–171.

[70] Jan Łukasiewicz, „Die Logik und das Grundlagenproblem”, *Les Entretiens de Zürich sur les Fondaments et la Méthode des Sciences Mathématiques* 6–9, 12 (1938): 82–100.

[71] Jan Łukasiewicz i Alfred Tarski, „Untersuchungen über den Aussagenkalkül”, *Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie* 23 Classe iii, (1930): 30–50.

[72] A. I. Malcev, „On the general theory of algebraic systems”, *Matematicheskii Sbornik*, (N.S.) 35 (77) (1954): 3–20.

[73] A. I. Mal’cev, „Problems on the border line of algebra and logic” [po rosyjsku], *Proc. Int. Cong. of Math.* (Moskwa 1966). Moskwa 1968, MIR, 217–231. [angielskie tłumaczenie w: A. I. Mal’cev], *The metamathematics of algebraic systems. Collected papers: 1936–1967*, North-Holland Pub. Co., Amsterdam 1971, s. 460–473.

[74] Grzegorz Malinowski, *Logiki wielowartościowe*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2006.

[75] Jacek Malinowski, „Quasivarieties of modular ortholattices", *Bulletin of the Section of Logic* 20 (3–4) (1991): 138–142.

[76] P. Mangani, „On certain algebras related to many-valued logics", *Boll. Un. Mat. Ital.* 4 (8) (1973): 68–78.

[77] Ralph N. McKenzie, *Equational bases and non-modular lattice varieties*, *Transactions of the American Mathematical Society* 174 (1972): 1–43.

[78] Ralph N. McKenzie, „Finite forbidden lattices", [w:] A. Dold i B. Eckmann (red.), *Universal Algebra and Lattice Theory*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983, s. 176–205.

[79] Robert McNaughton, „A theorem about infinite-valued sentential logic", *The Journal of Symbolic Logic* 16 (1951): 1–13.

[80] George F. McNulty, „Structural diversity in the lattice ot equational theories" *Algebra Universalis* 13 (1981): 271–292.

[81] I. I., Mel'nik, *Normal closures of perfect varieties of universal algebras*, Ordered sets of lattices, Saratov. Univ., Saratov, 1971, s. 56–65.

[82] I. I., Mel'nik, „Nilpotent shifts of varieties", *Mat. Zametki* 14 (5), 1973 [po rosyjsku]. English translation: *Math. Notes* 14 (1973): 962–966.

[83] Yutaka Miyazaki, „Some Properties of Orthologics", *Studia Logica* 80 (2005): 75–93.

[84] Krystyna Mruczek, *Konstrukcja kraty rozmaitości P-zgodnych związana z typem algebr*, rozprawa doktorska, Uniwersytet Opolski, 2002.

[85] Krystyna Mruczek, „On some lattice of varieties related to changes of the type", [w:] Denecke K., Vogel H.-J. (red.), *General Algebra and Applications*, Proceedings of the 59th Workshop on General Algebra, Shaker Verlag, Aachen 2000, s. 147–153.

[86] Krystyna Mruczek-Nasieniewska, „Subdirectly Irreducible P-compatible Abelian Groups", *Bulletin of the Section of Logic* 32 (1–2) (2003): 57–64.

[87] Krystyna Mruczek-Nasieniewska, „P-compatible Abelian Groups", *Logic and Logical Philosophy* 14 (2) (2005): 253–263.

[88] Krystyna Mruczek-Nasieniewska, „Externally Compatible Abelian Groups of the Type (2, 1, 0)", *Logic and Logical Philosophy* 15 (3) (2006): 239–250.

[89] Krystyna Mruczek-Nasieniewska, „The Varieties Defined by P-compatible Identities of Modular Ortholattices", *Studia Logica* 95 (2010): 21–35.

[90] Daniele Mundici, „Interpretation of AF CU-algebras in Lukasiewicz sentential calculus”, *J. Funct. Anal.* 65 (1986): 15–63.

[91] Evelyn Nelson, „The lattices of equational classes of semigroups with zero”, *Canad. Math. Bull.* 14 (1971): 531–535.

[92] Evelyn Nelson, „The lattices of equational classes of commutative semigroups”, *Canad. Math. Bull.* 23 (1971), 875-895.

[93] Hanna Neumann, *Varieties of groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 37, Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[94] P. Penner, S. L. Wismath, „Equational Bases for P-Compatible Identities” *Demonstratio Mathematica* 43 (3) (2010): 511–518.

[95] Andrzej Pietruszczak, „Aksjomatyzacja relacji wynikania zachowującej informację logiczną”, [w:] J. Perzanowski i A. Pietruszczak (red.), *Byt, logos, matematyka*, s. 251–280.

[96] Don Pigozzi, „On some operations on classes of algebras”, *Algebra Universalis* 2 (1) (1972): 346–353.

[97] Don Pigozzi, „The representation of certain abstract lattices as lattices of subvarieties”, preprint.

[98] Jerzy Płonka, „On a method of construction of abstract algebras”, *Fundamenta Mathematicae* 61 (1967): 183–189.

[99] Jerzy Płonka, „On equational classes of abstract algebras defined by regular equations”, *Fundamenta Mathematicae* 64 (1969): 241–247.

[100] Jerzy Płonka, „On the arity of idempotent reducts of groups”, *Colloquium Mathematicum* 21 (1970): 35–37.

[101] Jerzy Płonka, „On connections between the decomposition of an algebra into sums of direct systems of subalgehras”, *Fundamenta Mathematicae* 84 (1974): 237–244.

[102] Jerzy Płonka, „On the subdirect product of some equational classes of algebras”, *Mathematische Nachrichten* 63 (1974): 303–305.

[103] Jerzy Płonka, „On varieties of algebras defined by identities of some special forms” *Houston Journal of Mathematics* 14 (2) (1988): 253–263.

[104] Jerzy Płonka, „Biregular and uniform identities of algebras”, *Czechoslovak Mathematical Journal* 40 (3) (1990): 367–387.

[105] Jerzy Płonka, „P-compatible identities and their applications to classical algebras”, *Math. Slovaca* 40 (1) (1990): 21–30.

[106] Jerzy Płonka, „Subdirectly irreducible algebras in varieties defined by externally compatible identities”, *Studia Scientarium Hungaria* 27 (1992): 267–271.

[107] Witold A. Pogorzelski, *Klasyczny rachunek zdań*, PWN, Warszawa 1973.

[108] Alan Rose i J. Barkley Rosser, „Fragments of many-valued statement calculi”, *Trans. Amer. Math. Soc.* 87 (1958): 1–53.

[109] J. B. Rosser i A. R. Turquette, „Axiom schemes for m-valued propositional calculi”, *The Journal of Symbolic Logic* 10 (3) (1945), 61–82.

[110] Ernst Schröder, *Vorlesungen über die Algebra der Logic*, 1890–1905.

[111] Roman Sikorski i H. Rasiowa, *The Mathematics of Metamathematics*, Monografie Matematyczne, tom 41, PWN, Warszawa 1963.

[112] Marshall H. Stone, „Topological representation of distributive lattices and Brouwerian Iogic”, *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky* 67 (1937): 1–25.

[113] Zyta Szylicka, „Proper hypersubstitutions of some generalizations of lattices and Boolean algebras”, *Mathematica Slovaca* 47 (3) (1997): 251–266.

[114] Alfred Tarski, „A remark on functionally free algebras”, *The Annals of Mathematics* 47 (1) (1946): 163–166.

[115] Alfred Tarski, *Logic, semantic, metamathematics*, Oxford Univ. Press, 1956.

[116] Alfred Tarski, „Equational logic and equational theories of algebras”, [w:] H. A. Schmidt, K. Schütte, H. J. Thiele, (red.), *Contributions to Mathematical Logic*, Nort Holland Publ. Co., Amsterdam, 1966, s. 275–288.

[117] Mordechaj Wajsberg, „Aksjomatyzacja trójwartosciowego rachunku zdań”, *Comptes rendue des seauces de la Societe des Sciences et des Lettres de Varsovie*, Classe III, 24 (1931): 259–262.

[118] Mordechaj Wajsberg, „Beitrage zum Metaaussagenkalkűl I”, *Monatshefte fur Mathematik und Physik* 42 (1935): 221–242.

[119] Hao Wang, „Note on rules of inference”, *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* 11 (1965): 193–196.

[120] Ryszard Wójcicki, „Matrix approach in sentential calculi”, *Studia Logica* 32 (1973), 7–37.

[121] Ryszard Wójcicki, *Lectures on Propositional Calculi*, Ossolineum, Warszawa 1984.

[122] Ryszard Wójcicki, *Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1988.