Andrzej Pietruszczak*

Różne teorie części

Słowa kluczowe: *teoria części, mereologia, zbiór kolektywny, suma mereologiczna, mereologia Leśniewskiego, mereologia Grzegorczyka*

1. Wprowadzenie

Mereologia powstała jako teoria zbiorów kolektywnych (lub współcześnie, sum mereologicznych). Skonstruował ją polski logik Stanisław Leśniewski (1916, 1927–1931). Zbiory kolektywne są pewnymi całościami złożonymi z części, a samo pojęcie *bycia zbiorem kolektywnym* może być zdefiniowane za pomocą relacyjnego pojęcia *bycia częścią*.[1] Dlatego mereologia może być uważana za teorię „stosunku części do całości” (z greckiego: *μερος*, *meros* to część).

Mereologia Leśniewskiego została sformułowana w sposób specyficzny, odbiegający od standardowych formalizacji. Teoria ta była nadbudowana nad innym systemem Leśniewskiego, nazwanym przez niego „ontologią”. Współcześnie teorię Leśniewskiego przedstawia się w postaci pewnej teorii elementarnej bądź przekładając ją na język teorii struktur relacyjnych. Można ją również analizować używając tzw. logiki pluralnej.

Skoro etymologia słowa ‘mereologia’ odpowiada znaczeniu frazy ‘teoria części’, tym pierwszym można nazywać wszelkie formalne lub na wpół formalne rozważania o częściach, a nie jedynie do teorię Leśniewskiego. Sądzimy jednak, że może powodować to to pewne zamieszanie terminologiczne. W przypadku rozważania słabszych teorii od teorii Leśniewskiego raczej powinniśmy dodać odpowiednie przymiotniki dookreślające, tak jak to uczynił Peter Simons w (1987), gdy np. badał „minimalną ekstensjonalną mereologię”. W (Pietruszczak 2013, 2020) analizowane są zaś różne «egzystencjalnie neutralne» i «egzystencjalnie zaangażowane» teorie części. W tych pierwszych nie postulujemy istnienia żadnych innych zbiorów kolektywnych poza tymi, które otrzymamy z podstawowych własności relacji *bycia częścią*.[2] Przykładowo w takich teoriach nie otrzymamy istnienia zbioru kolektywnego utworzonego z dwóch obiektów będących

* Praca finansowana przez Narodowe Centrum Nauki (NCN), nr projektu: 2021/43/B/HS1/03187.

[1] Leśniewski nie jest twórcą samego pojęcia *zbioru kolektywnego*, czy też *klasy kolektywnej*. Omawiają je np. Whitehead i Russell w komentarzach zawartych w *Principia Mathematica* (1910–1913). Zbiory te stosował m.in. Whitehead w rozważaniach z filozofii czasoprzestrzeni; np. w (1929). Leśniewski podał dwie formalne definicje zbiorów (klas) kolektywnych. W jego teorii obie określenia są równoważne.

[2] Zaznaczmy, że zbiór kolektywny złożony z samych fizycznych (materialnych) obiektów ma być przedmiotem tego samego rodzaju.

częściami trzeciego. Nie postulujemy więc istnienia zbioru kolektywnego złożonego z prawej i lewej ręki danego człowieka.

Mereologię Leśniewskiego zaliczamy zaś do teorii egzystencjalnie zaangażowanych. Ich egzystencjalne zaangażowanie polega na tym, że mają one dodatkowe aksjomaty postulujące istnienie zbiorów kolektywnych różnych grup obiektów. Niektóre z takich zbiorów można uznać za obiekty otrzymywane *ad hoc*, co w związku z tym budzi kontrowersje. Przykładowo, trudno uznać, że istnieje przedmiot materialny, który miałby być zbiorem kolektywnym złożonym z Księżyca i serca danego człowieka (Pietruszczak 2000). Co więcej, nawet problematyczne jest też istnienie osobnego przedmiotu będącego zbiorem kolektywnym prawej i lewej ręki danego człowieka. W teorii Leśniewskiego postuluje się zaś nieograniczone istnienie zbiorów kolektywnych dla wszelkich (niepustych) grup obiektów (w tym również nieskończonych). Wydaje się, że takie rozwiązanie dopuszczalne jest jedynie w bezpunktowej geometrii i bezpunktowej topologii, które dotyczą regionów przestrzennych lub zdarzeń czasoprzestrzennych.[3]

W części 2 przedstawimy podstawowe pojęcia mereologii. W części 3 zajmiemy się *sumami mereologicznymi* jako klasami kolektywnymi danej grupy obiektów. W części 4 zaprezentujemy egzystencjalnie neutralne teorie. Teorie egzystencjalnie zaangażowane przestawimy zaś w części 5. Wśród nich będzie najmocniejsza z nich – mereologia Leśniewskiego, oraz dwie teorie zaproponowanej przez Andrzeja Grzegorczyka (1955). W końcowej części szkicowo przedstawimy problem związany z przechodniością pojęcia *bycia częścią*.

2. Podstawowe pojęcia mereologii

W tej części przedstawimy pojęcia teorii części oraz ich podstawowe własności. Przyjmiemy, że relacyjne pojęcie *bycia częścią* ma w dowolnym uniwersum rozważań tworzyć ostry częściowy porządek, tj. ma być przechodnie i przeciwzwrotne, co daje też asymetryczność. Ponadto, we wszystkich *niezdegenerowanych* uniwersach (tj. takich, które mają co najmniej dwa elementy) ma nie być najmniejszego obiektu (*zera*), a za to mają być dwa obiekty niemające żadnej części wspólnej.

2.1. Części jako kawałki. W języku potocznym słowo ‘część’ rozumie się zazwyczaj tak samo, jak słowa ‘fragment’ czy ‘kawałek’, gdy odnosimy je do obiektów (regionów) przestrzennych, czy też zdarzeń czasoprzestrzennych. Przy takim rozumieniu stosunek części do całości ma dwie podstawowe właściwości:

---

[3] Dodajmy, że w tych bezpunktowych teoriach mamy punkty. Nie są one jednak przyjmowane jako pierwotne, lecz są zdefiniowane na bazie pierwotnych pojęć takich, jak: kule, bryły, czy regiony (zob. np. Tarski 1929, 1956; Gruszczyński i Pietruszczak 2008, 2009, 2018a, 2018b, 2019, 2021; Grzegorczyk 1960).

1. żaden przedmiot nie jest swoją częścią;
2. nie ma takich dwóch przedmiotów, z których jeden byłby częścią drugiego, a ten drugi był częścią pierwszego.

Dzięki pierwszemu warunkowi widać, że w drugim chodzi o «dwa różne» przedmioty. Pierwszy z powyższych warunków mówi więc, że relacyjne pojęcie *bycia częścią* jest przeciwzwrotne, drugi zaś mówi, że jest antysymetryczne. To zaś jest równoważne temu, że to pojęcie jest asymetryczne. Aby skrócić zapis tych i innych własności pojęcia *bycia częścią*, przyjmijmy, że frazę 'x jest częścią y-a' będziemy symbolicznie zapisywać jako '$x \sqsubset y$'. W dowolnym uniwersum rozważań U, przeciwzwrotność, antysymetryczność i asymetryczność pojęcia *bycia częścią* wyrazimy odpowiednio formalnie jako:

(pz$_\sqsubset$) $\quad \neg\exists_{x\in U}\, x \sqsubset x,$

(antys$_\sqsubset$) $\quad \neg\exists_{x,y\in U}(x \neq y \land x \sqsubset y \land y \sqsubset x),$

(as$_\sqsubset$) $\quad \neg\exists_{x,y\in U}(x \sqsubset y \land y \sqsubset x).$

Koniunkcja (pz$_\sqsubset$) i (antys$_\sqsubset$) jest logicznie równoważna z (as$_\sqsubset$).

Leśniewski przyjmował, że stosunek części do całości jest asymetryczny (czyli też przeciwzwrotny i antysymetryczny) oraz przechodni, tj.

3. każda część jakiejś części danego przedmiotu jest także jego częścią.

Ma być więc spełniony poniższy warunek:

(t$_\sqsubset$) $\quad \forall_{x,y,z\in U}\big((x \sqsubset y \land y \sqsubset z) \Rightarrow x \sqsubset z\big).$

Z przeciwzwrotności i przechodniości wynika, że stosunek części do całości jest acykliczny, czyli nie ma zamkniętych cykli odnośnie bycia częścią. Wyraża to następujący schemat dla dowolnej dodatniej liczby naturalnej n:

(ac$_\sqsubset$) $\quad \neg\exists_{x_1,\dots,x_n\in U}(x_1 \sqsubset x_2 \land \dots \land x_{n-1} \sqsubset x_n).$

Oczywiście, powyższy schemat wyraża też (pz$_\sqsubset$) i (as$_\sqsubset$) (dla $n = 1, 2$).

Na poparcie własności przechodniości pojęcia *bycia częścią* bywa podawany następujący przykład: moja lewa ręka jest częścią mojego ciała, a to pociąga, że moja lewa dłoń jest również częścią mojego ciała. Nicholas Rescher (1955) pokazuje jednak, że w ogólnym przypadku przechodniość stosunku części do całości jest w istocie problematyczna. Oto jego kontrprzykład: jądro jest częścią komórki, komórka jest częścią organu, lecz jądro nie jest częścią organu. Jeśli uważamy, że część ma tworzyć bezpośredni funkcjonalny wkład w całość, to istotnie jądro nie jest częścią organu. Simons (1987) wskazywał zaś, że pojęcie *bycia częścią* z przechodniością odpowiada przestrzenno-czasowej inkluzji i w tym sensie jądro komórkowe jest częścią organu. Simons twierdził, że to, iż wyraz 'część' ma dodatkowe znaczenia, nie podważa mereologicznego pojęcia *bycia częścią*, gdyż nie twierdzi się, że pojęcie mereologiczne zawiera wszystkie znaczenia słowa 'część', lecz te „podstawowe i najważniejsze". Uważamy, że przechodniość pojęcia *bycia częścią* jest bezsporna, gdy odnosi się do przestrzennych regionów lub czasoprzestrzennych zdarzeń.

Jeśli odrzucimy przechodniość pojęcia *bycia częścią*, to założymy jego acykliczność, co daje asymetrię i przeciwzwrotność. W końcowej części przedstawimy szkicowo problemy związane z przechodniością tego pojęcia.

2.2. Inne znaczenia słowa ‘część’. W literaturze przedmiotu rozpowszechnił się zwyczaj, zgodnie z którym przy potocznym znaczeniu słowa ‘część’ używa się frazy ‘część właściwa’. W takich przypadkach sam termin ‘część’ nabiera nowego sensu, przy którym ma szerszy zakres użycia. Mianowicie, przyjmuje się, że częścią danego przedmiotu jest on sam oraz każda jego część w potocznym tego słowa znaczeniu. Każdą część danego przedmiotu różną od niego nazywa się jego *częścią właściwą*. W tym nowym znaczeniu słowa ‘część’, wprost z określenia wynika, że jest to pojęcie zwrotne i antysymetryczne:

1. każdy przedmiot jest swoją częścią (*niewłaściwą*);
2. nie ma takich dwóch (różnych) przedmiotów, z których jeden byłby częścią drugiego, a ten drugi był częścią pierwszego.

Jeśli używamy danego słowa w nowym znaczeniu, to musimy traktować, że mamy do czynienia z nowym pojęciem i zastosować dla niego nowe symboliczne oznaczenie. A zatem przy tym nowym znaczeniu frazę ‘x jest części y-a’ będziemy zapisywać jako ‘$x \sqsubseteq y$’. Związek pomiędzy oboma pojęciami wyraża następująca formuła, definiująca to nowe pojęcie za pomocą starego:

$$x \sqsubseteq y \Leftrightarrow (x \sqsubset y \vee x = y).$$

Zwrotność relacji $\sqsubseteq$ wynika wprost ze zwrotności predykatu identyczności ‘$=$’, a jego antysymetryczność otrzymamy z (antys$_{\sqsubset}$) oraz własności identyczności:

(z$_{\sqsubseteq}$) $\quad \forall_{x \in U} x \sqsubseteq x,$
(antys$_{\sqsubseteq}$) $\quad \neg\exists_{x,y \in U}(x \neq y \ \wedge \ x \sqsubseteq y \wedge \ y \sqsubseteq x).$

Podobnie, jeśli przyjmiemy, że relacja $\sqsubset$ jest przechodnia, to taka jest również relacja $\sqsubseteq$:

(t$_{\sqsubseteq}$) $\quad \forall_{x,y,z \in U}\big((x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq z) \Rightarrow x \sqsubseteq z\big).$

Ponadto, na mocy (pz$_{\sqsubset}$) i (as$_{\sqsubset}$), dla dowolnych x i y dostajemy:

$$x \sqsubset y \Leftrightarrow (x \sqsubseteq y \wedge x \neq y),$$
$$x \sqsubset y \Leftrightarrow (x \sqsubseteq y \wedge x \not\sqsupseteq y).$$

Te dwie formuły nie są definicjami relacji $\sqsubset$, gdyż ta jest u nas pierwotna. Przyjęcie konwencji rozszerzającej zakres słowa ‘część’ może czasami doprowadzić do nieporozumień.

2.3. Ingrediensy. Stanisław Leśniewski nie zmieniał potocznego znaczenia wyrazu ‘część’. W swoich pracach stosował słowo ‘ingredjens’, którego nie było w międzywojennej polszczyźnie. Zastosujmy ten neologizm, zapisując go według współczesnych zasad, czyli jako ‘ingrediens’. A zatem *ingrediensem* danego przedmiotu jest on sam oraz każda jego część w potocznym tego słowa znaczeniu. Obce brzmienie wyrazu ‘ingrediens’ przypomina, że jest to «sztuczne pojęcie».[4]

2.4. Brak pustego obiektu (zera). Gdy zakładamy, że uniwersum rozważań składa się odpowiednio z obiektów fizycznych lub regionów przestrzennych, czy też zdarzeń czasoprzestrzennych, wtedy z naszych rozważań wykluczmy odpowiednio istnienie «pustego obiektu», «pustego regionu», czy też «pustego zdarzenia», które odpowiednio miałoby być częścią każdego innego obiektu, regionu, zdarzenia. Nie mamy zatem analogii do teorii mnogości – teorii zbiorów (klas) dystrybutywnych – w której zakładamy istnienie zbioru pustego $\emptyset$, będącego podzbiorem każdego zbioru dystrybutywnego.

W sensie algebraicznym taki pusty obiekt odpowiadałby zeru, czyli najmniejszemu elementowi uniwersum rozważań względem relacji $\sqsubseteq$. Oczywiście, w zastosowaniach teorii części przyjmujemy, że jest więcej niż jeden obiekt fizyczny, region przestrzenny lub zdarzenie czasoprzestrzenne. Teoretycznie jednak nie wykluczamy jednoelementowego uniwersum rozważań, które nazywamy *zdegenerowanym*. W takich zaś uniwersum jego jedyny element jest zerem, chociaż nie musi go traktować jako pustego obiektu. We wszystkich rozważanych teoriach w niezdegenerowanym uniwersum nie ma zera:

$$(\nexists 0) \qquad \exists_{z,u\in U}\, z \neq u \Longrightarrow \neg\exists_{x\in U}\forall_{u\in U}\, x \sqsubseteq u.$$

Zasada ta będzie wynikać z innych dalej przyjętych. Podajemy ją już teraz, gdyż przez to nabiorą właściwego znaczenia dalej prowadzone pojęcia pomocnicze.

2.5.Relacja *bycia zewnętrznym względem*. Pomocniczym relacyjnym pojęciem dotyczącym elementów uniwersum jest *bycia zewnętrznym względem*, które oznaczymy przez $\wr$. Mówimy, że jeden obiekt jest zewnętrzny względem drugiego, gdy nie maja one żadnego wspólnego ingrediensa. W zapisie symbolicznym, dla dowolnych $x, y \in U$ kładziemy:

$$x \wr y \iff \neg\exists_{z\in U}(z \sqsubseteq x \wedge z \sqsubseteq y).$$

Jest to relacja symetryczna; a skoro relacja $\sqsubseteq$ jest zwrotna, więc $\wr$ jest przeciwzwrotna.[5] Nazwa i definicja tej relacji pochodzą od Leśniewskiego. Intuicje

---

[4] Naszym zdaniem niezrozumiałe jest zastąpienie w angielskich wydaniach prac Leśniewskiego słowa ‘ingredjens’ przez ‘ingredient’. Leśniewskiemu nie chodziło przecież o zastąpienie słowa ‘część’ słowem ‘składnik’ (*ingredient*), gdyż całość nie jest swoim składnikiem. W tłumaczeniach należało raczej używać zapisu ‘ingrediens’ (w liczbie mnogiej: ‘ingredienses’).

[5] Zachodzenie $x \wr y$ nie wyklucza tego, że x i y się stykają. Chodzi tutaj tylko o to, że x i y nie mają żadnej części wspólnej. Odróżnienie stycznego i niestycznego przypadku bycia zewnętrznym jest możliwe dopiero w bezpunktowej geometrii lub topologii

związane ze znaczeniem użytego zwrotu ‘jest zewnętrzne względem’ bierzemy z przypadku, gdy $\sqsubset$ jest «prawdziwą» relacją *bycia częścią*, a $\sqsubseteq$ jest «prawdziwą» relacją *bycia ingrediensem*, oraz pamiętając, że żaden element nie jest zerem w niezdegenerowanym uniwersum. To że dwa obiekty są zewnętrzne względem siebie jest równoważne temu, że żaden z nich nie jest częścią drugiego oraz że nie mają żadnej część wspólną:

$$x \wr y \iff \big(x \neq y \land \neg\, x \sqsubset y \land \neg\, y \sqsubset x \land \neg \exists_{z \in U}(z \sqsubset x \ \land\ z \sqsubset y)\big),$$
$$x \wr y \iff \big(x \not\sqsubseteq y \land\ y \not\sqsubseteq x \land \neg \exists_{z \in U}(z \sqsubset x \ \land\ z \sqsubset y)\big).$$

Dzięki zasadzie mówiącej, że w niezdegenerowanym uniwersum nie ma zera, relacja $\wr$ nie staje się automatycznie pusta. Chociaż i tak nie jest to zagwarantowane. Aby tak było, musimy rozważać struktury, które spełniają mocniejszą niż ($\nexists 0$) zasadę mówiącą, że w niezdegenerowanym uniwersum mamy co najmniej dwa elementy zewnętrzne względem siebie:

($\exists\wr$) $\qquad \exists_{z,u \in U}\, z \neq u \Longrightarrow \exists_{x,y \in U}\, x \wr y.$

2.6. Relacje *zachodzenia na* i *krzyżowania się*. Kolejną pomocniczą binarną relacją jest relacja *zachodzenia na* (lub *nakładania się*) oznaczaną przez $\circ$. Jej oznaczenie i polska nazwa pochodzi od angielskiego ‘*overlap*’, używanego w (Leonard i Goodman 1940). Dwa obiekty *zachodzą na siebie*, gdy mają co najmniej jeden wspólny ingrediens, czyli dla dowolnych $x, y \in U$ mamy:

$$x \circ y \iff \exists_{z \in U}(z \sqsubseteq x \land z \sqsubseteq y).$$

Jest to relacja symetryczna; a skoro relacja $\sqsubseteq$ jest zwrotna, to także $\circ$ jest zwrotna. Ponadto, relacje $\circ$ i $\wr$ dopełniają się wzajemnie. Zauważmy, że zachodzenie warunku $x \circ y$ nie znaczy, że x i y krzyżują się, gdyż nie wykluczamy tego, że jeden z nich jest częścią drugiego (co kłuci się ze znaczeniem zwrotu ‘zachodzić na siebie’). Mianowicie, to że $x \circ y$ jest równoważne temu, że albo $x = y$, albo x jest częścią y-a, albo odwrotnie, albo x i y mają część wspólną:

$$x \circ y \iff (x = y \ \lor\ x \sqsubset y \ \lor\ y \sqsubset x \ \lor\ \exists_{z \in U}(z \sqsubset x \ \land\ z \sqsubset y)),$$
$$x \circ y \iff (x \sqsubseteq y \ \lor\ y \sqsubseteq x \ \lor\ \exists_{z \in U}(z \sqsubset x \land\ z \sqsubset y)).$$

Zwrotowi ‘zachodzi na’ bardziej odpowiada relacja *krzyżowania się* albo *właściwego zachodzenia na*, którą oznaczymy symbolem $\between$. Mówimy, że dwa obiekty *krzyżują się*, gdy mają jakąś wspólną część, lecz żaden z nich nie jest częścią drugiego, czyli dla dowolnych $x, y \in U$ mamy:

$$x \between y \iff (x \neq y \land \neg\, x \sqsubset y \land \neg\, y \sqsubset x \land\ \exists_{z \in U}(z \sqsubset x \land\ z \sqsubset y)).$$

Jest ona symetryczna i przeciwzwrotna. Wyrazimy ją także w poniższy sposób:

(zob. np. Tarski 1929, 1956; Gruszczyński i Pietruszczak 2008, 2009, 2018a, 2018b, 2019, 2021; Grzegorczyk 1960). Zatem jest zupełnie inaczej niż w zwykłej, punktowej geometrii, gdzie figury styczne nie są rozłączne, gdyż mają wspólny punkt.

$$x \between y \iff (x \mathbin{\mathbf{o}} y \wedge x \not\sqsubseteq y \wedge y \not\sqsubseteq x).$$

Zatem dwa obiekty krzyżują się wtedy i tylko wtedy, gdy nakładają się wzajemnie, lecz żaden z nich nie jest ingrediensem drugiego. Dzięki zasadom ($\nexists 0$) i ($\exists \wr$) jasne stają się intuicje związane z relacjami $\mathbf{o}$ i $\between$. Ponadto, na mocy przyjętych definicji oraz (pz$_{\sqsubseteq}$) i (as$_{\sqsubset}$), mamy następujące związki pomiędzy wprowadzonymi relacjami:

$$x \mathbin{\mathbf{o}} y \iff (x = y \vee x \sqsubset y \vee y \sqsubset x \vee x \between y),$$
$$x \not\sqsubseteq y \iff (x \wr y \vee x \between y \vee y \sqsubset x).$$

Zatem dwa (różne) obiekty zachodzą na siebie wtedy i tylko wtedy, gdy albo się krzyżują, albo jeden jest częścią drugiego. Ponadto, jeden obiekt nie jest ingrediensem drugiego wtedy i tylko wtedy gdy, albo są zewnętrzne względem siebie, albo się krzyżują, albo ten drugi jest częścią pierwszego.

3. Sumy mereologiczne i kresy górne

3.1. Klasy kolektywne jako sumy mereologiczne. Niech ‘S’ będzie literą schematyczną reprezentującą jakąś nazwę generalną pewnych elementów uniwersum rozważań *U*. Zakresem tej nazwy jest dystrybutywny zbiór S-ów z *U*, tj. zbiór $\{u \in U : u$ jest S-em$\}$. Wzorując się na Alfredzie Tarskim (1929, 1956) zamiast mówić, że *x* jest klasą kolektywną S-ów, piszemy: *x* jest *sumą mereologiczną* wszystkich elementów zbioru (dystrybutywnego) wszystkich S-ów. Możemy również przejść do rozważania dowolnych podzbiorów uniwersum, a nie ograniczać się do zakresów nazw generalnych. To pozwala na pozbycie się z rozważań liter schematycznych. Zamiast o sumie wszystkich S-ów możemy mówić o sumie wszystkich elementów danego podzbioru zbioru *U*. A zatem dla dowolnego elementu *x* i dowolnego podzbioru *Z* zbioru *U* przyjmujemy, że:

x jest *sumą mereologiczną* wszystkich elementów dystrybutywnego zbioru *Z* wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są poniższe dwa warunki:

- każdy element zbioru *Z* jest ingrediensem *x*-a,
- każdy ingrediens *x*-a zachodzi na jakiś element zbioru *Z*.

Jednakże, zamiast pisać:

- *x* jest sumą mereologiczną wszystkich elementów zbioru *Z*

będziemy pisać: *x* **sum** *Z*. Możemy więc utworzyć binarną relację **sum** zawartą w zbiorze $U \times \mathcal{P}(U)$, przyjmując, że dla dowolnych $x \in U$ i $Z \in \mathcal{P}(U)$:

$$x \mathbin{\mathbf{sum}} Z \iff \forall_{z \in Z}\, z \sqsubseteq x \wedge \forall_{y \in U}(y \sqsubseteq x \Rightarrow \exists_{z \in Z}\, z \mathbin{\mathbf{o}} y).$$

Jako konsekwencję zwrotności relacji $\sqsubseteq$ otrzymujemy:

- dla dowolnych $x \in U$ i $Z \in \mathcal{P}(U)$: jeśli *x* **sum** *Z*, to $Z \neq \emptyset$, czyli nie istnieje suma mereologiczna zbioru pustego $\emptyset$. To zaś mówi, że nie czegoś takiego, jak pusta klasa kolektywna. Współgra to z ($\nexists 0$) głoszącym, że niezdegenerowanym uniwersum nie ma zera, które tam grałoby rolę puste obiektu. Jest to zgodne z poniższą ogólną zasadą, którą otrzymujemy ze zwrotności relacji o

- jeśli $x \in Z$ i zbiór Z jest zawarty w zbiorze wszystkich ingrediensów x-a, to $x \,\mathsf{sum}\, Z$, czyli jeśli $x \in Z \subseteq \{u \in U : u \sqsubseteq x\}$, to $x \,\mathsf{sum}\, Z$.

A stąd otrzymujemy:

- $x \,\mathsf{sum}\, \{x\}$ tj. x jest mereologiczną sumą samego siebie,
- $x \,\mathsf{sum}\, \{u \in U : u \sqsubseteq x\}$ tj. x jest sumą wszystkich swoich ingrediensów.

Mamy również:

- jeśli x nie jest atomem, to $x \,\mathsf{sum}\, \{u \in U : u \sqsubset x\}$, tj. x jest mereologiczną sumą wszystkich swoich części.

Musieliśmy przyjąć założenie, gdyż atomy nie mają części, a nie ma sumy mereologicznej zbioru pustego.

Do tej pory nie zajmowaliśmy się problemem, czy w danym uniwersum U jest element największy, który nazywamy *jednością*, tj.:

- x jest *jednością w U* wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall_{u \in U}\, u \sqsubseteq x$.

Oczywiście z ($\mathrm{antys}_{\sqsubseteq}$) dostajemy, że dane uniwersum może mieć co najwyżej jedną jedność. Problem istnienia jedności ma związek z istnieniem sumy mereologicznej całego uniwersum. Mianowicie dla dowolnego $x \in U$:

- $x \,\mathsf{sum}\, U$ wtedy i tylko wtedy, gdy x jest jednością w U.

Uniwersum może mieć więc co najwyżej jedną sumę (o ile ma jedność).

3.2. Funkcyjność relacji sum. Zgodnie ze znaczeniem słowa ‘klasa’ pojęcie klasy kolektywnej S-ów może mieć co najwyżej jeden desygnat. Właśnie taki aksjomat przyjmował Leśniewski (1927, 1928).

Przyjęte do tej pory założenia pozwalają jedynie powiedzieć, że o ile całe uniwersum ma sumę mereologiczną, to ma ją tylko jedną (jest nią jedność, o ile ona istnieje). Aby można było to powiedzieć o innych podzbiorach uniwersum, przyjmiemy nowe założenie, które w naszej terminologii jest odpowiednikiem jednego z aksjomatów przyjętych przez Leśniewskiego. Będzie ono mówić o funkcyjności relacji sum:

$$(\mathrm{f}_{\mathsf{sum}}) \qquad \forall_{Z \in \mathcal{P}(U)} \forall_{x,y \in U} \big((x \,\mathsf{sum}\, Z \wedge y \,\mathsf{sum}\, Z) \Longrightarrow x = y\big).$$

A zatem każdy zbiór może mieć co najwyżej jedną sumę. Stąd wynika, że $\{x\}$ jest jedynym singletonem, którego sumą jest x:

$$(\mathrm{sf}_{\mathsf{sum}}) \qquad \forall_{x,y \in U} (x \,\mathsf{sum}\, \{y\} \Longrightarrow x = y).$$

To pokazuje, że biorąc pod uwagę fakt, iż $x \,\mathsf{sum}\, \{x\}$, mereologiczną sumę singletona $\{x\}$ możemy utożsamić z samym x-em; co zapisujemy jako $x = [\![x]\!]$. A zatem klasa kolektywna budowane z jednego obiektu jest tym obiektem. Nie twierdzimy, że jest to klasa jednoelementowa, gdyż każdą część obiektu x trzeba uznać za mereologiczny element klasy $[\![x]\!]$.

Na koniec zauważmy, że ($\mathrm{f}_{\mathsf{sum}}$) pociąga poniższą zasadę ekstensjonalności względem $\sqsubset$, która jest mereologicznym odpowiednikiem zasady ekstensjonalności przyjmowanej w teorii mnogości:

$$(\mathrm{ext}_{\sqsubset}) \qquad \forall_{x,y\in U}((\exists_{u\in U} u \sqsubset x \ \wedge \ \forall_{z\in U}(z \sqsubset x \Leftrightarrow \ z \sqsubset y)) \ \Longrightarrow \ x = y).$$

Tj. nie ma dwóch nieatomowych obiektów takich, że każda część jednego jest częścią drugiego. Niezbędne jest założenie, że x nie jest atomem, gdyż w innym przypadku drugi człon poprzednika implikacji jest zawsze prawdziwy. Istotnie, niech P_x i P_y będą odpowiednio zbiorami wszystkich części x-a i y-ka. Przyjęte założenie mówi, że $P_x = P_y \neq \emptyset$. Wiemy, że $x \mathrel{\mathsf{sum}} P_x$ i $y \mathrel{\mathsf{sum}} P_y$. Stąd ($\mathrm{f}_{\mathsf{sum}}$) daje nam $x = y$. Implikacji odwrotnej nie uzyskamy, gdyż x może być atomem mereologicznym.[6]

4.3. Kresy górne. Rozpatrywane uniwersa są częściowo uporządkowane przez relację $\sqsubseteq$, która jest w nich zwrotna, antysymetryczna i przechodnia. Można więc w nich rozpatrywać binarną relację *bycia kresem górnym*. Mówiąc lapidarnie, kresem górnym podzbioru Z uniwersum U ma być najmniejszy obiekt w uniwersum, ingrediensami którego są wszystkie elementy podzbioru Z. To, że obiekt x jest kresem górnym zbioru Z będziemy zapisywać jako $x \mathrel{\mathsf{sup}} Z$. Możemy więc utworzyć binarną relację sup zawartą w zbiorze $U \times \mathcal{P}(U)$, przyjmując, że dla dowolnych $Z \in \mathcal{P}(U)$ i $x \in U$:

$$x \mathrel{\mathsf{sup}} Z \Leftrightarrow \ \forall_{z\in Z}\, z \sqsubseteq x \wedge \forall_{y\in U}(\forall_{z\in Z}\, z \sqsubseteq y \Rightarrow x \sqsubseteq y).$$

Bezpośrednio z ($\mathrm{antys}_{\sqsubseteq}$) mamy funkcyjność relacji sup:

$$(\mathrm{f}_{\mathsf{sup}}) \qquad \forall_{Z\in\mathcal{P}(U)}\forall_{x,y\in U}\big((x \mathrel{\mathsf{sup}} Z \wedge \ y \mathrel{\mathsf{sup}} Z) \Longrightarrow x = y\big).$$

Z dotychczas przyjętych założeń nie można wyprowadzić żadnych ciekawych związków pomiędzy relacjami sum i sup. Wprowadziliśmy tę drugą relację tylko po to, aby dalej, przy przyjmowaniu kolejnych założeń pokazywać związki pomiędzy tymi dwoma relacjami.

4. Teorie egzystencjalnie neutralne

Jak już wspomnieliśmy we wstępie, teorie egzystencjalnie neutralne nie mają żadnych aksjomatów postulujących istnienie mereologicznych sum, których istnienie nie wynika z przyjętych definicji i podstawowych własności relacji *bycia*

[6] Nie mamy zasady ekstensjonalności dla relacji $\sqsubseteq$. Z ($\mathrm{z}_{\sqsubseteq}$) mamy przecież $\forall_{x,y\in U}(\forall_{z\in U}(z \sqsubseteq x \Rightarrow z \sqsubseteq y)) \Longrightarrow x \sqsubseteq y)$, a to i ($\mathrm{antys}_{\sqsubseteq}$) daje $\forall_{x,y\in U}(\forall_{z\in U}(z \sqsubseteq x \Leftrightarrow z \sqsubseteq y)) \Longrightarrow x = y)$.

częścią. Dodajmy, że taki egzystencjalny aksjomat nie musi jednak *explicite* postulować istnienia sumy mereologicznej.

4.1. Słaba zasada uzupełniania. Przykładami neutralnych egzystencjalnych aksjomatów są pochodzące od Simonsa (1987) dwie zasady uzupełniania: słaba i mocna. Pierwsza z nich (*Weak Supplementation Principle*) ma postać:

(WSP) $$\forall_{x,y\in U}\big(y \sqsubset x \Longrightarrow \exists_{z\in U}(z \sqsubset x \land z \wr y)\big),$$

tj. jeśli jeden obiekt jest częścią drugiego, to jakiś obiekt jest częścią tego drugiego i jest zewnętrzny względem pierwszego. Z (WSP) i przeciwzwrotności relacji $\wr$ wynika, że żaden obiekt nie ma dokładnie jednej części (chociaż mogą istnieć obiekty niemające żadnej części – *mereologiczne atomy*):

$$\forall_{x,y\in U}\big(y \sqsubset x \Longrightarrow \exists_{z\in U}(z \sqsubset x \land z \neq y)\big).$$

W (Pietruszczak 2000: 71) pokazano, że (WSP) pociąga ($\mathrm{pz}_{\sqsubset}$).[7] Mając więc (WSP) i ($\mathrm{t}_{\sqsubset}$) nie trzeba zakładać ani ($\mathrm{pz}_{\sqsubset}$), ani ($\mathrm{as}_{\sqsubset}$). Z (WSP) również wynikają obie zasady ($\nexists 0$) i ($\exists\wr$).

Udowodniono, że (zob. np. Pietruszczak 2000: 71–72; 2013: 59–60):

- (WSP) jest równoważne z koniunkcją ($\mathrm{sf}_{\mathsf{sum}}$) i ($\mathrm{pz}_{\sqsubset}$).

A stąd otrzymujemy, że

- (WSP) wynika z ($\mathrm{f}_{\mathsf{sum}}$) i ($\mathrm{pz}_{\sqsubset}$).

Wspomnieliśmy już, że aby otrzymać jakieś związki pomiędzy relacjami **sum** i **sup**, trzeba założyć coś dodatkowego o relacji $\sqsubset$. Właśnie takim założenie jest (WSP). W (Pietruszczak 2000: 147; 2013: 63) pokazano, że zasada (WSP) jest równoważna z poniższym zdaniem:

($\diamond$) $$\forall_{Z\in\mathcal{P}(U)}\forall_{x,y\in U}\big((x \,\mathsf{sum}\, Z \land y \,\mathsf{sup}\, Z) \Longrightarrow x = y\big),$$

tj. jeśli istnieją suma mereologiczna i kres górny danego zbioru, to są równe.

4.2. Mocna zasada uzupełniania. Druga z zasad przyjętych przez Simonsa (1987) – „mocna zasada uzupełniania” (*Strong Supplementation Principle*) – głosi, że jeśli jeden obiekt nie jest ingrediensem drugiego, to jakiś obiekt jest ingrediensem pierwszego i jest zewnętrzny względem drugiego:

(SSP) $$\forall_{x,y\in U}\big(x \not\sqsubseteq y \Longrightarrow \exists_{z\in U}(z \sqsubseteq x \land z \wr y)\big).$$

W następniku musi stać $\sqsubseteq$, a nie $\sqsubset$, gdyż x może być atomem.

Zauważmy, że ($\mathrm{as}_{\sqsubset}$) i (SSP) pociągają (WSP). Istotnie, niech $y \sqsubset x$. Wtedy, na mocy ($\mathrm{pz}_{\sqsubset}$) i ($\mathrm{as}_{\sqsubset}$), mamy $x \not\sqsubseteq y$. Stąd, na mocy (SSP), dla jakiegoś z mamy: $z \sqsubseteq x$ i $z \wr y$. To zaś i przyjęte założenie dają $z \neq x$. A zatem $z \sqsubset x$.

[7] Załóżmy, że $x \sqsubset x$. Wtedy, na mocy (WSP), dla jakiegoś z mamy: $z \sqsubset x$ i $z \wr x$. To pierwsze zaś daje $z \circ x$, czyli mamy sprzeczność. Piszemy o tym, gdyż Simons (1987) – a za nim inni autorzy – zakładają (WSP) plus ($\mathrm{t}_{\sqsubset}$) plus ($\mathrm{pz}_{\sqsubset}$) lub ($\mathrm{as}_{\sqsubset}$).

Z (SSP) wynika następująca wersja zasady uzupełniania:

$$\forall_{x,y\in U}\big(x \between y \Longrightarrow \exists_{z\in U}(z \sqsubset x \wedge z \wr y)\big),$$

tj. jeśli dwa obiekty krzyżują się, to jeden z nich ma część zewnętrzną względem drugiego. Istotnie, jeśli $x \between y$, to $x \circ y$ i $x \not\sqsubseteq y$. Stąd, na mocy (SSP), mamy z takie, że $z \sqsubseteq x$ i $z \wr y$. Stąd zaś mamy $z \neq x$, skoro $x \circ y$. A zatem $z \sqsubset x$.

W (Pietruszczak 2000: 74–76; 2013: 47–48) udowodniono, że zasada (SSP) jest równoważna z każdą z dwóch poniższych:

$(\mathrm{SSP}_{\circ})$ $\quad\forall_{x,y\in U}(\forall_{z\in U}(z \circ x \Rightarrow z \circ y) \Longrightarrow x \sqsubseteq y),$

$(\mathrm{SSP}_{\wr})$ $\quad\forall_{x,y\in U}(\forall_{z\in U}(z \wr y \Rightarrow z \wr x) \Longrightarrow x \sqsubseteq y).$

Równoważność dwóch powyższych dostajemy z zależności zachodzącej pomiędzy $\circ$ i $\wr$. Głoszą one: jeden obiekt jest ingrediensem drugiego, jeśli każdy obiekt zachodzący na pierwszy zachodzi też na drugi, lub równoważnie, jeśli każdy obiekt zewnętrzny względem drugiego jest zewnętrzny względem pierwszego.

Z $(\mathrm{t}_{\sqsubseteq})$ mamy implikacje odwrotne do $(\mathrm{SSP}_{\circ})$ i $(\mathrm{SSP}_{\wr})$, co razem daje:

$$\forall_{x,y\in U}\big(x \sqsubseteq y \Leftrightarrow \forall_{z\in U}(z \circ x \Rightarrow z \circ y)\big),$$
$$\forall_{x,y\in U}\big(x \sqsubseteq y \Leftrightarrow \forall_{z\in U}(z \wr x \Rightarrow z \wr y)\big).$$

Relacja $\sqsubseteq$ jest więc wyrażalna przez każdą z relacji $\circ$ i $\wr$.

Mocna zasada uzupełniania (SSP) daje kolejny związek zachodzący pomiędzy relacjami **sum** i **sup**. Jest on mocniejszy od tego, który dawała (WSP). Mianowicie, w (Pietruszczak 2000: 78; 2013: 63–64) udowodniono, że:

- zasada (SSP) jest równoważna z inkluzją **sum** $\subseteq$ **sup** mówiącą, że każda suma mereologiczna jest kresem górnym.

Skoro tylko niepuste zbiory mają sumę mereologiczną, więc dostajemy:

$$\forall_{Z\in\mathcal{P}(U)}\forall_{x\in U}\big(x\,\mathbf{sum}\,Z \Longrightarrow (Z \neq \emptyset \wedge x\,\mathbf{sup}\,Z)\big).$$

Oczywiste jest, że mając powyższe i $\left(\mathrm{f}_{\mathbf{sup}}\right)$ otrzymamy $(\diamond)$.

Zaznaczmy, że w egzystencjalnie neutralnych teoriach nie otrzymamy ani implikacji odwrotnej do powyższej, ani inkluzji **sup** $\subseteq$ **sum**. Dalej pokażemy, że te dwa ostatnie warunki wymuszają istnienie sum mereologicznych, których nie otrzymamy z przyjętych definicji i podstawowych własności relacji $\sqsubset$.

Oprócz podanej wcześniej definicji relacji **sum**, Leśniewski w (1931) podał drugą eksplikację pojęcia *klasy kolektywnej*. W mereologii Leśniewskiego obie definicje są równoważne. Wynika to z samej zasady (SSP). Nie będziemy wprowadzać nowej relacji, lecz zauważymy, że gdy tę zasadę, to relacja **sum** ma następująca własność: dla dowolnych $x \in U$ i $Z \in \mathcal{P}(U)$,

$(\$_{\wr})$ $\quad x\,\mathbf{sum}\,Z \Leftrightarrow \forall_{y\in U}(y \wr x \Leftrightarrow \forall_{z\in Z}\, z \wr y),$

tj. x jest sumą mereologiczną wszystkich elementów zbioru Z wtedy i tylko wtedy, gdy to, że dany obiekt jest zewnętrzny względem x-a jest równoważne temu, że obiekt ten jest zewnętrzny względem wszystkich elementów zbioru Z. Co więcej, implikacja „$\Leftarrow$" jest równoważna z zasadą (SSP). Dowód tych faktów można znaleźć w (Pietruszczak 2000: 114–115; 2013: 69–71).

Biorąc pod uwagę zależność zachodzącą pomiędzy relacjami $\wr$ i $\mathbf{o}$, tezę ($\dagger_\wr$) można wyrazić jako:

($\$_{\mathbf{o}}$) $$x \,\mathsf{sum}\, Z \Leftrightarrow \forall_{y\in U}(y \,\mathbf{o}\, x \Leftrightarrow \exists_{z\in Z}\, z \,\mathbf{o}\, y).$$

Tj. x jest sumą mereologiczną wszystkich elementów zbioru Z wtedy i tylko wtedy, gdy to, że dany obiekt zachodzi na x-a jest równoważne temu, że obiekt ten zachodzi na jakiś element zbioru Z.

4.3. Zasada części właściwych. Przyjął ją Simons w (1987) i nazwał *Proper Parts Principle*.[8] Wyraża ją następująca formuła:

(PPP) $$\forall_{x,y\in U}((\exists_{u\in U} u \sqsubset x \ \wedge\ \forall_{z\in U}(z \sqsubset x \Rightarrow\ z \sqsubset y)) \ \Longrightarrow\ x \sqsubseteq y).$$

tj. jeśli każda część nieatomowego obiektu jest częścią innego, to ten pierwszy jest ingrediensem drugiego. Niezbędne jest założenie, że ten pierwszy nie jest atomem. Ponadto w następniku (PPP) nie może wystąpić $x \sqsubset y$, gdyż z poprzednika nie wynika x i y są różne.

Zasada (PPP) wynika z (SSP). Istotnie, niech $u \sqsubset x$ i każda część x-a jest częścią y-a. Wtedy $u \sqsubset$ y. A zatem mamy $x \,\mathbf{o}\, y$. Ponadto, załóżmy nie wprost, że $x \not\sqsubseteq y$. Wtedy, na mocy (SSP), dla jakiegoś z ,mamy $z \sqsubseteq x$ i $z \wr y$. Stąd zaś i z założenia mamy $z \neq x$. A zatem $z \sqsubset x$. Stąd, na mocy założenia, także $z \sqsubset y$. Zatem mamy sprzeczność.

4.4. Zasady ekstensjonalności. Dzięki (antys$_{\sqsubseteq}$) każda z zasad (SSP$_{\mathbf{o}}$) i SSP$_\wr$), równoważnych z (SSP), daje mereologiczny odpowiednik zasady ekstensjonalności odpowiednio względem relacji $\mathbf{o}$ i $\wr$:

(ext$_{\mathbf{o}}$) $$\forall_{x,y\in U}(\forall_{z\in U}(z \,\mathbf{o}\, x \Leftrightarrow z \,\mathbf{o}\, y) \Longrightarrow\ x = y),$$

(ext$_\wr$) $$\forall_{x,y\in U}(\forall_{z\in U}(z \wr x \Leftrightarrow z \wr y) \Longrightarrow\ x = y).$$

Powyższe implikacje są odwracalne ze względu na własność predykatu '='.

W (Pietruszczak 2000: 73; 2013: 59) udowodniono, że przy przyjętych definicjach i założeniach o $\sqsubset$, zasady (ext$_{\mathbf{o}}$) i (f$_{\mathsf{sum}}$) są równoważne. A to jeszcze raz pokazuje, że (SSP) pociąga (ext$_{\mathbf{o}}$) i (ext$_\wr$), a każda z nich pociąga (WSP). Na koniec zauważmy, że z (antys$_{\sqsubseteq}$) i (PPP) otrzymujemy zasadę (ext$_{\sqsubset}$), którą już dostaliśmy z (f$_{\mathsf{sum}}$) (zob. Pietruszczak 2000: 77).

4.5. Wyróżnione teorie. Z podanych w tej części zasad można utworzyć 12 nierównoważnych teorii, które jako tezę mają zasadę ($\nexists 0$). Wśród nich tylko dziewięć spełnia ($\exists\wr$). Uważamy jednak, że na miano „teorii części" zasługują

[8] W (1987) Simons stosuje terminologię, zgodnie z którą termin 'część właściwa' (*proper part*) odpowiada stosowanemu przez nas terminowi 'część'.

tylko te, w których relacja sum jest funkcyjna, tj zachodzi zasada (f_{sum}). Mamy tylko trzy takie teorie. Uszeregujemy je od najsłabszej do najmocniejszej. W każdej z nich relacja $\sqsubset$ ostro częściowo porządkuje uniwersum, tzn. że jest przechodnia i przeciwzwrotna, a więc i asymetryczna. Zatem daną teorię będziemy wyznaczać poprzez wymienianie dodatkowo przyjętych założeń:

1. (f_{sum}), ównoważnie ($ext_{\circ}$) lub ($ext_{\wr}$);
2. (f_{sum})+(PPP);
3. (SSP), równoważnie $\mathsf{sum} \subseteq \mathsf{sup}$, lub ($SSP_{\circ}$), lub ($SSP_{\wr}$).

Już najsłabsza z nich zawiera jako tezy wszystkie omawiane formuły oprócz (PPP), (SSP) i ich równoważników. Oczywiście, wśród trzech wyróżnionych teorii najciekawszą jest ta najsilniejsza. Pełną siatkę (kratę) teorii zbudowanych z podanych formuł można znaleźć w (Pietruszczak 2013:54).

Zauważmy, że te trzy teorie można zaksjomatyzować w sposób elementarny, tj. bez użycia zmiennych przebiegających podzbiory uniwersum rozważań, usuwając zapisy postaci '... $\in U$' i przyjmując, że zmienne 'x', 'y' itd., przebiegają uniwersum rozważań. Istotnie, nawet (f_{sum}) zastąpimy elementarnym ($ext_{\circ}$).

Powstaje jednak problem: czy te trzy wymienione teorie rzeczywiście są egzystencjalnie neutralne? Twierdzącą odpowiedź mamy nawet w przypadku tej najsilniejszej, gdyż zasada (SSP) jest egzystencjalnie neutralna. Chociaż postuluje ona istnienie jakiegoś obiektu, lecz jest on wiązany z własnością relacji *bycia częścią*. To, że zasad (SSP) nie postuluje istnienia sum mereologicznych, widać ponadto z tego, że jest równoważna z ($SSP_{\circ}$) i ($SSP_{\wr}$). A te ostatnie na pewno nie postulują istnienia sum mereologicznych.

Dodajmy, że zasada (SSP) daje też równoważność dwóch eksplikacji pojęcia *klasy kolektywnej*. Zatem teoria z (SSP) ma największe walory na to, aby uznać ją za tę właściwą egzystencjalnie neutralną teorię części.

5. Teorie egzystencjalnie zaangażowane

Wszystkie z prezentowanych tu egzystencjalnie zaangażowanych teorii będą silniejsze od najsilniejszej z teorii egzystencjalnie neutralnych, czyli będzie w nich zachodzić zasada (SSP). We wstępie wspomnieliśmy, że takie teorie mogą mieć założenia, które *implicite* postulują istnienie klas kolektywnych (jako sum mereologicznych). Właśnie tak będzie w przypadku pierwszej z prezentowanych tu egzystencjalnie zaangażowanych teorii.

5.1. Dwie teorie mereologicznych ostrych częściowych porządków. Pierwszą z nich otrzymamy dodając równość $\mathsf{sum} = \mathsf{sup}$ do aksjomatów teorii ostrych częściowych porządków, tj. do zasad ($t_{\sqsubset}$) i ($pz_{\sqsubset}$). W punkcie 4.2 pokazaliśmy, że inkluzja $\mathsf{sum} \subseteq \mathsf{sup}$ jest równoważna z (SSP). Wspomnieliśmy też, że to inkluzja $\mathsf{sup} \subseteq \mathsf{sum}$ powoduje, że otrzymujemy teorię egzystencjalnie zaangażowaną. Istotnie, poniższy przykład pokazuje, że zachodzenie tej inkluzji wymusza istnienie takich sum mereologicznych, których nie otrzymamy z przyjętych definicji i podstawowych własności relacji $\sqsubset$.

Rozważmy uniwersum będące ostrym częściowym porządkiem spełniającym zasadę (SSP) i mające co najmniej cztery elementy wśród których jest jedność **1** oraz trzy parami nie zachodzące na siebie obiekty o_1, o_2, o_3, które ponadto są jedynie częściami jedności (tj. leżą bezpośrednio pod **1**). Jedność **1** jest kresem górnym każdej z par $\{o_1, o_2\}$, $\{o_1, o_3\}$, $\{o_2, o_3\}$, lecz żadna z niech nie ma sumy mereologicznej. Zatem nie zachodzi inkluzja $\mathsf{sup} \subseteq \mathsf{sum}$. Aby ją uratować, musimy wprowadzić trzy nowe obiekty $[\![o_1, o_2]\!]$, $[\![o_1, o_3]\!]$, $[\![o_2, o_3]\!]$ będące odpowiednio sumami par $\{o_1, o_2\}$, $\{o_1, o_3\}$, $\{o_2, o_3\}$.

Zauważmy jeszcze, że inkluzja $\mathsf{sup} \subseteq \mathsf{sum}$ powoduje to, że uniwersum nie jest zdegenerowane, czyli jednoelementowe. Istotnie, jeśli $U = \{u\}$, to u jest kresem górnym zbioru pustego $\emptyset$. Zatem musiałoby być także sumą mereologiczną tego zbioru, a wiemy, że nie ma takiej sumy.

Otrzymujemy więc teorię równoważną z teorią niezdegenerowanych ostrych częściowych porządków z dodaną równością $\mathsf{sup} = \mathsf{sum}$.

Jeśli dopuścimy struktury zdegenerowane, to trzeba ograniczyć inkluzję $\mathsf{sup} \subseteq \mathsf{sum}$ do zbiorów niepustych, tj. przyjąć poniższy warunek:

$$(\dagger) \qquad \forall_{Z \in \mathcal{P}(U)} \forall_{u \in U} ((Z \neq \emptyset \ \wedge \ x \,\mathsf{sup}\, Z)) \Longrightarrow \ x \,\mathsf{sum}\ Z).$$

Otrzymujemy więc teorię równoważną z teorią ostrych częściowych porządków z dodanym warunkiem:

$$(\ddagger) \qquad \forall_{Z \in \mathcal{P}(U)} \forall_{u \in U} \big(x \,\mathsf{sum}\, Z \Longleftrightarrow \ (Z \neq \emptyset \ \wedge \ x \,\mathsf{sup}\, Z)\big).$$

W obu przypadkach otrzymujemy egzystencjalnie zaangażowane teorie zasługujące na miano teorii *mereologicznych ostrych częściowych porządków*.[9]

5.2. Minimalna ekstensjonalna mereologia Simonsa. W (Simons 1987: 31) „minimalną ekstensjonalną mereologią” (*Minimal Extensional Mereology*) nazwano teorię, którą oparto na aksjomatach ($\mathrm{pz}_{\sqsubset}$), ($\mathrm{t}_{\sqsubset}$), (WSP) i poniższym:

$$(\mathrm{w}\exists\sqcap) \qquad \forall_{x,y \in U} \big(x \circ y \ \Longrightarrow \ \exists_{z \in U} \forall_{u \in U} (u \sqsubseteq z \ \Leftrightarrow u \sqsubseteq x \ \wedge \ u \sqsubseteq y)\big),$$

stwierdzającym warunkowe istnienie produktu (przecięcia) zachodzących na siebie obiektów x i y, który oznaczamy przez: $x \sqcap y$. Wspomnieliśmy już, że mając (WSP), zbędne jest przyjmowanie ($\mathrm{pz}_{\sqsubset}$) jako aksjomatu.

Udowodniono, że (SSP) jest tezą minimalnej ekstensjonalnej mereologii (zob. np. Pietruszczak 2000: 120; 2013: 77). Zatem mamy w niej funkcyjność relacji sum wyrażoną przez ($\mathrm{f}_{\mathsf{sum}}$). Aksjomat ($\mathrm{w}\exists\sqcap$) związany jest z relacją sum. Mówi, że dla dowolnych zachodzących na siebie obiektów x i y, produkt $x \sqcap y$ jest jedyną sumą mereologiczną wszystkich ich wspólnych ingrediensów,

[9] Pamiętajmy jednak, że w obu przypadkach dodane warunki nie są definicjami sum.

tj. $x \sqcap y$ jest sumą niepustego zbioru $\{u \in U : u \sqsubseteq x \wedge u \sqsubseteq y\}$. Dodajmy, że (w$\exists\sqcap$) nie uzyskamy z (SSP) (zob. np. Pietruszczak 2000: 144; 2013: 77).

Pokazano też, że minimalna ekstensjonalna mereologia krzyżuje się z obu teoriami mereologicznych ostrych częściowych porządków. Dokładniej, do tej pierwszej nie należy ani inkluzja $\mathbf{sup} \subseteq \mathbf{sum}$, ani warunek (†). Do tych drugich zaś nie należy (w$\exists\sqcap$). Można więc rozpatrywać mocniejsze teorie, które powstają przez dodanie do tej pierwszej bądź inkluzji $\mathbf{sup} \subseteq \mathbf{sum}$, bądź (†) (zob. Pietruszczak 2000: 147–149; 2013: 78–80).

4.3. Minimalna domknięta mereologia. Wspomnieliśmy już we wstępie, że egzystencjalnie neutralne teorie nie postulują istnienia zbioru kolektywnego utworzonego z dwóch obiektów będących częściami trzeciego. W przyjętej przez nas terminologii taki postulat ma następującą formę:

$$(\mathrm{w}\exists\sqcup) \qquad \forall_{x,y\in U}(\exists_{u\in U}(x \sqsubseteq z \ \wedge \ y \sqsubseteq z) \Longrightarrow \exists_{z\in U}\, z\, \mathbf{sum}\{x,y\}).$$

Mamy tu warunkowe istnienie sumy obiektów będących ingrediensami jednego, trzeciego obiektu. Warunek ten dodajemy do minimalnej ekstensjonalnej mereologii, w której – jak pamiętamy – mamy funkcyjność relacji $\mathbf{sum}$. A zatem jedyną mereologiczną sumę obiektów x i y możemy oznaczyć przez $x \sqcup y$.

Minimalną domkniętą mereologię (*Minimal Closure Mereology*) badano w (Simons 1987; Casati i Varzi 1999). Tam jednak przyjęto wariant aksjomatu (w$\exists\sqcup$), w którym warunek ‘$z\,\mathbf{sum}\{x,y\}$’ zastąpiono równoważnym z nim warunkiem: $\forall_{u\in U}(u \circ z \ \Leftrightarrow \ (u \circ x \ \vee u \circ y))$. Tę równoważność otrzymujemy z ogólnej tezy ($\$_\circ$) wziętej dla $Z = \{x,y\}$.

5.4. Mereologia Grzegorczyka. Swój system mereologii Grzegorczyk przedstawił w artykule (1955). W skrócie można powiedzieć, że jego teoria tym różni się od mereologii Leśniewskiego, że w tej pierwszej postuluje się istnienie sum mereologicznych tylko dla skończonej ilości obiektów, w tej drugiej zaś dla dowolnej ich ilości, nawet gdy jest ich nieskończenie wiele. Przedstawimy teorię Grzegorczyka w uproszczonej postaci, stosując przyjętą przez nas terminologię. To ujęcie jest jednak równoważne z oryginalnym ujęciem Grzegorczyka (Pietruszczak 2013: 114–120). Oba ujęcia są elementarne (w sensie punktu 4.5).

Możemy przyjąć, że mereologia Grzegorczyka jest teorią ostrych częściowych porządków[10], w której zamiast aksjomatu (SSP) przyjęto jego mocniejszą wersję w postaci zasady superuzupełniania:

$$(\mathrm{SSP+}) \quad \forall_{x,y\in U}\Big(x \not\sqsubseteq y \Longrightarrow \exists_{z\in U}\big(z \sqsubseteq x \wedge z \wr y \wedge \forall_{u\in U}(u \sqsubseteq x \wedge u \wr y \Rightarrow u \sqsubseteq z)\big)\Big).$$

Oczywiście, to superuzupełnianie pociąga zwykłe (SSP). Udowodniono, że pociąga ono także zasadę (‡), tj. relacje $\mathbf{sum}$ i $\mathbf{sup}$ pokrywają się na zbiorach niepustych (zob. Pietruszczak 2013: 101).

[10] W oryginale jako pierwotną przyjęto relację $\sqsubseteq$, czyli są to częściowe porządki.

Ponadto, w rozważanej teorii mamy funkcyjność relacji **sum** wyrażoną przez (f_{sum}). Aksjomat (SSP+) także jest związany z relacją **sum**. Mówi, że dla dowolnych obiektów x i y takich, że x nie jest ingrediensem y-a istnieje dokładnie jedna suma mereologiczna wszystkich ingrediensów x-a, które są zewnętrzne względem y-a, czyli suma mereologiczna zbioru $\{u \in U : u \sqsubseteq x \wedge u \wr y\}$ (zob. Pietruszczak 2013, 96). Tę sumę można więc uznać za mereologiczną różnicą x-a i y-a, którą oznaczamy przez $x - y$.

Grzegorczyk przyjął także aksjomat, który jest równoważny z założeniem bezwarunkowego istnienia sumy mereologicznej dwóch dowolnych obiektów:

($\exists\sqcup$) $$\forall_{x,y \in U} \exists_{z \in U}\, z \,\mathsf{sum}\, \{x, y\}.$$

Ponieważ w rozważanej teorii mamy funkcyjność relacji **sum**, więc jedyną mereologiczną sumę obiektów x i y możemy oznaczyć przez $x \sqcup y$. Stąd otrzymujemy, że także mamy sumy mereologiczne dowolnego niepustego skończonego podzbioru uniwersum. Po prostu, stosując ($\exists\sqcup$), sumujemy kolejne elementy danego niepustego skończonego podzbioru uniwersum.

Grzegorczyk przyjął jeszcze kolejny aksjomat, który jest równoważny z zasadą (w$\exists\sqcap$) z minimalnej ekstensjonalnej mereologii. Jak jednak pokazano, przyjęcie tego aksjomatu jest zbędne. Mając operację mereologicznej różnicy, w następujący sposób możemy otrzymać mereologiczny produkt dowolnych zachodzących na siebie obiektów x i y (zob. Pietruszczak 2013: 99, 116):

$$x \sqcap y \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x, & \text{gdy } x \sqsubseteq y \\ y, & \text{gdy } y \sqsubseteq x \\ x - (x - y), & \text{gdy } x \between y \end{cases}$$

Z powyżej przyjętych aksjomatów nie uzyskamy istnienia jedności. A zatem dopuszczamy takie struktury, w których nie ma obiektu obejmującego wszystkie pozostałe elementy, jako jego części. Klasę modeli mereologii Grzegorczyka porównano z pewną klasą krat z zerem, które w (Pietruszczak 2013: 256–266; 2020: 257–267) nazwano *kratami Grzegorczyka*. Udowodniono, że ta klasa modeli mereologii Grzegorczyka pokrywa się z klasą struktur, które powstają z niezdegenerowanych krat Grzegorczyka po usunięciu z nich zera. Udowodniono, że również odwrotnie, z każdego modelu mereologii Grzegorczyka po dodaniu do niego elementu zerowego otrzymamy niezdegenerowaną kratę Grzegorczyka (Pietruszczak 2013: 120–124; 2020: 114–117).

W klasie modeli mereologii Grzegorczyka można wyróżnić podklasę struktur z jednością. Odpowiada jej teoria, która powstaje przez dodanie aksjomatu postulującego istnienie jedności:

$$\exists_{x \in U} \forall_{u \in U}\, u \sqsubseteq x.$$

Tak postulowaną jedność oznaczmy przez **1**. Wiemy, że jest ona sumą mereologiczną całego uniwersum, tj. mamy **1 sum** *U*. Skoro we wszystkich modelach mereologii Grzegorczyka mamy mereologiczną różnicę, więc w modelach z jednością mamy także mereologiczne dopełnienie obiektu różnego od **1**. Mianowicie dla dowolnego takie x kładziemy: $-x \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{1} - x$.

Klasę modeli mereologii Grzegorczyka z jednością porównano z klasą krat Grzegorczyka z jednością. Udowodniono jednak, że ta ostatnia pokrywa się klasą krat boolowskich – odpowiedników algebr Boole'a (Pietruszczak 2013: 264–266; 2020: 265–267).[11] Udowodniono, że klasa modeli mereologii Grzegorczyka z jednością pokrywa się z klasą struktur, które powstają z niezdegenerowanych krat boolowskich po usunięciu z nich zera. Udowodniono, że również odwrotnie, z każdego modelu z jednością po dodaniu do niego zera otrzymamy niezdegenerowaną kratę boolowską (Pietruszczak 2013: 120 –126; 2020: 118–119).

Istnieje zasadnicza różnica pomiędzy modelami bez jedności, a modelami z jednością. Pokazano, że jeśli dana struktura nie ma jedności, to nie możne jej mieć, tj. nie można dodać do niej takiego elementu, który w rozszerzonej strukturze byłby jednością. Istotnie, dla dowolnych $x, y \in U$ mamy $x \sqcup y \in U$. Zatem jeśli do zbioru U dołączymy jakiś dodatkowy element *1*, który miałby być jednością, to dla x nie znajdziemy w U takiego y, aby $x \sqcup y = 1$, czyli x nie może mieć dopełnienia w tak rozszerzonej strukturze (por. Pietruszczak 2013: 266; 2020: 266–267).

Oczywiście, wszystkie skończone mereologiczne struktury Grzegorczyka mają jedność, która jest sumą całego uniwersum.

5.5. Klasyczne struktury mereologiczne. Jak już we wstępie wspomnieliśmy, mereologię Leśniewskiego można przełożyć na język teorii struktur relacyjnych. W tej postaci przyjmujemy dla niej aksjomaty ostrych częściowych porządków, zakładamy funkcyjność relacji **sum** w postaci ($\mathrm{f}_{\mathsf{sum}}$) oraz przyjmujemy aksjomat postulujący istnienie sumy mereologicznej dla dowolnego niepustego podzbioru uniwersum:

$$(\exists\mathsf{sum}) \qquad \forall_{Z\in\mathcal{P}(U)}(Z \neq \emptyset \implies \exists_{x\in U}\, x \,\mathsf{sum}\, Z).$$

Istnienie sumy mereologicznej możemy założyć tylko dla zbiorów niepustych.

Struktury, w których obowiązuje ($\exists$**sum**), nazywać będziemy *klasycznymi strukturami mereologicznymi*, a ich teorię *klasyczną mereologią*. W każdej klasycznej strukturze mamy jedność **1**, **1 sum** *U*, skoro uniwersum *U* ma sumę. Ponadto, wszystkie rozpatrywane dotąd zasady są tezami klasycznej mereologii, a więc relacje **sum** i **sup** pokrywają się na zbiorach niepustych (por. Pietruszczak 2000, 2013, 2018, 2020). Wiadomo również, że klasyczna mereologia nie jest elementarnie aksjomatyzowalna (Pietruszczak 2000: 98).

Tarski (1929, 1956) pokazał, że klasyczna mereologia odpowiada teorii zupełnych niezdegenerowanych krat boolowskich, tzn. takich, gdzie każdy podzbiór uniwersum ma kres górny. Mianowicie, klasa wszystkich klasycznych

[11] Każda krata boolowska (algebra Boole'a) ma jedność i zero.

struktur mereologicznych pokrywa się z klasą struktur, które powstają z zupełnych i niezdegenerowanych krat boolowskich po usunięciu z nich zera. Odwrotnie, z każdej klasycznej struktury mereologicznej po dodaniu do niej zera otrzymamy niezdegenerowaną zupełną kratę boolowską (por. Pietruszczak 2000, 2013, 2018, 2020).

Jedyna różnica zachodząca pomiędzy klasyczną mereologią Leśniewskiego a mereologią Grzegorczyka z jednością jest taka, że ta pierwsza postuluje istnienie sumy mereologicznej również dla niepustych zbiorów nieskończonych. To pokazuje, że skończone mereologiczne struktury Grzegorczyka są tymi samymi, co skończone klasyczne struktury mereologiczne.

6. Problem z przechodniością relacji *bycia częścią*

W punkcie 2.1 wspomnieliśmy już o problematyczności przechodniości pojęcia *bycia częścią*. W książce *Semantyka* John Lyons (1984) przyrównał fakt, że obiekt x jest częścią obiektu y do semantycznej poprawności zdania postaci 'y ma x-a'. Przykładowo, semantycznie poprawne są zdania:

Orkiestra (*z*) *ma sekcję pierwszych skrzypiec* (*x*). tj. $x \sqsubset z$
Orkiestra ma skrzypka (*y*). tj. $y \sqsubset z$
Skrzypek ma serce (*u*). tj. $u \sqsubset y$
Skrzypek ma ramię (*v*). tj. $v \sqsubset y$

Nie są zaś semantycznie poprawne zdania:

Orkiestra ma ramię skrzypka. tj.$\neg\, v \sqsubset z$
Sekcja pierwszych skrzypiec ma serce skrzypka. tj. $\neg\, u \sqsubset x$

W przypadkach, gdy sporna jest przechodniość relacji *bycia częścią*, proponujemy przyjąć, że $\sqsubset$ jest acykliczna, tj. spełnia ($\mathrm{ac}_{\sqsubset}$), oraz że jest *lokalnie przechodnia* w następującym sensie. Jeśli obiekt x jest częścią obiektu y, to przechodniość ma obowiązywać na dowolnej ścieżce prowadzącej od x-a do y-a, i która złożona jest z obiektów będących częściami kolejnych występujących na tej ścieżce. Innymi słowy, jeśli mamy $x \sqsubset y$ i $x \sqsubset z_1 \sqsubset z_2 \sqsubset \cdots \sqsubset z_n \sqsubset y$, to relacja $\sqsubset$ jest przechodnia w zbiorze $\{x, z_1, \ldots, z_n, y\}$. Na mocy acykliczności relacji $\sqsubset$, żadna taka ścieżka nie jest zamknięta, tj. nie prowadzi od danego obiektu do niego samego.

Przykładowo dla: x – palec prawej dłoni danego skrzypka, y – ten skrzypek, z_1 – prawa dłoń tego skrzypka, z_2 – prawa ręka tego skrzypka, mamy: $x \sqsubset y$, $x \sqsubset z_1 \sqsubset z_2 \sqsubset y$ oraz $x \sqsubset z_2$ i $z_1 \sqsubset y$. Z drugiej strony zaś, dla: x – skrzypek sekcji pierwszych skrzypiec, y – orkiestra, w której gra ten skrzypek, z_1 – sekcja pierwszych skrzypiec w tej orkiestrze, z_2 – sekcja instrumentów smyczkowych w tej orkiestrze, mamy: $x \sqsubset y$, $x \sqsubset z_1 \sqsubset z_2 \sqsubset y$ oraz $x \sqsubset z_2$ i $z_1 \sqsubset y$. Orkiestra jest systemem części, które tworzą bezpośredni funkcjonalny wkład w całość. W tym systemie muzycy i dyrygent są rozłącznymi elementami, które są minimalne ze względu na relację *bycia częścią*. Każdy z członków danej orkiestry także jest takim systemem. Podobnie, nawiązując do przykładu Reschera, komórka także jest takim systemem części. W śród tych części jest jej jądro.

Jeśli nie zakładamy przechodniości relacji *bycia częścią*, to obok jej acykliczności i lokalnej przechodniości zakładamy także inne aksjomaty, a wśród dotyczący maksymalnie domkniętych zbiorów ze względu na tę relację. Przy założonej przechodniości relacji *bycia częścią*, całe uniwersum rozważań jest jedynym zbiorem maksymalnie domkniętym ze względu na tę relację.

W (Pietruszczak 2013, rozdz. IV; 2020, rozdz. 4) podano różne możliwe rozwiązania w tworzeniu teorii części bez założonej przechodniości, a z założoną lokalną przechodniością.

Bibliografia

Casati, R., Varzi, A.C. (1999), *Parts and Places*, The MIT Press.

Gruszczyński, R., Pietruszczak, A. (2008), *Full development of Tarski's geometry of solids*, „The Bulletin of Symbolic Logic" 14, s. 481–540.

Gruszczyński, R., Pietruszczak, A. (2009), *Space, points and mereology. On foundations of point-free Euclidean geometry*, „Logic and Logical Philosophy" 18, s. 145–188.

Gruszczyński, R., Pietruszczak, A. (2018a), *Study in Grzegorczyk point-free topology. Part I: Separation and Grzegorczyk structures*, „Studia Logica" 106, s. 1197–1238.

Gruszczyński, R., Pietruszczak, A. (2018b), *A comparison of two systems of point-free topology*, „Bulletin of the Section of Logic" 47, s. 187–200.

Gruszczyński, R., Pietruszczak, A. (2019), *Study in Grzegorczyk point-free topology. Part II: Spaces of points*, „Studia Logica" 107, s. 809–843.

Grzegorczyk, A. (1955), *The system of Leśniewski in relation to contemporary logical reserch*, Studia Logica III, s. 77–95.

Grzegorczyk, A. (1960), *Axiomatizability of geometry without points*, „Synthese" 12, s. 228–235.

Leonard, H.S., Goodman, N. (1940), *The calculus of individuals and its uses*, „Journal of Symbolic Logic" 5, s. 45–55.

Leśniewski, S. (1916), *Podstawy ogólnej teorii mnogości. I*, w: *Prace Polskiego Koła Naukowego w Moskwie*, Moskwa, s. 256–294. Przedruk w: „Filozofia Nauki" VII (1999), s. 173–208.

Leśniewski, S. (1927), *O podstawach matematyki*, „Przegląd Filozoficzny" XXX, s. 164–206.

Leśniewski, S. (1928), *O podstawach matematyki*, „Przegląd Filozoficzny" XXXI, s. 261–291.

Leśniewski, S. (1929), *O podstawach matematyki*, „Przegląd Filozoficzny" XXXII, s. 60–101.

Leśniewski, S. (1930), *O podstawach matematyki*, „Przegląd Filozoficzny” XXXIII, s. 77–105.

Leśniewski, S. (1931), *O podstawach matematyki*, „Przegląd Filozoficzny” XXXIV, s. 142–170.

Lyons, J. (1984), *Semantyka*, tom 1, Warszawa: PWN.

Pietruszczak, A. (2000), *Metamereologia*, Toruń: Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika.

Pietruszczak, A. (2013), *Podstawy teorii części*, Toruń: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika.

Pietruszczak, A. (2018), *Metamereology*, Toruń: The Nicolaus Copernicus University Scientific House.

Pietruszczak, A. (2020), *Foundations of the Theory of Parthood. A Study of Mereology*, Trends in Logic, vol. 54, Springer International Publishing.

Rescher, N. (1955), *Axioms for the part relation*, „Philosophical Studies” 6, s. 8–11.

Simons, P. (1987), *Parts: A Study in Ontology*, Oxford : Oxford University Press.

Tarski, A. (1929), *Les fondements de la géométrie des corps*, w: *Księga Pamiątkowa Pierwszego Zjazdu Matematycznego*, Annales de la Societé Polonaise de Mathématique, Kraków, s. 29–33.

Tarski, A. (1956), *Fundations of the geometry of solids*, w: H. Woodger (red.), *Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938*, Oxford, s. 24–29.

Whitehead, A.N., Russell, B. (1910–1913), *Principia Mathematica*, Cambridge University Press.

Whitehead, A.N. (1929), *Process and Reality*, New York: Macmillan.

Katedra Logiki, Instytut Filozofii
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
pietrusz@umk.pl